سوالات ریاضیات مقدماتی

۱. مقدار $\log_{۵}^{۶۲۶}$ بین کدام دو مقدار قرار دارد؟

۱) $\frac{۱}{۵} < A < \frac{۱}{۴}$ ۲) $۵ < A < ۶$ ۳) $۴ < A < ۵$ ۴) $-۵ < A < -۴$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

راه اول: $A = \log_{۵} ۶۲۶, ۶۲۶ = ۶۲۵ + ۱ = ۵^{۴} + ۱ \Rightarrow ۵^{۴} < ۶۲۶ < ۵^{۵}$

$\Rightarrow \log_{۵} ۵^{۴} < \log_{۵} ۶۲۶ < \log_{۵} ۵^{۵} \Rightarrow ۴\log_{۵} ۵ < A < ۵\log_{۵} ۵ \Rightarrow ۴ < A < ۵$

راه دوم: $A = \log_{۵} ۶۲۶ \Rightarrow ۵^{A} = ۶۲۶ , ۵^{۴} < ۶۲۶ < ۵^{۵} \Rightarrow ۵^{۴} < ۵^{A} < ۵^{۵} \Rightarrow ۴ < A < ۵$

۲. به عدد ۳۰۱ چند واحد بیفزاییم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۸ برابر ۳ گردد؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۱۲ ۳) ۲۱۱ ۴) ۳۰۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$\log_{۸}(x + ۳۰۱) = ۳ \Rightarrow x + ۳۰۱ = ۸^{۳} = ۵۱۲ \Rightarrow x = ۵۱۲ - ۳۰۱ = ۲۱۱$

۳. معادله $۹^{x} + ۳^{x} - ۲ = ۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$۳^{x} = a > ۰ \Rightarrow ۹^{x} = (۳^{۲})^{x} = (۳^{x})^{۲} = a^{۲} \Rightarrow a^{۲} + a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \Rightarrow ۳^{x} = ۱ \Rightarrow x = ۰ \\ a = -۲ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد.

۴. اگر $\log ۲ = m$ و $\log ۳ = n$ آنگاه $\log ۳۷۵$ کدام است؟

۱) $m - n - ۳$ ۲) $m + n - ۲$ ۳) $۳m - n + ۳$ ۴) $۳ + n - ۳m$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :

$\log ۳۷۵ = \log ۱۲۵ \times ۳ = \log ۵^{۳} \times ۳ = ۳\log ۵ + \log ۳ = ۳(۱ - \log ۲) + \log ۳ = ۳(۱ - m) + n$

۱. اگر $\log ۲=۰/۳۰۱$ باشد در عدد $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶۰}$ چند صفر متوالی بعد از ممیز وجود دارد؟

۱) ۱۷   ۲) ۱۸   ۳) ۱۹   ۴) ۲۰

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶۰}=A \Rightarrow \log\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶۰}=\log A \Rightarrow ۶۰\log\frac{۱}{۲}=\log A \Rightarrow -۶۰\log ۲=\log A$$

$$\log A=-۶۰(۰/۳۰۱)=-۱۸/۰۶ \to A=۱۰^{-۱۸/۰۶}$$

$$۱۰^{-۱۹}<۱۰^{-۱۸/۰۶}<۱۰^{-۱۸}$$

لذا تعداد صفرهای بعد از ممیز ۱۸ تاست.

۲. اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع $f(x)=\log\left(ax+\sqrt{۹x^۲+۱}\right)$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱ و ۳-   ۳) ۳- و ۳   ۴) ۱ و ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=\log\left(ax+\sqrt{۹x^۲+۱}\right)$$

چون مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع است، لذا تابع باید فرد باشد. یعنی باید شرط $f(x)+f(-x)=۰$ برقرار باشد.

$$f(-x)=\log\left(-ax+\sqrt{۹x^۲+۱}\right)$$

$$f(x)+f(-x)=\log\left(ax+\sqrt{۹x^۲+۱}\right)+\log\left(-ax+\sqrt{۹x^۲+۱}\right)$$

$$=\log\left(\sqrt{۹x^۲+۱}+ax\right)\left(\sqrt{۹x^۲+۱}-ax\right)=\log\left(۹x^۲+۱-a^۲x^۲\right)=۰=\log ۱$$

$$\Rightarrow ۹x^۲+۱-a^۲x^۲=۱ \Rightarrow ۹x^۲=a^۲x^۲ \Rightarrow ۹=a^۲ \Rightarrow a=\pm ۳$$

۳. کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y=x^۲+۱$ ۲) $y^۲=x^۲+۱$ ۳) $y^۳=x^۳+۱$ ۴) $y=\sin x$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : تابع گزینه‌ی (۱) زوج و لذا یک به یک نیست.

تابع گزینه‌ی (۲) نیز زوج است و یک به یک نیست.

تابع گزینه‌ی (۴) پیوسته و متناوب است، لذا یک به یک نیست.

۴. کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y=x^{۳}+۱$ ۲) $y=x^{۳}-x$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۱ \\ -۲x & x<۱ \end{cases}$ ۴) $y=x^{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : تابع گزینه‌ی (۱) تابعی است اکیداً صعودی و لذا یک به یک است. (شکل (۱))

تابع گزینه‌ی (۲) تابعی است غیر یک به یک، زیرا $f(۱)=f(-۱)=۰$ ، این تابع غیر یکنواست. (شکل (۲))

تابع گزینه‌ی (۳) با استفاده از آزمون خط موازی محور **x**ها غیر یک به یک است.

نکته : در تابع دو ضابطه‌ای اگر برد ضابطه‌ها با هم اشتراک داشته باشند تابع یک به یک نیست.

تابع گزینه‌ی (۴) غیر یک به یک است، زیرا $f(۱)=f(-۱)=۱$ ضمناً تابع زوج است. پس غیر یک به یک است.

نکته : تابع زوج روی دامنه خود تابعی است غیر یک به یک است، مگر آن که $f=\{(۰,a)\}$ باشد.

۵. وارون تابع $f:R\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۳$ کدام است؟

۱) $۲x+۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}x+۳$ ۳) $۲x-۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : $y=۲x+۳ \to y-۳=۲x \to x=\frac{y-۳}{۲} \to f^{-۱}=\frac{x-۳}{۲}$

۶. حاصل عبارت $۲\cos\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۴\cot\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}-۱$ ۲) $-\sqrt{۲}+۱$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$۲\cos\left(-\frac{۱۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۴\cot\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)=۲\cos\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)-۴\cot\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right)$$

$$=۲\cos\left(\frac{۱۲۰\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۱۲۰\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}\right)-۴\cot\left(\frac{۱۲۰\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}\right)$$

$$=۲\cos\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)+۳\tan\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)-۴\cot\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)=۲\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+۳(۱)-۴(۱)=-\sqrt{۲}-۱$$

۷. اگر $x=\frac{۲}{\sin\alpha}$ و $y=۳\cot\alpha$ مقدار $۹x^{۲}$ کدام است؟

۱) $۴+۹y^{۲}$ ۲) $۹+۴y^{۲}$ ۳) $۳۶-۴y^{۲}$ ۴) $۳۶+۴y^{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :

$$۹x^{۲}=۹\left(\frac{۴}{\sin^{۲}\alpha}\right)=۳۶\left(\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\right)=۳۶\left(۱+\cot^{۲}\alpha\right)=۳۶\left(۱+\frac{y^{۲}}{۹}\right)=۳۶+۴y^{۲}$$

۸. اگر $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{1+\tan^2 x}-\frac{1}{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{\cos x}$ ۳) $\frac{-2}{\cos x}$ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\sqrt{1+\tan^2 x}-\frac{1}{\cos x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}-\frac{1}{\cos x}=\left|\frac{1}{\cos x}\right|-\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}=0$$

چون $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi \rightarrow \cos x>0$ (در ناحیه‌ی چهارم COSX مثبت است)

۹. حاصل $\frac{\sin 3a\cos a}{\sin a}-\cos 3a$ برابر کدام است؟

۱) $-\cos a$ ۲) $\cot ga$ ۳) $2\sin a$ ۴) $2\cos a$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\frac{\sin 3a\cos a-\cos 3a\sin a}{\sin a}=\frac{\sin(3a-a)}{\sin a}=\frac{\sin 2a}{\sin a}=\frac{2\sin a\cos a}{\sin a}=2\cos a$$

۱۰. خلاصه شده $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\sin 2\alpha$ ۲) $\sin 2\alpha$ ۳) $\cos 2\alpha$ ۴) ۰

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$=(\cos\alpha)(-\sin\alpha)-(\sin\alpha)(\cos\alpha)=-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin 2\alpha$$

۱۱. تابع معکوس تابع $y=x^3+3x^2+3x+2$ کدام است؟

۱) $y=1-\sqrt[3]{x-1}$ ۲) $y=1-\sqrt[3]{x+1}$ ۳) $y=-1+\sqrt[3]{x-1}$ ۴) $y=-1-\sqrt[3]{x+1}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$y=x^3+3x^2+3x+2 \rightarrow y=(x+1)^3+1 \rightarrow y-1=(x+1)^3 \Rightarrow$$

$$x=-1+\sqrt[3]{y-1} \rightarrow f^{-1}(x)=-1+\sqrt[3]{x-1}$$

۱۲. اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=x-۴$ مقدار $\frac{(fog)_{(۲)}}{(gof)_{(-۱)}}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=۲x+۳\ ,\ g(x)=x-۴ \Rightarrow g(۲)=۲-۴=-۲$$

$$(fog)(۲)=f\left(g(۲)\right)=f(-۲)=۲(-۲)+۳=-۴+۳=-۱$$

$$gof(-۱)=g\left(f(-۱)\right)=g(-۲+۳)=g(۱)=۱-۴=-۳ \Rightarrow \frac{fog(۲)}{gof(-۱)}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳. حدود m برای آن که معادله درجه دوم $x^۲-x+m=۰$ دارای دو ریشه متمایز مثبت کدام است؟

۱) $m<\frac{۱}{۴}$ ۲) $۰<m<\frac{۱}{۴}$

۳) $m>۰$ ۴) $m>\frac{۱}{۴}$ یا $m<۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : برای آن که معادله‌ی درجه دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد، لازم است که $\Delta>۰$ و همچنین مجموع و حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله هر دو مثبت باشند.

۱۴. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $۲-\sqrt{۴-a}\ ,\ ۲+\sqrt{۴-a}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۴x+a=۰$ ۲) $x^۲+ax-۴=۰$ ۳) $x^۲+۴x-a=۰$ ۴) $x^۲-ax+۴=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» :

$$\begin{cases} S=x_۱+x_۲=۴ \\ P=x_۱.x_۲=\left(۲+\sqrt{۴-a}\right)\left(۲-\sqrt{۴-a}\right)=a \Rightarrow x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۴x+a=۰ \end{cases}$$

۱۵. اگر x'', x' ریشه های معادله $x^۲-۲\sqrt{۳}x+۲=۰$ باشند، مقدار عبارت $x'\sqrt{x''}+x''\sqrt{x'}$ برابراست با :

۱) $۲\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\right)$ ۲) $۲\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ ۳) $\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$ ۴) $۲\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :

$$A=x'\sqrt{x''}+x''\sqrt{x'} \ \rightarrow \ A^۲=x'^۲x''+x''^۲x'+۲x'x''\sqrt{x'x''}$$

$$A^۲=x'x''\left(x'+x''\right)+۲x'x''\sqrt{x'x''}$$

$$A^۲=۲\left(۲\sqrt{۳}\right)+۲(۲)\sqrt{۲}=۴\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\right) \ \rightarrow \ A=۲\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

۱۶. در معادله درجه دوم، $x^{۲}+۲x-۴=۰$ حاصل $x_۱^{۳}-۲x_۲^{۲}+۴x_۲$ کدام است؟ ($x_۲ , x_۱$ ریشه‌های معادله درجه دوم هستند.)

۱) ۱۶- ۲) صفر ۳) ۱۶ ۴) ۳۲-

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا:

$$x_۱^{۲}+۲x_۱-۴=۰ \rightarrow x_۱^{۲}+۲x_۱=۴$$

ضرب در $x_۱$ $\rightarrow x_۱^{۳}+۲x_۱^{۲}=۴x_۱ \rightarrow x_۱^{۳}=۴x_۱-۲x_۱^{۲}$ پس :

با جایگذاری در خواسته مسئله داریم:

$$x_۱^{۳}-۲x_۲^{۲}+۴x_۲=\left(۴x_۱-۲x_۱^{۲}\right)-۲x_۲^{۲}+۴x_۲=-۲\left(x_۱^{۲}+x_۲^{۲}\right)+۴\left(x_۱+x_۲\right)$$

$$=-۲\left(s^{۲}-۲p\right)+۴(s)=-۲\left((-۲)^{۲}+۸\right)+۴(-۲)=-۲۴-۸=-۳۲$$

۱۷. معادله درجه دومی که هر یک از ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله درجه دوم $x^{۲}-\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\right)x+\sqrt{۶}=۰$ باشند، کدام است؟

۱) $x^{۲}-۵x+۶=۰$ ۲) $x^{۲}+۵x+\sqrt{۶}=۰$

۳) $x^{۲}+۵x+۶=۰$ ۴) $x^{۲}+۵x+۴=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : S و P معادله جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$S_{\text{جدید}}=x'^{۲}+x''^{۲}=\left(x'+x''\right)^{۲}-۲x'x''=\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\right)^{۲}-۲\sqrt{۶}=۳+۲+۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۶}=۵$$

$$P_{\text{جدید}}=x'^{۲}.x''^{۲}=\left(x'.x''\right)^{۲}=\left(\sqrt{۶}\right)^{۲}=۶$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \rightarrow x^{۲}-۵x+۶=۰$$

۱۸. در مورد معادله‌ی $\left(\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right)^{۲}+\left(\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right)-۶=۰$ کدام گزینه درست است؟

۱)ریشه‌ی مضاعف دارد. ۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۳) چهار ریشه دارد. ۴) دو ریشه دارد.

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : کافی است تغییر متغیر $\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}=y$ را انجام دهیم، داریم:

$$\Rightarrow y^{۲}+y-۶=۰ \Rightarrow (y+۳)(y-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=-۳ \\ y=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}=-۳ & \text{غ‌ق‌ق} \\ \frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}=۲ \end{cases}$$

دقت کنید که $۰\le\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}<۱$ ، بنابراین معادله‌ی موردنظر ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۱۹. در کدام یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

۱) $y^3+3y^2+3y+x^3+x=0$

۲) $y^2+2y=x-1$

۳) $|x|+|y-1|=1$

۴) $|y|\sqrt[3]{x}=1$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

در گزینه‌ی (۱) که به صورت $y^3+3y^2+3y+1+x^3+x-1=0$ است (۱ و ۱ـ اضافه شده است) با استفاده از اتحاد داریم.

$(y+1)^3=1-x-x^3 \Rightarrow y+1=\sqrt[3]{1-x-x^3} \Rightarrow y=-1+\sqrt[3]{1-x-x^3}$ تابع است

گزینه‌ی (۲) به صورت $(y+1)^2=x$ یا $y+1=\pm\sqrt{x}$ است که تابع نیست.

گزینه‌ی (۳) یک مربع است. مثلاً برای $x=0$ برای y دو جواب خواهید داشت. و برای گزینه‌ی (۴) هم با انتخاب $x=1$ دو جواب برای y دارید.

۲۰. رابطه $\{(x,y)|x^3+y^2-2y=0\}$ در مجموعه اعداد حقیقی داده شده است دامنه‌ی این رابطه برابر است با :

۱) $[1,\infty)$

۲) $(-\infty,1)$

۳) $(-\infty,1]$

۴) $(1,\infty)$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$x^3+y^2-2y=0 \Rightarrow (y-1)^2-1+x^3=0$

$\Rightarrow (y-1)^2=-x^3+1 \Rightarrow y-1=\pm\sqrt{1-x^3} \Rightarrow 1-x^3\geq 0 \Rightarrow x^3\leq 1 \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow D_f=(-\infty,1]$

۲۱. اگر $g(x)=1+\sqrt{x}$ ، $f(x)=x^2$ و $x>0$ آن گاه ضابطه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $x-1$

۲) $x+1$

۳) x^2-1

۴) x^2+1

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : پس ابتدا fog را تشکیل داده و سپس معکوس آن را محاسبه می‌کنیم.

$(fog)_{(x)}=1+\sqrt{x^2}=1+|x| \underset{=}{\underline{x>0}} 1+x$

لذا معکوس $y=x+1$ برابر است با $x-1$ پس :

$g^{-1}of^{-1}=x-1$

۲۲. اگر $f(x)=۲x+۲a$ و $g(x)=x^۲+bx+c$ و $(fog)_{(x)}=۲x^۲+x+۱$ آنگاه $a+b+c$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۳-

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} f(x)=۲x+۲a \\ g(x)=x^۲+bx+c \\ (fog)(x)=۲x^۲+x+۱ \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=۲g(x)+۲a=۲(x^۲+bx+c)+۲a \Rightarrow$$

$$۲x^۲+۲bx+۲c+۲a=۲x^۲+x+۱$$

تساوی فوق باید برای تمام مقادیر x برقرار باشد، لذا باید ضریب $x^۲$ و ضریب x و اعداد ثابت در دو طرف تساوی یکسان باشند.

$$\begin{cases} ۲b=۱ & \text{ضریب } x \\ ۲c+۲a=۱ & \text{عدد ثابت} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \\ \Rightarrow a+c=\frac{۱}{۲} \end{matrix} \Rightarrow a+c+b=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

۲۳. اگر $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، دامنه تعریف $(gof)_{(x)}$ کدام است؟

۱) $\left[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ ۴) $[-۱,۱)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=۴x^۲-۱ \Rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow ۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq f(x)\leq ۱$$

$$-۱\leq ۴x^۲-۱\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq ۴x^۲\leq ۲ \Rightarrow x^۲\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leq x\leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۴. تابع با کدام ضابطه فرد است؟

۱) $y=\frac{۲^{۲x}+۱}{۲^x}$ ۲) $y=\frac{۲^{۲x}-۱}{۲^x}$ ۳) $y=x\times ۲^x$ ۴) $y=x\log x$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : در گزینه‌ی (۴)، دامنه‌ی تابع $x>۰$ ، دامنه‌ی تابع غیر متقارن است پس نه فرد و نه زوج است. در گزینه‌های (۱) شرط لازم فرد بودن یعنی $f(۰)=۰$ برقرار نیست. در گزینه‌های (۲) و (۳) باید $f(۱)+f(-۱)=۰$ باشد که تنها در گزینه‌ی (۲) برقرار است.

۲۵. کدام تابع زیر با تابع $y=x+1$ برابر است؟

۱) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ۲) $y=1+\sqrt{x^2}$ ۳) $y=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$ ۴) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : دامنه‌ی تابع R است پس گزینه‌ی (۱) قابل قبول نیست زیر دامنه‌ی آن $R-\{1\}$ است. گزینه‌های (۲) و (۴) نیز با تابع $y=x+1$ برابر نیستند زیرا:

$(2): y=1+|x|$

$(4): y=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

در (۳)
$$y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1}=x+1\ ,\quad x^2+1\neq 0$$

۲۶. اگر f و h توابعی معکوس پذیر و $h(x)=-3f(2x)$ آنگاه $h^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3}f^{-1}(2x)$ ۲) $-3f^{-1}(2x)$ ۳) $\dfrac{1}{2}f^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$ ۴) $\dfrac{1}{2}f^{-1}\left(-\dfrac{x}{3}\right)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$h(x)=-3f(2x)=y\Rightarrow\begin{cases} y=h(x) \xrightarrow{\text{از طرفین }\ {}^{-1}} h^{-1}(y)=x \quad (1)\\ y=-3f(2x)\to\dfrac{-y}{3}=f(2x)\xrightarrow{\text{از طرفین }\ {}^{-1}} f^{-1}\left(-\dfrac{y}{3}\right)=2x\to x=\dfrac{1}{2}f^{-1}\left(-\dfrac{y}{3}\right)(2)\end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم.

$$h^{-1}(y)=\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{-y}{3}\right)\ \to\ h^{-1}(x)=\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{-x}{3}\right)$$

۲۷. در صورتی که باقی مانده تقسیم ax^6+bx^3+1 بر x^3+1 برابر ۱ باشد باقیمانده تقسیم $x^2+ax+2b$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=a(x^3)^2+b(x^3)+1=a(-1)^2+b(-1)+1=1\ \to\ a-b=0$$

$$f(-2)=4-2a+2b=4-2(a-b)=4$$

$$x^3-x=0\ \to\ x^3=x$$

۲۸. اگر $f(x)$ بر $1-2x^2$ بخش‌پذیر باشند $f(\sin x)$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $\sin^2 x$ ۲) $\sin 2x$ ۳) $\cos^2 x$ ۴) $\cos 2x$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\left(1-2x^2\right)Q(x)$$

$$f(\sin x)=\left(1-2\sin^2 x\right)Q(\sin x)=(\cos 2x)Q'(x)$$

یادآوری : $1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$

۲۹. حاصل عبارت $\cos\left(\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

فرض کنید $\operatorname{Arc}\sin\frac{4}{5}=\alpha$ پس : $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. می‌خواهیم $\cos\alpha$ را بیابیم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha\frac{3}{5}$$

توجه کنید α در ناحیه اول است و $\cos\alpha$ مثبت است.

