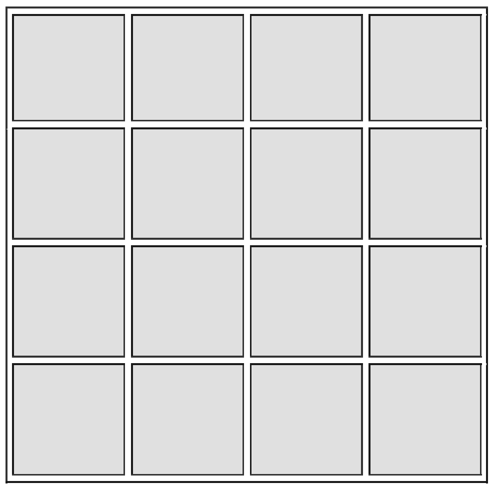
به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. دست‌گیری قیصر!

نیروی انتظامی می‌خواهد قیصر، یکی از اراذل و اوباش سابقه‌دار، را دست‌گیر کند. قیصر در یکی از خیابان‌های شهرکی مربعی شکل، شامل n خیابان عمودی و n خیابان افقی، متواری است. در دو حالت الف و ب، به چند مأمور نیاز است که در هر صورت قیصر دست‌گیر شود؟



قسمتی از کاریکاتوری از جمال رحمتی

الف. سرعت مأمورین با قیصر برابر است و هر لحظه با ردیابی تلفن همراهش از موقعیت او مطلع می‌شوند.

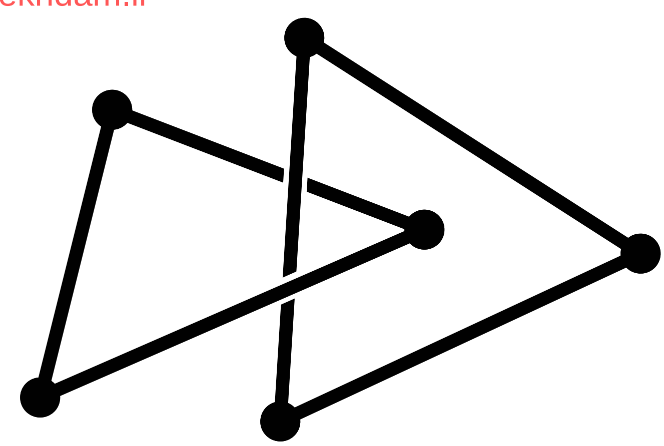
ب. سرعت قیصر نامحدود است، تلفن همراهش خاموش است و تا مأموری از کنار او رد نشود اطلاعی از مکان او به دست نمی‌آورد.

توجه کنید که حرکت افراد پیوسته است و هر جا که بخواهند می‌توانند بایستند یا تغییر مسیر دهند.

در هر قسمت اگر موفق به یافتن جواب دقیق نشدید، کران‌های بالا و پایین برای جواب بیابید.

۲. درگیری مثلثانه!

شش نقطه در فضا را دو به دو با پاره‌خط‌های غیرمتقاطع به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید دو مثلث مجزای در هم گیر کرده به وجود آمده است.



۳. چندجمله‌ای‌ها

الف. ثابت کنید دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود دارد که هر کدام ضریبی بزرگ‌تر از ۱۳۸۷ داشته باشد ولی ضرایب حاصل‌ضرب آن‌ها ۰، ۱ یا ۱- باشد.

ب. آیا مضربی از $x^۲ - ۳x + ۱$ وجود دارد که همه‌ی ضرایب آن ۰ ، ۱ یا ۱- باشد؟

۴. شکل‌های جبری

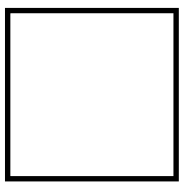
شکل S در صفحه را جبری گوییم اگر چندجمله‌ای دومتغیره‌ی P وجود داشته باشد که مجموعه‌ی صفرهای آن در صفحه، برابر با شکل S باشد؛ یعنی

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid P(x,y) = ۰\right\}$$

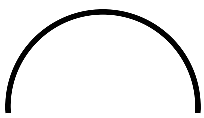
مثلاً دایره‌ی به شعاع یک به مرکز مبدأ، یک شکل جبری است، چون نقاط آن دقیقاً صفرهای $x^۲ + y^۲ - ۱$ هستند.

تعیین کنید که شکل‌های زیر جبری‌اند یا خیر؟

الف. مربع توخالی



ب. نیم‌دایره‌ی بسته



۵. بازی «جاده‌ی امن»

الف. فرض کنید $RBR'B'$ یک چهار ضلعی محدب باشد که رئوس آن را یکی در میان قرمز و آبی کرده‌ایم (R قرمز است). تعدادی نقطه درون، و نه روی مرز، این چهار ضلعی گذاشته‌ایم با این شرط که با اضافه کردن رئوس چهار ضلعی به آن‌ها هیچ چهار تایی، مگر احتمالاً رئوس چهار ضلعی $RBR'B'$، روی یک دایره نباشند. نقاط داخلی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ می‌کنیم. ثابت کنید دقیقاً یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

- مسیری در صفحه از R به R' موجود است که فاصله‌ی هر نقطه‌ی آن تا نقطه‌ای قرمز اکیداً کم‌تر از فاصله‌ی آن نقطه تا هر نقطه‌ی آبی باشد.
- مسیری در صفحه از B به B' موجود است که فاصله‌ی هر نقطه‌ی آن تا نقطه‌ای آبی اکیداً کم‌تر از فاصله‌ی آن نقطه تا هر نقطه‌ی قرمز باشد.

به این دو نوع مسیر، به ترتیب، «مسیر قرمز» و «مسیر آبی» می‌گوییم.

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. دو نفر یکی در میان نقطه‌ی قرمز و نقطه‌ی آبی در درون چهار ضلعی یاد شده در قسمت الف، می‌گذارند به طوری که در هر مرحله، شرط ذکر شده برقرار باشد. بازی زمانی که هر بازی‌کن n نقطه گذاشت تمام می‌شود. هدف نفر اول این است که در نهایت بتواند مسیری قرمز از R به R' ایجاد کند و هدف نفر دوم این است که بتواند در نهایت مسیری آبی از B به B' ایجاد کند.

ب. ثابت کنید اگر $RBR'B'$ مستطیل باشد، به ازای هر n ای، نفر دوم می‌تواند بازی را ببرد.

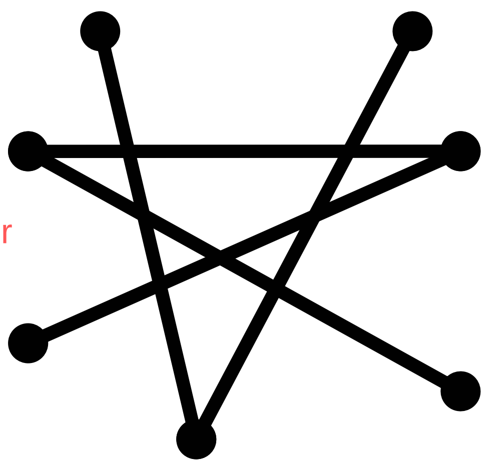
ج. سعی کنید برای چهار ضلعی‌های دیگری هم برنده‌ی بازی را مشخص کنید.

۶. تقسیم مریخ

پنج ایست‌گاه تحقیقاتی در حال فعالیت بر روی مریخ هستند. آیا به ازای هر نحوه قرار گرفتن ایست‌گاه‌ها می‌توان سطح مریخ را به پنج ناحیه‌ی یک‌پارچه و هم‌نهشت تقسیم کرد به طوری که هر ناحیه شامل یک ایست‌گاه باشد؟

۷. گراف‌های «خود متقاطع»

گرافی را «خود متقاطع» گوییم اگر بتوان آن را طوری در صفحه رسم کرد که یال‌های آن پاره‌خط باشد و هر دو یال با هم اشتراک داشته باشند. توجه کنید که هیچ یالی نباید شامل رأسی غیر از رأس‌های انتهایی خودش باشد.



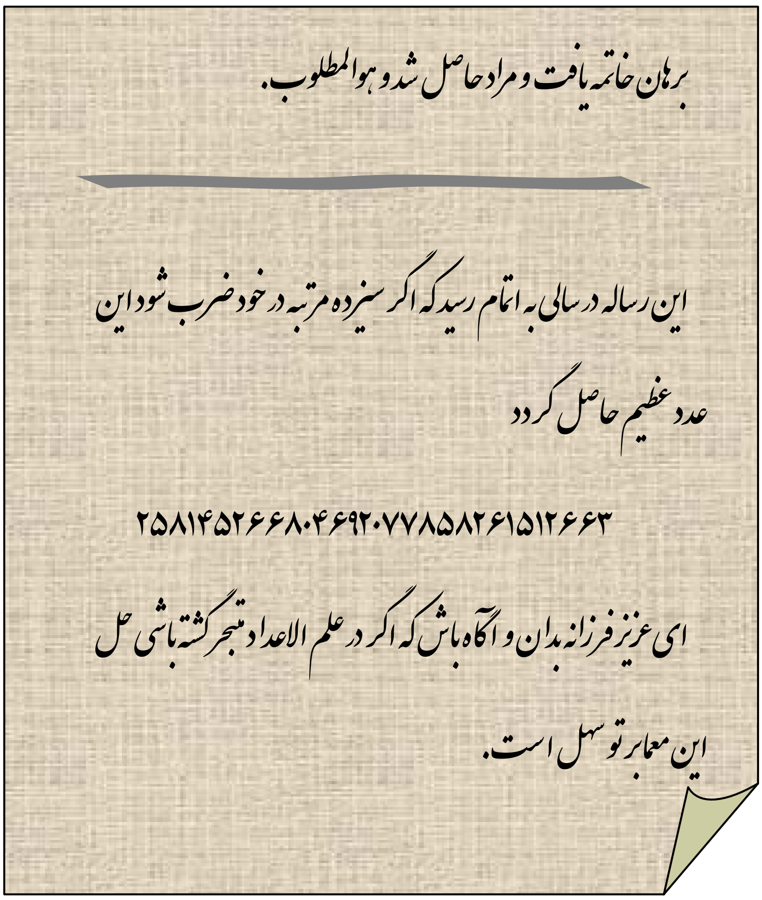
الف. به ازای چه n هایی دور به طول n، یک گراف خود متقاطع است؟

ب. ثابت کنید در یک گراف خود متقاطع تعداد یال‌ها بیش‌تر از تعداد رأس‌ها نیست.

ج. تمام گراف‌های خود متقاطع را مشخص کنید.

۸. نسخه‌ی خطی

در نسخه‌ای خطی از یک رساله‌ی قدیمی ریاضی آمده است:


برهان خاتمه یافت و مراد حاصل شد و هو المطلوب.

این رساله در سالی به اتمام رسید که اگر سیزده مرتبه در خود ضرب شود این عدد عظیم حاصل گردد

۲۵۸۱۴۵۲۶۶۸۰۴۶۹۲۰۷۷۸۵۸۲۶۱۵۱۲۶۶۳

ای عزیز فرزانه بدان و آگاه باش که اگر در علم الاعداد متبحر گشته باشی حل این معما بر تو سهل است.

رساله در چه سالی به پایان رسیده است؟ ثابت کنید!

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. دست‌گیری قیصر!

الف. این حالت با دو مأمور می‌توان قیصر را دست‌گیر کرد. دو نقطه از جدول را «هم‌طول» می‌نامیم اگر دقیقاً یکی زیر دیگری باشد (مؤلفه‌ی اول آن‌ها با هم برابر باشند). برای دست‌گیری قیصر یکی از مأمورین به سطر اول از پایین می‌رود، سپس آن قدر در راستای افقی به سمت قیصر حرکت می‌کند تا با او هم طول شود. سپس همواره در سطر اول طوری حرکت می‌کند که با او هم‌طول بماند. مأمور دوم به سطر دوم می‌رود و عمل مشابهی می‌دهد (ابتدا با قیصر هم‌طول می‌شود و سپس حرکت‌های افقی او را تقلید می‌کند). به این ترتیب دیگر قیصر نمی‌تواند از سطر دوم پایین‌تر برود. حال اگر قیصر بین سطر اول و دوم باشد به وضوح با حرکت مأمور دوم به سمت پایین در نهایت دست‌گیر می‌شود. اگر این طور نباشد، مأمور اول به سطر سوم می‌رود و همان کار را تکرار می‌کند. در این حالت قیصر نمی‌تواند از سطر سوم پایین‌تر برود و اگر بین سطر دوم و سوم باشد دست‌گیر خواهد شد. حال به همین ترتیب مأموران یک سطر، یک سطر بالا می‌روند تا در نهایت قیصر را در بین دو تا از سطرها زندانی کرده و او را دست‌گیر کنند.

ولی با یک مأمور نمی‌توان قیصر را دست‌گیر کرد. برای مثال قیصر می‌تواند صبر کند تا مأمور به فاصله‌ی $\frac{1}{2}$ واحد از او برسد. در این لحظه چون در شهر بن‌بست وجود ندارد، قیصر در یکی از جهت‌ها از مأمور دور می‌شود و همواره این فاصله‌ی $\frac{1}{2}$ را حفظ می‌کند (سرعت قیصر با مأمور برابر است). اگر زمانی فاصله از $\frac{1}{2}$ بیش‌تر شد، قیصر می‌ایستد و حرکت نمی‌کند تا مأمور دوباره به او نزدیک شود.