یادآوری: $\operatorname{Arc}\sin(-x)=-\operatorname{Arc}\sin x \ , \ -1\le x\le 1 \ , \ \cos(-\alpha)=\cos\alpha \ , \ \alpha\in R$

۳۰. کدام یک از روابط a و b برقرار باشد تا دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=\cos ax\cos bx-\sin ax.\sin bx$ برابر π باشد؟

۱) $a-b=1$ ۲) $a-b=2$ ۳) $a+b=1$ ۴) $a+b=2$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

با استفاده ازدستور مثلثاتی $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ رابطه را ساده می‌کنیم و سپس دوره‌ی تناوب را می‌یابیم.

$$f(x)=\cos(a+b)x \rightarrow T=\frac{2\pi}{a+b}=\pi \rightarrow a+b=2$$

۳۱. خارج قسمت تقسیم عبارت $(x-1)^3(x+1)+2x^3-2x$ بر x^2-1 چقدر است؟

۱) x^2+1 ۲) $x+1$ ۳) $2x$ ۴) $(x+1)^2$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$(x-1)^3(x+1)+2x^3-2x=(x-1)^2(x^2-1)+2x(x^2-1)=(x^2-1)\left[(x-1)^2+2x\right]$$

چون عبارت شامل عامل (x^2-1) است، پس باقی مانده تقسیم صفر است و خارج قسمت $(x-1)^2+2x$ یعنی x^2+1 می‌باشد.

۳۲. مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $3x^3-10x^2$ بر $3x-1$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : کافی است $Q(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$3x^3-10x^2=(3x-1)Q(x)-1 \xrightarrow{x=1} -7=2Q(1)-1 \Rightarrow Q(1)=-3$$

۳۳. اگر $\sin x+\frac{1}{\sin x}=2$ باشد آنگاه مقدار عبارت $\sin^2 x+\cos^5 x$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-1$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : اگر a مثبت باشد، می‌دانیم:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2$$

$$a+\frac{1}{a}=2 \rightarrow a=1$$

$$\sin x+\frac{1}{\sin x}=2 \rightarrow \sin x=1 \rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow \cos x=0$$

$$\sin^2 x+\cos^5 x=1+0=1$$

۳۴. حاصل کسر $\frac{-\sin x+\sin 2x-\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 4x}$ برابر است با:

۱) $\tan x$ ۲) $\tan 2x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\tan 2x$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\frac{-\sin x+\sin 2x-\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 4x}=\frac{-\sin x-2\sin x\cos 3x}{\cos x+2\cos x\cos 3x}=-\frac{\sin x(1+2\cos 3x)}{\cos x(1+2\cos 3x)}=-\tan x$$

۳۵. اگر $3\cos x+\sqrt{3}\sin x=3$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

راه اول :

$$3\cos x+\sqrt{3}\sin x=3\rightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\rightarrow \sin x+\frac{\sin 60}{\cos 60}\cos x=$$

$$\sqrt{3}\rightarrow \frac{\sin x\cos 60+\sin 60\cos x}{\cos 60}=\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{\sin(x+60)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\rightarrow \sin(x+60)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \cos(90-(x+60))=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow$$

$$\cos(30-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۶. حاصل عبارت $2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)-\cos^2 x\left(1+\tan^2 x\right)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 2x$ ۲) $-\cos 2x$ ۳) $-\sin 2x$ ۴) $\cos 2x$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

راه اول: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$: می‌دانیم

$$2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)-\cos^2 x\underbrace{\left(1+\tan^2 x\right)}_{\frac{1}{\cos^2 x}}=2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)-1=$$

$$\cos 2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)=-\sin 2x$$

راه دوم : اگر در عبارت $x=\frac{\pi}{4}$ قرار دهیم:

$$2\cos^2\left(\frac{6\pi}{4}\right)-\cos^2\frac{\pi}{4}\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)=0-\frac{1}{2}(1+1)=-1$$

اگر در گزینه‌ها $x=\frac{\pi}{4}$ قرار دهیم، گزینه ۳، ۱ـ می‌شود.

۳۷. حاصل $\sin^{2}(x+y)+\sin^{2}(x-y)+\cos 2x\cos 2y$ برابر است با :

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $2\cos 2x\cos 2y$ ۴) $\cos(2x+2y)$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

راه اول: اگر $y=0$ و $x=\frac{\pi}{6}$ را فرض کنیم ، خواهیم داشت:

$$\sin^{2}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)+\sin^{2}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)+\cos\frac{\pi}{3}\cos 0=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$

راه دوم:

$$\sin^{2}(x+y)+\sin^{2}(x-y)+\cos 2x\cos 2y=$$

$$\frac{1-\cos(2x+2y)}{2}+\frac{1-\cos(2x-2y)}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos(2x+2y)+\cos(2x-2y)\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(2-\cos(2x+2y)-\cos(2x-2y)+\cos(2x+2y)+\cos(2x-2y)\right)=1$$

۳۸. اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ و $\tan\alpha=k$ باشد آنگاه $\tan\frac{\alpha}{2}$ چقدر است؟

۱) $\frac{-1-\sqrt{1+k^{2}}}{k}$ ۲) $\frac{-1\pm\sqrt{1+k^{2}}}{k}$ ۳) $\frac{-1+\sqrt{1+k^{2}}}{k}$ ۴) $\frac{-1\pm\sqrt{1+k}}{k}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^{2}\frac{\alpha}{2}}\rightarrow k=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^{2}\frac{\alpha}{2}}\rightarrow k-k\tan^{2}\frac{\alpha}{2}=2\tan\frac{\alpha}{2}\rightarrow$$

$$k\tan^{2}\frac{\alpha}{2}+2\tan\frac{\alpha}{2}-k=0$$

$$\rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+k^{2}}}{k}$$

چون $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ و $\tan\frac{\alpha}{2}$ مثبت است و $k=\tan\alpha$ هم مثبت است. پس:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+k^{2}}}{k}$$

۳۹. حاصل عبارت $\lambda\cos ۸۰\cos ۴۰\cos ۲۰$ کدام است؟

۱) ۱-   ۲) $\cos ۲۰$ ۳) $\sin ۲۰$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

راه اول:

$$۸\cos ۸۰\cdot\cos ۴۰\cdot\cos ۲۰ = ۸\times\frac{۱}{۲}(\cos ۱۲۰+\cos ۴۰)\cos ۲۰ = ۸\times\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}+\cos ۴۰\right)\cos ۲۰ =$$

$$-۲\cos ۲۰+۴\cos ۴۰\cdot\cos ۲۰ = -۲\cos ۲۰+۴\times\frac{۱}{۲}(\cos ۶۰+\cos ۲۰) =$$

$$-۲\cos ۲۰+۲\cos ۶۰+۲\cos ۲۰ = ۲\cos ۶۰ = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱$$

راه دوم : عبارت را در $\sin ۲۰$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲\times۲\times۲\overbrace{\sin ۲۰\cdot\cos ۲۰}^{\sin ۴۰}\cdot\cos ۴۰\cdot\cos ۸۰}{\sin ۲۰} = \frac{۲\times۲\overbrace{\sin ۴۰\cdot\cos ۴۰}^{\sin ۸۰}\cdot\cos ۸۰}{\sin ۲۰}$$

$$= \frac{۲\sin ۸۰\cdot\cos ۸۰}{\sin ۲۰} = \frac{\sin ۱۶۰}{\sin ۲۰} = \frac{\sin(۱۸۰-۲۰)}{\sin ۲۰} = \frac{\sin ۲۰}{\sin ۲۰} = ۱$$

۴۰. عبارت $\tan\left(۳\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\text{Arc}\cos\frac{۱}{۲}\right)$ برابراست با:

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم : $\text{Arc}\cos\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۳}$ و $\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\pi}{۳}$ ، بنابراین:

$$\tan\left(۳\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\text{Arc}\cos\frac{۱}{۲}\right) = \tan\left(۳\times\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}\right) = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{۳}\right) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

۴۱. $\cos\left(\mathrm{Arc}\sin\frac{۳}{۵}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

با فرض $\mathrm{Arc}\sin\frac{۳}{۵}=\alpha$ داریم: $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ و α در ناحیه اول دایره مثلثاتی است. $\cos\alpha$ را می‌خواهیم. می‌دانیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۴}{۵}$$

توجه کنید در ربع اول کسینوس مثبت است.

$$\cos\left(\mathrm{Arc}\sin\left(-\frac{۴}{۵}\right)\right)=\cos\left(-\mathrm{Arc}\sin\frac{۴}{۵}\right)=\cos\left(\mathrm{Arc}\sin\frac{۴}{۵}\right)$$

۴۲. جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)=۱$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)=۱ \rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi \rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

۴۳. معادله‌ی $\tan ۳x=\tan ۲x$ در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\tan ۳x=\tan ۲x \Rightarrow ۳x=k\pi+۲x \Rightarrow x=k\pi \Rightarrow x=۰\,,\ \pi\,,\ ۲\pi$$

پس معادله سه ریشه دارد.

۴۴. تمام جواب‌های معادله‌ی $\tan 3x - \cot 2x = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{2k\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$ ۳) $\frac{k\pi}{5}$ ۴) $\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{3}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

می دانیم $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ پس :

$$\tan 3x = \cot 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

پس :

$$3k = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

۴۵. یکی از جواب‌های معادله‌ی $\sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{42}$ ۲) $\frac{\pi}{21}$ ۳) $\frac{\pi}{7}$ ۴) $\frac{\pi}{14}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ پس :

$$\sin(2x + 5x) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin 7x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ 7x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

در معادله‌ی (۱) به ازای $k = 0$ ، جواب $7x = \frac{\pi}{6}$ یعنی $x = \frac{\pi}{42}$ به دست می‌آید.

۴۶. اگر $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$ آن گاه کدام رابطه‌ی زیر همواره درست است؟

۱) $\tan x + \cot x > 0$ ۲) $\tan x + \cot x < 0$ ۳) $\tan x - \cot x > 0$ ۴) $\tan x - \cot x < 0$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

کمان x در ناحیه‌ی دوم است. پس $\tan x < 0$ و $\cot x < 0$ لذا $\tan x + \cot x < 0$.

۴۷. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $\cos 5x = 2\cos^2 x - 1$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{7}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{7}$ ۴) $\frac{4\pi}{7}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$ پس :

$$\cos 5x = \cos 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi \pm 2x$$

$$5x = 2k\pi + 2x \to x = \frac{2k\pi}{3} \qquad (1)$$

$$5x = 2k\pi - 2x \to x = \frac{2k\pi}{7} \qquad (2)$$

به ازای $k = 2$ در معادله‌ی دوم، گزینه‌ی (۴) به دست می‌آید.

۴۸. معادله‌ی $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

برای حل معادله‌ی $\sin x . \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ ابتدا طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$\sin 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \to \sin 2x = \cos 2x \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos 2x} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$$

$$\to \tan 2x = 1 \to 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \to x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \to \begin{cases} k = 0 \to x = \frac{\pi}{8} \\ k = 1 \to x = \frac{5\pi}{8} \\ k = 2 \to x = \frac{9\pi}{8} \\ k = 3 \to x = \frac{13\pi}{8} \end{cases}$$

۴۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin ۳x+\sin x=۰$ کدام است؟

۱) $k\frac{\pi}{۲}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

با استفاده از دستور مثلثاتی $\sin a+\sin b=۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$ داریم:

$$\sin ۳x+\sin x=۰ \rightarrow ۲\sin ۲x\cos x=۰ \rightarrow ۴\sin x.\cos^{۲} x=۰$$

پس جواب‌های معادله‌ی $\sin x=۰$ و $\cos x=۰$ هستند که کلیه‌ی کمان‌های x به صورت مضربی از ربع دایره‌ها است، لذا جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}$ است.

۵۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin ۳x+\sin x}{\sin x}=۱$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه اول : با شرط $\sin x\neq ۰$ ، طرفین معادله را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم. لذا:

$$\sin ۳x+\sin x=\sin x \rightarrow \sin ۳x=۰ \rightarrow ۳x=k\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}$$

اما چون ریشه‌های مخرج یعنی $k\pi$ باید حذف شود. جواب کلی $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ خواهد بود.

راه دوم: با استفاده از فرمول تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\frac{۲\sin ۲x\cos x}{\sin x}=۱ \rightarrow \frac{۲(۲\sin x\cos x)\cos x}{\sin x}=۱$$

با شرط $\sin x\neq ۰$ داریم:

$$۴\cos^{۲} x=۱ \rightarrow \cos x=\pm\frac{۱}{۲} \rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۵۱. حاصل $\cos x.\cos ۲x$ به ازای $x=۳۶$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : صورت و مخرج را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x.\cos ۲x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۴x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۱۴۴^{\circ}}{\sin ۳۶^{\circ}}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۳۶^{\circ}}{\sin ۳۶^{\circ}}=\frac{۱}{۴}$$

۵۲. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x)=۲\left[\frac{x}{۲}\right]-۳\left[\frac{x}{۳}\right]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» x : اضافه و کم کنید.

$$y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]-x-\left(۳\left[\frac{x}{۳}\right]-x\right)=۲\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-\frac{x}{۲}\right)-۳\left(\left[\frac{x}{۳}\right]-\frac{x}{۳}\right)$$

$$T_۱=۲ \qquad T_۲=۳ \qquad \to \quad T_{\text{کل}}=[۲,۳]=۶$$

۵۳. دوره تناوب اصلی تابع $y=\frac{\sin ۲x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) متناوب نیست.

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$y=\frac{\sin ۲x}{\sin x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\sin x}=۲\cos x\ ,\ x\neq k\pi \ \to\ T=۲\pi$$

۵۴. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دو جمله‌ی اول برابر ۷/۵ و مجموع جملات سوم و چهارم، برابر ۵/۵ است. قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : براساس فرمول $a_n=a_۱+(n-۱)d$ در تصاعد حسابی داریم:

$$\begin{cases}a_۱+a_۲=۷/۵\\ a_۳+a_۴=۵/۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+(a_۱+d)=۷/۵\\ (a_۱+۲d)+(a_۱+۳d)=۵/۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a_۱+d=۷/۵\\ ۲a_۱+۵d=۵/۵\end{cases}\Rightarrow d=\frac{-۱}{۲}$$

۵۵. بین اعداد ۱۲- و ۵۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این سه واسطه‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۶۸ ۴) ۷۲

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$d=\frac{۵۲-(-۱۲)}{۳+۱}=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

لذا جملات به صورت زیر خواهند بود:

$$-۱۲\ ,\ ۴\ ,\ ۲۰\ ,\ ۳۶\ ,\ ۵۲$$

جمع

$$=۴+۲۰\cdot$$

۵۶. جملات پنجم و نهم از تصاعد حسابی به ترتیب برابر ۱ و ۷ می‌باشد، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۳۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

طبق معلومات مسأله داریم:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_9 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 1 \\ a_1 + 8d = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{2} \\ a_1 = -5 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}\left[2(-5) + (12-1)\frac{3}{2}\right] \Rightarrow S_{12} = 6\left(-10 + \frac{33}{2}\right) = 39$$

۵۷. هرگاه داشته باشیم $S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$ مقدار S چقدر است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۹ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \ldots + 2^2 - 1^2 = (10-9)(10+9) + (8-7)(8+7) + \ldots + (2-1)(2+1) = 10 + 9 + 8 + \ldots + 1$$

اما مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا nبرابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ پس : $S = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

۵۸. در یک تصاعد هندسی، جمله سوم مساوی است با جمله دوم به علاوه دو برابر جمله اول، کدام دو عدد می‌تواند قدر نسبت این تصاعد باشند؟

۱) ۱ـ و ۲ـ ۲) ۱ـ و ۲ ۳) ۱ و ۲ ۴) ۱ و ۲ـ

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم جمله nام تصاعد هندسی از رابطه‌ی $a_n = aq^{n-1}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \Rightarrow aq^2 + 2a \Rightarrow a\left(q^2 - q - 2\right) = 0 \Rightarrow a(q-2)(q+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

۵۹. در یک تصاعد هندسی جمله دوم، شش و جمله پنجم چهار برابر جمله سوم است جمله اول آن چقدر است؟

۱) $\pm\frac{1}{3}$ ۲) فقط ۳ ۳) فقط ۳ـ ۴) ± 3

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$t_2 = 6\,,\ t_5 = 4t_3 \Rightarrow t_1q^4 = 4t_1q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2 \Rightarrow t_2 = 6$$

$$\Rightarrow t_1q = 6 \Rightarrow t_1(\pm 2) = 6 \Rightarrow t_1 = \pm 3$$

۶۰. حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی چهار برابر جمله‌ی اول است، قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

اگر جمله اول را a مشخص کنیم، در این صورت حد مجموع به صورت $S=\frac{a}{۱-q}$ خواهد بود که :

$$\frac{a}{۱-q}=۴a \Rightarrow ۱-q=\frac{۱}{۴} \Rightarrow q=\frac{۳}{۴}$$

۶۱. در یک تصاعد هندسی جمله‌ی اول ۱۶ و حد مجموع جملات $\frac{۳۲}{۳}$ می‌باشد. جمله چهارم آن کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : مشخص کنیم جمله اول a در این صورت حد مجموع آن به صورت $S=\frac{a}{۱-q}$ خواهد بود. بنابراین :

$$\frac{۳۲}{۳}=\frac{۱۶}{۱-q} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱-q} \Rightarrow ۱-q=\frac{۳}{۲} \rightarrow q=-\frac{۱}{۲}$$

جمله چهارم $=a_۴=a_۱q^۳=۱۶\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳=-۲$

۶۲. در یک تصاعد عددی $S_n=\frac{۱}{۳}n^۲$ (مجموع n جمله اول)، مجموع جمله‌های نهم و دهم و یازدهم این تصاعد کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۹ ۳) ۸ ۴) ۱۸

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\underbrace{\overbrace{a_۱,a_۲,\dots,a_۸}^{}\,,a_۹,a_{۱۰},a_{۱۱}}_{}\ \text{با}\ s_{۱۱},\ s_۸ \Rightarrow a_۹+a_{۱۰}+a_{۱۱}=S_{۱۱}-S_۸=\frac{۱}{۳}\left(۱۱^۲-۸^۲\right)=۱۹$$

۶۳. در یک تصاعد عددی که ۸۰ جمله دارد مجموع سه جمله اول ۶ و مجموع سه جمله‌ی آخر ۲۴ است، مجموع هشتاد جمله‌ی این تصاعد کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$(a_۱+a_۲+a_۳)+(a_{۷۸}+a_{۷۹}+a_{۸۰})=۲۴+۶ \Rightarrow a_۱+a_{۸۰}=a_۲+a_{۷۹}=a_۳+a_{۷۸}=۱۰$$

$$S_{۸۰}=\frac{۸۰}{۲}(a_۱+a_{۸۰})=۴۰\times۱۰=۴۰۰$$

۶۴. اگر $\log_{16}^{N}=\frac{3}{2}$ ، N کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

راه اول : $\log_{16} N=\frac{3}{2} \Rightarrow \log_{2^4} N=\frac{1}{4}\log_2 N=\frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 N=6 \Rightarrow N=2^6=64$

راه دوم: $\log_{16} N=\frac{3}{2} \Rightarrow N=16^{\frac{3}{2}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{2}}=2^6=64$

۶۵. اگر $\log_{n}^{N}=x$ باشد، $\log_{a^n}^{N}$ کدام است؟

۱) x^n ۲) $\sqrt[n]{x}$ ۳) nx ۴) $\frac{x}{n}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\log_{a^n} N=\frac{1}{n}\log_a N=\frac{1}{n}x=\frac{x}{n}$$

۶۶. اگر $\log_{3}^{\frac{1}{500}}=A$ باشد، آنگاه :

۱) $-5<A<-4$ ۲) $4<A<5$ ۳) $-6<A<-5$ ۴) $5<A<6$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$3^5<500<3^6 \rightarrow 3^{-6}<\frac{1}{500}<3^{-5} \rightarrow -6<\log_3\frac{1}{500}<-5$$

۶۷. برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-12x+8$ بر بازه‌ی $[-3,1]$ کدام است؟

۱) $[-8,17]$ ۲) $[-8,24]$ ۳) $[-3,17]$ ۴) $[-3,24]$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : چون تابع، همواره پیوسته است پس با یافتن ماکزیمم و می‌نیمم مطلق در این بازه برد تابع را می‌یابیم.

$$f(x)=x^3-12x+8$$

$$f'(x)=3x^2-12=0 \rightarrow x=\pm 2 \longrightarrow x=-2$$

$$f(-3)=17 \ , \ f(-2)=24 \ , \ f(1)=-3 \ \rightarrow R_f=[-3,24]$$

۶۸. برد تابع با ضابطه‌ی $y=\left[\frac{x^{3}+1}{x^{3}8}\right]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ‏ ‏ ۲) ۳ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : با فرض $g(x)=\frac{3x}{x^{2}+1}$ ، ابتدا برد داخل جزء صحیح را می‌یابیم:

$$g=\frac{3x}{x^{2}+1}\rightarrow gx^{2}+g=3x\rightarrow gx^{2}-3x+g=0$$

$$\Delta\geq 0\rightarrow\Delta=9-4g^{2}\geq 0\rightarrow g^{2}\leq\frac{9}{4}\rightarrow -\frac{3}{2}\leq g\leq\frac{3}{2}$$

حال باید اعداد صحیح را در این بازه بیابیم:

$$\rightarrow y=\left[g(x)\right]\Rightarrow R_{y}=\{-2,-1,0,1\}$$

بنابراین برد تابع شامل ۴ عدد صحیح می‌باشد.

۶۹. برد تابع با ضابطه‌ی $y=x-6\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ‏ ‏ ۲) ۳ ‏ ‏ ۳) ۳۶ ‏ ‏ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : با کمک روش مربع کامل کردن برد را می‌یابیم:

$$y=x-6\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-3\right)-9$$

از آنجا که $\left(\sqrt{x}-3\right)^{2}\geq 0$ خواهیم داشت:

$$\left(\sqrt{x}-3\right)^{2}\geq 0\Rightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^{2}-9\geq\Rightarrow y\geq -9$$

بنابراین برد تابع شامل ۹ عدد صحیح منفی $\{-9,-8,\ldots,-1\}$ است.

۷۰. برد تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}\right)$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ‏ ‏ ۲) $[\sqrt{3},+\infty)$ ‏ ‏ ۳) $[10,+\infty)$ ‏ ‏ ۴) $[3+\infty)$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

تابع y، از تابع با ضابطه $yu_{1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}$ و $y_{2}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$ تشکیل شده است، دامنه تابع حاصل ضرب، اشتراک دامنه‌ی آنهاست که $x\geq 1$ خواهد بود هر دو تابع به ازای $x\geq 1$، مثبت و صعودی خواهند بود. (مشتق بگیرید) $(y'_{2}>0\ ,\ y'_{1}>0)$.

لذا تابع حاصل ضرب آنها نیز صعودی است پس برد تابع نقاط ابتدا و انتهای دامنه خواهند بود.

$$f(1)=10\ ,\ \lim_{x\rightarrow+\infty}=+\infty\rightarrow R_{f}=[10\ ,\ +\infty]$$

سوالات دنباله اعداد

۱. دنبالهٔ $a_n=\dfrac{\left(n^{۲}+۲n-۱\right)^{۳}-\left(n^{۲}-n-۱\right)^{۳}}{\left(۲n+۱\right)\left(n+۱\right)^{۴}}$ به کدام عدد همگراست؟

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ : گزینه ی « ۳»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^{۲}+۲n-۱)^{۳}-(n^{۲}n-۱)^{۳}}{(۲n+۱)(n+۱)^{۴}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۳n(۳n^{۴}+...+۳)}{۲n^{۵}+...+۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{۹n^{۵}}{۲n^{۵}}=\frac{۹}{۲}$$

۲. دنبالهٔ $\left\{\dfrac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۴}-\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۳}}{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۵}-\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۲}}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه « ۱»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۳}\left((۱+\frac{۱}{n})-۱\right)}{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۲}\left((۱+\frac{۱}{n})^{۳}-۱\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\left(\frac{۱}{n}\right)}{\left((۱+\frac{۱}{n})-۱\right)\left((۱+\frac{۱}{n})^{۲}+(۱+\frac{۱}{n})+۱\right)}=\frac{۱+۰}{۱+۱+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۳. دنبالهٔ $a_n=\dfrac{۲n-۷}{۵n-۱۴}$ چند جملهٔ منفی دارد؟

۱)۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ : گزینه ی « ۱»

باید $a_n<۰$ باشد پس $\dfrac{۲n-۷}{۵n-۱۴}$ با تعیین علامت $\frac{۱۴}{۵}<n<\frac{۷}{۲}$ اما چون باید $n\subset N$ باشد ، فقط $n=۳$ قابل قبول است.

۴. کوچکترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n=\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{n+۱}$ کدام است؟

۱) $\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{۳}$ ۲) $\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{۲}$ ۳) $\left(-\frac{۳}{۷}\right)^{۴}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$a_n=\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{n+۱}$$

⇐ جملات دنباله : $\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۲},\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۳},\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۴},\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۵},\dots$

با توجه به جملات دنباله، کوچکترین جمله $a_۲=\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۳}$ است. توجه کنید که در این دنباله، جملات با شماره های زوج، منفی هستند و کوچکترین آنها $\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۳}$ است ، با افزایش شماره ی جمله، جمله های با شماره ی زوج، بزرگتر شده و به صفر نزدیک می شوند.

همچنین جملات با شماره ی فرد، مثبت هستند و بزرگترین آنها $\left(\frac{-۳}{۷}\right)^{۲}$است، با افزایش شماره ی جمله، جمله های با شماره ی فرد کوچکتر شده و به صفر نزدیک می شوند.

۵. کدام دنباله همگراست؟

۱) $\left[\frac{n}{۳}\right](\cos n+\sin n)$ ۲) $\sin n-\cos n$

۳) $\left[\frac{-۳}{n}\right](\cos n+\sin n)$ ۴) $\left[\frac{۳}{n}\right](\cos n+\sin n)$

پاسخ : $-\sqrt{۲}<\cos n\pm\sin n<\sqrt{۲}$ بنابراین کران دار است .

$$\lim_{n\to+\infty}[\frac{۳}{n}](\cos n+\sin n)=$$ ۰= (کران دار) × ۰

۶. کدام عدد زیر وجود دارد؟

۱)کوچکترین عدد صحیح کوچکتر از ۱ـ

۲) کوچکترین عدد گنگ بزرگتر از ۱ـ

۳) بزگترین عدد صحیح کوچکتر از ۱ـ

۴) بزرگترین عدد گویای کوچکتر از ۱ـ

پاسخ : گزینه ی « ۳ » بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از ۱- وجود دارد و برابر ۲- است.

۷. رابطه‌ی $U_{n+۲}=U_{n+۱}+U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است اگر $U_۱=U_۲=۱$ باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۲

پاسخ : گزینه ی «۲» : دنباله ی داده شده ، دنباله ی فیبوناتچی است،

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵ ,۸۹,...

که جمله ی نهم دنباله ۳۴= U۹ است.

۸. اگر جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{۳}{۲^n}\right\}$ برای مقادیر $n \geq n_۰$ در بازه‌ی $(۰,۰/۱۸۷۵)$ قرار گیرند، کوچکترین مقدار $n_۰$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳» : حد دنباله صفر است پس دنباله به صفر همگراست، پس :

$$\left|\frac{۳}{۲^n}-۰\right|<۰/۱۸۷۵$$

$$\frac{۳}{۲^n}<\frac{۱۸۷۵}{۱۰۰۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}<\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰}\Rightarrow ۲^n>\frac{۱۰۰۰۰}{۶۲۵}=۱۶$$

$$\Rightarrow ۲^n>۲^۴\Rightarrow n>۴\Rightarrow n=۵$$

۹. برای مقادیر $n>۳۱$ ، جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{n-۲}{۴n}\right\}$ در کدام بازه است؟

۱) $\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱۷}{۶۴}\right]$ ۲) $\left[\frac{۱۵}{۶۴},\frac{۱۷}{۶۴}\right]$ ۳) $\left[\frac{۱۵}{۶۴},\frac{۱}{۴}\right)$ ۴) $\left(\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴}\right)$

پاسخ : گزینه « ۳»

$$a_n=\frac{n-۲}{۴n}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}$$

$$n\geq ۳۲\rightarrow ۲n\geq ۶۴\Rightarrow\frac{۱}{۲n}\leq\frac{۱}{۶۴}$$

$$\Rightarrow\frac{-۱}{۲n}\geq\frac{-۱}{۶۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}\geq\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\frac{۱۵}{۶۴}\leq a_n<\frac{۱}{۴}$$

۱۰. جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{۲n-۱}{۳n+۲}\right\}$ برای مقادیر $n \geq n_۰$ در بازه‌ی $\left(۰/۶۶, \frac{۲}{۳}\right)$ قرارمی‌گیرند کوچکترین مقدار $n_۰$ کدام است؟

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۹

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲n-۱}{۳n+۲}=\frac{۲}{۳}$$

دنباله ی فوق صعودی است، پس جمله ای از دنباله نیست که بزرگتر از $\frac{۲}{۳}$ باشد ، بنابراین ، شعاع همگرایی برابر است با :

$$\varepsilon=\frac{۲}{۳}-۰/۶۶=\frac{۲}{۳}-\frac{۶۶}{۱۰۰}=\frac{۲}{۳۰۰}$$

$$\left|\frac{۲n-۱}{۳n+۲}-\frac{۲}{۳}\right|<\frac{۲}{۳۰۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۷}{۳(۳n+۲)}<\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۳n+۲}{۷}>۵۰$$

$$\Rightarrow ۳n+۲>۳۵۰\Rightarrow ۳n>۳۴۸\Rightarrow n>۱۱۶\Rightarrow n\geq ۱۱۷$$

۱۱. جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{n+۲(-۱)^n}{۲n+۱}$ برای اعداد $n \geq M$ همگی در بازه‌ی $(۰/۴۹, ۰/۵۱)$ قرار می‌گیرند کوچکترین عدد طبیعی M کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۲۶

پاسخ : گزینه « ۳ » : از آنجایی که $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{۱}{۲}$. پس یک همسایگی به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع ۰/۰۱ داریم،دو حالت در نظر می گیریم :

$$n_{\text{زوج}}:\left|\frac{n+۲}{۲n+۱}-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\left|\frac{۳}{۲n+۱}\right|<\frac{۲}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۲n+۱}{۳}>۵۰$$

$$\Rightarrow ۲n+۱>۱۵۰\Rightarrow n>\frac{۱۴۹}{۲}=۷۴/۵\Rightarrow M_۱\geq ۷۵$$

$$n_{\text{فرد}}:\left|\frac{n+۲}{۲n+۱}-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\left|\frac{۵}{۲n+۱}\right|<۵\Rightarrow\frac{۲n+۱}{۵}>۵۰$$

$$\Rightarrow\frac{۲n+۱}{۵}>۵۰\Rightarrow n>\frac{۲۴۹}{۲}=۱۲۴/۵\Rightarrow M_۲\geq ۱۲۵$$

جملات ردیف زوج از شماره ی ۷۵ به بعد در این بازه قرار دارند و جملات شماره ی فرد از شماره ۱۲۵ ، پس اولین جمله ای از این دنباله که بعد از آن کلیه ی جملات در این بازه قرار گیرند جمله ی ۱۲۴ ام است.

۱۲. دنباله‌ی $\left\{\dfrac{۲^{۳n+۲}+۸^{n+۱}}{۲^{۳n+۱}+۸^{n}}\right\}$ –

۱)همگرا به ۲ است. ۲) همگرا به ۸ است. ۳) همگرا به ۴ است. ۴) واگراست .

پاسخ : گزینه « ۳»

$$a_n=\frac{۲^{۳n+۲}+۸^{n+۱}}{۲^{۳n+۱}+۸^{n}}=\frac{۸^n.(۴)+۸^n.(۸)}{۸^n.(۲)+۸^n}=\frac{۱۲(۸^n)}{۳(۸^n)}=۴$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=۴$$

۱۳. دنباله‌ی $U_n=\dfrac{۱}{۱-\left[\dfrac{-۱}{n}\right]}$ همگراست به:

۱) $\dfrac{-۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه « ۳»

$$\forall n\in N\ ,-۱\le -\frac{۱}{n}<۰\Rightarrow\left[-\frac{۱}{n}\right]=-۱$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{۱}{۱-\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\frac{۱}{n}\right]}=\frac{۱}{۱-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴. دنباله‌ی $a_n=\left\{\sqrt{n^۲+۴n}-\sqrt{n^۲+۲n}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to+\infty}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^۲+۴n-n^۲-۲n}{\sqrt{n^۲+۴n}+\sqrt{n^۲+۲n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n}{n\left(\sqrt{۱+\frac{۴}{n}}\right)+n\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n}{n+n}=۱$$

۱۵. کدام دنباله به صفر همگراست؟

۱) $\left\{\sqrt{۳n+۱}-\sqrt{۲n-۱}\right\}$

۲) $\left\{\sqrt{n^{۲}+n}-\sqrt{n^{۲}-n}\right\}$

۳) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{۴n+۱}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{۹n+۱}}\right\}$

۴) $\left\{\dfrac{n^{۲}}{۲^{n}}\right\}$

پاسخ : گزینه ی «۴» : زیرا وقتی $n \to +\infty$، رشد ۲^{n} بسیار بیش تر از $n^{۲}$ می باشد.

۱۶. کدام دنباله واگراست؟

۱) $\left\{\dfrac{n+\sin n}{n-\sin n}\right\}$

۲) $\left\{\left(n^{۲}\right)^{(-۱)^{۲n-۱}}\right\}$

۳) $\left\{\sin\left(۴n+۱\right)\dfrac{\pi}{۲}\right\}$

۴) $\left\{\left[۱-\dfrac{(-۱)^{n}}{n}\right]\right\}$

پاسخ : گزینه ی (۴) واگرا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[۱-\dfrac{(-۱)^{n}}{n}\right]=\begin{cases} , & n \\ ۱, & n \end{cases} \Rightarrow ۰\neq ۱$

۱۷. در کدام مجموعه‌ی زیر از اعداد حقیقی، یکی از کران‌های پائین در خود مجموعه است؟

۱) $\{x:x|x|\leq -۱\}$

۲) $\{x:[x]=۲\}$

۳) $\{x:[-x]=-۲\}$

۴) $\{x:۲-x\geq |x|\}$

پاسخ : گزینه ی « ۲» $\{x:[x]=۲\}=\{x:۲\leq x<۳\}=\{۲,۳\}$

کران های پایین این مجموعه، مجموعه ی [۲ ، ∞-) است. همانطور که مشاهده می شود عدد ۲ یکی از کران های پایین مجموعه ی (۳ ، ۲] می باشد که در این مجموعه نیز قرار دارد.

۱۸. اگر مجموعه‌ی $\left\{\dfrac{۱}{x}\,|\,x\in A\right\}$ کران‌دار باشد، A کدام مجموعه‌ی زیر می‌تواند باشد؟

۱) Q

۲) $Z-\{۰\}$

۳) $R-Q$

۴) $(۰,۱]$

پاسخ : گزینه ی «۲» در { ۰ } − Z اعضای مجموعه عبارتند از :

$$\ldots,-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۲},-۱,۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\ldots$$

لذا مجموعه کران دار است .

۱۹. کوچک‌ترین کران بالای $A=\{n\in Z|n=-x^{۲}-۸x\ ,\ x\in R\}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶-

پاسخ : گزینه ی « ۳ »

$$y=-(x^{۲}+۸x)=-(x+۴)^{۲}+۱۶$$

$$\Rightarrow y\le ۱۶\Rightarrow n\le ۱۶\Rightarrow \sup(A)=۱۶$$

۲۰. کدام دنباله از بالا و پائین کران‌دار و نزولی است؟

۱) $u_n=\frac{۲^n}{n^{۲}}$ ۲) $u_n=(-۱)^n$ ۳) $u_n=\frac{n^{۲}+۳}{n^{۲}+۱}$ ۴) $u_n=\frac{n^{۲}+۱}{n^{۲}+۴}$

پاسخ : گزینه ی « ۳»

دنباله ی $\frac{n^{۲}+۳}{n^{۲}+۱}$ همگرا به یک است و کران دارد.

$u_n=۱+\frac{۲}{n^{۲}+۱}$ با افزایش n ، $n^{۲}+۱$ افزایش ، پس $\frac{۲}{n^{۲}+۱}$ کاهش می یابد و کل عبارت نزولی خواهد بود و دنباله ی $\frac{n^{۲}+۳}{n^{۲}+۱}$ نزولی خواهد بود.

۲۱. بزرگترین کران پائین دنباله با جمله‌ی عمومی $U_n=\frac{۳^n}{n^{۳}}$ کدام است؟

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی « ۳»

با نوشتن چند جمله ای دنباله ، خواهیم داشت :

$$۳,\frac{۹}{۸},۱,\frac{۸۱}{۶۴},\frac{۲۴۳}{۱۲۵}\ ,...$$

نزولی صعودی

با توجه به مقادیر، دیده می شود که در این دنباله ، از جمله ی سوم به بعد دنباله صعودی خواهد بود، پس بزرگترین کران پایین آن جمله ی سوم یعنی $u_{۳}=۱$ خواهد بود.

۲۲. کوچکترین کران بالای دنباله‌ی با جمله عمومی $U_n = \frac{۳n^۲ - ۲n}{۴n^۲ + ۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه « ۴»

این دنباله صعودی است $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{۳}{۴}, U_n : \frac{۱}{۹}, \frac{۸}{۲۱}, \dots$

بنابراین حد دنباله یعنی $\frac{۳}{۴}$ کوچک ترین کران بالای دنباله است.

۲۳. دنباله‌ی $\left\{۱+\frac{(-۱)^n}{n+۱}\right\}$ چگونه است؟

۱)واگرا ۲) بی‌کران ۳) نه صعودی، نه نزولی ولی هم‌گرا ۴) نزولی و هم‌گرا

پاسخ : گزینه ی « ۳»

$$\lim_{n\to+\infty} (۱+\frac{(-۱)^n}{n+۱}) = ۱ + \frac{-۱,۱}{+\infty} = ۱ + ۰ = ۱$$

کران دار → دنباله همگرا →

از طرفی جملات دنباله روند یکنوایی ندارد . دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

۲۴. کدام دنباله صعودی و کران‌دار است؟

۱) $U_n = \frac{n^۲+۱}{n+۲}$ ۲) $U_n = \frac{n^۲+۲}{n+۱}$ ۳) $U_n = \cos\frac{\pi}{n}$ ۴) $U_n = \cos\frac{n\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه ی « ۳» در گزینه ی « ۳» وقتی ۱ = n است ، جواب ۱- و وقتی ۲ = n جواب صفر و وقتی n زیاد می شود، $\frac{\pi}{n}$ به سمت صفر میل می کند. پس حد دنباله عدد یک و دنباله صعودی است.