ب. در قسمت نشان می‌دهیم که با حداقل $n+1$ مأمور می‌توان قیصر را دست‌گیر کرد ولی $n-1$ مأمور برای دست‌گیری او کافی نیست. پس حداقل تعداد مأمورهای لازم یکی از دو عدد n یا $n+1$ است.

در این حالت با $n+1$ مأمور می‌توان قیصر را دست‌گیر کرد. به این شکل که n تا از مأموران به سطر اول رفته در تقاطع‌های این سطر قرار می‌گیرند. مأمور $n+1$ام این سطر را اول تا آخر طی می‌کند. به این ترتیب اگر قیصر در سطر اول باشد، حتماً دست‌گیر می‌شود. سپس این n مأمور همگی با هم یک واحد به سمت بالا حرکت می‌کنند و مأمور $n+1$ام همان کار را این بار در مورد سطر دوم انجام می‌دهد. به همین ترتیب مأموران به تدریج در سطرها بالا می‌روند و بالاخره قیصر را دست‌گیر خواهند کرد.

ولی با $n-1$ مأمور لزوماً نمی‌توان او را دست‌گیر کرد. برای نشان دادن این یک سطر یا ستون را (برای قیصر) «خطرناک» می‌نامیم، اگر مأموری وجود داشته باشد که بتواند حداکثر در عرض $\frac{1}{2}$ واحد زمانی خود را به آن‌جا برساند و «امن» می‌نامیم، اگر خطرناک نباشد. یک تقاطع را هم امن می‌نامیم، اگر سطر و ستون شامل آن هر دو امن باشند. دقت کنید که با توجه به تعداد مأمورها همیشه سطر و ستونی امن و در نتیجه تقاطعی امن وجود دارد. اثبات می‌کنیم قیصر می‌تواند همیشه (به جز زمان‌های بسیار کوتاهی) در تقاطع‌های امن باشد. فرض کنید قیصر ابتدا در تقاطعی امن مثل A باشد. در هر لحظه اگر A خطرناک بشود، تقاطع امن دیگری مثل S در شهر وجود دارد. به توجه به این که سطر و ستون A

و Sخالی هستند، قیصر بلافاصله با سرعت نامحدودش و بدون برخورد با مأمورین و از طریق سطر و ستون‌های خالی می‌تواند خود را به S برساند. قیصر آن قدر در Sمی‌ماند که آن‌جا خطرناک شود و باز روش بالا را تکرار می‌کند. به این ترتیب قیصر همیشه (به جز زمان‌های بسیار کوتاهی) در تقاطع‌های امن به سر می‌برد و بنابراین نمی‌توان او را دست‌گیر کرد.

توضیحمی‌توان یک حالت دیگر متصور شد که سرعت قیصر نامحدود است ولی تلفن هم‌راه او روشن است. در این صورت مشابه قسمت (ب) ثابت می‌شود که $n-1$ مأمور کافی نیست ولی با حذف مأمور $n+1$ام از الگوریتم ارائه‌شده در قسمت (ب) و کمی دقت دیده می‌شود که n مأمور کافی هستند.

سؤال شماره ۲. درگیری مثلثانه!

یکی از نقطه‌ها مانند A را به صورت پیوسته حرکت می‌دهیم، طوری که در هر لحظه هیچ سه نقطه‌ای هم‌خط نباشند. اگر B، C و D سه نقطه‌ی دیگر باشند، می‌گوییم در طول حرکت، یال AD از BC رد می‌شود اگر زمانی وجود داشته باشد که این دو یال متقاطع باشند و قبل و بعد از آن A در دو طرف مختلف صفحه‌ی BCD قرار گرفته باشد.

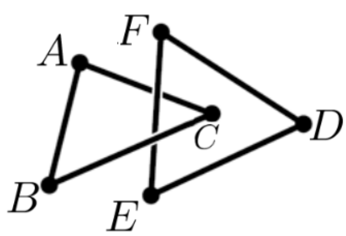
لم اگر یکی از نقطه‌ها را (به صورت پیوسته) حرکت دهیم، طوری که فقط یک بار یالی از یال دیگر رد شود، آن‌گاه تعداد جفت‌های در هم‌گیرکرده (درگیر) از مثلث‌ها به تعداد زوجی تغییر می‌کند.

اثبات. بدون کم‌شدن از کلیت مسئله فرض کنید یال AB از CD رد شود. دو مثلث مجزا را در نظر بگیرید. اگر هیچ یک از آن‌ها شامل یال AB (به طور مشابه CD) نباشد، وضعیت درگیربودن آن‌ها نسبت به هم تغییر نمی‌کند. پس فرض کنید یکی از این دو مثلث شامل AB و دیگری شامل CD باشد. اگر F و E دو نقطه‌ی دیگر باشند، با کمی دقت دیده می‌شود وضعیت دو جفت $\{ABE, CDF\}$ و $\{ABF, CDE\}$ نسبت به هم تغییر می‌کند و حکم ثابت می‌گردد.

□

حال کافی است یک وضعیت خاص از نقطه‌ها را ارائه دهیم که تعداد جفت‌های درگیر فرد باشد. در این صورت با حرکت پیوسته‌ی نقطه‌های می‌توان این وضعیت را به هر وضعیت دیگری تبدیل کرد و لذا طبق آن‌چه گفته شد، این تعداد برای هر وضعیت دیگری نیز فرد و در نتیجه ناصفر است و حکم ثابت می‌شود.

همان شکل صورت مسئله را در نظر بگیرید. یعنی مثلث ABD و نقطه‌ی C هم‌صفحه با این مثلث و درون آن، و دو نقطه‌ی E و F در دو طرف صفحه‌ی گذرا از A, B, C, D که EF بر آن صفحه عمود باشد و پای عمود آن درون مثلث ABC باشد. در این حالت می‌توان دید که تنها جفت درهم‌تنیده همان دو مثلث رسم‌شده یعنی ABC و DEF هستند، و ۱ عددی فرد است!



سؤال شماره ۳. چندجمله‌ای‌ها

الف. فرض کنید $h(x)=(x-1)(x^2-1)(x^4-1)\cdots(x^{2^n}-1)$ در این صورت به راحتی می‌توان دید ضرایب $h(x)$ همگی عضو $\{0,1,-1\}$هستند. از طرف دیگر می‌توان نوشت $h(x)=f(x)g(x)$ که

$$g(x)=(x-1)^n,\quad f(x)=(x+1)(x^2+x+1)\cdots(x^{2^n-1}+x^{2^n-2}+\cdots+1)$$

حال دقت کنید ضرب x در $f(x)$ دقیقاً $n-1$ و ضریب x^{n-2} در $g(x)$ دقیقاً $\frac{n(n-1)}{2}$است که می‌توانند به دل‌خواه بزرگ باشند.

ب. جواب خیر است.

راه‌حل اول. فرض کنید $\alpha>2$ ریشه‌ی بزرگ x^2-3x+1 باشد و $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ بر x^2-3x+1 بخش‌پذیر باشد که a_iها همه در $\{0,1,-1\}$هستند. می‌توان فرض کرد که $a_n=1$. در این صورت چون $f(\alpha)=0$، پس:

$$\alpha^n=\left|\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}|a_i\alpha|^i\le\sum_{i=0}^{n-1}|\alpha|^i=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}<\alpha^n-1$$

که غیرممکن است.

راه‌حل دوم فرض کنید $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ چندجمله‌ای با کم‌ترین درجه‌ی ممکن باشد که ضرایب $f(x)=g(x)(x^2-3x+1)$، همگی $\{0,1,-1\}$باشند. در این صورت می‌توان فرض کرد $b_0=1$. با در نظر گرفتن ضریب x در $f(x)$، داریم $b_1-3b_0\in\{-1,0,1\}$. پس $b_1\ge 2$ ادعا می‌کنیم که دنباله‌ی b_iها اکیداً صعودی هستند و لذا $b_n\ge 2$. در نتیجه ضریب x^{m+2} در $f(x)$حداقل دو است که تناقض است. اثبات ادعا با استقرا و توجه به رابطه‌ی $b_{k+1}-3b_k+b_{k-1}\ge -1$ روشن است، زیرا:

$$0<b_{k-1}+1\le b_k\Rightarrow b_{k+1}\ge 3b_k-b_{k-1}-1\ge 2b_k>b_k>0$$

(پایه‌ی استقرا برای حالت $k=1$ بود که در بالا ثابت شد.)

سؤال شماره ۴. شکل‌های جبری

الف. جواب خیر است. زیرا فرض کنید که $P(x,y)$ یک چندجمله‌ای باشد که روی نقاط مربع صفر شود. اگر $y=ax+b$ معادله‌ی یکی از اضلاع مربع باشد، آن‌گاه $P(x,ax+b)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x است که به ازای بی‌نهایت مقدار x برابر صفر می‌شود. در نتیجه $P(x,ax+b)$ باید متحد با صفر باشد. این یعنی کل نقطه‌های خط $y=ax+b$ باید در صفرهای P باشند، پس صفرهای این چندجمله‌ای نمی‌تواند تنها اضلاع مربع باشد.

ب. در این قسمت هم جواب خیر است. زیرا فرض کنید $B(x,y)$ یک چندجمله‌ای باشد که نقطه‌های نیم‌دایره، صفرهای آن باشند. می‌توان فرض کرد که مرکز نیم‌دایره روی مبدأ است و شعاع آن برابر r است. می‌توان همه‌ی نقطه‌های روی این دایره غیر از نقطه‌ی $(r,0)$ را به صورت $\left(r\frac{1-t^2}{1+t^2},r\frac{2t}{1+t^2}\right)$ برای اعداد حقیقی t نمایش داد. پس عبارت $P\left(r\frac{1-t^2}{1+t^2},r\frac{2t}{1+t^2}\right)$ عبارتی بر حسب t است که برای بی‌نهایت مقدار t (مقادیر متناظر با نقطه‌های نیم‌دایره) مساوی صفر شده است. این عبارت به شکل $\frac{A(t)}{B(t)}$ قابل نمایش است که $A(t)$ و $B(t)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب t هستند. بنابراین $A(t)$ باید برای بی‌نهایت مقدار t برابر صفر شود. پس $A(t)$ متحد با صفر است. این یعنی برای هر t، $P\left(r\frac{1-t^2}{1+t^2},r\frac{2t}{1+t^2}\right)=0$. در نتیجه تمام نقطه‌های دایره باید در صفرهای $P(x,y)$ باشند که تناقض است.

سؤال شماره ۵. بازی «جاده‌ی امن»

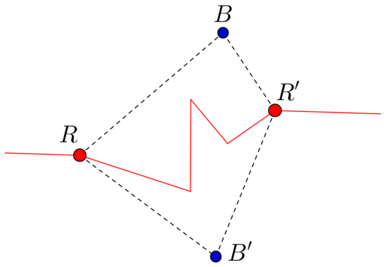
یکی از نقطه‌های قرار داده شده مانند P را در نظر بگیرید. منظور از ناحیه‌ی مربوط به R مجموعه‌ی نقطه‌هایی در صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها تا P از فاصله‌ی آن‌ها تا نقطه‌های دیگر بیش‌تر نیست. به سادگی دیده می‌شود که ناحیه‌های مربوط به دو نقطه‌ی P و P' حداکثر روی عمودمنصف PP' اشتراک دارند. به نقطه‌ای از صفحه که در ناحیه‌ی مربوط به یک نقطه‌ی قرمز باشد و در ناحیه‌ی مربوط به هیچ نقطه‌ی آبی نباشد، نقطه‌ی «قرمزگون» می‌گوییم. در این صورت یک مسیر قرمز، مسیری از R به B است که همه‌ی نقطه‌های مسیر قرمزگون باشند. نقطه‌ی «آبی‌گون» هم به صورت مشابه تعریف می‌شود.

مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که متعلق به حداقل دو ناحیه باشند. طبق آن‌چه که گفتیم، این مجموعه از اجتماعی تعدادی پاره‌خط و نیم‌خط تشکیل شده است که به شکلی که در ادامه می‌آید تشکیل یک گراف می‌دهند. رئوس گراف را نقطه‌هایی بگیرید که عضو حداقل سه ناحیه هستند. نقطه‌ای به نام بی‌نهایت را هم در نظر بگیرید که سر دوم همه‌ی نیم‌خط‌ها باشد. یال‌های گراف را پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌های بین این نقطه‌ها بگیرید. ادعا می‌کنیم که درجه‌ی نقطه‌ی بی‌نهایت ۴ و درجه‌ی بقیه‌ی نقطه‌ها ۳ است.

اگر درجه‌ی نقطه‌ای غیر از بی‌نهایت مانند P برابر ۳ نباشد، آن‌گاه این نقطه متعلق به حداقل چهار ناحیه است. حال نقطه‌های متناظر با این ناحیه‌ها هم‌دایره هستند چون همه از P فاصله‌ی یک‌سانی دارند. پس این نقطه‌ها فقط می‌توانند رئوس چهارضلعی $RBR'B'$ باشد و P هم مرکز دایره‌ی محیطی آن باشد. اما چون نقطه‌ی دیگری هم در چهارضلعی قرار داده شده است، فاصله‌ی P تا آن نقطه کم‌تر از فاصله‌ی P تا رأس‌های چهارضلعی می‌شود و این تناقض است.