۲۵. دنباله‌ی $u_n = n\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$ برای $n \geq ۲$ چه نوع دنباله‌ای است؟

۱)صعودی ـ کران‌دار از بالا و پائین
۲) نزولی ـ کران‌دار از بالا و پائین
۳) صعودی ـ فقط از پائین کران‌دار
۴) نزولی ـ فقط از بالا کران‌دار

پاسخ : گزینه ی « ۲» ابتدا چند جمله ای اول دنباله را می نویسیم :

$$u_n = n\left(\frac{۲}{۳}\right)^n \Rightarrow u_n > ۰$$

$$u_۲ = ۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \Rightarrow u_۲ > \frac{۸}{۹}$$

$$u_۳ = ۳\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ \Rightarrow u_۳ > \frac{۸}{۹}$$

$$u_۴ = ۴\left(\frac{۲}{۳}\right)^۴ \Rightarrow u_۴ > \frac{۶۴}{۸۱}$$

با توجه به جملات، دنباله نمی تواند صعودی باشد، پس با توجه به گزینه ها دنباله نزولی می شود و چون دنباله دارای کران پایین است. (جملات همواره مثبت هستند). هر دنباله ی نزولی که کران پایین دارد همگرا می شود، الزاماً دنباله همگرا است. پس کراندار نیز می باشد، یعنی کران پایین و بالا دارد.

۲۶. اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۲}$ و تابع $f(x) = (x+۱)[x]$ مفروض باشند آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n \to \infty} \frac{۲n+۱}{n+۲} = ۲$$

برای این که ببینیم دنباله ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ نزدیک می شود یا بیشتر، کافیست $a_n - ۲$ را وقتی $n \to \infty$ بررسی کنیم:

$$(a_n - ۲) = \left(\frac{۲n+۱}{n+۲} - ۲\right) = \frac{-۳}{n+۲}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی ، $\frac{-۳}{n+۲}$ مقداری منفی است پس $a_n - ۲ < ۰$ و در نتیجه $a_n < ۲$. بنابراین دنباله ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ نزدیک می شود.

پس :

$$\lim_{n \to \infty}(a_n) = \lim_{a_n \to ۲^-}(a_n) = \lim_{x \to ۲^-}$$

لذا :

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-}(x+۱)[x] = (۲+۱)[۲^-] = ۳$$

۲۷. کدام توصیف در دنباله‌ها درست است؟

۱)هر دنباله‌ی صعودی واگراست. ۲) هر دنباله‌ی غیریکنوا واگراست.

۳) هر دنباله‌ی کران‌دار همگراست. ۴) هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است.

پاسخ : گزینه ی «۴»

۲۸. اگر $f(x)=\frac{[x]-۳}{x-۴}$ و $a_n=\frac{۴n-۳}{n+۲}$ آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟

۱)همگرا به ۱ـ ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n-۳}{n+۲}=۴$$

$$(a_n-۴)=\left(\frac{۴n-۳}{n+۲}-۴\right)=\frac{-۱۱}{n+۲}$$

بنابراین a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود.

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{[x]-۳}{x-۴}=\frac{۳-۳}{۴^- -۴}=$$

لذا : $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}$

پس دنباله ی $f(a_n)$ همگرا به صفر است.

۲۹. دنباله‌ی $a_n=\frac{۳n+۱}{۲n+۱}$:

۱)نزولی و همگرا است. ۲) صعودی و واگراست. ۳) صعودی و همگراست. ۴) نزولی و واگراست.

پاسخ : گزینه ی « ۳»

$$a_n=\frac{۳n+۱}{۲n+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}(۲n+۱)-\frac{۱}{۲}}{۲n+۱}\Rightarrow a_n=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲(۲n+۱)}$$

با توجه به تساوی اخیر، با افزایش n مقدار a_n افزایش می یابد، پس دنباله صعودی است، همچنین :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۳n+۱}{۲n+۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow$$ دنباله همگرا است.

۳۰. اگر $a_n = \frac{۲n^۲ + b}{n^۲ + ۳n}$ و $f(x) = \sqrt{x^۲ - x - ۲}$ به ازای کدام مقدار b، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) هر مقدار b ۴) هیچ مقدار b

پاسخ : گزینه ی « ۴»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۲n^۲ + b}{n^۲ + ۳n} = ۲$$

$$\left(\frac{۲n^۲ + b}{n^۲ + ۳n} - ۲\right) = \left(\frac{-۶n + b}{n^۲ + ۳n}\right) = \frac{-۶n}{n^۲} = \frac{-۶}{n}$$

بنابراین دنباله با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می کند یعنی $a_n < ۲$ است.

اما:

$$f(x) = \sqrt{x^۲ - x - ۲} = \sqrt{(x-۲)(x+۱)}$$

دامنه ی تابع از حل نامعادله ی $(x-۲)(x+۱) \geq$ به دست می آید. یعنی :

$$D_f = (-\infty, -۱] \quad [۲, +\infty)$$

بنابراین : $\lim_{x\to ۲^-} f(x) =$ وجود ندارد

بنابراین دنباله ی $\{f(a_n)\}$ واگراست و به ازای هیچ مقداری از b همگرا نخواهد بود.

۳۱. اگر $a_n = \frac{(-۱)^n}{۲n}$ و $f(x) = \left[\left[\frac{x}{۲}\right]\right]$ باشند، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست.

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\left[\frac{a_n}{۲}\right]\right]$$

$$n : \lim_{n\to\infty} \left|\left[\frac{\frac{۱}{۲n}}{۲}\right]\right| = \left|\left[\ ^+\right]\right| =$$
زوج

$$n : \lim_{n\to\infty} \left|\left[\frac{\frac{۱}{۲n}}{۲}\right]\right| = \left|\left[\ ^-\right]\right| = |-۱| = ۱$$
فرد

بنابراین دنباله ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

۳۲. دنباله‌ی $a_n = \frac{۱}{n^۳ + ۳n}$:

۱)نزولی و همگراست. ۲) نزولی و واگراست. ۳) صعودی وهمگراست. ۴) صعودی و واگراست.

پاسخ : گزینه ی « ۱»

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳ + ۳n} = ۰ \rightarrow$$ دنباله هم گراست.

هم چنین می دانیم اگر a_n دنباله ی صعودی و مثبت باشد $\frac{۱}{a_n}$ دنباله ی نزولی است. پس چون $a_n = n^۳ + ۳n$ صعودی است . لذا : $\frac{۱}{n^۳ + ۳n}$ نزولی است . پس دنباله هم گرا و نزولی است.

۳۳. دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n^۲ + ۴n + ۵} - n$:

۱)صعود و هم‌گراست. ۲) صعودی و واگراست. ۳) نزولی و هم‌گراست. ۴) نزولی و واگراست.

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n^۲ + ۴n + ۵} - n\} = \lim_{n\to+\infty} \{\sqrt{(n+۲)^۲ + ۱} - n\}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n + ۲ - n) = ۲ \Rightarrow$$ دنباله همگرا

در این سوال: $\lim_{n\to\infty} a_n = ۲, a_۱ = \sqrt{۱ + ۴ + ۵} - ۱ = \sqrt{۱۰} - ۱$

چون $a_۱ > \lim_{n\to\infty} a_n$ پس دنباله نزولی است .

۳۴. دنباله‌ی $\left\{\frac{۱+۲^{n}}{۳+۲^{n-۱}}\right\}$ چگونه است؟

۱)کران دار ـ نزولی ۲) کران دار ـ صعودی ۳) بی‌کران ـ نزولی ۴) بی‌کران ـ صعودی

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱+۲^{n}}{۳+۲^{n-۱}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n}}{۲^{n-۱}}=۲$$

دنباله ی داده شده همگراست پس کراندار نیز هست.

با توجه به گزینه ها دنباله یا صعودی است یا نزولی، از طرفی چون جمله ی اول آن برابر با یک ($a_{۱}=\frac{۳}{۴}$) و حد دنباله ۲ می باشد. پس می توان نتیجه گرفت که جملات این دنباله در حال افزایش بوده و دنباله صعودی است.

۳۵. کدام دنباله فقط از پائین کران دار است؟

۱) $u_{n}=\frac{n+۳}{n+۲}$ ۲) $u_{n}=(-۱)^{n}$ ۳) $u_{n}=\frac{۱}{n}$ ۴) $u_{n}=\frac{n^{۲}+۱}{n+۳}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

در گزینه ی «۴» جملات از عدد $\frac{۱}{۲}$ شروع و به بی نهایت ختم می شوند، پس کران پایین دارد ولی کران بالا ندارد.

سوالات مشتق و حد

۱. در تابع $y=[۲x]+[-x]$ وقتی $x \to \frac{۱}{۲}$ مجموع حد چپ و راست کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ : گزینه «۲» - از عددگذاری استفاده می کنیم، برای $x \to \frac{۱}{۲}^-$ ، عدد ۰/۴۹ را انتخاب می کنیم :

$$\lim_{x \to ۰/۵^-} ([۲x]+[-x]) = [۲(۰/۴۹)]+[-۰/۴۹] = ۰-۱ = -۱$$

برای $x \to \frac{۱}{۲}^+$ ، عدد ۰/۵۱ را انتخاب می کنیم :

$$\lim_{x \to ۰/۵^+} ([۲x]+[-x]) = [۲(۰/۵۱)]+[-۰/۵۱] = ۱-۱ = ۰$$

۲. حاصلضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+\operatorname{sgn} x$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ : گزینه ی « ۴»

حد راست: $\lim_{x \to ^+} f(x) = \lim_{x \to ^+} ([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[۰^+]+sgm(۰^+) = ۰+۱ = ۱$$

حد چپ: $\lim_{x \to ^+} f(x) = \lim_{x \to ^-} ([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[۰^-]+sgm(۰) = -۱-۱ = -۲$$

۳. در تابع براکت $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$ وقتی $x \to \frac{-۱}{۱۰}$ حد چپ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۱-

پاسخ : گزینه ی «۳»

وقتی $x \to \left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-$ ، یعنی $x < \frac{-۱}{۱۰}$ پس $\frac{۱}{x} > -۱۰$ ، لذا :

$$\left[\frac{۱}{x}\right] = -۱۰$$

۴. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\geq -1\\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) ϕ ۴) R

پاسخ : گزینه ی «۳» : برای آن که تابع f در نقطه ی ۱- = x حد داشته باشد باید :

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$$

پس :

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(x+a)^2=(a-1)^2$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x+1)=-1$$

لذا باید : $(a-1)^2=-1$

از آن جایی که معادله ی بالا جواب حقیقی برای a ندارد، پس مجموعه مقادیر،a تهی است.

۵. اگر تابع f در نقطه $x=1$ حد داشته و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=5$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی «۲» : فرض کنید $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$ باشد ، آنگاه

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=5\Rightarrow\frac{2A-1}{A+1}=2A-1=5A+5$$

$$\Rightarrow 3A=-6\Rightarrow A=-2\Rightarrow\lim_{x\to 1} f(x)=-2$$

۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ;\quad x>0\\ -\sqrt{1+x} & ;\quad x\leq 0\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x^3-x\right)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

پاسخ : گزینه ی «۲» برای محاسبه حد چپ تابع $f(x^3-x)$ در ۰ = x ، ابتدا ضابطه ی تابع را در همسایگی چپ ۰ = x به دست می آوریم:

اگر ۰ > x > ۱- باشد ، $x^3>x$ است، بنابراین $x^3-x>0$ ، لذا :

$$\lim f_{x\to}(x^3-x)=\lim f_{x\to}(x)=\lim_{x\to^+}\sqrt{1-x}=1$$

۷. حد کسر $\frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ وقتی $x \to 1^+$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = -$$

برای رفع ابهام عامل صفر شونده را حذف می کنیم:

$$\lim_{x\to^+}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}} = \lim_{x\to^+}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = \lim_{x\to^+}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

۸. حد عبارت $\frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2}$ وقتی $x \to -2$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام دارد .

برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$HOP:\lim_{x\to-2}\frac{1+\frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۹. اگر $\lim \frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}} = 2$ وقتی $x \to -3$ آنگاه a کدم است؟

۱)۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

پاسخ : گزینه « ۴»

حد تابع ابهام دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to-3}\frac{a}{0-\frac{5}{2\sqrt{5+16}}} = \frac{a}{\frac{-5}{2}} = 2 \Rightarrow a = -5$$

۱۰. حد عبارت $\frac{\sqrt[۴]{n}-۱}{x\sqrt{x}-۱}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ : گزینه ی « ۴» : حد تابع ابهام $\frac{}{}$ دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^{۳}}}-۰}{\frac{۳}{۲}\sqrt{x}-۰}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱. حد عبارت $\frac{x^{۳}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام $\frac{}{}$ دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^{۲}+۱}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}-۰}=\frac{۳+۱}{\frac{۱}{۳}}=۱۲$$

۱۲. حد عبارت $\frac{\left|x^{۲}-x-۲\right|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^{-}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی «۲» : برای رفع ابهام ابتدا باید قدر مطلق را با علامت مناسب تعیین علامت کنیم از آنجایی که:

$$x^{۲}-x-۲=(x-۲)(x+۱)$$

بنابراین وقتی $x\to ۲^{-}$ ، عبارت داخل قدر مطلق منفی است، لذا :

$$\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(x^{۲}-x-۲)}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(۲x-۱)}{۲-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱۲}}}=\frac{-(۴-۲)}{۲-\frac{۲}{۴}}=\frac{-۳}{\frac{۳}{۲}}=-۲$$

۱۳. حاصل $\lim_{x\to ۰^-} \frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ـ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) موجود نیست

پاسخ : گزینه ی «۱»

وقتی $x \to ^-$ ، آنگاه $|\sin x| = -\sin x$ ، پس :

$$\lim_{x\to ^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to ^-} \frac{-\sin x}{x} = -۱$$

۱۴. حد کسر $\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$ وقتی $x \to ۰^+$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱» : حد تابع ابهام $\bar{\ }$ دارد . با استفاده از هم ارزی داریم:

$$\lim_{x\to ^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to ^+} \frac{۲\sqrt{۲}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to ^+} \frac{۲\sqrt{۲}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to ^+} \frac{۲}{x+۱} = ۲$$

۱۵. حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۴» : با توجه به اتحاد $۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$ ، می توان نوشت :

$$\lim_{x\to} \frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x} = \lim_{x\to} \frac{۲\sin^۲ x}{x\sin x} = \lim_{x\to} \frac{۲\sin x}{x} = ۲$$

۱۶. حد کسر $\frac{\sin ۲x . \cos x - \sin ۲x}{x^۳}$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ـ ۳) صفر ۴) ∞

پاسخ : گزینه ی «۲»

با استفاده از هم ارزی مثلثاتی داریم :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲x\left(\frac{-x^۲}{۲}\right)}{x^۳} = -۱$$

۱۷. حد تابع با ضابطه‌ی $\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ وقتی $x \to 0^-$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

وقتی $x \to 0^-$ ،یعنی کمان در ناحیه ی چهارم است و در ناحیه چهارم $\cos x > 0, \sin x < 0$ ، لذا :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{(-\sin x)\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2}{2}}{-x^2}=\frac{-1}{2}$$

۱۸. حد عبارت $\frac{\tan 3x\sqrt{1-\cos 4x}}{x^3+x^2}$ وقتی $x\to 0^+$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۶ ۴) $6\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-3x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-3x}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\frac{x}{\sqrt{2}}}=-2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x\times 2\sqrt{2}|x|}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{6\sqrt{2}x^2}{x^2+x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{6\sqrt{2}x^2}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{6\sqrt{2}}{1+x}=6\sqrt{2}$$

۱۹. حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۱»

به ازای ، ابهام را داریم.لذا با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{4}}\frac{[illegible]}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{[illegible]}{1}=-2$$

۲۰. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ∞

پاسخ : گزینه ی« ۱»

۲۱. حاصل $\lim\limits_{x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^{+}} \frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ‏ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ‏ ۳) π ‏ ۴) ۲π

پاسخ : گزینه ی « ۱»

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{|\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}} = -$$

ابتدا قدرمطلق را با علامت مناسب برمی داریم، وقتی $x > \frac{۱}{۲}$ آنگاه پس کمان در ناحیه ی دوم است و در ناحیه دوم کسینوس منفی است.
بنابراین $|\cos \pi x| = -\cos \pi x$ لذا:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{-\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$- \quad 2\sqrt{2x}$

۲۲. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ∞

پاسخ : گزینه ی« ۱»

۲۳. حاصل $\lim\limits_{x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^{+}} \frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

پاسخ : گزینه ی « ۱»

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}} = -$$

ابتدا قدرمطلق را با علامت مناسب برمی داریم، وقتی $x > \frac{۱}{۲}$ آنگاه پس کمان در ناحیه ی دوم است و در ناحیه دوم کسینوس منفی است.

بنابراین $|\cos \pi x| = -\cos \pi x$ لذا:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{-\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$\text{HOP: } \lim_{n\to\frac{1^{+}}{2}} \frac{\pi \sin \pi x}{0-\frac{2}{2\sqrt{2x}}} = \frac{\pi}{-1} = -\pi$$

۲۴. در فاصله $\left[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]-\{۱\}$ ، همواره $\frac{\sin \pi x}{۱-x}\le f(x)\le g(x)$ و $\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sin \pi x}{۱-x}-g(x)\right)=۰$ حاصل $\lim_{x\to ۱} f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sin \pi x}{۱-x}-g(x)\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x}=\lim_{x\to ۱} g(x)$$

اما با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}:\lim\frac{\pi\cos \pi x}{-۱}=\frac{\pi(-۱)}{-۱}=\pi$$

لذا بااستفاده از قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x}\le\lim_{x\to ۱} f(x)\le\lim_{x\to ۱} g(x)$$

پس : $$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x}=\lim_{x\to ۱} g(x)=\pi$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\pi$$

۲۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{۱}{x} & ; \quad x\neq ۰ \\ ۰ & ; \quad x=۰ \end{cases}$ در نقطه $x=۰$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱)از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته ۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته ۴) از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته

پاسخ : گزینه ی «۴»

$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x}=$ ۰ × تابع کران دار =۰ و $f(۰)=۰$

از آن جایی که $\lim_{x\to} f(x)=f(\ )$ پس تابع در $x=۰$ پیوسته است و در نتیجه از چپ و راست در $x=۰$ پیوسته است.

۲۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{۲x+|x|} & , \quad x\neq ۰ \\ ۱ & , \quad x=۰ \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=۰$ چگونه است؟

۱)از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته
۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته
۴) از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{۲x+|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{۲x+x}=\frac{۱}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{۲x+|x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{۲x-x}=۱$$

و $f(۰)=۱$، پس تابع در $x=۰$ پیوستگی چپ دارد ولی پیوستگی راست ندارد.

۲۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۲x^۲-x-۱}{x-۱} & , \quad x>۱ \\ ax-a+۳ & , \quad x\leq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است؟

۱)فقط $\frac{۱}{۲}$
۲) فقط ۲
۳) هیچ مقدار a
۴) هر مقدار a

پاسخ : گزینه ی «۴»

باید $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=-$ باشد، لذا :

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم: $HOP: \lim_{x\to ۱^+}\frac{۴x-۱}{۱}=۳$

و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-a+۳)=۳=f(۱)$

می بینیم که حدچپ و راست ومقدار در $x=۱$ به ازای هر مقدار a برابر است .

۲۸. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[۲\sin x]$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱)از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته
۲) از چپ پیوسته ـ از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته ـ از راست پیوسته
۴) از چپ پیوسته ـ از راست پیوسته

پاسخ : گزینه ی«۱»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}[۲\sin x]=[۲(۱^-)]=[۲^-]=۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\left[۲\sin\frac{\pi}{۲}\right]=۲$$

بنابراین تابع در این نقطه نه از راست پیوسته است و نه از چپ.