برای بررسی نقطه‌ی بی‌نهایت تمام دوایری که از دست‌کم سه تا از نقطه‌های قرار داده شده می‌گذرند را در نظر بگیرید. با توجه به این که بقیه‌ی نقاط قرار داده شده داخل چهارضلعی هستند، می‌توان دید هر نقطه‌ای که خارج این دوایر است، فقط می‌تواند عضو نواحی مربوط به R، B، R' یا B' باشد. چرا اگر نقطه‌ای مثل X در ناحیه‌ی مربوط به P که نقطه‌ای غیر از چهار رأس چهارضلعی است واقع باشد، با وصل کردن P به چهار رأس به کمک چهار نیم‌خط، X درون یکی از چهار ناحیه‌ی ایجاد شده مثلاً ناحیه‌ی بین نیم‌خط PR و PB قرار می‌گیرد. در این صورت چون $XP < XB$، $\angle XBP < angleXPB$ و مشابهاً $\angle XCP < \angle XPC$. با جمع کردن این دو رابطه $\angle XBP + \angle XCP < \angle BPC < ۱۸۰^\circ$ و این یعنی نقطه‌ی X درون دایره‌ی محیطی PBC قرار داشته است. پس تنها نیم‌خط‌های گراف، قسمتی از عمودمنصف‌های $B'R$، $R'B'$، BR' و RB هستند. پس درجه‌ی نقطه‌ی بی‌نهایت برابر ۴ است.

الف) ابتدا ثابت می‌کنیم که یک مسیر آبی و یک مسیر قرمز نمی‌توانند هم‌زمان موجود باشند. فرض کنید این‌چنین باشد. ادعا می‌کنیم که دو مسیر یک‌دیگر را قطع می‌کنند. در این صورت نقطه‌ی تقاطع آن‌ها هم قرمزگون و هم آبی‌گون است که امکان ندارد.



برای اثبات ادعا، از R (و به طور مشابه از R') یک نیم‌خط بر BB' عمود کنید که BB' را قطع نکند. نقاط این دو نیم‌خط قرمزگون هستند. پس مسیر آبی یادشده، این دو نیم‌خط را قطع نخواهد کرد. بنابراین اگر مسیر قرمز بین R و R' را به این دو نیم‌خط اضافه کنیم مسیری قرمز به دست می‌آید که صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند که نقطه‌های B و B' در دو طرف آن هستند. پس مسیر آبی ناچار است این منحنی را قطع کند و به تناقض می‌رسیم.

حال ثابت می‌کنیم مسیر آبی یا قرمز وجود دارد. نقطه‌ای در اشتراک نواحی مربوط به R و B در نظر بگیرید و آن را روی عمودمنصف RB حرکت دهید تا به رأس یک گراف برسید. یک سمت این نیم‌خط، ناحیه‌ی مربوط به R است که قرمزگون است و سمت دیگر آن ناحیه‌ی مربوط به B است که آبی‌گون است. با توجه به این که این رأس درجه‌ی سه است، عضو دقیقاً سه ناحیه است. حال بر حسب این که ناحیه‌ی سوم، قرمزگون و یا آبی‌گون باشد، از روی یالی حرکت کنید که باز هم دو سمت مسیر از دو رنگ متفاوت باشند. حال اگر یال جدید یک پاره‌خط بود، این کار را ادامه دهید. با ادامه‌ی این کار مسیر به طور یک‌تا مشخص می‌شود طوری که یک طرف مسیر آبی‌گون و طرف دیگر مسیر قرمزگون است. ادعا می‌کنیم این مسیر خودش را قطع نمی‌کند. در غیر این صورت، اولین جایی که متحرک به یک نقطه‌ی تکراری می‌رسد را در نظر بگیرید (نقطه‌ی P). این نقطه حتماً یک رأس گراف است و درجه‌ی ۳ دارد و مسیر دو بار به نقطه‌ی P از دو یال مختلف وارد شده است. پس اگر به رنگ ناحیه‌ی بین این دو یال توجه کنیم، می‌بینیم که ممکن نیست یک طرف مسیر همواره آبی‌گون و طرف دیگر همواره قرمزگون باشد و این تناقض است.

در نتیجه این مسیر در انتها به یک نیم‌خط ختم می‌شود. این نیم‌خط نمی‌تواند قسمتی از عمودمنصف $R'B'$ باشد. زیرا در این صورت رنگ دو طرف این نیم‌خط با رنگ دو طرف آن در RB متفاوت خواهد بود. پس مسیر در انتها روی عمودمنصف BR' یا RB' قرار می‌گیرد. فرض کنید روی عمود منصف RB' قرار گیرد. در این صورت نقطه‌ی ابتدایی مسیر را با یک پاره‌خط به B و نقطه‌ای روی نیم‌خط انتهایی را با یک پاره‌خط به B' وصل کنید. حال یک مسیر از B به B' به دست می‌آید که یک طرف آن آبی‌گون است. پس می‌توان این مسیر را کمی تغییر داد تا تمام نقطه‌های آن آبی‌گون شود و یک مسیر آبی به دست می‌آید. در حالت دیگر به طور مشابه یک مسیر قرمز به وجود می‌آید و حکم ثابت می‌شود.

ب نفر دوم می‌تواند به این صورت عمل کند که هر گاه نفر اول نقطه‌ای مثل P گذاشت، او نقطه‌ای دل‌خواه روی پاره‌خط PR قرار دهد. ادعا می‌کنیم با این روش می‌تواند برنده شود. برای این کار طبق قسمت (الف) کافی است ثابت کنیم مسیری قرمز ایجاد نمی‌شود. یک مسیر قرمز در نظر بگیرید. این مسیر ابتدایش R و انتهایش R' است. پس با شروع از R و حرکت روی این مسیر، از ناحیه‌ی مربوط به R خارج می‌شویم. اولین جایی را در نظر بگیرید که این اتفاق می‌افتد و متحرک به ناحیه‌ی نقطه‌ی دیگری مثل P (که قرمز است) وارد می‌شود. در این لحظه، متحرک روی عمودمنصف RP است. اما اگر $P \neq R'$ یک نقطه‌ی آبی روی پاره‌خط RP وجود دارد. حال فاصله‌ی هر نقطه از عمودمنصف RP تا این نقطه، کم‌تر از فاصله‌ی آن تا R است. پس متحرک نمی‌تواند در ناحیه‌ی R باشد.

در حالتی که $P = R'$، متحرک روی عمودمنصف RR' است. اگر در سمتی از خط RR' باشد که B قرار دارد، فاصله‌ی متحرک تا B کم‌تر از فاصله‌ی آن تا R است و اگر در سمت دیگر باشد، فاصله‌اش تا B' کم‌تر است. اگر هم وسط RR' باشد، با توجه به این که نقطه‌ی دیگری هم قرار داده شده است، فاصله‌ی متحرک تا نقطه‌ی دیگر کم‌تر از فاصله‌ی آن تا R است. در هر حال متحرک در این لحظه در ناحیه‌ی مربوط به R نیست که تناقض است.

ج. دو تعمیم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

- **تعمیم اول.** ادعا می‌کنیم که اگر $\angle R + \angle R' \leq ۱۸۰^\circ$ نفر دوم برنده می‌شود. به روش قبلی عمل می‌کنیم. مشابه قسمت قبل، اگر یک مسیر قرمز از ناحیه‌ی R خارج شود و به ناحیه‌ای غیر از R' وارد گردد به تناقض می‌رسیم. پس کافی است ثابت کنیم نواحی R و R' اشتراکی ندارند. فرض کنید B بالای RR' قرار دارد. دایره‌ی محیطی RBR' را C و مرکز آن را O بنامید. حال B' داخل C و زیر RR' است. نقطه‌ای مثل T در اشتراک ناحیه‌های RR' در نظر بگیرید. مشابه قبل $T \neq O$. اگر T (که روی عمود منصف RR' است) بالای O باشد، فاصله‌اش تا B کم‌تر از R است و اگر پایین O باشد، فاصله‌اش تا B' کم‌تر از R است و مشابه قبل به تناقض می‌رسیم.

- **تعمیم دوم.** اگر $\angle R + \angle R' \leq ۲۷۰^\circ$ باشد، هم نفر دوم می‌تواند برنده شود. در این حالت ادعا می‌کنیم بعد از گذاشتن $R_۱$ توسط نفر اول، نفر دوم می‌تواند $B_۱$ را به گونه‌ای قرار دهد که نواحی R و R' با هم اشتراک نداشته باشند و هم‌چنین نواحی R و $R_۱$ و یا R' و $R_۱$ هم اشتراک نداشته باشند. در این صورت برای مثال اگر نواحی R و $R_۱$ اشتراک نداشتند، از مرحله‌ی دوم به بعد مشابه روش قبل عمل می‌کنیم. حال ناحیه‌ی R با ناحیه‌ی هیچ یک از نقطه‌های قرمز رنگ دیگر اشتراک ندارد و نفر دوم برنده شده است. (توجه کنید که اگر در مرحله‌ای ناحیه‌ی مربوط به دو نقطه مثل P و Q با هم اشتراک نداشته باشند، از آن به بعد هم با هم اشتراک نخواهند داشت).

در طول اثبات از این نکته استفاده می‌کنیم که ناحیه‌ی مربوط به دو نقطه‌ی P و Q با هم اشتراک دارند اگر و تنها اگر دایره‌ای از آن دو نقطه بگذرد که درون آن هیچ نقطه‌ی دیگری نباشد (مرکز همین دایره یک نقطه‌ی اشتراک دو ناحیه است).

فرض کنید $R_۱$ در مثلث $RB'R'$ باشد. هم‌چنین C دایره‌ی محیطی RBR' و به مرکز O باشد. فرض کنید خط RR' افقی و B زیر RR' باشد. برای این که نواحی R و R' اشتراک نداشته باشند، طبق نکته‌ی بالا کافی است $B_۱$ داخل C و بالای RR' باشد. حال اگر $\angle ORR_۱ < ۹۰^\circ$ قسمتی از پاره‌خط $RR_۱$ درون C قرار دارد و می‌توان $B_۱$ را با این شرط روی $RR_۱$ انتخاب کرد و نتیجه حاصل می‌شود. پس فرض کنید $\angle ORR_۱ \geq ۹۰^\circ$ و $\angle OR'R_۱ \geq ۹۰^\circ$.
برای این که ناحیه‌ی R با $R_۱$ اشتراک نداشته باشد، کافی است $B_۱$ زیر $RR_۱$ و داخل دایره‌ی محیطی $RR_۱B'$ باشد. اگر این دایره با C داخل چهارضلعی اشتراک داشته باشد، مطلوب ماست. پس فرض کنید این گونه نباشد. بنابراین اگر از B' دایره‌ی $C_۱$ را طوری رسم کنیم که در R بر C مماس باشد، $R_۱$ باید داخل آن باشد. به طور مشابه فرض کنید $R_۱$ داخل دایره‌ی $C_۲$ است که از B' می‌گذرد و در R' بر C مماس است. اما ادعا می‌کنیم چنین چیزی ممکن نیست. برای این کار کافی است ثابت کنیم $C_۱$ و $C_۲$ داخل چهارضلعی اشتراک ندارند.
اگر P مرکز اصلی سه دایره‌ی C، $C_۱$ و $C_۲$ باشد، آن‌گاه زاویه‌ی بین $C_۱$ و ضلع RB' در نقطه‌ی B' برابر است با:

$$\angle B'RP = \angle ORB' - ۹۰^\circ = \angle ORR' + \angle R'RB' - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ - \angle B + \angle R'RB - \angle ۹۰^\circ = \angle R'RB' - \angle B$$

و زاویه‌ی بین $C_۲$ و ضلع $R'B'$ در نقطه‌ی B' برابر است با $\angle B'R'P = \angle RR'B' - \angle B$ می‌خواهیم نشان دهیم جمع این دو از $\angle B'$ بیش‌تر نیست:

$$\angle R'RB' - \angle B + \angle RR'B' - \angle B \leq \angle B' \Leftrightarrow ۱۸۰^\circ - \angle B' - ۲\angle B \leq \angle B' \Leftrightarrow \angle B + \angle B' \geq ۹۰^\circ$$

که معادلاً یعنی $\angle R + \angle R' \leq ۲۷۰^\circ$ و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

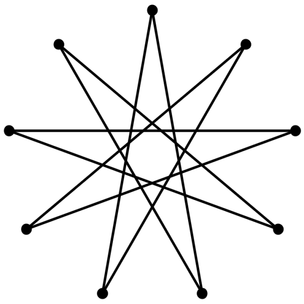
سؤال شماره ۶. تقسیم مریخ

ثابت می‌کنیم برای هر n نقطه روی کره می‌توان n ناحیه‌ی یک‌پارچه‌ی هم‌نهشت یافت که هر کدام شامل دقیقاً یک نقطه باشند.

ابتدا توجه کنید که تعداد کل دایره‌های عظیمه‌ای از کره که شامل حداقل دو تا از نقطه‌ها باشند متناهی است. صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که موازی هیچ کدام از این متناهی دایره‌ی عظیمه نباشد و آن را P می‌نامیم. حال دو صفحه‌ی موازی با P که مماس بر کره هستند را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را N و S می‌نامیم. نقطه‌ی تماس N با کره را «قطب شمال» و نقطه‌ی تماس S با کره را «قطب جنوب» می‌نامیم. $n-۱$ صفحه بین N و S موازی P در نظر می‌گیریم که کره را قطع کنند و به همراه N و S کره را به شکلی به n ناحیه تقسیم کنند که درون هر ناحیه (و نه روی مرز آن) دقیقاً یکی از n نقطه باشد. این صفحه‌ها را به ترتیب از شمال به جنوب $P_۱$ تا $P_{n-۱}$ می‌نامیم و به ناحیه‌های بین صفحات قطاع می‌گوییم. هم‌چنین $P_۰$ را برابر N و P_n را برابر S می‌گیریم. در ادامه منظور از دوران، دوران حول خط واصل بین قطب شمال و جنوب است (جهت دوران را جهت مشخص و دل‌خواهی در نظر بگیرید).

از قطب شمال به قطب جنوب، یک نصف‌النهار (نصف دایره‌ی عظیمه) رسم می‌کنیم که از هیچ کدام از n نقطه عبور نکند. فرض کنید این نصف‌النهار صفحه‌های $P_۰$ تا P_n را به ترتیب در نقطه‌های $A_۰$ تا A_n قطع کند. به این ترتیب نقطه‌های $A_{i-۱}$ و A_i روی مرز قطاع iام هستند ($۱ \leq i \leq n$). نقطه‌ای که درون قطاع iام است را B_i می‌نامیم. یک خم درون قطاع iام می‌کشیم که $A_{i-۱}$ را به A_i وصل کند و این خاصیت را داشته باشد که دوران‌یافته‌ی این خم با زاویه‌ی $(i-۱)\frac{۳۶۰}{n}$ درجه سمت چپ B_i و دوران‌یافته‌ی آن با زاویه‌ی $i\frac{۳۶۰}{n}$ درجه سمت راست B_i باشد (راست و چپ با جهتی که برای دوران مثبت در نظر گرفته‌ایم تغیین می‌شود). با کنار هم قرار دادن این خم‌ها برای همه‌ی iها یک خم از شمال به جنوب پیدا می‌کنیم که با دوران‌های این خم به اندازه‌ی زاویه‌های $i\frac{۳۶۰}{n}$ برای $۰ \leq i < n$، کره به n ناحیه‌ی هم‌نهشت یک‌پارچه تقسیم می‌شود که با توجه به نحوه‌ی ساخت خم‌ها در هر یک از ناحیه‌ها دقیقاً یکی از B_iها قرار می‌گیرد.

سؤال شماره ۷. گراف‌های «خود متقاطع»

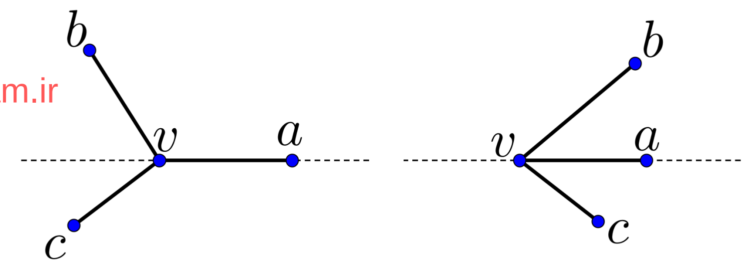


الف. جواب nهای فرد است. دور به طول nرا به شکلی در صفحه رسم می‌کنیم که شرایط گراف خودمتقاطع را داشته باشد. به این صورت که در یک nضلعی منتظم هر رأس را به دو رأس روبه‌رویش وصل می‌کنیم (به شکل روبه‌رو توجه کنید).
حال فرض کنید n زوج باشد و دور به طول n خودمتقاطع باشد. رئوس آن را به ترتیب P_1 تا P_nبنامید. چون همه‌ی یال‌ها با P_1P_2 اشتراک دارند، پس رئوس P_3 تا P_n، یک در میان در طرفین خط P_1P_2قرار می‌گیرند (توجه کنید که در هر گراف خودمتقاطع، امتداد یک یال تنها می‌توان شامل رئوس تنها باشد). پس P_3 و P_n در دو طرف مختلف P_1P_2 قرار دارند و یال P_1P_n نمی‌تواند یال P_2P_3 را قطع کند.

ب.ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.
لمدر یک گراف خودمتقاطع، هر رأس حداکثر دو هم‌سایه‌ی غیر برگ دارد.

اثبات. در غیر این صورت رأس v و هم‌سایه‌های a، b و cآن موجود هستند که درجه‌ی هر یک از آن‌ها بیش‌تر از یک باشد. دو حالت داریم:

- هر یک از زاویه‌های $\angle avb$، $\angle bvc$ و $\angle cva$، حداکثر 180° هستند. در این صورت b و c در دو طرف خط گذرنده از va قرار دارند و هیچ یال متصل به a نمی‌تواند هر دوی vb و vc را قطع کند.
- یکی از سه زاویه‌ی بالا، مثلاً $\angle bvc$ بیش‌تر از 180° است. در این صورت باز هم b و c در دو طرف خط گذرنده از va قرار دارند و استدلال قسمت قبل صادق است.



□

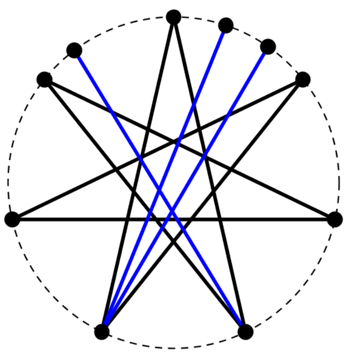
با استفاده از لم بالا، اگر برگ‌ها را حذف کنیم. گرافی به دست می‌آید که درجه‌ی هر رأس حداکثر دو است و در ضمن در این تغییر تعداد رأس‌ها و یال‌ها به یک میزان تغییر می‌کنند. در گراف جدید:

$$2 \times (\text{تعداد یال‌ها}) = \sum_{\text{رأس } v_i} d(v_i) \leq \sum_{\text{رأس } v_i} 2 = 2 \times (\text{تعداد رأس‌ها})$$

پس اثبات حکم این قسمت هم به پایان می‌رسد.

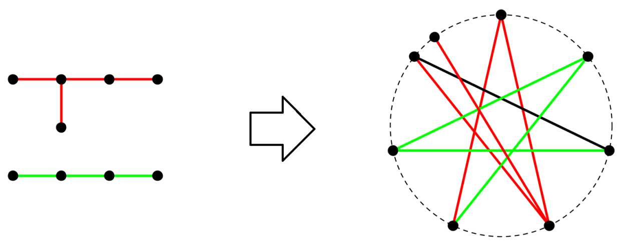
جطبق آن‌چه گفتیم با حذف برگ‌ها، تعدادی مسیر و تعدادی دور به وجود می‌آید که طبق قسمت (الف)، دورها باید همگی فرد باشند. ادعا می‌کنیم همه‌ی جواب‌ها از اضافه کردن احتمالاً تعدادی برگ و رأس تنها به گراف‌های زیر به دست می‌آیند:

- فقط یک دور فرد.
- اجتماع تعدادی مسیر مجزا (ممکن است تک‌رأسی باشند).



فرض کنید دور داشته باشیم. توجه کنید که بین رأس‌های این دور، یال دیگری نیست، زیر اگر یالی باشد یک دور زوج در گراف ایجاد می‌شود که طبق قسمت (الف) امکان ندارد. ادعا می‌کنیم هر یال دیگر حداقل یک رأس مشترک با این دور دارد. در غیر این صورت امتداد آن یال از هیچ رأسی از دور نمی‌گذرد. مشابه قسمت (الف) رئوس دور باید یکی در میان در دو طرف این خط قرار بگیرند که با توجه به فرد بودن دور امکان ندارد. برعکس ادعا می‌کنیم هر تعداد برگ و رأس تنها می‌تواند به یک دور فرد اضافه شود طوری که هم‌چنان خودمتقاطع بماند. برای این کار از روش قسمت الف برای رسم گراف خودمتقاطع برای یک دور با طول فرد استفاده می‌کنیم و برگ‌های هر رأس آن دور را روی کمان مقابل آن رأس (در دایره‌ی گذرنده از رئوس) قرار می‌دهیم. در شکل روبه‌رو یال‌های سیاه‌رنگ دور به طول فرد و یال‌های آبی‌رنگ برگ‌های متصل به دور هستند.

اگر گراف دور نداشته باشد، با حذف برگ‌های آن تعدادی مسیر به وجود می‌آید. ادعا می‌کنیم چنین گرافی همواره خودمتقاطع است. می‌توان دید می‌توان تعدادی رأس و یال به آن اضافه کرد که گراف به یک دور فرد به همراه تعدادی برگ و رأس تنها تبدیل شود. از طرف دیگر هر زیر گراف یک گراف خودمتقاطع، هم گرافی خودمتقاطع است. بنابراین با استفاده از قسمت قبل حکم به طور کامل ثابت شد. شکل سمت راست زیر نحوه‌ی رسم گراف خودمتقاطع برای گراف سمت چپ را نمایش می‌دهد.



سؤال شماره ۸. نسخه‌ی خطی

فرض کنید عدد موجود در صورت سؤال را $A = X^{۱۳}$ بنامیم. با جمع کردن ارقام A می‌توان دید که این عدد و در نتیجه Xبر ۳ بخش‌پذیر است. ضمناً چون $\phi(۱۰) = ۴$، پس $X \equiv X^{۱۳} \equiv ۳ \pmod{۱۰}$.
اگر $X \leq ۱۰۰$ آن‌گاه $X^{۱۳}$ حداکثر ۲۷رقمی است ولی A ۳۰ رقم دارد. از سوی دیگر از $X \geq ۲۰۰$ آن‌گاه $A = X^{۱۳} \geq ۱۰^{۲۹} \times ۸ > ۱۰^{۲۶} \times ۲^{۱۳}$ و لذا Aباید دست‌کم ۳۰ رقمی باشد و رقم بزرگش حداقل ۸ باشد که این طور هم نیست.
پس داریم $۱۰۰ < X < ۲۰۰$ و $۳|X$ و $X \equiv ۳ \pmod{۱۰}$ فقط سه عدد ۱۲۳، ۱۵۳ و ۱۸۳ این سه خاصیت را هم‌زمان دارند. ادعا می‌کنیم $X = ۱۸۳$.

برای اثبات این موضوع دو راه وجود دارد:
راه اول. اگر $X < ۱۶۰$ آن‌گاه:

$$A = X^{۱۳} < ۲^{۴\times۱۳} \times ۱۰^{۱۳} = ۸۱۹۲^{۴} \times ۱۰^{۱۳} < ۱۰^{۴\times۴} \times ۱۰^{۱}۳ = ۱۰^{۲۹}$$

پس Aباید حداکثر ۲۹ رقم داشته باشد که این‌گونه نیست. پس $X > ۱۶۰$ و لذا $X = ۱۸۳$.
راه دوم. فرض کنید رقم دهگان X، برابر aباشد. با در نظرگرفتن همه‌ی اعداد به پیمانه‌ی ۱۰۰ داریم:

$$A \equiv ۶۳ \pmod{۱۰۰} \Rightarrow (۱۰۰ + ۱۰a + ۳)^{۱۳} \equiv (۱۰a + ۳)^{۱۳} \equiv ۳^{۱۳} + ۱۳ \times ۳^{۱۲} \times ۱۰a \equiv ۶۳ \pmod{۱۰۰}$$

دقت کنید که بقیه‌ی جمله‌های بسط دو جمله‌ای بر ۱۰۰بخش‌پذیرند و در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ ظاهر نمی‌شوند.
حال چون $۳^{۱۳} \equiv ۲۳ \pmod{۱۰۰}$ و $۳^{۱۲} \equiv ۴۱ \pmod{۱۰۰}$، داریم:

$$۲۳ + ۳۰ \times ۴۱a \equiv ۶۳ \Rightarrow ۱۲۳۰a \equiv ۴۰ \Rightarrow ۳۰a \equiv ۴۰ \pmod{۱۰۰}$$

پس $۳a \equiv ۴ \pmod{۱۰}$ و از بین ۲، ۵ و ۸ تنها $a = ۸$ در این رابطه صدق می‌کند. پس باید $X = ۱۸۳$ باشد.

به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. خیلی دور، خیلی نزدیک

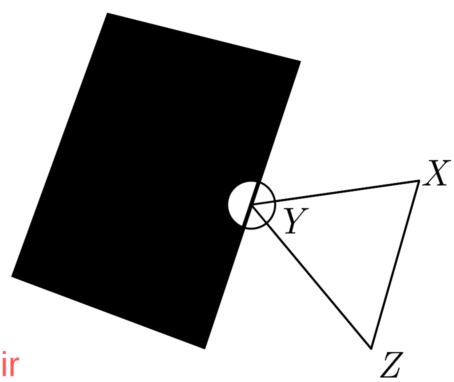
فرض کنید $n > 2$ و A_1، A_2،...، و A_n نقاطی در صفحه باشند که هیچ سه تایی روی یک خط نیستند.