۲۹. تابع با ضابطه‌ی
$$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۲x}-۲}{x^{۲}-۴} & x>۲\\ k & x=۲\\ \dfrac{\sqrt[۳]{x+۶}-۲}{x-۲} & x<۲\end{cases}$$
در $x=۲$ پیوستگی چپ دارد، آنگاه:

۱) $k=۰$ ۲) $k=\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $k=\frac{۱}{۸}$ ۴) $k=\frac{۱}{۶}$

پاسخ : گزینه ی «۲» $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{x\to ۲^-}\frac{\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^{۲}}}-}{۱}=\frac{\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^{۲}}}}{۱}=\frac{۱}{۱۲}$$

پس $k=\frac{۱}{۱۲}$.

۳۰. تابع با ضابطه‌ی
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^{۲}x}{۱-\cos x} & ; \quad x>۰\\ a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{۶}\right) & ; \quad x\le ۰\end{cases}$$
به ازای کدام مقدار a در $x=۰$ پیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

پاسخ : گزینه ی«۲»

$$\lim_{x\to ^-} f(x)=\lim_{x\to ^+} f(x)=f(\ )$$

$$\lim_{x\to ^-} f(x)=\lim_{x\to ^-} a\sin\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)=a\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{a}{۲}=f(\ )$$

$$\lim_{x\to ^+} f(x)=\lim_{x\to ^+}\frac{\sin^{۲}x}{۱-\cos x}=-$$

برای رفع ابهام با استفاده از هم ارزی $۱-\cos u \underset{u\to}{\approx} \frac{u^{۲}}{۲}$ داریم:

$$\lim_{x\to ^+}\frac{\sin^{۲}x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ^+}\frac{x^{۲}}{\dfrac{x^{۲}}{۲}}=۲$$

$$\frac{a}{۲}=۲\to a=۴$$

۳۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x+۱}{۳}\right]$ در $x_۰=۲$:

۱)فقط پیوستگی چپ دارد. ۲) فقط پیوستگی راست دارد. ۳) پیوسته نیست. ۴) پیوسته است.

پاسخ : گزینه ی«۴»

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x+۱}{۳}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{۲^+}{۲}\right]-\left[\frac{۲^+ +۱}{۳}\right]=\left[۱^+\right]-\left[۱^+\right]=۱-۱=$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x+۱}{۳}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{۲^-}{۲}\right]-\left[\frac{۲^- +۱}{۳}\right]=\left[۱^-\right]-\left[۱^-\right]=\quad-\quad=$$

$$f(۲)=\left[\frac{۲}{۲}\right]-\left[\frac{۲+۱}{۳}\right]=۱-۱=$$

بنابراین تابع در $x=۲$ پیوسته است.

۳۲. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a+\sin^۲ x & , \quad ۰\le x<\frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & , \quad \frac{\pi}{۴}\le x\le ۲\pi \end{cases}$ روی بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته است؟

۱) $\frac{-۳}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ : گزینه ی « ۱»

باید تابع درمرز ناحیه یعنی $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، لذا :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}(a+\sin^۲ x)=a+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=a+\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+}(\sqrt{۲}\cos ۳x)=\sqrt{۲}\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)=-۱=f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$

پس :

$$a+\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۳۳. تابع f با ضابطه‌ی
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\\ ax+a+۴ & x\le ۱\end{cases}$$
به ازای کدام مقدار a در R پیوسته است؟

۱)هیچ مقدار a ۲) هر مقدار حقیقی a

۳) فقط $a=۰$ ۴) فقط $a=۴$

پاسخ : گزینه ی «۳»

تابع ضابطه ی بالا به ازای $x>۱$ پیوسته است و تابع ضابطه ی پایین نیز به ازای $x<۱$ پیوسته است، لذا برای پیوستگی تابع در R کافی است، تابع در X=۱ پیوسته باشد، لذا:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}}=-$$

برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$HOP:\lim_{x\to 1+}\frac{2x}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}(ax+a+4)=2a+4=f(1)$$

لذا:

$$4=2a+4\Rightarrow a=0$$

۳۴. تابع براکت $y=\left[\sqrt{۳x}\right]$ در بازه‌ی $\left[۳,۴۸\right]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱)۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه ی «۱» : نمودار تابع $g(x)=\sqrt{3x}$ به صورت زیر است، با توجه به نمودار دیده می شود که تابع همواره صعودی است و تابع $f(x)=[g(x)]$ در نقاطی ناپیوسته خواهد بود که $\sqrt{3x}$ عددی صحیح و مثبت شود، بنابراین:

$$\sqrt{3x}=k\ge 0\Rightarrow 3x=k^2$$

از آن جایی که $3\le x\le 48$ است پس $9\le 3x\le 144$ است، لذا تابع در اعداد مربع کامل در این فاصله ناپیوسته است، یعنی:

۱۴۴،۱۲۱ ، ۱۰۰، ۸۱، ۶۴، ۴۹، ۳۶، ۲۵، ۱۶، ۹

اما تابع در ابتدای بازه یعنی $x=3$ از راست پیوسته است (دقت کنید که تابع اکید است) و در $x=48$ (انتهای بازه) ناپیوسته است. زیرا باید در این نقطه پیوستگی چپ داشته باشد، از آن جایی که تابع اکیدا صعودی است، در این نقطه پیوستگی راست خواهد داشت بنابراین تابع در این بازه در ۹ نقطه ناپیوسته است.

۳۵. نمودار تابع براکت $y=[۲\sin x]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دربازه‌ی $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ : گزینه ی «۲»

ابتدا نمودار تابع $y=\sin X$ را رسم می کنیم، نمودار این تابع همانند نمودار تابع $y=2\sin X$ است فقط عرض هر نقطه را دو برابر می کنیم، نقاط ناپیوستگی تابع نقاطی می توانند باشند که محل تلاقی خط های $y=k(k\in z)$ با نمودار هستند، مگر در نقاطی که تابع در آن نقاط می نیمم نسبی باشد یا احتمالا در نقاط ابتدا و انتهای بازه باشد، از ۹ نقطه ی تلاقی، تابع در نقطه ی A پیوسته است (به دلیل آن تابع در این نقطه پیوستگی راست دارد) و در نقطه ی B تابع f می نیمم نسبی دارد، پس تابع $y=[2\sin x]$ در این نقطه پیوسته است، لذا تابع در ۷ نقطه در این باره ناپیوسته است.

۳۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۳)\left[\frac{۱}{۳}x-۱\right]$ روی بازه‌ی $(۰,۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۱»

تابع $(x-3)$ در R پیوسته است، لذا نقاط ناپیوستگی تابع $\left[\frac{X-3}{3}\right]$ را می یابیم، بنابراین باید $\frac{X-3}{3}=K$ یا $x=3k\ (k\in z)$، که در این بازه نقاط ۳ و ۶می توانند نقاط ناپیوستگی تابع باشند، اما در $x=3$ تابع پیوسته است(بدلیل وجود عامل صفر شونده ی $x=3$ در کنارش):

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{1}{3}x-1\right]=(3-3)\left[\ ^+\right]=0$$
$$\lim_{x\to 3^-}(x-3)\left[\frac{1}{3}x-1\right]=(3-3)\left[\ ^-\right]=0, f(3)=0$$

بنابراین در این بازه، تابع در یک نقطه ناپیوسته است.

۳۷. تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]^۲-[x]$ روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=[x]([x]-1), x\in(-1,2)$$

تابع $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، یعنی در این بازه، تابع در نقاط ۰ و ۱ ناپیوسته است، پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}[x]([x]-1)=\left[0^+\right]\left(\left[0^+\right]-1\right)=0\times -1=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}[x]([x]-1)=\left[0^-\right]\left(\left[0^-\right]-1\right)=-1\times(-2)=2$$
$$f(0)=0$$

تابع x=1 پیوسته است. بنابراین تابع در این بازه در یک نقطه ناپیوسته است.

۳۸. ریشه‌ی معادله $x^۳+x+۱=۰$ در کدام فاصله است؟

۱) $\left(۰,\frac{۱}{۴}\right)$ ۲) $\left(-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴}\right)$ ۴) $\left(-\frac{۱}{۴},۰\right)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

تابع $f(x)=x3+x+1$ تابعی پیوسته در R است، معادله ی $f(x)=x^3+x+1=0$ در بازه ای حتما ریشه خواهد داشت که حاصل ضرب مقادیر آنها منفی باشد، لذا:

$$f(0)=1>0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}+\frac{1}{4}+1>0$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{8}-\frac{1}{2}+1>0$$

$$f\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{-1}{64}-\frac{1}{4}+1>0$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{-27}{64}-\frac{3}{4}+1=\frac{-11}{64}<0$$

بنابراین با امتحان گزینه ها:

$$(1)f(0)f\left(\frac{1}{4}\right)>0$$

$$(2)f\left(\frac{-3}{4}\right)f\left(\frac{-1}{2}\right)<0$$

$$(3)f\left(\frac{-1}{2}\right)f\left(\frac{-1}{4}\right)>0$$

$$(4)f\left(\frac{-1}{4}\right)f(0)>0$$

بنابراین ریشه ی معادله در بازه ی $\left(\frac{-3}{4},\frac{1-}{2}\right)$ خواهد بود.

۳۹. ریشه‌ی معادله‌ی $\sin x=\frac{x}{۳}$ در کدام بازه است؟

۱) $\left(\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}\right)$
۲) $\left(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۴}\right)$
۳) $\left(\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۶}\right)$
۴) $\left(\frac{۵\pi}{۶},\pi\right)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\sin x-\frac{x}{3}=0$$

$$(1)\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{9}>0 \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{9}>0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{9}>0 \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}<0 \end{cases}$$

بنابراین در گزینه ی (۲)، $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$ لذا معادله ی $\sin x-\frac{x}{3}=0$ در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

۴۰. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $x^۴-۴x+۱=۰$ در کدام بازه است؟

۱) $\left(۰,\frac{۱}{۴}\right)$
۲) $\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)$
۳) $\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳}\right)$
۴) $\left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right)$

پاسخ : گزینه ی «۳» : به کمک نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی می توانیم در بازه های داده شده ریشه ی مورد نظر را بیابیم. برای این منظور از کوچک ترین بازه شروع می کنیم:

$$f(x)=X^4-4x+1=0$$

$$(1)\begin{cases} f(0)=0^4-4(0)+1=1>0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^4-4\left(\frac{1}{4}\right)+1=\left(\frac{1}{4}\right)^4>0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^4>0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^4-4\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{1}{81}-\frac{4}{3}+1=\frac{-26}{81}<0 \end{cases}$$

چون $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)$ پس معادله f(x)=0 حداقل یک ریشه در این بازه دارد، می توان ثابت کرد که این معادله یک ریشه قبل از ۱ و یک ریشه بعد از ۱ دارد.

۱ . یکی از ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a+۲)x^{۲}-۷x+۴=a$ بین دو عدد ۱ و ۱ـ است مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $\{a:a<-۲\}$ ۲) $\{a:a>۴\}$ ۳) ϕ ۴) R

پاسخ : گزینه ی «۴»

می دانیم اگر f تابعی پیوسته در بازه ی [a,b] باشد و f(a)f(b)<0 آنگاه معادله ی f(x)=0 در بازه ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد، لذا:

$$f(x)=(a+2)x^2-7x+4-a=0$$

باید f(1)f(-1)<0 باشد، لذا:

$$f(1)=(a+2)-7+4-a=-1$$
$$f(-1)=(a+2)+7+4-a=13$$

از آنجایی که f(1)f(-1)=-13<0 پس معادله همواره یک ریشه در بازه ی (-۱ و ۱) به ازای هر مقدار دلخواه a خواهد داشت.

۴۲. اگر $f(x)=۲^{\frac{۱}{x}}$ و $g(x)=\frac{۲x-۳}{x+۱}$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۰^-}(gof)(x)$ کدام است؟

۱) ۳ـ ۲) ۱ـ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۱» : تابع gof را تشکیل می دهیم و سپس حد چپ را در x=0 می یابیم:

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{2(2^{\frac{1}{x}})-3}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} gof(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(2^{\frac{1}{x}})-3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{2(2^{-\infty})-3}{2^{-\infty}+1}$$
$$=\frac{2(0)-3}{0+1}=-3$$

۴۳. حد کسر $\frac{x^k+x^۲+۱}{x^۵+۳x^۲+۱}$ اگر $x\to\infty$ برابراست با :

۱) فقط (۱) ۲) فقط $۰,۱,\infty$ ۳) فقط $۱,\frac{۱}{۳}$ ۴) فقط (۰)

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$k>5:\lim_{x\to\infty}\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x^2=1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{x^5}=\infty$$

$$k=5:\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2+1}{x^5+3x^2=1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^5}=1$$

$$k<5:\lim_{x\to\infty}\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x^2=1}\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{x^5}=0$$

۴۴. حد کسر $\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n>۳$ ، وقتی $x\to\infty$ برابر ۲ـ است. $m+n$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۲»

از آنجایی که $n>3$ پس $n-2>1$ لذا پرتوان مخرج mx^{n-2} است و از آنجایی که حد تابع عددی غیر صفر شده پس در صورت کسر پرتوان x^{m+3} خواهد بود، زیرا درجه ی آن باید از ۱ بیش تر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=-2$$

با توجه به حد تابع باید:

$$\begin{cases}\frac{1}{m}=-2\Rightarrow m=\frac{-1}{2}\\ m+3=n-2\xrightarrow{m=\frac{-1}{2}}\frac{-1}{2}+3=n-2\to n=\frac{9}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow m+n=\frac{-1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

۴۵. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۴}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

چون وقتی $x\to 00$ عبارت داخل قدر مطلق به $+00$ میل می کند بنابراین: $\left[x^2-4\right]=x^2-4$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to 00}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}\lim_{x\to 00}\frac{x^2-4}{ax^2-x-2}=\frac{1}{a}=1\Rightarrow a=-1$$

حال حد راست عبارت را در $x=-2$ می یابیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to(2)^+}\frac{|x2-4|}{-x2-x+2}=\lim_{x\to(2)^+}\frac{|x-2||x+2|}{-(x^2+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to(2)^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to(2)^+}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x\to(2)^+\Rightarrow |x-2|=-(x-2)$$

$$x\to(2)^+\Rightarrow |x+2|=x+2$$

۴۶. حد عبارت $\left(\dfrac{x^۲+x+۱}{۲x^۲+۱}\right)^{\frac{۲x+۱}{x}}$ وقتی $x\to\infty$ چقدر است؟

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $e^۴$

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{1}}=\frac{1}{4}$$

۴۷. حد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x+[۲x]+\sqrt{x}}{x+|x-۱|}$ وقتی $x \to +\infty$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+[2x]+\sqrt{x}}{x+|x-1|} = \lim \frac{x+(2x-p)+\sqrt{x}}{x+(x-1)}$$

$$= \lim \frac{3x+\sqrt{x-p}}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

۴۸. حد تابع با ضابطه‌ی $\frac{x^۳-[x^۳]}{۴x^۳+۱}$ وقتی $x \to -\infty$ کدام است؟

۱)صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) حد ندارد

پاسخ : گزینه ی «۱»

می دانیم $u=[u]+p$ که در آن $0\le P<1$، پس :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-[x^3]}{4x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0\le P<1}{4x^3+1} = \frac{}{\infty} = 0$$

۴۹. حد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{\sqrt{-x+۱}+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt{-۴x+۱}+\sqrt[۳]{۲۷x}}$ وقتی $x \to -\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) حد ندارد ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x+1}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{-4x+1}+\sqrt[3]{27x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x+1}}{\sqrt{-4x+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-4x}} = \frac{1}{2}$$

۵۰. حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\left(۲-\sqrt{x}\right)\tan\frac{\pi x}{۸}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\tan\frac{\pi x}{8}=0\times\infty$$

عامل بی نهایت $\tan\frac{\pi x}{8}$ است، آن را به مخرج منتقل می کنیم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\cot\frac{\pi x}{8}}=-$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}:\lim\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\cot^2\frac{\pi x}{8}\right)}=\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{-\pi}{8}(1+0)}=\frac{2}{\pi}$$

۵۱. حد تابع $f(x)=\left(۲-\sqrt{x}\right)\left(\cot\pi x+۱\right)$ وقتی $x\to ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۲\pi}$ ۳) $-\frac{۱}{۲\pi}$ ۴) $-\frac{۱}{۴\pi}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim f_{x\to 4}(x)=\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})(\cot\pi x+1)=\times\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})(\cot\pi x+1)$$
$$=\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\cot\pi x+\lim_{x\to 4}2-\sqrt{x}=\lim\frac{2-\sqrt{x}}{\tan\pi x}+0$$

حد فوق ابهام $-$ دارد بنابراین برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$\text{HOP}:\lim_{x\to 4}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\pi(1+\tan^2\pi x)}=\frac{\frac{-1}{4}}{\pi}=\frac{-1}{4\pi}$$

۵۲. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۴x-۸}-\frac{۱}{x^{۲}-۴}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4x-8}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\infty-\infty$$

با مخرج مشترک گیری داریم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{4(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x1}{4(x+2)}=\frac{1}{16}$$

۵۳. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}\left(\frac{۲x}{x^{۲}-۱}-\left|\frac{x}{x+۱}\right|\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $-\infty$

پاسخ : گزینه ی «۲»

ابتدا قدر مطلق را با علامت مناسب بر می داریم وقتی $-1 < x < 0$ آنگاه در عبارت $\left|\frac{x}{x+1}\right|$ ، صورت کسر منفی و مخرج آن مثبت است ، پس داخل قدر مطلق منفی است ، لذا قدر مطلق را با علامت منفی بر می داریم و خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\left(\frac{-x}{x+1}\right)\right)$$

$$=\lim\left(\frac{2x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}\right)=\frac{-2}{0^-}+\frac{-1}{0^+}+\infty-\infty$$

برای رفع ابهام با مخرج مشترک گیری داریم :

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+x}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

۵۴. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\cos x-۱}-\frac{۱}{x}\right)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه ی «۱» : به ازای $x=۰$ ، به ابهام $\infty-\infty$ می رسیم ، برای رفع ابهام از مخرج مشترک گیری استفاده می کنیم ولی قبل از آن

$$1-\cos \approx \frac{u^2}{2}$$

با استفاده از هم ارزی $u \to 0$ و جایگزینی داریم .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{-x^2}{2}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2-x}{x^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

۵۵. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x-\sqrt{x^۲+۲x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : از هم ارزی رادیکالی استفاده می کنیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-|x+1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-(x+1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

۵۶. حد عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲\left(\sqrt{x^۴+x+۱}-\sqrt{x^۴+x+۵}\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+x+1}-\sqrt{x^4+x+5}\right)=\infty(\infty-\infty)=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج پرانتز ضرب می کنیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x^4+x+1-x^4-x-5\right)}{\sqrt{x^4+x+1}+\sqrt{x^4+x+5}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{2x^2}=-2$$

۵۷. در تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\sqrt{x+۳}-\sqrt{x+۷}\right)\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x+۹}\right)$ وقتی $x\to+\infty$ برابر است با :

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}\right)$$
$$=(\infty-\infty)(\infty+\infty)=(\infty-\infty)\infty=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج پرانتز اول ضرب می کنیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+3-(x+7)\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}-4$$

۵۸. حد عبارت $\left(\frac{x^۲}{x+۱}-\frac{x^۲+x}{x-۱}\right)$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2+x}{x-1}\right)=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام با مخرج مشترک گیری داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x-1)-\left(x^2+x\right)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2-\left(x^3+x^2+x^2+x\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-x}{x^2-1}=-3$$

۵۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x^۲+x-۱)(x^۲+x+۱)}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴)صفر

پاسخ : گزینه ی «۳»

برای محاسبه ی مجانب های قائم قابع $y=\dfrac{\sqrt{x}}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}$ ، ابتدا مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم ، اگر حد تابع در هر یک از ریشه ها ، مانند x_0 ,∞ شود ، در این صورت خط $x=x_0$ مجانب قائم خواهد بود.

بنابر این ریشه های مخرج : ریشه حقیقی ندارد.

$$\begin{cases} x^2+x+1=0 \to \Delta 1-4<0 \\ x^2+x-1=0 \to \Delta 1+5>0 \quad (1) \end{cases}$$

معادله ی (۱) ، دارای دو ریشه ی حقیقی است ، از آن جایی که در این معادله $\dfrac{c}{a}=-1<0$ ، معادله دارای دو ریشه ی مختلف العلامه است ، یعنی یک ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی ، از آن جایی که به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، دامنه ی تابع شامل اعداد منفی نخواهد بود، پس ریشه ی منفی مخرج، مجانب قائم نخواهد بود، لذا معادله فقط یک مجانب قائم خواهد داشت.

۶۰. تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{|x|}{\sqrt{x(۲x-۱)^۲(x-۲)}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱» : تابع را به صورت زیر بازنویسی می کنیم : $y=\dfrac{|x|}{|2x-1|\sqrt{x(x-2)}}$ دامنه ی تابع را می یابیم :

$$\begin{cases} x(x-1)>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x>2x \quad \iota<0$$

پس $D_y=(-\infty,0) \quad (2,+\infty)$

مخرج کسر دارای سه ریشه ی $x=2,\ x=0, x=\dfrac{1}{2}$ است ، $x=\dfrac{1}{2}$ مجانب قائم نخواهد بود، زیرا همسایگی آن در دامنه وجود ندارد ($x=\dfrac{1}{2}$ زیر رادیکال را تعریف نمی کند) ، x=۰ از آن جایی که صورت کسر نیز صفر می شود ، باید حد تابع در این نقطه بیابیم :

$$\lim_{x\to 0}=\frac{|x|}{|2x-1|\sqrt{x(x-2)}}=0$$

از آن جایی که حد تابع ∞ نشده پس x=۰ مجانب قائم نیست . در x=۲ :

$$\lim_{x\to 2}=\frac{|x|}{(2x-1)\sqrt{x(x-2)}}=\frac{2}{3\sqrt{0}}=+\infty$$

پس x=۲ مجانب قائم تابع است .

۶۱. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x+1}{|x|+|x-4|-4}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ : گزینه ی «۳» : ابتدا دامنه ی تابع را می یابیم :

$$D_f=R-\{x:|x|+|x-4|-4=0\}$$

بنابر این با حل معادله ی $|x|+|x-4|=4$ داریم :

$$x<0\to -x-x+4=4\to x=0 \text{ غ ق ق}$$

$$0\le x\le 4\to x-x+4=4\to 0\le x\le 4$$

$$x>4\to x+x-4=4\to x=4$$

بنابر این :

$$D_f=R-[0,4]=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$$

تابع در دو نقطه ی ۰ و ۴ مجانب قائم خواهد داشت ، زیرا :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{|x|+|x-4|-4}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x+1}{|x|+|x-4|-4}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

لذا تابع دو خط مجانب قائم x=۰ و x=۴ را دارد.

۶۲. معادله‌ی مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^2\tan^{-1}x}{3x+2x^2}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{\pi}{4}$ ۲) $y=\frac{\pi}{3}$ ۳) $y=\frac{\pi}{2}$ ۴) $y=\pi$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\tan^{-1}x}{3x+2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\tan^{-1}x}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan^{-1}x}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

بنابر این خط $y=\frac{\pi}{4}$ مجانب افقی تابع است . البته با محاسبه ی $\lim_{x\to+\infty}y$ ، مجانب افقی دیگر تابع خط $y=\frac{-\pi}{4}$ است که در گزینه ها وجود ندارد.

۶۳. خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{Ax^{۳}+۱}{(A-۱)x^{۳}+۱۶}$ است. معادله مجانب قائم نمودار f کدام است؟

۱) $x=-۴$ ۲) $x=-۲$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۴$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}=\frac{A}{A-1}+\frac{3}{2}$$

بنابر این : $\frac{A}{A-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2A=3A\Rightarrow A=3$

بنابر این ضابطه ی تابع به صورت زیر خواهد بود :

$$f(x)=\frac{3x^3+1}{2x^3+16}$$

مجانب قائم ریشه ی معادله ی $2x^3+16=0$ است ، یعنی :

$$x^3=-8\to x=-2$$

۶۴. اگر $f(x)=\frac{x+۱۱}{x^{۲}-۳x-۴}$ و $g(x)=\frac{۳}{x-۴}$ ، نقطه‌ی تلاقی مجانب های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۴,-۱)$ ۴) $(۴,۰)$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=(f-g)(x)=\frac{x+11}{x^2-3x-4}-\frac{3}{x-4}$$
$$y=\frac{x+11}{(x-4)(x+1)}-\frac{3}{x-4}$$
$$\Rightarrow y=\frac{x+11-3(x+1)}{(x-4)(x+1)}=\frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)}$$
$$\Rightarrow y=\frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+1)}\overset{x\neq4}{=}\frac{-2}{x1}$$

بنابر این : $y=(f-g)(x)=\frac{-2}{x+1}$

در این تابع مجانب قائم ریشه ی مخرج یعنی $x=-1$ و مجانب افقی برابر است با :

$$\lim_{x\to\infty}(f-g)(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+1}=0\Rightarrow y=0$$

پس نقطه ی (۰ ، ۱-) محل تلاقی مجانب هاست .

۶۵. منحنی به معادله $y=\dfrac{x^{۲}+۳x}{ax^{۲}+۴x-۱}$, $a\neq ۰$ فقط دو خط مجانب دارد، مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\left(\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۱}{۴}\right)$ ۲) $\left(\dfrac{۱}{۲},\dfrac{-۱}{۴}\right)$ ۳) $\left(\dfrac{-۱}{۲},\dfrac{۱}{۴}\right)$ ۴) $\left(\dfrac{-۱}{۲},\dfrac{-۱}{۴}\right)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

با توجه به صورت سوؤال و نظر طراح، تابع یک مجانب افقی حتماً خواهد داشت (دقت کنید که به ازای a =۰ تابع دارای یک مجانب مایل و یک مجانب قائم خواهد بود ولی با حل سؤال و تعیین محل تلاقی نقطه ای به دست می آید که در گزینه ها نیست) معادله ی مجانب افقی تابع $y=\dfrac{1}{a}$ است، با توجه به آن که تابع تنها دو مجانب دارد، پس باید تنها یک مجانب قائم داشته باشد ، یعنی مخرج تنها یک ریشه بدهد ، لذا :

$$\Delta=0\Rightarrow 16+4a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابر این ضابطه ی تابع به صورت زیر خواهد بود :

$$y=\frac{x^2+3x}{-4x^2+4x-1}=\frac{x^2+3x}{-(2x-1)^2}$$

پس خطوط $y=\dfrac{-1}{4}$ و $y=\dfrac{1}{2}$ مجانب هستند و محل تلاقی آنها نقطه ی $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{4}\right)$ خواهد بود.

۶۶. عرض نقطه‌ی تلاقی خط مجانب مایب نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{x-۲}$ با محور yها کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۴»

درجه ی صورت یک واحد از درجه ی مخرج بیشتر است ، پس با تقسیم صورت به مخرج داریم :

$$\begin{array}{l|l}
x^2+1 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\left(x^2-2x\right) & x+2 \\ \cline{1-1}
\quad 2x+1 & \\
-(2x-4) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad 5 &
\end{array}
\qquad y=x+2$$

بنابر این عرض از مبدأ مجانب مایل (۲) است.

۶۷. یکی از مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\dfrac{2x^3+ax^2+5}{x^2+x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ـ قطع می‌کند a کدام است؟

۱) ۳ـ　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۶

پاسخ : گزینه ی «۴»

درجه ی چند جمله ای صورت فقط یک واحد از درجه ی جمله ی مخرج بیشتر است. بنابر این مجانب مایل، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج است.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+ax^2+5 & x^2+x \\ \hline \pm 2x^3 \pm 2x^2 & 2x+(a-2) \Rightarrow y=2x+a-2 \\ - \\ (a-2)x^2+5 & \\ \pm(a-2)x^2 \pm (a-2)x & \\ - \\ -(a-2)x+5 & \end{array}$$

این خط محور x ها را در نقطه ی ۲- = x قطع می کند یعنی نقطه ی (۰ و ۲-) در معادله ی خط صدق می کند . بنابر این داریم :

$$y=2x+a-2 \Rightarrow 0=-4+a-2 \Rightarrow a=6$$

۶۸. مساحتی که مجانب مایل نمودار $y=\dfrac{x^3+4x^2+|x|+1}{x^2+x-1}$ با محورهای مختصات می‌سازد، کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$　　۲) ۹　　۳) ۱۶　　۴) ۸

پاسخ : گزینه ی «۱»

با تقسیم صورت به مخرج مجانب مایل را می یابیم :

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2+|x|+1 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3+x^2-x) & x+3 \\ \hline 2x^2+|x|+x+1 & \\ -(3x^2+3x-3) & \\ \hline |x|-2x+4 & \end{array}$$

بنابر این معادله ی مجانب مایل ۳+ y =x است، با توجه به نمودار مساحت ساخته شده با محورهای مختصات برابر است با :

$$S=\frac{1}{2}(3)(3)=\frac{9}{2}$$

۶۹. دو خط مجانب منحنی $y=ax+1-\sqrt{x^2+bx+c}$ در نقطه $A(-1,3)$ متقاطع هستند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۲» : با استفاده از هم ارزی رادیکالی داریم :

$$y=ax+1-\sqrt{x^2+bx+c}$$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(ax+1-\left|x+\frac{b}{2}\right|\right)$$

$$\begin{cases} y=ax+1-x-\frac{b}{2}\ ,\ x\to+\infty & \text{وقتي}\ (1) \\ y=ax+1+x+\frac{b}{2}\ ,\ x\to-\infty & \text{وقتي}\ (2) \end{cases}$$

لذا نقطه ی (۳ ، ۱-) در دو خط صدق می کند :

$$\begin{cases} 3=-a+1+1-\frac{b}{2} \\ 3=-a+1-1+\frac{b}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+\frac{b}{2}=-1 \\ a-\frac{b}{2}=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-2, b=2\Rightarrow a+b=0$$

۷۰. کدام خط مجانب مایل تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{4x^2+4x}+\sqrt{4x^2+1}$ است؟

۱) $y=4x$ ۲) $y=4x+2$ ۳) $y=4x+4$ ۴) $y=4x+1$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+rx}+\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2\left|x+\frac{1}{2}\right|+2|x|\right)$$

بنابر این :

$$\begin{cases} y=2\left(x\ \frac{1}{2}\right)+2x\ ,\ x\to+\infty & \text{وقتي} \\ y=-2\left(x\ \frac{1}{2}\right)-2x\ ,\ x\to-\infty & \text{وقتي} \end{cases}$$

بنابر این خطوط مجانب مایل $y=4x+1$ و $y=-4x-1$ خواهند بود.

۷۱. مجانب‌های تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt[۳]{x^{۳}+۱}$ در کدام نقطه متقاطعند؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(-۱,-۱)$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^{2}+2x}+\sqrt[3]{x^{3}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(|x+1|+x\right)=\begin{cases} y=2x+1, & x\to+\infty \quad \text{وقتي} \quad (1)\\ y=-1, & x\to-\infty \quad \text{وقتي} \quad (2)\end{cases}$$

از حل دستگاه (۱) و (۲) ، نقطه ی تلاقی (‎۱-، ۱-) A است.

۷۲. معادله‌ی مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^{۳}+x^{۲}}{x-۲}}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱) $۲y-۲x-۳=۰$ ۲) $۲y+۲x-۳=۰$ ۳) $۲y-۳x+۳=۰$ ۴) $۲y+۲x+۳=۰$

پاسخ : گزینه ی «۴» : به نکته ی زیر توجه کنید :

نکته : در تابع با ضابطه ی $y=\sqrt{\dfrac{x^{3}+ax^{2}}{x+a'}}$ ، معادله ی مجانب های مایل به صورت زیر است :

$$y=\left|x+\frac{a-a'}{2}\right|$$

بنابر این در این تست :

$$y=\left|x\,\frac{1-(-2)}{2}\right|=\left|x+\frac{3}{2}\right|$$

وقتی $x\to-\infty$ ، آنگاه معادله ی مجانب مایل برابر است با :

$$y=-x-\frac{3}{2}\Rightarrow 2y+2x+3=0$$

۷۳. اضلاع مثلثی منطبق بر محور xها و مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ است. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ : گزینه ی «۴» : برای محاسبه ی مجانب قائم ریشه ی مخرج را می یابیم می شود

چون $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ، $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\infty$ بنابر این $x=-1$ مجانب قائم است. همچنین این تابع یک مجانب مایل

$y = mx + h$ دارد . برای یافتن معادله ی آن به صورت زیر عمل می کنیم :

$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left((x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)-\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)-1$$

ابهام حد $\lim\limits_{x\to\infty}x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1$ از نوع $(0\times\infty)$ است بنابر این برای رفع ابهام عامل ∞ را به مخرج می بریم :

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}\right)-1$$

با کمک گویا کردن ، حاصل حد را می یابیم :

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)}\right)-1$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{1}{x}(1+1)}\right)-1=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x}{2(x+1)}\right)-1$$

$$=-1-1=-2\Rightarrow h=-2$$

پس معادله ی خط مجانب مایل برابر است با :

$$y=x-2$$

حال با رسم مجانب ها در یک دستگاه مختصات داریم :

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{3\times(3)}{2}=4/5$$

دقت کنید که C محل تلاقی مجانب هاست . بنابر این :

$$\begin{cases}x=-1\\ y=x-3\end{cases}\Rightarrow y_C=-3$$

۷۴. کدام تابع مجانب مایل ندارد؟

۱) $y=x+\sqrt{x^2+1}$ ۲) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ ۳) $y=x+\sqrt{x}$ ۴) $y=x+\dfrac{1}{x}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم :

$$(1)\ y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+|x|\right)$$

$$\begin{cases} y=2x\ ,x\to+\infty & \text{وقتی} \\ y=0\ ,x\to-\infty & \text{وقتی} \end{cases}$$

$$(2)\ y=\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

وقتی $x\to\infty$، $\dfrac{1}{x+1}$ به صفر میل می کند و خط $y=x-1$ مجانب مایل تابع است .

$$(3)\ m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x}=1$$

$$h=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}\right)=+\infty$$

تابع فاقد مجانب مایل است .

(۴) در تابع $y=x+\dfrac{1}{x}$ وقتی $x\to\infty$، $\dfrac{1}{x}$ به صفر میل می کند و خط $y=x$ مجانب مایل تابع است .

۷۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۳»

ابتدا دامنه ی تابع را می یابیم :

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-1>0\to x>1 \ \text{یا}\ x<-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>1$$

بنابر این $D_f=(1,+\infty)$ ، بنابر این از ریشه های مخرج فقط $x=1$ مجانب قائم است . از طرفی :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x+0)\Rightarrow y=x$$

بنابر این تابع یک مجانب مایل و یک مجانب قائم دارد.

۷۶. تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{x^{2}-\sqrt{x}}{|x|-1}$ دارای

۱)یک مجانب مایل و یک مجانب قائم است. ۲) یک مجانب مایل است.

۳) یک مجانب قائم و دو مجانب مایل است. ۴) دو مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

پاسخ : گزینه ی «۲»

برای به دست آوردن مجانب قائم ابتدا ریشه های مخرج را می یابیم .

$|x|-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

خط $x = a$ مجانب قائم است هر گاه $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\infty$ بنابر این حد تابع را در هر یک از نقاط $x=1$ و $x=-1$ می یابیم :

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{|x|-1}=\frac{0}{0}$$

در همسایگی $x=1$, $|x|=x$ است بنابر این خواهیم داشت :

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x-1}\overset{HOP}{=}\lim_{x \to 1}\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{3}{2}\neq\infty$$

پس $x=1$ مجانب قائم نیست . همچنین در $x=-1$ داریم :

$\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x^{2}-\sqrt{x}}{|x|-1}$ وجود ندارد :

(در همسایگی $x=-1$ زیر رادیکال منفی می شود .)

پس $x=-1$ نیز مجانب قائم نیست . بنابر این تابع مجانب قائم ندارد. همچنین برای یافتن مجانب مایل داریم :

$$m=\lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{|x|-1}}{x}\overset{|x|=x}{=}\lim_{x \to +\infty}\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x(x-1)}=1$$

دقت شود که به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، x نمی تواند به سمت $\infty-$ میل کند.

$$h=\lim_{x \to +\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x-1}-x\right)$$

$$=\lim_{x \to +\infty}\frac{x^{2}-\sqrt{x}-x^{2}+x}{x-1}=\lim_{x \to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=1$$

$$\Rightarrow y=mx+h=x+1^{*}$$

۷۷. منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=x+\sqrt{1-x^2}$:

۱)یک مجانب افقی و یک مجانب مایل دارد.   ۲) دو مجانب مایل دارد.   ۳) مجانب ندارد.   ۴) دو مجانب افقی دارد.

پاسخ : گزینه ی «۳»

دامنه ی تابع بازه ی $D_f=[-1,1]$ است ، پس تابع مجانب افقی و مایل ندارد و از طرفی چون کسری نیست مجانب قائم نیز ندارد.

۷۸. تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{\dfrac{1-x^4}{x^2-4}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۱»

ابتدا دامنه ی تابع را می یابیم :

$$\frac{1-x^4}{x^2-4}\geq 0 \Rightarrow D_f=(-2,-1] \quad [1,2)$$

از آن جایی که دامنه ی تابع محدود است ، پس تابع مجانب افقی و مایل ندارد . تابع دو مجانب قائم دارد . زیرا :

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{1-x^4}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{-15}{0^-}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to (-2)^+}\sqrt{\frac{1-x^4}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{-15}{0^-}}=+\infty$$

پس تابع دو مجانب قائم $x=2$ و $x=-2$ دارد.

۷۹. تابع با ضابطه‌ی $y=\tan^{-1}\dfrac{|x|}{x-1}$ و چند خط مجانب دارد؟

۱)۱   ۲) ۳   ۳) صفر   ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۴»

از آن جایی که تابع $\tan^{-1}u$ تابعی کران دار است ، پس تابع فاقد مجانب قائم است ، در تعیین مجانب افقی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{|x|}{x-1}\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{x}{x-1}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{|x|}{x-1}\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\frac{x}{x-1}=\tan^{-1}(-1)=\frac{-\pi}{4}$$

بنابر این تابع دارای دو خط مجانب افقی $y=\dfrac{\pi}{4}$, $y=\dfrac{-\pi}{4}$ است .