الف. فرض کنید M_1، M_2،...، و M_n نقاطی روی پاره‌خط‌های A_1A_2، A_2A_3،...، و A_nA_1 باشند. نشان دهید اگر B_1، B_2،...، B_n نقاطی، به ترتیب، درون مثلث‌های $M_nA_1M_1$، $M_1A_2M_2$،...، و $M_{n-1}A_nM_n$ باشند آن‌گاه

$$\left|B_1B_2\right| + \left|B_2B_3\right| + \cdots + \left|B_nB_1\right| \leq \left|A_1A_2\right| + \left|A_2A_3\right| + \cdots + \left|A_nA_1\right|$$

که منظور از $\left|XY\right|$ طول پاره‌خط XY است.

ب. اگر X، Y و Z سه نقطه در صفحه باشد، آن‌گاه H_{XYZ} را نیم‌صفحه‌ای بگیرید که مرز آن نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی Y در مثلث XYZ باشد و شامل نیم‌ساز داخلی نباشد.



نشان دهید اگر C_1، C_2،...، و C_n، به ترتیب، نقاطی در $H_{A_nA_1A_2}$، $H_{A_1A_2A_3}$،...، و $H_{A_{n-1}A_nA_1}$ باشند

$$\left|A_1A_2\right| + \left|A_2A_3\right| + \cdots + \left|A_nA_1\right| \leq \left|C_1C_2\right| + \left|C_2C_3\right| + \cdots + \left|C_nC_1\right|.$$

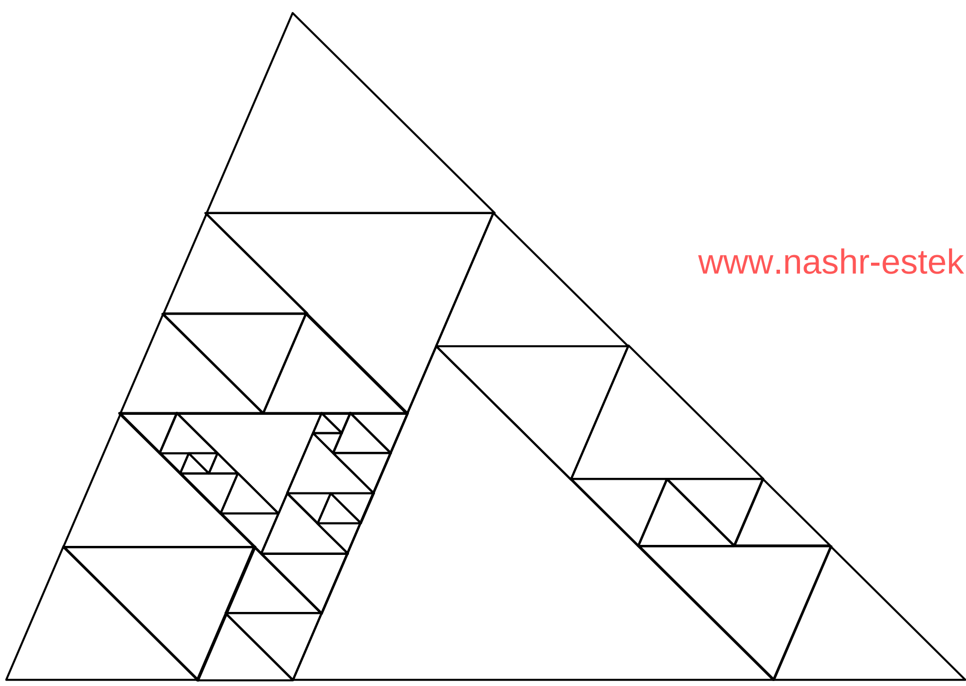
پیش‌نهاد: قسمت ب را ابتدا در حالتی حل کنید که هر C_i روی نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی متناظر باشد.

۲. جای‌گشت ثابت‌قدم

جای‌گشت π روی $\{1,2,\ldots,n\}$ را ثابت‌قدم گوییم اگر مجموعه‌ی $\{\pi(k)-k \mid k=1,2,\ldots,n\}$ دو عضو داشته باشد. ثابت کنید تعداد جای‌گشت‌های ثابت‌قدم برابر است با $\sigma(n)-\tau(n)$ که در آن $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n و $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n است. (یادآوری: جای‌گشت یعنی تابعی یک به یک و پوشا از یک مجموعه به خودش.)

۳. مثلث‌بندی موازی

مثلثی دل‌خواه را به تعدادی مثلث متشابه با خودش افراز کرده‌ایم به‌طوری که هر ضلع هر مثلث کوچک با ضلعی از مثلث اصلی موازی است. در این صورت هر مثلث کوچک تجانسی از مثلث اصلی است و ضریب تجانس می‌تواند مثبت یا منفی باشد. ثابت کنید مجموع همه‌ی ضریب تجانس‌ها برابر یک است.



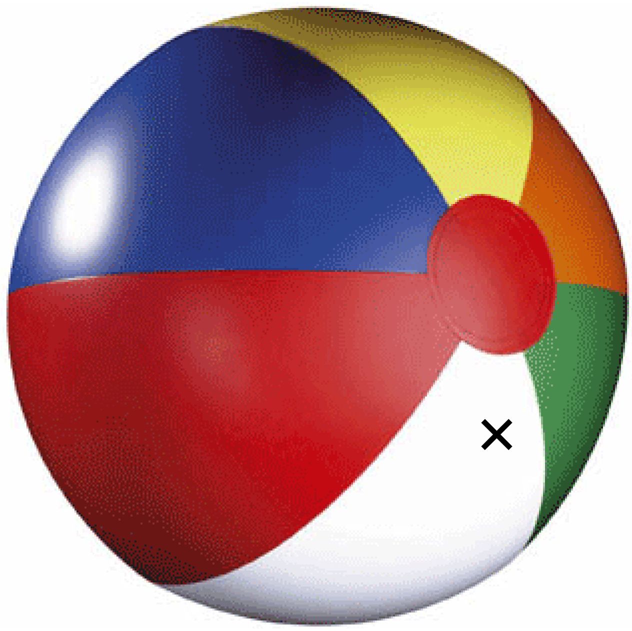
۴. تابعین!

آیا دو تابع $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که به ازای هر $x \neq y$ نابرابری زیر برقرار باشد؟

$$\left|f(x) - f(y)\right| + \left|g(x) - g(y)\right| > ۱$$

۵. توپ غلطان

توپی کاملاً کروی روی زمینی کاملاً مسطح قرار دارد و نقطه‌ای روی آن علامت زده شده است.



می‌خواهیم با غلطاندن توپ روی یک چندضلعی بسته در صفحه این نقطه را به بالا منتقل کنیم به‌طوری که در نهایت توپ به جای اولش برگشته باشد. توجه کنید که در غلطاندن توپ مجاز نیستیم که درجا توپ را بچرخانیم. ثابت کنید این کار ممکن است.

۶. مبنای یک به علاوه‌ی آی!

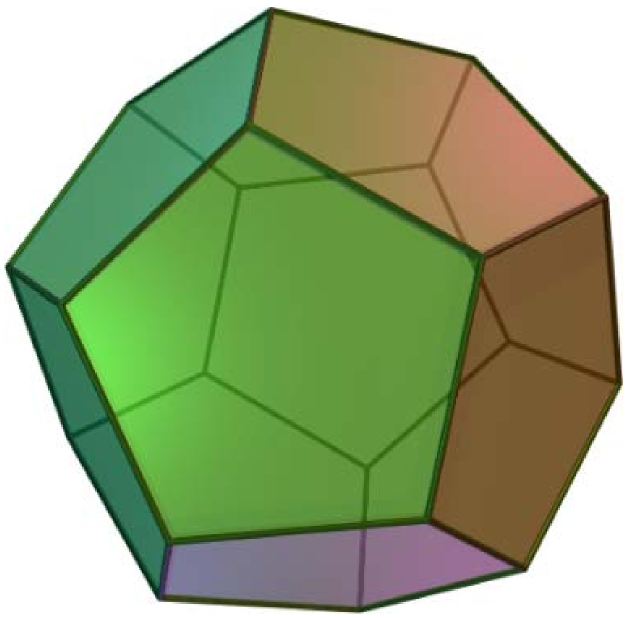
فرض کنید z عددی مختلط و مخالف صفر باشد که قسمت حقیقی و قسمت موهومی آن صحیح است. ثابت کنید این عدد نمایشی یک‌تا به شکل زیر دارد

$$z = a_0 + a_1(1+i) + a_2(1+i)^2 + \ldots + a_n(1+i)^n$$

که $n \geq 0$ و در آن a_jها صفر یا یک هستند و $a_n = 1$.

۷. چندوجهی محیطی

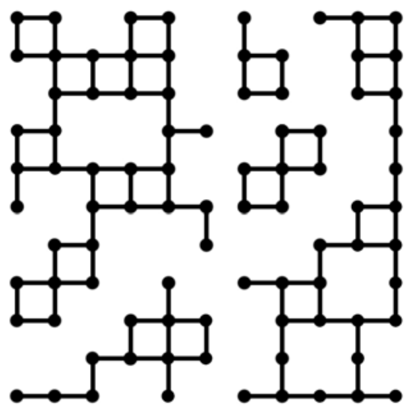
چندوجهی P بر یک کره محیط است. وجوه P را به گونه‌ای با سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم که هیچ دو وجه سیاهی ضلع مشترک ندارند.



ثابت کنید مساحت وجوه سیاه بیش‌تر از مساحت وجوه سفید نیست.

۸. خوشه‌ی نامتناهی

فرض کنید برخی از رئوس شبکه‌ی دو بعدی مسطح (یعنی $\mathbb{Z}^2$) را حذف کرده‌ایم. به این نقاط به شکل یک گراف نگاه کنید؛ دو رأس به هم وصل هستند اگر در یک درایه برابر باشند و در یک درایه یک واحد اختلاف داشته باشند. به هر مؤلفه‌ی هم‌بندی این گراف یک خوشه گفته می‌شود.



فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تعداد رئوس حذف شده‌ی داخل مربع افقی به مرکز مبدأ و به ضلع $2n + 1$ کم‌تر از $n / 2$ باشد. ثابت کنید رئوس حذف‌نشده شامل دقیقاً یک خوشه‌ی نامتناهی است.

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. خیلی دور، خیلی نزدیک

الف. ابتدا یک لم را اثبات می‌کنیم.

لم. اگر P نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه $PB+PC \leq AB+AC$.

اثبات. CP را امتداد می‌دهیم تا AB را در نقطه‌ی D قطع کند. در این صورت با توجه به نابرابری مثلث

$$PB+PC \leq BD+PD+PC = BD+CD \leq BD+DA+AC = AB+AC$$

□

حال به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم. داریم:

$$\begin{aligned}
B_1B_2+B_2B_3+\cdots+B_nB_1 &\leq (B_1M_1+B_2M_1)+(B_2M_2+B_3M_2)+\cdots+(B_nM_n+B_1M_n)\\
&= (B_1M_1+B_1M_n)+(B_2M_1+B_2M_2)+\cdots+(B_nM_{n-1}+B_nM_n)\\
&\leq (A_1M_1+A_1M_n)+(A_2M_1+A_2M_2)+\cdots+(A_nM_{n-1}+A_nM_n)\\
&\leq (A_1M_1+M_1A_2)+(A_2M_2+M_2A_3)+\cdots+(A_nM_n+M_nA_1)\\
&= A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_1
\end{aligned}$$

که نابرابری اول همان نابرابری مثلث و نابرابری دوم با توجه به لم بوده است.

ب. برای هر عدد طبیعی $1 \leq k \leq n$، فرض کنید $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = L_k\overrightarrow{u_k}$ که L_k طول بردار $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ و $\overrightarrow{u_k}$ بردار یکه‌ای هم‌جهت با آن است. در این صورت $\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{u_{k-1}}$ با نیم‌ساز درونی زاویه‌ی $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ هم‌راستا است.
به علاوه فرض کنید $\overrightarrow{\omega_k}=\overrightarrow{A_kC_k}$ در نتیجه با توجه به نحوه‌ی تعریف C_k،

$$\overrightarrow{\omega_k}.(\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{u_{k-1}}) \leq 0 \quad (*)$$

که در این‌جا منظور ازضرب داخلی این دو بردار است. به علاوه دقت کنید که همه‌ی اندیس‌ها به پیمانه‌ی n در نظر گرفته می‌شوند. از طرف دیگر

$$\overrightarrow{C_{k-1}C_k} = \overrightarrow{\omega_k}+L_k\overrightarrow{u_{k-1}}-\overrightarrow{\omega_{k-1}}$$

دقت کنید که $\overrightarrow{u_k}$ بردار واحد در راستای خودش انتخاب شده بود و بنابراین

$$\left|\overrightarrow{C_{k-1}C_k}\right| \geq \overrightarrow{C_{k-1}C_k}.\overrightarrow{u_{k-1}} = (\overrightarrow{\omega_k}+L_k\overrightarrow{u_{k-1}}-\overrightarrow{\omega_{k-1}}).\overrightarrow{u_{k-1}} = \overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_{k-1}}+L_k-\overrightarrow{\omega_{k-1}}.\overrightarrow{u_{k-1}}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\overrightarrow{C_{k-1}C_k}\right| \geq \sum_{k=1}^{n}L_k+\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_{k-1}})-\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_{k-1}}.\overrightarrow{u_{k-1}})$$

از سوی دیگر با توجه به $(*)$

$$\sum_{k=۱}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.(\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{u_{k-۱}}))\leq ۰\Rightarrow\sum_{k=۱}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_{k-۱}})\geq\sum_{k=۱}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_k})=\sum_{k=۱}^{n}(\overrightarrow{\omega_{k-۱}}.\overrightarrow{u_{k-۱}})$$

و این نتیجه می‌دهد

$$\sum_{k=۱}^{n}\left|\overrightarrow{C_{k-۱}C_k}\right|\geq\sum_{k=۱}^{n}L_k=\sum_{k=۱}^{n}\left|\overrightarrow{A_kA_{k+۱}}\right|$$

و اثبات این قسمت هم به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۲. جای‌گشت ثابت‌قدم

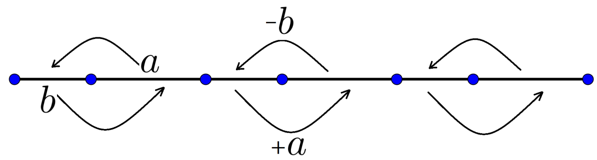
از آن‌جا که $\sum_{k=1}^{n}(\pi(k)-k)=0$ در بین دو عضو مجموعه‌ی $\{\pi(k)-k : k=1,2,\dots,n\}$ باید یکی مثبت و دیگری منفی باشد. فرض کنید اعضای این مجموعه a و $-b$ باشند که $a,b>0$ هم‌چنین فرض کنید $A=\{k:\pi(k)-k=a\}$ و $B=\{k:\pi(k)-k=b\}$.

نخست توجه کنید که اگر $i\in A$ و $i+a+b\leq n$ باشد، $i+a+b$ هم عضوی از A است. زیرا اگر $i\in A$ و $i+a+b\leq n$، از آن‌جا که $\pi(i)=i+a$ بود و π یک جای‌گشت است $\pi(i+a+b)$ دیگر نمی‌تواند برابر $i+a$ باشد و در نتیجه $\pi(i+a+b)-(i+a+b)=a$ که این یعنی $i+a+b\in A$. با استدلال کاملاً مشابه می‌توان دید که اگر $j\in B$ و $j-a-b\geq 1$، $j-a-b\in B$ خواهد بود.

از سوی دیگر می‌توان به راحتی دید که اگر $1\leq i\leq b$، $i\in A$ و اگر $n-a<i\leq n$، $i\in B$. این مشاهدات به ما این امکان را می‌دهد که بفهمیم هر کدام از اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,n\}$ در کدام یک از A یا B قرار دارند. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم i بر $a+b$ کم‌تر یا مساوی b باشد، با توجه به توضیحات بالا باید $i\in A$ و اگر باقی‌مانده‌ی این تقسیم بیش‌تر از b باشد، $i\in B$ بنابراین به سادگی نتیجه می‌شود که $a+b$ باید مقسوم‌علیهی از n باشد. حال دقت کنید که برای هر مقسوم‌علیه d از n، $d-1$ راه مختلف برای نوشتن d به صورت مجموع دو عدد طبیعی وجود دارد. بنابراین تعداد کل (a,b)هایی که $a+b|n$ برابر است با

$$\sum_{d|n}(d-1)=\sum_{d|n}d-\sum_{d|n}1=\sigma(n)-\tau(n)$$

از سوی دیگر برای هر چنین a,bای با توجه به توضیحات بالا می‌توان جای‌گشتی ساخت که خاصیت مسئله را داشته باشد. کافی است که در هر بلوک به صورت $\{k(a+b)+1,k(a+b)+2,\dots,(k+1)(a+b)\}$ جای‌گشت ما b عدد اول را به علاوه‌ی a کرده و a عدد بعدی را منهای b کند.



سؤال شماره ۳. مثلث‌بندی موازی

فرض کنید که ضلع پایین مثلث اصلی افقی باشد، بنابراین مجموع نسبت‌های تجانس برابر است با مجموع علامت‌دار نسبت طول ضلع افقی مثلث‌ها به طول ضلع افقی مثلث اصلی. فرض کنید Δ_0 بیان‌گر مثلث اصلی و $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ بیان‌گر مثلث‌های کوچک باشند. به علاوه برای $0 \leq i \leq k$، h_i را طول ضلعی افقی مثلث Δ_i و برای $1 \leq i \leq k$، ϵ_i را علامت ضریب تجانس Δ_0 و Δ_i بگیرید (اگر تجانس مستقیم باشد، این علامت برابر ۱ و اگر معکوس باشد برابر ۱− است).
با این توضیحات نسبت تجانس دو مثلث Δ_i و Δ_0 برابر $\epsilon_i \frac{h_i}{h_0}$ خواهد بود. بنابراین خواسته‌ی مسئله محاسبه‌ی مجموع $\sum_{i=1}^{k} \left(\epsilon_i \frac{h_i}{h_0}\right) = \frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i h_i$ است.
هر قطعه از پاره‌خط‌های افقی به جز پاره‌خط‌هایی که روی ضلع مثلث اصلی قرار دارند، قسمتی از ضلع دو مثلث هستند که یکی هم‌جهت با مثلث اصلی است و دیگری در جهت متفاوت است. بنابراین هر قطعه از خطوط افقی که ضلع مثلث اصلی نیست، در مجموعِ $\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i h_i$ یک بار با علامت مثبت و یک بار با علامت منفی ظاهر می‌شود و این دو علامت مختلف باعث می‌شوند که تأثیر آن تکه پاره‌خط از بین برود.
در نهایت با توجه به این که هر تکه‌ی افقی از ضلع مثلث اصلی تنها یک بار با علامت مثبت در این مجموع ظاهر می‌شود، داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i h_i = h_0 \Rightarrow \frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i h_i = 1$$

و این همان چیزی است که قصد ثابت کردن آن را داشتیم.

سؤال شماره ۴. تابعین!

برای هر $x \neq y$ داریم:

$$\big(f(x)-f(y)\big)^{۲}+\big(g(x)-g(y)\big)^{۲} \geq \frac{۱}{۲}\Big(\,|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\,\Big)^{۲} > \frac{۱}{۲}$$

این نشان می‌دهد که اگر برای هر xحقیقی نقطه‌ی $(f(x),g(x))$را در صفحه علامت بزنیم، هر دو نقطه‌ی علامت‌زده فاصله‌ای به اندازه‌ی حداقل $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$دارند. اگر حول هر کدام از این نقطه‌ها دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$بزنیم، این دایره‌ها دو به دو یک دیگر را قطع نمی‌کنند. با توجه به این اعداد حقیقی ناشمارا هستند، ناشمارا دایره‌ی دو به دو مجزا در صفحه رسم کرده‌ایم. اما از طرف دیگر توجه کنید که در هر کدام از این دایره‌ها می‌توان یک نقطه با مختصات گویا یافت، اما از آن‌جا که تعداد چنین نقطه‌هایی شمارا هستند، این اتفاق ممکن نیست. (در واقع با این فرآیند به هر عدد حقیقی x نقطه‌ای با مختصات گویا نسبت داده‌ایم که این نقطه‌ها برای اعداد حقیقی مختلف متفاوت هستند، که این یک تابع یک به یک از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{Q}^{۲}$معرفی می‌کند که چنین تابعی وجود ندارد.)[۱]

[۱] حل این سؤال مستلزم داشتن اطلاعاتی در مورد مجموعه‌های شمارا و ناشمارا بود که در دوره‌ی تابستانی آن سال به دانش‌پژوهان تدریس شده بود و همگی با این مفاهیم آشنایی داشته‌اند.

سؤال شماره ۵. توپ غلطان

r را شعاع توپ و O را مکان اولیه‌ی آن در صفحه بگیرید. ابتدا توپ را در راستای دایره عظیمه‌ای که از نقطه‌ی علامت‌زده‌شده و بالاترین نقطه‌ی کره می‌گذرد حرکت می‌دهیم تا این نقطه‌ی علامت‌دار به بالاترین مکان منتقل شود. A را مکان جدید توپ در صفحه بگیرید. OA طول کمانی از دایره عظیمه است که نقطه‌ی علامت‌دار روی کره طی کرده که این مقدار به وضوح کم‌تر از محیط یک دایره‌ی عظیمه یعنی $2\pi r$ است. بنابراین نقطه‌ای مثل B در صفحه می‌توان یافت که $OA = OB = 2\pi r$. دقت کنید که اگر نقطه‌ی علامت‌دار بالاترین نقطه‌ی کره باشد و ما آن را در یک جهت دل‌خواه به اندازه‌ی $2\pi r$ بغلطانیم، مجدداً نقطه‌ی رنگی بالاترین نقطه خواهد بود. پس اگر کره را ابتدا در جهت AB و سپس در جهت BO حرکت دهیم، در نهایت به نقطه‌ی O برمی‌گردد و با توجه به نکته‌ای که اشاره شد، نقطه‌ی علامت‌دار بالاترین نقطه‌ی کره خواهد بود.

سؤال شماره ۶. مبنای یک به علاوه‌ی آی!

صورت این سؤال اشکال داشته است. در واقع با توجه به تساوی $i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1+i)^n$، برای i بسطی نامتناهی در مبنای $1+i$ وجود دارد و می‌توان به سادگی دید که نمی‌توان یک بسط متناهی برای i معرفی کرد.

سؤال شماره ۷. چندوجهی محیطی

توجه به صورت مسئله در صفحه، یعنی یک چندضلعی که همه‌ی اضلاع آن بر یک دایره مماس هستند و رنگ کردن اضلاع آن به گونه‌ای هیچ دو ضلع مجاوری سیاه‌رنگ نباشند، برای حل این مسئله سودمند است.
برای هر وجه چندوجهی نقطه‌ی تماس کره‌ی محاطی با آن وجه را در نظر بگیرید و این نقطه را به همه‌ی رئوس این وجه وصل کنید. با این کار سطح چندوجهی به تعدادی مثلث افراز می‌شود.
فرض کنید که AB یک ضلع از چندوجهی و F_1 و F_2 دو وجهی از چندوجهی باشند که شامل این ضلع هستند. به علاوه T_1 و T_2 را به ترتیب نقطه‌های تماس کره‌ی محاطی با F_1 و F_2 بگیرید. توجه کنید که در این صورت AT_1 و AT_2 هر دو به کره مماس هستند، زیرا مثلاً در مورد AT_1 می‌دانیم که وجه F_1 تنها یک نقطه‌ی اشتراک با کره دارد و بنابراین AT_1 هم نمی‌تواند بیش‌تر از یک نقطه‌ی تماس داشته باشد و T_1 آن نقطه‌ی تماس است.
حال اگر صفحه‌ی گذرا از مرکز کره (O)، T_1 و A را رسم کنیم دایره‌ای حاصل می‌شود که AT_1 بر آن مماس است و در نتیجه $AT_1^2 = AO^2 - r^2$ که r شعاع آن دایره است که با توجه به این که مرکز آن همان مرکز کره بود، همان شعاع کره است. با همین استدلال طول AT_2 هم برابر AT_1 به دست می‌آید. پس $AT_1 = AT_2$ استدلال کاملاً مشابه نتیجه می‌دهد که $BT_1 = BT_2$. پس دو مثلث ABT_1 و ABT_2 هم‌نهشت هستند.

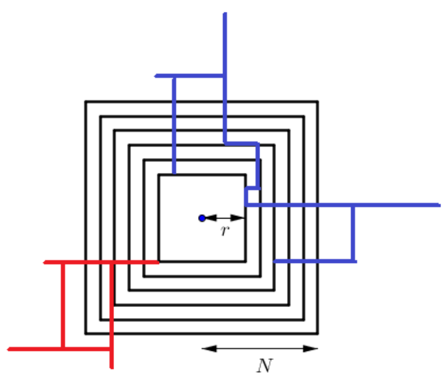
با این توضیحات دو مثلث ایجادشده روی سطح چندوجهی که هر دو شامل یک ضلع از چندضلعی هستند، با هم هم‌نهشت هستند و به طور خاص مساحت برابر دارند. از طرف دیگر هر دوی این مثلث‌ها هم‌زمان سیاه‌رنگ نخواهند بود، پس برای هر مثلث سیاه‌رنگ یک مثلث سفیدرنگ با مساحت برابر با آن وجود خواهد داشت و این نتیجه می‌دهد که مساحت ناحیه‌ی سیاه‌رنگ از ناحیه‌ی سفیدرنگ بیش‌تر نیست.

سؤال شماره ۸. خوشه‌ی نامتناهی

توجه. در صورت سؤال عبارتی تحت عنوان «مربع افقی به مرکز مبدأ و به ضلع $2n+1$» وجود دارد. منظور از طول ضلع مربع در این بیان، تعداد نقطه‌های صحیح روی ضلع مربع است. شاید بهتر بود که از عدد $2n$ برای طول ضلع این مربع استفاده می‌شد.

بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که مبدأ در بین نقطه‌های حذف‌شده نیست. حال خوشه‌ای که شامل مبدأ است را در نظر بگیرید. اگر این خوشه متناهی باشد، مرز آن شامل نقطه‌هایی حذف‌شده است که مجاور به یکی از رأس‌های این خوشه هستند. فرض کنید k کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که همه‌ی نقطه‌های این خوشه درون مربعی به ضلع $2k+1$ به مرکز مبدأ قرار می‌گیرند. در این صورت حتماً یکی از نقطه‌های خوشه‌ی شامل مبدأ روی مرز این مربع قرار دارد. به دلیل تقارن فرض کنید این رأس روی ضلع عمودی سمت راست مربع باشد. در این صورت برای هر $0 \le i \le k+1$، در مربع به ضلع $2k+3$ به مرکز مبدأ یک نقطه‌ی حذف شده با مؤلفه‌ی اول i وجود دارد (اگر در یکی از این ستون‌ها نقطه‌ی حذف‌شده‌ای وجود نداشته باشد، k کوچک‌ترین عدد ممکن نبوده است). پس در مربع به ضلع $2k+3$ به مرکز مبدأ حداقل $k+2$ نقطه‌ی حذف شده داریم که چون $k+2 > \frac{k+1}{2}$، این با فرض مسئله تناقض دارد و بنابراین خوشه‌ی شامل مبدأ نامتناهی است.

حال فرض کنید که حداقل دو خوشه‌ی نامتناهی مجزا داریم. می‌توان عدد طبیعی r یافت که هر دوی این خوشه‌ها در مربع به مرکز مبدأ و ضلع $2r+1$ رأس داشته باشند. به دلیل همبندی و نامتناهی بودن خوشه‌ها برای هر عدد طبیعی $k \ge r$، هر دو خوشه روی مرز مربع به مرکز مبدأ و ضلع $2k+1$ رأس دارند. به علاوه برای هر $k \ge r$ باید یکی از رئوس مربع به ضلع $2k+1$ به مرکز مبدأ حذف شده باشد، چون در غیر این صورت دو خوشه از روی مرز این مربع به هم متصل می‌شوند. پس برای یک عدد طبیعی بزرگ N، حداقل $N-r$ رأس حذف‌شده در مربع به ضلع $2N+1$ به مرکز مبدأ داریم. اگر $N > 2r$، $N-r > \frac{N}{2}$ و این یعنی بیش از $\frac{N}{2}$ از رئوس در این مربع حذف شده است که با فرض مسئله تناقض دارد. پس یک و فقط یک خوشه‌ی نامتناهی در این گراف داریم.



به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. چندجمله‌ای دو متغیره

$P(x,y)$ چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی است. درجه‌ی یک تک‌جمله یعنی جمع توان‌های x و y در آن. مجموع جملات با بیشترین درجه در $P(x,y)$ را $Q(x,y)$ می‌نامیم.

(به عنوان مثال اگر $P(x,y) = ۳x^۴y - ۲x^۲y^۳ + ۵xy^۲ + x - ۵$ آن‌گاه $Q(x,y) = ۳x^۴y - ۲x^۲y^۳$.)

فرض کنید اعداد حقیقی $x_۱$ و $y_۱$ و $x_۲$ و $y_۲$ وجود دارند که

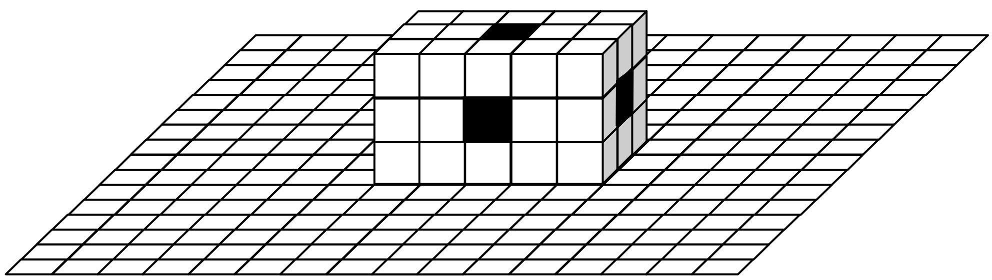
$$Q(x_۱,y_۱) > ۰ \quad , \quad Q(x_۲,y_۲) < ۰$$

ثابت کنید مجموعه‌ی $\{(x,y) \mid P(x,y) = ۰\}$ کران‌دار نیست.

(زیرمجموعه‌ی S از صفحه را کران‌دار گوییم اگر عدد مثبت M وجود داشته باشد که فاصله‌ی اعضای S تا مبدأ، کمتر از M باشد.)

۲. مکعب غلطان

a و b و c اعداد طبیعی هستند. یک مکعب $(۲c+۱)\times(۲b+۱)\times(۲a+۱)$ داریم. این مکعب روی صفحه‌ای از هر سمت نامتناهی و با مربع‌های واحد قرار دارد. می‌توان مکعب را به هر جهتی غلطاند. وجه‌های مکعب به مربع‌های واحد تقسیم شده و خانه‌ی وسط هر وجه رنگی شده است (یعنی اگر روی هر خانه از صفحه قرار بگیرد، آن خانه رنگی می‌شود).



ثابت کنید اگر طول اضلاع مکعب دو به دو نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه هر خانه‌ای از صفحه را می‌توان رنگی کرد.

۳. نقاط در صفحه

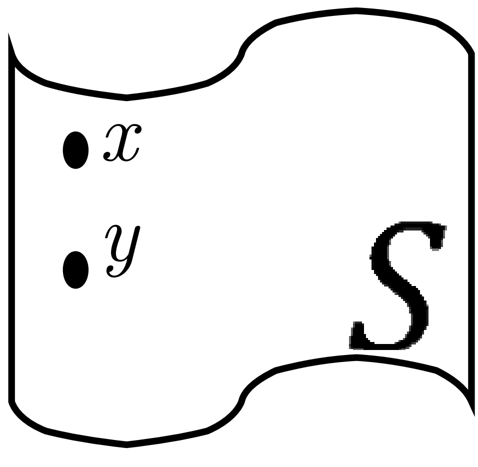
مجموعه A متشکل از n نقطه در صفحه با آرایشی دلخواه داده شده است. مجموعه‌ای که از اثر تبدیل‌های انتقال، دوران، تجانس و یا ترکیب‌های آن‌ها روی A به دست بیاید را یک نسخه از A گوییم. می‌خواهیم n نسخه از A را طوری در صفحه قرار دهیم، به طوری که هر دو نسخه، اشتراکشان تک‌عضوی و هر سه تا اشترکشان تهی باشد.

الف) ثابت کنید اگر هیچ ۴ نقطه‌ای از A تشکیل متوازی‌الاضلاع ندهند، می‌توان بدون استفاده از دوران و تجانس و تنها با استفاده از انتقال‌ها این کار را انجام داد. (A متوازی‌الاضلاع با زاویه ۰ و متوازی‌الاضلاعی که دو راس مقابلش بر هم منطبق باشد هم ندارد!)

ب) ثابت کنید همواره با استفاده از ترکیب‌های تمام تبدیل‌ها می‌توان این کار را انجام داد.

۴. کاشی‌کاری

فرض کنید S شکلی در صفحه باشد که مرز آن شامل هیچ نقطه شبکه‌ای نباشد. فرض کنید $x, y \in S$ دو نقطه شبکه‌ای به فاصله ۱ باشند (نقطه‌ای را شبکه‌ای گوییم اگر مختصات طول و عرض آن صحیح باشد). فرض کنید با استفاده از کپی‌های شکل S بتوان صفحه را کاشی‌کاری کرد به‌طوری که نقاط x و y همواره روی نقاط شبکه‌ای بیفتند (کپی‌های S را می‌توان دوران داد و یا برگرداند). ثابت کنید مساحت شکل S، برابر با تعداد نقاط شبکه‌ای درون آن است.



۵. دنباله جالب

n عددی طبیعی است و $x_1, x_2, \cdots$ دنباله‌ای از اعداد ۱ و ۱− است که دارای خاصیت‌های زیر است:

- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن $2^n - 1$ است. (یعنی برای هر عدد طبیعی j داریم $x_{j+2^n-1} = x_j$ و $2^n - 1$ کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت است.)
- اعداد صحیح متمایز $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < n$ وجود دارند که برای هر عدد طبیعی j داریم

$$x_{j+n} = x_{j+t_1} \times x_{j+t_2} \times \cdots \times x_{j+t_k}$$

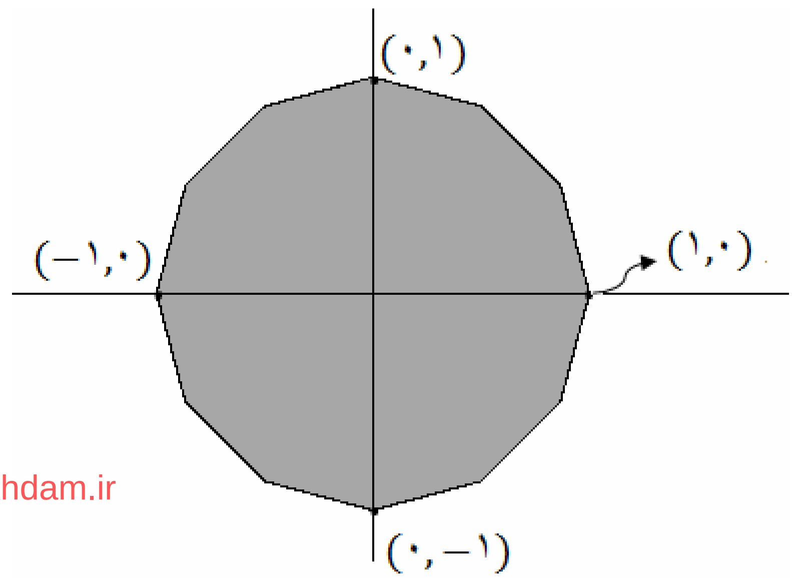
ثابت کنید برای هر عدد طبیعی s که $s < 2^n - 1$ داریم

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i x_{i+s} = -1$$

۶. چندوجهی

یک ۱۲-ضلعی در صفحه را خوب می‌گوییم هرگاه:

اولاً منتظم باشد، دوماً تو پر باشد!!، سوماً مرکز آن مبدأ مختصات باشد، چهارماً راس‌های آن شامل نقاط $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$ و $(۰,-۱)$ باشد. یعنی به شکل زیر:



تعداد وجه‌های حجیم‌ترین چندوجهی‌ای را بیابید که تصویرش روی هر سه صفحه xy و yz و zx یک ۱۲-ضلعی خوب شود.

(واضح است که مرکزهای این سه ۱۲-ضلعی بر هم منطبق و همان مبدا مختصات برای فضای **سه بعدی** است.)

۷. تابع جالب

S مجموعه‌ای n عضوی است و $P(S)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های S است و

$$f : P(S) \to \mathbb{N}$$

تابعی با خاصیت‌های زیر است:

- برای هر زیرمجموعه از S مانند A، داریم $f(A) = f(S - A)$.
- برای هر دو زیرمجموعه از S مانند A و B، داریم

$$\max(f(A), f(B)) \geq f(A \cup B)$$

ثابت کنید تعداد اعضای بُرد f کوچک‌تر یا مساوی n است.

۸. اعداد $n^۲ + ۱$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی به صورت $n^۲ + ۱$ وجود دارد که هیچ مقسوم علیهی به شکل $k^۲ + ۱$ به جز یک و خودش، ندارد.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. چندجمله‌ای دو متغیره

درجه‌ی P را با d نشان می‌دهیم. در نتیجه با توجه به فرضیات مسئله، d حداقل ۱ است، Q یک چندجمله‌ای همگن (یعنی درجه‌ی همه‌ی تک‌جمله‌ای‌های آن برابر است) از درجه‌ی d است و $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ دو نقطه‌ی غیر از مبدأ در صفحه هستند.

لم. فرض کنید $(x_۰, y_۰) \neq (۰, ۰)$ و $P(x_۰, y_۰) \neq ۰$. در این‌صورت برای اعداد مثبت به اندازه‌ی کافی بزرگ r، $P(rx_۰, ry_۰)$ با $Q(x_۰, y_۰)$ هم‌علامت است.