۸۰. تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{x\sqrt{x^{۲}-۱}+\tan^{-۱}\sqrt{x}}{x^{۲}-۱}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۳»

ابتدا دامنه ی تعریف تابع را می یابیم :

$$\begin{cases} x^{2}-1\geq 0 \to x\geq 1 \quad x \quad l \quad \leq \neq 1 \\ \tan^{-1}\sqrt{x} \to x\geq 0 \\ x^{2}-1\neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(1,+\infty)$$

بنابر این از ریشه های مخرج فقط ۱= x خط مجانب قائم است ، در تعیین مجانب افقی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^{2}-1}+\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^{2}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,|x|+\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^{2}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^{2}-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{x^{2}}=1\to y=1$$

پس تابع یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

۸۱. مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=۲$ به صورت $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{۲(۲+h)^{۲}+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ : گزینه ی «۳»

حد فوق یک ابهام از نوع $\frac{0}{0}$ است ، پس با استفاده از قاعده ی هوپیتال خواهیم داشت :

$$HOP\ \lim_{h\to 0}\frac{2\times 2(2+h)+k}{1}=8+k$$

$$\Rightarrow 8+k=12 \Rightarrow k=4$$

۸۲. مشتق راست تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{\sqrt{(x+۲)^{۲}(x+۳)}}{۲x+\sqrt{x+۶}}$ در $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x+2)^2(x+3)}}{2x+\sqrt{x+6}}=\frac{|x+2|\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+6}}$$

لذا: $f'_+(-2)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\frac{|x+2|\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+6}}-0}{x+2}$$

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x+2|}{|x+2|}\times\frac{\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+6}}$$

وقتی $x>-2$ ، $|x+2|=x+2$ پس :

$$f'_+(-2)=1\times\frac{\sqrt{-2+3}}{-4+\sqrt{4}}=\frac{-1}{2}$$

۸۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|.[x]$ ، مقدار $f'_-(۰)-f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۳»

تابع در x=۰ پیوسته است ، پس :

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|[x]-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)(-1)}{x}=1$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|[x]-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\times0}{x}=0$$

بنابر این : $f'_-(0)-f'_+(0)=1-0=1$

۸۴. مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج رادیکال صورت ضرب می کنیم :

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-1+-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{(1-x^2)^2}}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۸۵. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x=5$ و $x=9$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\sqrt{x^2+144}$$

آهنگ متوسط تغییر $=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(9)-f(5)}{9-5}$ $=2$ $2+h$

$$=\frac{\sqrt{81+144}-\sqrt{25+144}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{225}-\sqrt{169}}{4}=\frac{15-13}{4}=\frac{1}{2}=0/5$$

۸۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه‌ی $[۲/۲۵,۲/۵۶]$ از آهنگ آنی، در شروع این بازه چقدر کم‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\sqrt{x}$$
$$*=\frac{f(2/56)-f(2/25)}{2/56-2/25}=\frac{\sqrt{2/56}-\sqrt{2/25}}{0/31}$$
$$=\frac{1/6-1/5}{0/31}=\frac{10}{31}$$

آهنگ لحظه ای در $x=2/25$ $=f'(2/25)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=2/25}$

$$=\frac{1}{2\times 1/5}=\frac{1}{3}$$

بنابر این : $=\frac{1}{3}-\frac{10}{31}=\frac{1}{93}$

۸۷. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x|x-۱|+a|x-۱|$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=۱$ ۲) $a=۰$ ۳) $a=-۱$ ۴) همه مقادیر

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$f(x)=x|x-1|+a|x-1|=(x+a)|x-1|$$

بنابر این : $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+a)|x-1|}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}(x+a)$$

از آنجایی که $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ وجود ندارد ، پس برای آنکه $f'(1)$ موجود باشد ، باید عامل $(x+a)$ به ازای $x=1$ صفر شود تا حد موجود باشد ، لذا :

$$x+a\Big|_{x=1}=0\to 1+a=0\to a=-1$$

۸۸. مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{(x-1).\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{16}$ ۲) $\dfrac{1}{8}$ ۳) $\dfrac{3}{40}$ ۴) $\dfrac{5}{16}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}=\frac{1}{16}$$

۸۹. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x-1}+x\sqrt{2x}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\underbrace{x^2-1\sqrt[3]{x-1}}_{g(x)}+\underbrace{x\sqrt{2x}}_{h(x)}$$

تابع از مجموع دو تابع g و h تشکیل شده ، اما مشتق تابع g در $x=1$ صفر است ، زیرا :

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)\sqrt[3]{x-1}=0$$

و در تابع h با استفاده از مشتق گیری داریم :

$$h(x)=x\sqrt{2x}\Rightarrow h'(x)=\sqrt{2x}+x\times\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

$$h'(1)=\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f'(x)=h'(1)+g'(1)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+0$$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۹۰. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin(2x-\pi)\times\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ در $x=\dfrac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $2\pi^2$ ۲) π^2 ۴) $\dfrac{\pi^2}{2}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱» : عامل صفر شونده $\sin(2x-\pi)$ است ، فقط از آن مشتق می گیریم :

$$y'=2\cos(2x-\pi)\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 0\times\pi^2=2\pi^2$$

۹۱. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{2}+ax & x>4 \\ 4\sqrt{x}+b & 0\le x\le 4 \end{cases}$ در $x=4$ مشتق پذیر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۷-　　۲) ۱۳-　　۳) ۱۳　　۴) ۲۷

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\begin{cases} x^{2}+ax & , x>4 \\ 4\sqrt{x}+b & , 0\le x\le 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)\Rightarrow 4\sqrt{4}+b=4^2+4a$$

$$\Rightarrow b-4a=8 \qquad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & , x>4 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}} & , 0\le x\le 4 \end{cases}$$

$$f'(4)=f'_-(4)\Rightarrow 8+a=\frac{2}{\sqrt{4}}\Rightarrow a=-7$$

$$b-4a=8\xrightarrow{a=-7} b=-20$$

$$\to a+b=-7+(-20)=-27$$

۹۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax-a & x<1 \\ x^{2}-x & x\ge 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) هر مقدار a　　۴) هیچ مقدار a

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$f(x)=\begin{cases} ax-a & , x<1 \\ x^{2}-x & , x\ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow a-a=1-1$$

تابع به ازای هر a ، $x=1$ پیوسته است .

$$f'(x)=\begin{cases} a & , x<1 \\ 2x-1 & , x\ge 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2-1\Rightarrow a=1$$

۹۳. تابع با ضابطه‌ی $y=\left(x^{۳}+۳x^{۲}+ax+b\right)[x]$ در $x=۲$ مشتق پذیر است، $a+b$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۲- ۳) ۴- ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۴» : در همسایگی ۲= x ، تابع را باز نویسی می کنیم .

$$y=\begin{cases} x^{3}+3x^{2}+ax+b & 1\le x<2 \\ 2\left(x^{3}+3x^{2}+ax+b\right) & 2\le x<3 \end{cases}$$

برای اینکه تابع در ۲= x مشتق پذیر باشد باید در این نقطه پیوسته باشد و $f'_{-}(2)=f'_{+}(2)$ ، بنابر این :

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$$\Rightarrow 8+12+2a+b=2\left(8+12+2a+b\right)$$
$$\Rightarrow 8+12+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-20 \quad (*)$$

شرط برابری مشتق های چپ و راست :

$$y'=\begin{cases} 3x^{2}+6x+a & , 1<x<2 \\ 2\left(3x^{2}+6x+a\right) & , 2<x<3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_{-}(2)=12+12+a=24+a \\ f'_{+}(2)=2\left(12+12+a\right)=48+2a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_{-}(2)=f'_{+}(2)} 24+a=48+2a \Rightarrow a=-24$$
$$\xrightarrow{*} b=28 \Rightarrow a+b=4$$

۹۴. مماس‌های رسم شده بر منحنی $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\ge ۰ \\ x^{۲} & x<۰ \end{cases}$ در مبدأ مختصات، با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

بنابر این زاویه ی بین دو مماس 90 است.

۹۵. تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt[5]{(x-1)^3}+1$ در $x=1$.

۱)خط مماس دارد ولی مشتق ندارد. ۲) خط مماس و مشتق دارد.

۳) خط مماس و مشتق ندارد. ۴) مشتق دارد خط مماس ندارد.

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^3}+1$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است ، اما :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{(x-1)^3}+1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}=+\infty$$

پس در $x=1$ مشتق ندارد، اما از آنجایی که تابع در $x=1$ پیوسته است . پس در $x=1$ خط مماس دارد.

۹۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3} & , \ x\geq 0\\ \left|(x+1)(x+2)^2\right| & , \ x<0\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱)۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه ی «۲»

تابع را به صورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)\sqrt[3]{x-1} & , \ x\geq 0\\ \left|(x+1)(x+2)^2\right| & , \ x<0\end{cases}$$

هر دو ضابطه ی تابع روی دامنه ی خود پیوسته اند، تابع ضابطه ی بالا در $x=1$ (ریشه ی ساده ی زیر رادیکال فرجه ی فرد) مشتق ناپذیر است و تابع ضابطه ی پایین در $x=-1$ (ریشه ی ساده ی داخل قدر مطلق) مشتق ناپذیر است ، در مرز ناحیه یعنی در $x=0$ داریم :

$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)\sqrt[3]{x-1}=-1=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left|(x+1)(x+2)^2\right|=4$$

پس تابع در $x=0$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است ، لذا تابع در سه نقطه ی ۱ ، ۱- ، ۰ مشتق ناپذیر است .

۹۷. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در $x=۴$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y=\frac{1}{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow y'(4)=\frac{-1}{2\sqrt{4^3}}=\frac{-1}{2\sqrt{64}}=\frac{-1}{16}$$

۹۸. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$ ، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۰/۲ ۲) -۰/۱ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

پاسخ : گزینه ی «۳» : با استفاده از فرمول های

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ و } \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

داریم :

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}$$

$$f(x)=\frac{\frac{3+2}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} \Rightarrow f'(2)=\frac{\frac{5}{5^2}}{2\sqrt{\frac{5}{5}}}=\frac{\frac{1}{5}}{2}=\frac{1}{10}$$

۹۹. اگر $f(x)=(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(-۱+\Delta x)-f(-۱)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : حد داده شده ، مشتق تابع در x = -۱ است، پس باید $f'(-1)$ را بیابیم ، با استفاده از فرمول مشتق $(uv)'$ داریم :

$$f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+(x-2)\times\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2}+(-1-2)\times\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}=1+2=3$$

۱۰۰. مشتق عبارت $\left(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲$ به ازای $x=-۸$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از فرمول های $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$ و $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ داریم :

$$f(x)=\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^2$$

$$f'(x)=2\left(\frac{-16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^1$$

$$f'(-8)=2\left(\frac{-16}{64}-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}}\right)\left(\frac{16}{-8}-\sqrt[3]{64}\right)$$

$$f'(-8)=2\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}\right)(-2-4)=2\left(\frac{1}{12}\right)(-6)=-1$$

۱۰۱. مقدار مشتق $y=\cos^۲\frac{\pi}{۳x}$ به ازای $x=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۲}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)^2\Rightarrow y'=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)'\times\left(2\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

$$y'=\left(\frac{\pi}{3x}\right)'\left(-\sin\frac{\pi}{3x}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-\pi}{3x^2}\left(-2\sin\frac{\pi}{3x}\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

با توجه به اتحاد $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ ، می توان نوشت :

$$\Rightarrow y'=\frac{\pi}{3x^2}\sin\frac{2\pi}{3x}$$

$$\Rightarrow y'(4)=\frac{\pi}{3(4)^2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{48}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{96}$$

۱۰۲. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin^6 x+\cos^3 x+\cot x$ در $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰- ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۴»

با استفاده از فرمول $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$ داریم :

$$y=\sin^6 x+\cos^3 x+\cot x$$
$$y'=6\cos x.\sin^5 x-3\sin x.\cos^2 x-\left(1+\cot^2 x\right)$$
$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-0-(1+0)=-1$$

۱۰۳. اگر $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$ ، مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۳»

با استفاده از اتحاد $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ داریم :

$$f(x)=\frac{-\sin^2 x+1}{\sin^2 x+1}$$

با استفاده از فرمول $\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$ داریم :

$$f'(x)=\frac{-1-1}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}(2\sin x\cos x)=\frac{-4\sin x\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\left(1+\sin^2\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{-2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-8}{9}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sin^2\frac{\pi}{4}+1}{\sin^2\frac{\pi}{4}+1}=\frac{1}{3}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}-3\times\frac{-8}{9}=3$$

۱۰۴. اگر $f(x)=\sqrt{۲\sin \pi x^۲}$ آنگاه $f'\left(\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\pi\sqrt{۲}$ ۴) $\pi\sqrt{۳}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از فرمول های $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ و $(\sin u)'=u'\cos u$ داریم :

$$f(x)\sqrt{2\sin \pi x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(2\sin \pi x^2\right)'}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{2\times 2\pi x\ \cos \pi x^2}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}$$

$$\rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cos\frac{\pi}{6}}{2\sqrt{2\sin\frac{\pi}{6}}}=\frac{4\pi\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{1}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۵. اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x^۳+x+۱$ باشد، آنگاه $(gof)'(۰)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$(gof)'(0)\times g'(f(0))$$

اما $f(x)=\sqrt{x+1}$ پس $f(۰)=۱$:

$$=f'(0)\times g'(1)$$

باید $f'(۰)$ و $g'(۱)$ را بیابیم :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=3x^2+1 \Rightarrow g'(1)=4$$

بنابر این :

$$(gof)'(0)\times g'(1)=\frac{1}{2}\times 4=2$$

۱۰۶. اگر $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin \pi x$ ، شیب خط مماس بر منحنی تابع gof در نقطه‌ی تلاقی آن با محور xها، روی بازه‌ی $(\cdot,\pi)$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $\frac{-\pi}{۲}$ ۳) π ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۱»

ابتدا تابع gof را تشکیل می دهیم .

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\cos x)=\sin(\pi\cos x)$$
$$\Rightarrow (gof)(x)=\sin(\pi\cos x)$$

در تلاقی با محور x ها ، ۰ = y است ، پس باید :

$$\sin(\pi\cos x)=0 \Rightarrow \pi\cos x=k\pi \Rightarrow \cos x=k$$

اما $-1\le \cos x\le 1$ ، لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از ۰ ، ۱ ، ۱- ، که در بازه ی $(0,\pi)$ ، تنها ۰ = k یعنی ۰ = cos x حاصل می شود و از آنجا $x=\frac{\pi}{2}$ ، پس کافی است مشتق تابع را در $\frac{\pi}{2}$ بیابیم .

$$(gof)'(x)=(-\pi\sin x)\cos(\pi\cos x)$$
$$(gof)'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-\pi)\cos(0)=-\pi$$

۱۰۷. اگر $h(\cdot)=۲h'(\cdot)=-g(۱)=-g'(۱)=f'(-۱)=۱$ مقدار مشتق تابع $fogoh$ در صفر کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۲» : از آنجایی که $(fog)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$ ، پس :

$$(fogoh)'(x)=(f(g(h(x))))'=(g(h(x)))'f'(g(h(x)))$$
$$=h'(x)\times g'(h(x))\times f'(g(h(x)))$$

در ۰ = x ، خواهیم داشت : $=h'(0)\times g'(h(0))\times f'(g(h(0)))$

اما ۱ = (۰) h ، پس : $=h'(0)\times g'(1)\times f'(g(1))$

و ۱- = (۱) g ، پس :

$$=h'(0)\times g'(1)\times f'(-1)\times 1=\frac{-1}{2}$$

۱۰۸. مشتق $f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر ۲ـ است، شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از فرمول $\left(f\,(u)\right)'=u'f\,'(u)$ داریم :

با فرض $g\,(x)=f\,\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ ، طبق فرض مسأله $g\,'(1)=-2$ است ، پس :

$$g\,'(x)=\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f\,'\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$$

$$g\,'(1)=\frac{6}{3\sqrt[3]{8^2}}f\,'(2)\Rightarrow\frac{1}{2}f\,'(2)=-2\Rightarrow f\,'(2)=-4$$

شیب خط مماس در ۲= x ، ۴- است ، پس شیب خط قائم $\frac{1}{4}$ است.

۱۰۹. اگر $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$ ، آنگاه مشتق تابع $f\left(xf(x)\right)$ ، در نقطه‌ی $x=۲$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۳» : با استفاده از فرمول $\left(f\,(u)\right)'=u'f\,'(u)$ داریم :

$$y=f\,(xf\,(x))\Rightarrow y\,'=(f\,(x)+xf\,'(x))f\,'(xf\,(x))$$
$$y\,'(2)=(f\,(2)+2f\,'(2))f\,'(2f\,(2))$$

اما $f\,(x)=\frac{3}{2}-\sqrt{x+2}$ است ، پس $f\,(2)=\frac{-1}{2}$ و :

$$f\,'(x)=0-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\Rightarrow f\,'(2)=\frac{-1}{4}$$

پس :

$$y\,'(2)=\left(\frac{-1}{2}+2\left(\frac{-1}{4}\right)\right)f\,'\left(2\times\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow y\,'(2)=-f\,'(-1)$$

باید $f\,'(-1)$ را بیابیم :

$$f\,'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+2}}\Rightarrow f\,'(-1)=\frac{-1}{2}$$

پس : $y\,'(2)=-1\times\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

۱۱۰. اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-\frac{۱}{۳}$ مشتق $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در نقطه‌ی $x=-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

حد داده شده ، مشتق تابع در x =۲ است ، پس $f'(2)=\frac{-1}{3}$ ، از طرفی در همسایگی x = -۱ ، $|x|=-x$ پس باید مشتق $f\left(\sqrt{3-x}\right)$ را در x = -۱ بیابیم ، لذا :

$$y=f\left(\sqrt{3-x}\right)\to y'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}f'\left(\sqrt{3-x}\right)$$

$$y'(-1)=\frac{-1}{2\sqrt{3+1}}f'(2)=\frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

۱۱۱. اگر f یک تابع زوج، $f'_+(۱)=۱$ و $f'_-(۱)=۲$ آنگاه $f'_+(-۱)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۱»

می دانیم تابع زوج نسبت به محور y ها تقارن دارد و شیب خطوط مماس در نقاط متقارن نسبت به محور y ها قرینه ی هم است . لذا با توجه به شکل فرضی ، می توانیم شیب ها را بیابیم .

با توجه به شکل :

$$f'_+(1)=-f'_-(-1)\quad (1)$$

$$f'_-(1)=-f'_+(-1)\quad (2)$$

$$=f'_+(-1)=-f'_-(-1)=-2$$

۱۱۲. تابع f زوج است، اگر خط به معادله‌ی $y=2x-3$ مماس بر نمودار در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن باشد، آنگاه معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ـ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y-2x-1=0$ ۲) $2y-x+1=0$ ۳) $y+2x+1=0$ ۴) $2y+x+3=0$

پاسخ : گزینه ی «۲»

نقطه به طول (۱) روی خط مماس است پس :

$$y=2-3=-1\to A(1,-1)$$

f تابعی زوج است ، پس نقطه ی به طول (۱-) به عرض ۱- خواهد بود ، بنابر این (۱- و-۱) A' ، از طرفی ، معادله ی خط مماس در ۱ ، y = ۲ x -۳ است ، پس :

$$f'(1)=2$$

اما f زوج است ، پس :

$$f(x)=f(-x)$$
$$\to f'(x)=-f'(x)\xrightarrow{x=1}f'(1)=-f'(-1)$$

بنابر این $f'(-1)=-f'(-1)$ ، لذا شیب خط مماس بر تابع f در نقطه ی به طول (۱-) ، ۲- است ، در نتیجه شیب خط قائم بر تابع در نقطه ی $A'(-1,-1)$ برابر $\frac{1}{2}$ است ، بنابر این :

$$y=(-1)=\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow 2y+2=x+1\Rightarrow 2y-x+1=0$$

۱۱۳. اگر $y=\tan^2(\pi u)$ و $u=x+\sqrt{x}$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) -8π ۲) -4π ۳) 4π ۴) 8π

پاسخ : گزینه ی «۱» : با استفاده از مشتق زنجیری داریم :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$
$$=2\pi\left(1+\tan^2\pi u\right)\tan\pi u\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

اما به ازای $x=\frac{1}{4}$ در $u=x+\sqrt{x}$ ، $u=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ ، پس :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=\frac{1}{4}\\ u=\frac{3}{4}}}=2\pi\left(1+\tan^2\frac{3\pi}{4}\right)\tan\frac{3\pi}{4}\times(1+1)$$
$$=2\pi(1+1)(-1)\times 2-8\pi$$

۱۱۴. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=|x|+|x^۲-۲x|$ در $x=-۱$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۳- ۴) ۳

پاسخ : گزینه ی «۲» : در همسایگی $x=-1$ ، $x^2-2x>0$ ، $x<0$ ، پس $|x^2-2x|=x^2-2x$ و $|x|=-x$ است ، پس قدر مطلق ها را با علامت مناسب بر می داریم و سپس مشتق می گیریم :

$$y=-x+x^2-2x \rightarrow y'=x^2-3x$$
$$y'=2x-3 \Rightarrow y'(-1)=-2-3=-5$$

۱۱۵. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=|x(x-۱)|+|(x-۱)(x-۲)|+...|(x-۴)(x-۵)|$ در $x=\frac{۳}{۲}$ چقدر است؟

۱) ۲۰- ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰-

پاسخ : گزینه ی «۴» : باید در همسایگی $x=\frac{3}{2}$ قدر مطلق را با علامت مناسب برداریم ، با قرار دادن $x=\frac{3}{2}$ در عبارت ، تنها $(x-1)(x-2)$ منفی است و بقیه به ازای $x=\frac{3}{2}$ مثبت هستند ، پس ، تنها قدر مطلق دوم را با علامت منفی بر می داریم :

$$y=x(x-1)-(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)$$
$$+(x-3)(x-4)+(x-4)(x-5)$$

با مشتق گیری داریم :

$$y'(x)=(2x-1)-(2x-3)+(2x-5)+(2x-7)+(2x-9)$$
$$y'\left(\frac{3}{2}\right)=2-0-2-4-6=-10$$

۱۱۶. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x\sqrt{x+۵}+\sqrt{x}(x+۵)}{\sqrt{x^۲+۵x}}$ در $x=۴$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$$
$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+5}+(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\sqrt{x^2+5x}}$$
$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$
$$\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2(2)}+\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

۱۱۷. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^{3}+3x^{2}+3x+2}{x+2}$ در $x=-1$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$f(x)=\frac{x^{3}+3x^{2}+3x+2}{x+2}=\frac{(x^{3}+3x^{2}+3x+1)+1}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)^{3}+1}{x+2}=\underbrace{\frac{(x+1)^{3}}{x+2}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{h(x)}$$

مشتق تابع g در x = -1 صفر است ، زیرا :

$$g'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^{2}}{x+2}=0$$

و در h (x) داریم :

$$h(x)=\frac{1}{x+2}\Rightarrow h'(x)=\frac{-1}{(x+2)^{2}}\Rightarrow h'(-1)=-1$$

پس :

$$f'(-1)=g'(-1)+h'(-1)=0=-1$$

۱۱۸. مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x$ به ازای $x=\frac{\pi}{24}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

با استفاده از اتحاد $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$ داریم :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\cos 2x)=\frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x)$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)=\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$f'(x)=\cos 4x\to f'\left(\frac{\pi}{24}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱۹. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=(\sin x+\cos x)^{۴}-۲\sin ۲x$ در $x=\frac{۳\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از اتحاد $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$ داریم :

$$f(x)=\left((\sin x+\cos x)^2\right)^2-2\sin 2x$$
$$=(1+\sin 2x)^2-2\sin 2x$$
$$=(1+2\sin 2x\,2x)-2\sin 2x=1+\sin^2 2x$$
$$f'(x)=2(2)\sin 2x\cos 2x=2x=2\sin 4x$$
$$f'\left(\frac{3\pi}{16}\right)=2\sin\frac{3\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

۱۲۰. اندازه‌ی مشتق تابع به معادله‌ی $y=\frac{۱-\tan ۲x}{۱+\tan ۲x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ ، کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از اتحاد $\frac{1-\tan a}{1+\tan a}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$ داریم :

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Rightarrow y'=-2\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)$$
$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2(1+\tan^2 0)=-2$$

۱۲۱. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin ۲x\tan x+\frac{۳x}{x^{۲}-۱}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱)صفر ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) ۳-

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$f(x)=\sin 2x\tan x+\frac{3x}{x^2-1}$$
$$f'(x)=(2\cos 2x)\tan x+(1+\tan^2 x)\sin 2x$$
$$+\frac{3(x^2-1)-2x\times 3x}{(x^2-1)^2}$$
$$f'(0)=0+0+\frac{-3-0}{1}=-3$$

۱۲۲. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\sqrt{x+۴}-\sqrt{x+۱}\right)^۳\left(\sqrt{x+۴}+\sqrt{x+۱}\right)^۲$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۲۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۹}{۴}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$y=\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)^3\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)^2$$
$$y=\left(\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)^2\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)^2\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$
$$=\left(\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)\right)^2\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$=\left((x+4-x-1)^2\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$
$$y=9\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\right)$$
$$y'=9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\Rightarrow y'(0)=9\left(\frac{1}{2\times2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y'(0)=\frac{-9}{4}$$

۱۲۳. اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\frac{x^۲+\sin^۲x+۲x\sin x}{x+۱}$ آنگاه $۲ff'g+g'f^۲$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۲»

عبارت $2ff'g+g'f^2$ ، مشتق تابع f^2g است پس کافی است تابع f^2g را بیابیم:

$$f^2(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}\right)^2=\frac{x}{(x+\sin x)^2}$$

$$g(x)\frac{x^2+\sin^2x+2x\sin x}{x+1}=\frac{(x+\sin x)^2}{x+1}$$
$$(f^2g)(x)=\frac{x}{(x+\sin x)^2}\times\frac{(x+\sin x)^2}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

با مشتق گیری از دو طرف داریم :

$$(f^2g)'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow(f^2g)'(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

۱۲۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\sin x & x\geq 0 \\ ax^n & x<0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق مرتبه‌ی سوم دارد a کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : تابع در $x=0$ مشتق مرتبه ی سوم دارد ، پس

هر دو موجود ; $f_-^{(3)}(0)=f_+^{(3)}(0)$ لذا :

$$f(x)=\begin{cases} x-\sin x & , x\geq 0 \\ ax^n & , x<0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\cos x & , x\geq 0 \\ ax^{n-1} & , x<0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} \sin x & , x\geq 0 \\ an(n-1)x^{n-2} & , x<0 \end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases} \cos x & , x\geq 0 \\ an(n-1)(n-2)x^{n-3} & , x<0 \end{cases}$$

باید حد تابع مشتق سوم در $x=0$ موجود باشد ، بنابر این لازم است $n=3$ باشد ، لذا:

$f_+^{(3)}(0)=1$ و $f_-^{(3)}(0)=an(n-1)(n-2)$

$f_-^{(3)}(0)=a\times 3\times 1=6a$

از آنجایی که مشتق سوم در $x=0$ وجود دارد ، باید :

$$f_+^{(3)}(0)=f_-^{(3)}(0)\Rightarrow 1=6a\Rightarrow a=\frac{1}{6}$$

۱۲۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ مفروض است. اگر مشتق سوم این تابع در صفر موجود باشد، کدام رابطه بین دو عدد مثبت m و n برقرار است؟

۱) $x>3m$ ۲) $m>3n$ ۳) $n>m+3$ ۴) $m>n+3$

پاسخ : گزینه ی «۲»

با فرض $\frac{m}{n}=r$ ، تابع با ضابطه ی $f(x)=x^r$ را داریم ، از این تابع سه بار مشتق می گیریم :

$$f'(x)=rx^{2-1}\Rightarrow f''(x)=r(r-1)x^{r-2}$$

$$f'''(x)=r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

برای آنکه $f'''(0)$ موجود باشد ، باید $r-3>0$ باشد ، لذا $\frac{m}{n}-3>0$ یا $m>3n$.

۱۲۶. اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h}{f'(۱-h)-f'(۱+h)}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f'(1-h)-f'(1+h)}=\frac{0}{0}$$

تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ در $x=۱$ از هر مرتبه ای مشتق دارد، پس برای رفع ابهام با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP:\lim_{h\to 0}\frac{1}{-f''(1-h)-f''(1-h)}=\frac{-1}{2f''(1)}$$

لذا کافی است (۱) f'' را بیابیم .

$$f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4}(x+3)^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{4\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4\sqrt{(1+3)^3}}=\frac{-1}{4\times 8}=\frac{-1}{32}$$

بنابر این حاصل حد خواسته شده برابر است با :

$$\text{حد}=\frac{-1}{2f''(1)}=\frac{-1}{2\times\frac{-1}{32}}=16$$

۱۲۷. اگر $y=\cos\sqrt{۲}x+\sin\sqrt{۲}x$ حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$y=\cos\sqrt{2}x+\sin\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow y'=-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x+\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow y''=-2\cos\sqrt{2}x-2\sin\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow y''=-2\left(\cos\sqrt{2}x+\sin\sqrt{2}x\right)$$

$$\Rightarrow y''=-2y\Rightarrow\frac{y''}{y}=-2$$

۱۲۸. اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ و $g(x)=\frac{(x+۳)^{۳}}{x+۱}$ باشد حاصل $f''g+g'f'$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ : گزینه ی «۳» : عبارت $f''g+g'f'$ ، مشتق عبارت $(f'g)$ است بنابر این :

$$f''g+g'f'=(f'g)'$$

کافی است توابع f' و g را در هم ضرب کنیم و سپس از آن مشتق بگیریم :

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+3)^2}$$

$$(f'g)(x)=\frac{-1}{(x+3)^2}\times\frac{(x+3)^3}{x+1}=\frac{x+3}{x+1}$$

$$\Rightarrow (f'g)'(x)=-\frac{1-3}{(x+1)^2}\Rightarrow (f'g)'(1)=-\frac{-2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

۱۲۹. مشتق مرتبه‌ی چهاردهم $y=(x^{۲}+x)^{۷}+x^{۱۴}$ کدام است؟

۱) $۱۴!$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $۲(۱۴!)$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$y=(x^2+x)^7+x^{14}$$

از آنجایی که مشتق مرتبه ی چهاردهم را می خواهیم ، پس جمله هایی که درجه ی آنها کمتر از ۱۴ باشد ، مشتق مرتبه ی چهاردهم آنها صفر است لذا :

$$y=2x^{14}+g(x)\Rightarrow y^{(14)}=2\times 14!+0=2(14!)$$

۱۳۰. مشتق چهارم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۲)(x^{۲}+۳)$ در $x=۰$ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۶ ۴) صفر

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$y=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)$$
$$y=(x^4+3x^2+2)(x^2+3)$$
$$y=x^6+6x^4+11x^2+6$$
$$y^{(4)}=6\times5\times4\times3x^2+6\times4!+0+0$$
$$y^{(4)}(0)=6\times4!=6\times24=144$$

۱۳۱. مشتق پنجم تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{2}{x^3}$ در $x=-1$ کدام است؟

۱) $2\times 5!$ ۲) $-(7!)$ ۳) $-2\times 5!$ ۴) $7!$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$y=\frac{2}{x^3}=2x^{-3}$$
$$y^{(1)}=2(-3)x^{-4}$$
$$y^{(2)}=2(3\times 4)x^{-5}$$
$$y^{(3)}=2(-3\times 4\times 5)x^{-6}$$
$$y^{(4)}=2(3\times 4\times 5\times 6)x^{-7}$$
$$y^{(5)}=2(-3\times 4\times 5\times 6\times 7)x^{-8}$$
$$y^{(5)}=-(2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7)x^{-8}$$
$$y^{(5)}=-(7!)x^{-8}\Rightarrow y^{(5)}(-1)=-(7!)$$

۱۳۲. اگر $y=\sin x+\cos x$ مشتق نهم تابع را با y_9 نمایش دهیم حاصل $(y_9)^2+y^2$ کدام است؟

۱) $2\sin 2x$ ۲) ۲ ۳) $-2\sin 2x$ ۴) $2+\sin 2x$

پاسخ : گزینه ی «۲»

توابع sin و cos پس از هر چهار بار مشتق گیری تکرار می شوند ،لذا:

$$y^{(9)}=y^{(1)}=\cos x-\sin x$$

پس : $\left(y^{(9)}\right)^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2$

$$=(1-2\sin x\cos x)+(1+2\sin x\cos x)=2$$

۱۳۳. مشتق مرتبه‌ی ششم $y=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $-\sin x-\cos x$ ۲) $\sin x+\cos x$ ۳) $\sin x-\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ : گزینه ی «۱»

با استفاده از اتحاد $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ ، عبارت را به صورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$y=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$$

از آنجایی که توابع sin و cos پس از هر چهار بار تکرار می شوند پس :

$$y^{(6)}=y^{(2)}=-\sin x-\cos x$$

۱۳۴. از رابطه‌ی $y=\sin(x-2y)+\sqrt{x-y}$ مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\sin(x-2y)+\sqrt{x-y}-y=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\left.\frac{\cos(x-2y)+\frac{1}{2\sqrt{x-y}}-0}{-2\cos(x-2y)-\frac{1}{2\sqrt{x-y}}-1}\right|_{(2,1)}$$

$$=-\frac{\cos 0+\frac{1}{2}}{-2\cos 0-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1+\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{7}$$

۱۳۵. اگر $y^3+y=x$ مقدار y'' در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{3}{32}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

با قرار دادن طول نقطه در منحنی ، عرض نقطه را می یابیم .

$$y^3+y=x\xrightarrow{x=2}y^3+y=2\to y=1$$

پس نقطه ی تماس (۱ و ۲) A است . حال با مشتق گیری داریم :

$$y^3+y-x=0$$

$$y'=\frac{f'_x}{f'_y}=-\left.\frac{-1}{3y^2+1}\right|_{y=1}=\frac{1}{4}$$

$$y'=\frac{1}{3y^2+1}$$

مشتق دوم با استفاده از مشتق $\frac{u}{v}$ به دست می آید :

$$y''=\left.\frac{-6yy'}{(3y^2+1)^2}\right|_{\substack{y=1\\ y'=\frac{1}{4}}}=\frac{-6\left(\frac{1}{4}\right)(1)}{(3+1)^2}=-\frac{3}{32}$$

۱۳۶. اگر $f(x)=x^{3}+2x$ مقدار $\left(f^{-1}\right)'(3)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$3=x^{3}+2x \Rightarrow x=1$$

پس:

$$f'(x)=3x^{2}+2 \Rightarrow f'(1)=3+2=5$$

لذا : $\left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$

۱۳۷. مماس بر منحنی تابع معکوس $f(x)=\begin{cases} x^{2}+1 & x\geq 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x_0=2$ واقع بر آن کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(2,0)$ ۲) $(0,0)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,1)$

پاسخ : گزینه ی «۲»

طول ۲ روی تابع معکوس ، عرض روی تابع اصلی است که با توجه به ضابطه ها ، باید از ضابطه ی بالا استفاده کنیم ، لذا :

$$x^{2}+1=2 \rightarrow x^{2}=1 \xrightarrow{x\geq 0} x=1$$

پس نقطه ی $A(1,2)\in f$ و نقطه ی $A'(2,1)\in f^{-1}$ ، اما :

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x>0 \\ 1 & , \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(1)=2$$

پس :

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس معکوس}}=\frac{1}{2}$$

بنابر این معادله ی خط مماس بر تابع معکوس در نقطه ی 'A برابر است با :

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

که از نقاط داده شده ، تنها گزینه ی (۲) در آن صدق می کند.

۱۳۸. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

از آنجایی که عرض روی تابع اصلی ۲ است ، پس :

$$2=x+\sqrt{x}\to x=1$$

لذا نقطه ی $A(1,2)\in f$ و $A'(2,1)\in f^{-1}$ ، پس :

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

پس : $(f^{-1})'(2)=\frac{2}{3}\to f^{-1}$ مماس $m=\frac{2}{3}$

بنابر این معادله ی خط مماس بر f^{-1} در A' برابر است با :

$$y-1=\frac{2}{3}(x-2)$$

در تلاقی با محور y ها ، x =۰ است ، پس :

$$y-1=\frac{2}{3}(0-2)\Rightarrow y=\frac{-1}{3}$$

۱۳۹. ضریب زاویه‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\sin^{-1}\sqrt{۲x-۱}$ در نقطه‌ی $x=\frac{۳}{۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه ی «۲» : با استفاده از فرمول $\left(\sin^{-1}u\right)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ داریم :

$$y=\sin^{-1}\sqrt{2x-1}\Rightarrow y'=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{1-(2x-1)}}$$

$$y'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

۱۴۰. در کدام نقطه از منحنی $y=\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}$ مشتق اول و دوم هر دو مثبت هستند؟

۱) $x=-2$ ۲) $x=0$ ۳) $x=2$ ۴) $x=4$

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$f(x)=\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}$$

با استفاده از فرمول $\left(\tan^{-1}u\right)'=\frac{u'}{1+u^2}$ داریم :

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}=\frac{1}{x^2+1},x\neq -1$$

$$f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

پس :

به ازای $x=-2$ ، f' و f'' مثبت است .

۱۴۱. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=4x+e^{-2x}$ در نقطه‌ای به طول $x=0$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $2y-x=2$ ۲) $2y+x=2$ ۳) $y+2x=1$ ۴) $y-x=1$

پاسخ : گزینه ی «۲»

ابتدا عرض نقطه را می یابیم :

$$y(0)=4\times 0+e^0=0+1=1$$

بنابر این نقطه ی تماس (۱ و ۰) A است ، حال شیب خط مماس را می یابیم :

$$y'=4-2e^{-2x}\Rightarrow y'(0)=4-2e^0=2\Rightarrow m_{\text{مماس}}=2$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{m_{\text{مماس}}}=\frac{-1}{2}$$

بنابر این معادله ی خط قائم برابر است با :

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-0)\Rightarrow 2y-2=-x\Rightarrow 2y+x=2$$

۱۴۲. در تابع $y=\ln(x+\sin x+1)$ خط مماس بر منحنی در $x=0$ کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=2x$ ۴) $y=-2x$

پاسخ : گزینه ی «۳»

ابتدا عرض نقطه را می یابیم :

$$y(0)=\ln(0+0+1)=\ln 1=0$$

پس نقطه ی تماس (۰ و ۰) A است ، بنابر این :

$$y=\ln(x+\sin x+1)\Rightarrow y'=\frac{1+\cos x}{x+\sin x+1}$$

$$\Rightarrow y'(0)=\frac{1+1}{0+0+1}=2\Rightarrow m_{\text{مماس}}=2$$

بنابر این معادله ی خط مماس در A به صورت زیر است :

$$y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x$$

۱۴۳. خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $e^{2y}+\ln x+\frac{y}{x}=1$ در نقطه‌ی $(1,0)$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ی «۱»

$$e^{2y}+\ln x+\frac{y}{x}-1=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{0+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}}{2e^{2y}+0+\frac{1}{x}}\Rightarrow y'(1,0)=\frac{1-0}{2e^{0}+1}=\frac{-1}{3}$$

$m_{\text{مماس}}=\frac{-1}{3}\Rightarrow$ قائم m =۳

بنابر این معادله ی خط قائم در (۰ و ۱) A برابر است با :

$$y-0=3(x-1)$$

در تلاقی با محور y ها ، x =۰ است ، پس :

$$y=3(0-1)=-3$$

۱۴۴. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\ln\left(x^{2}-y\right)=\sqrt{y+1}-x$ در نقطه‌ی $(2,3)$ نیمساز ناحیه‌ی اول را که با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ : گزینه ی «۴» : از عبارت مشتق ضمنی گرفته و نقطه را جایگذاری می کنیم تا شیب خط مماس به دست آید :

$$\ln\left(x^{2}-y\right)=\sqrt{y+1}-x \Rightarrow \ln\left(x^{2}-y\right)-\sqrt{y+1}+x=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{\frac{2x}{x^{2}-y}+1}{\frac{-1}{x^{2}-y}-\frac{1}{2\sqrt{y+1}}}$$

$$\xrightarrow[y=3]{x=2} m_{\text{مماس}}=-\frac{\frac{4}{1}+1}{-\frac{1}{1}-\frac{1}{4}}=-\frac{5}{-\frac{5}{4}}=4$$

معادله ی خط مماس : $\Rightarrow y-3=4(x-2)\Rightarrow y=4x-5$

حال محل برخورد این خط با نیمساز ناحیه ی اول یعنی $x = y$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y=4x-5 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 4x-5=x \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

۱۴۵. خط به معادله‌ی $y+x=0$ قائم بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x^{2}-2x+\ln(x-1)$ است، طول پای قائم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه ی «۲» : ضریب زاویه ی خط قائم (۱-) است ، پس :

$$y=\frac{1}{2}x^{2}-2x+\ln(x-1)$$

$$y'=x-2+\frac{1}{x-1}$$

اگر طول نقطه ی تماس را α بگیریم در نتیجه :

m (مماس) (m قائم) = ۱-

$$\left(\alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}\right)(-1)=-1 \Rightarrow \alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}=1$$

$$\alpha+\frac{1}{\alpha-1}=3 \Rightarrow \frac{\alpha^{2}-\alpha+1}{\alpha-1}=3$$

$$\Rightarrow \alpha^{2}-\alpha+1=3\alpha-3 \Rightarrow \alpha^{2}-4\alpha+4=0$$

$$\Rightarrow (\alpha-2)^{2}=0 \Rightarrow \alpha=2$$

پس طول نقطه ی قائم همان طول نقطه ی تماس یعنی (۲) است .