اثبات. قرار دهید $R = P - Q$. در این‌صورت درجه‌ی همه‌ی جملات R از d کم‌تر است. به راحتی می‌توان نشان داد که عدد مثبت K وجود دارد که برای هر عدد مثبت $r > ۱$،

$$|R(rx_۰, ry_۰)| < Kr^{d-۱}.$$

از طرفی بنابر همگن بودن Q، $Q(rx_۰, ry_۰) = r^d Q(x_۰, y_۰)$. پس برای $r > ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} P(rx_۰, ry_۰) &= Q(rx_۰, ry_۰) + R(rx_۰, ry_۰) \\ &> r^d Q(x_۰, y_۰) - Kr^{d-۱} = r^{d-۱}(rQ(x_۰, y_۰) - K). \end{aligned}$$

درنتیجه اگر $Q(x_۰, y_۰)$ مثبت باشد و r از $\frac{K}{Q(x_۰, y_۰)}$ و ۱ بزرگ‌تر باشد، $P(rx_۰, ry_۰)$ هم مثبت است. همین‌طور برای $r > ۱$:

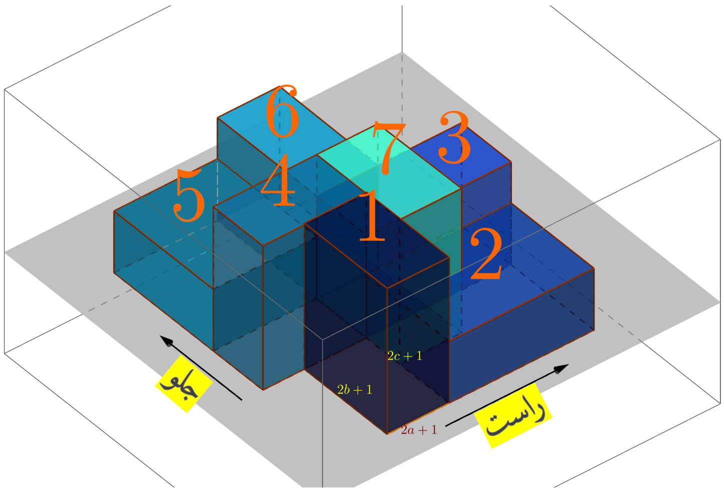
$$P(rx_۰, ry_۰) < r^{d-۱}(rQ(x_۰, y_۰) + K).$$

پس اگر $Q(x_۰, y_۰)$ منفی باشد و r از $-\frac{K}{Q(x_۰, y_۰)}$ و ۱ بزرگ‌تر باشد، $P(rx_۰, ry_۰)$ هم منفی است. درنتیجه در هر دو صورت حکم لم برقرار است. $\square$

حال اگر لم بالا را برای $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که برای اعداد به اندازه‌ی کافی بزرگ M، دو نقطه به صورت $(rx_۱, ry_۱)$ و $(sx_۲, sy_۲)$ روی دایره‌ی به شعاع M حول مبدأ پیدا می‌شود که مقدار P در یکی از آن‌ها مثبت و در دیگری منفی است. وقتی از نقطه‌ی اول روی یک کمان این دایره به سمت نقطه‌ی دوم حرکت می‌کنیم، مقدار P از یک عدد مثبت شروع می‌شود و نهایتاً به یک عدد منفی می‌رسد. پس با توجه به پیوستگی مقادیر P، مقادیر P همه‌ی اعداد مابین مقدار اولیه و مقدار نهایی -از جمله صفر- را پوشش می‌دهد. درنتیجه P روی دوایر با شعاع به دل‌خواه بزرگ حول مبدأ صفر می‌شود و مجموعه‌ی نقاطی که مقدار P در آن‌ها صفر است، کران‌دار نیست.

سؤال شماره ۲. مکعب غلطان

فرض کنید در ابتدا نحوه‌ی قرار گرفتن مکعب روی زمین، شبیه مکعب شماره (۱) در شکل زیر باشد. مطابق شکل با غلطاندن آن به ترتیب به سمت راست، جلو، چپ، جلو، راست و در نهایت به سمت عقب این مکعب به مکعب شماره (۷) تبدیل می‌شود که انتقال‌یافته‌ی مکعب اول به اندازه‌ی بردار $(2a+1, 2a+1)$ است و به علاوه دوباره همان وجه اولیه روی زمین قرار دارد.



اگر همه‌جا در حرکت‌هایمان جای راست و چپ را با هم عوض کنیم، طبیعتاً به بردار $(-(2a+1), 2a+1)$ می‌رسیم و اگر جای جلو و عقب را عوض کنیم به بردار $(2a+1, -(2a+1))$ خواهیم رسید و اگر همه‌ی جهت‌ها را عکس کنیم به بردار $(-(2a+1), -(2a+1))$ می‌رسیم. با توجه به تقارنی که این شکل نسبت به a و b دارد، می‌توان آن را به گونه‌ای غلطاند که به اندازه‌ی بردار $(\pm(2b+1), \pm(2b+1))$ در صفحه انتقال پیدا کند. توجه کنید که در تمام این حالت‌ها همان وجه اولیه با همان جهت اولیه در نهایت روی زمین قرار دارد. برای رسیدن به بردارهای $(\pm(2c+1), \pm(2c+1))$ هم کافی است ابتدا مکعب را به سمت راست بغلطانیم تا یکی از ضلع‌های مستطیل روی زمین برابر $2c+1$ باشد و با حرکت‌هایی شبیه به بالا آن را به اندازه‌ی بردار مطلوب حرکت دهیم و دست آخر، یک بار مکعب را به سمت چپ بغلطانیم تا همان وجه اولیه (با همان وضعیت اولیه) روی زمین باشد.

بنابراین اگر بتوانیم خانه‌ای شبکه‌ای در صفحه با مختصات (x, y) را رنگی کنیم، می‌توانیم خانه‌های زیر را هم رنگی نماییم:

$$(x \pm (2a+1), y \pm (2a+1)), (x \pm (2b+1), y \pm (2b+1)), (x \pm (2c+1), y \pm (2c+1))$$

حال ادعا می‌کنیم که اگر خانه‌ی (x, y) رنگی شود می‌توانیم هر کدام از خانه‌های $(x \pm 1, y \pm 1)$ را هم رنگی نماییم. برای این منظور توجه کنید که با توجه به نسبت به هم اول بودن اضلاع مکعب، می‌توان اعداد صحیح r, s, t یافت که

$$r(2a+1) + s(2b+1) + t(2c+1) = 1$$

برای هر انتخاب ϵ_1, ϵ_2 از ± 1 می‌توان با توجه به نکته‌های بالا با r بار استفاده از بردار $(\epsilon_1(2a+1), \epsilon_2(2a+1))$، s بار استفاده از بردار $(\epsilon_1(2b+1), \epsilon_2(2b+1))$ و در نهایت t بار استفاده از بردار $(\epsilon_1(2c+1), \epsilon_2(2c+1))$ از خانه‌ی (x, y) به خانه‌ی $(x+\epsilon_1, y+\epsilon_2)$ برویم و با این عمل می‌توان به همه‌ی نقطه‌هایی که زوجیت مجموع دو مؤلفه‌ی آن با (x, y) یک‌سان است، رسید.

برای رسیدن به نقطه‌هایی که زوجیت مجموع دو مؤلفه‌ی آن با خانه‌ی اولیه‌ی ما تفاوت دارد، دقت کنید که اگر مکعب

را به سمت راست سپس جلو و دوباره راست بغلطانیم، در این سه حرکت مجموع مؤلفه‌ها به ترتیب به مقدار $a+c+۱$، $a+b+۱$ و $b+c+۱$ واحد تغییر می‌کند. با توجه به این که جمع این سه عدد یعنی $۲a+۲b+۲c+۳$ عددی فرد است پس حتماً در یکی از سه گام مجموع مؤلفه‌ها مقدار فردی تغییر کرده است و می‌توانیم با شروع از آن وضعیت و اجرای فرآیند بالا مابقی خانه‌ها را نیز رنگی کنیم.

توجه. با توجه به راه‌حل بالا می‌بینیم که در صورت مسئله لازم نبود که طول سه ضلع مکعب دو به دو نسبت به هم اول باشند و تنها کافی بود که طول سه ضلع عامل اول مشترکی نداشته باشد، یعنی $(۲a+۱, ۲b+۱, ۲c+۱) = ۱$.

سؤال شماره ۳. نقاط در صفحه

الف. نقطه‌ی دل‌خواهی از صفحه را به عنوان مبدأ مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ که $\vec{a_i}$ها بردارهایی در صفحه هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$A_i = A + \vec{a_i} = \{a + a_i | a \in A\}$$

دقت کنید که $a_i + a_j \in A_i \cap A_j$ ادعا می‌کنیم که $A_i \cap A_j$ نمی‌تواند بیش‌تر از یک عضو داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید این چنین نباشد، یعنی عنصر x غیر از $\vec{a_i} + \vec{a_j}$ باشد که $x \in A_i \cap A_j$. داریم:

$$x \in A_i, x \neq a_i + a_j \Rightarrow \exists i_1 \neq j, x = a_i + a_{i_1}$$

$$x \in A_j, x \neq a_i + a_j \Rightarrow \exists i_2 \neq i, x = a_j + a_{i_2}$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$a_{i_1} + a_i = a_{i_2} + a_j \Rightarrow a_{i_1} - a_{i_2} = a_j - a_i$$

در این صورت ۴ عنصر $a_i, a_j, a_{i_1}, a_{i_2}$ از A تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهند که با فرض صورت سؤال تناقض دارد.
در پایان می‌توان به سادگی دید که اشتراک هر سه‌تایی از A_iها برابر تهی است. چرا که اگر برای سه اندیس متمایز i, j, k، $A_i \cap A_j \cap A_k$ ناتهی باشد، با توجه به این که $A_i \cap A_j = \{\vec{a_i} + \vec{a_j}\}$ باید $\vec{a_i} + \vec{a_j} \in A_k$، این یعنی اندیس l وجود دارد که

$$\vec{a_i} + \vec{a_j} = \vec{a_k} + \vec{a_l} \Rightarrow \vec{a_i} - \vec{a_k} = \vec{a_l} - \vec{a_j}$$

که باز هم یک متوازی‌الاضلاع از اعضای A تشکیل می‌دهد که با فرض مسئله تناقض دارد.

ب در این قسمت مبدأ مختصات را نقطه‌ای در صفحه خارج از مجموعه‌ی A بگیرید، به علاوه فرض کنید صفحه‌ی مورد بحث صفحه‌ی اعداد مختلط و $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ اعداد مختلط متناظر با اعضای مجموعه‌ی A باشند.
در این‌جا تعریف می‌کنیم:

$$A_i = Aa_i = \{aa_i : a \in A\}$$

با توجه به این که ضرب کردن در عدد مختلط a_i یک تجانس مارپیچی به مرکز مبدأ (ترکیب یک دوران و تجانس) را در صفحه مشخص می‌کند، A_i نسخه‌ای از A خواهد بود. مشابه قبل $a_ia_j \in A_i \cap A_j$. حال اگر $x \neq a_ia_j$ عنصر دیگری در $A_i \cap A_j$ باشد، داریم:

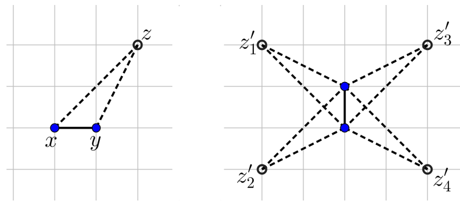
$$x \in A_i, x \neq a_ia_j \Rightarrow \exists l \neq j, a_la_i = x$$

$$x \in A_j, x \neq a_ia_j \Rightarrow \exists k \neq i, a_ka_j = x$$

در نتیجه $a_la_i = a_ka_j$ و یا $\frac{a_i}{a_k} = \frac{a_j}{a_l}$ (دقت کنید همه‌ی a_iها ناصفر هستند). در این صورت مبدأ مختصات مرکز تجانس مارپیچی است که a_k را به a_i و a_l را به a_j می‌فرستد. تعداد چنین تبدیل‌هایی (تجانس مارپیچی‌هایی که یک جفت از نقطه‌های A را به جفت دیگری بفرستند)، به دلیل متناهی بودن تعداد نقطه‌های A متناهی است. پس می‌توانیم از ابتدا مبدأ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مرکز هیچ کدام از این تبدیل‌ها نباشد. بنابراین $A_i \cap A_j$ شامل تنها a_ia_j است. مشابه استدلال آخرین بخش راه‌حل قسمت الف، اگر اشتراک سه تا از A_iها ناتهی شود، باید یک تجانس مارپیچی به مرکز مبدأ یک جفت از نقطه‌های A را به جفت دیگری بفرستد که به دلیل فرض بالا این امکان ندارد و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۴. کاشی‌کاری

فرض کنید z نقطه‌ی شبکه‌ای دیگری در S باشد و S' یک کاشی دیگر. x'، y' و z' را به ترتیب نقطه‌های متناظر با x، y و z در S' فرض کنید. مطابق شکل زیر تنها ۴ مکان ممکن برای قرار گرفتن z' وجود دارد که همگی نقطه‌های شبکه‌ای هستند. پس تعداد نقطه‌های شبکه‌ای در کاشی‌های مختلف با هم برابر است. این مقدار برابر را k بنامید.



فرض $d \in \mathbb{N}$ از فاصله‌ی بین هر دو نقطه در S بیش‌تر باشد. برای عددی طبیعی مثل D دو مربع هم‌مرکز یکی به ضلع D و دیگری به ضلع $D + ۲d$ در نظر بگیرید که رئوس هر دو متشکل از نقطه‌های شبکه‌ای باشند. تعداد کاشی‌هایی که با مربع داخلی اشتراک دارند را u بنامید. از آن‌جا که هر کاشی k رأس شبکه‌ای دارد، تعداد کل رئوس شبکه‌ای که توسط این u کاشی پوشانده می‌شود، uk است که نمی‌تواند از رئوس شبکه‌ای درون یا روی مرز مربع $D \times D$ کم‌تر باشد (چون این u کاشی مربع $D \times D$ را پوشانده‌اند). پس $uk \geq (D + ۱)^۲$. با توجه به انتخاب d هیچ یک از این u کاشی نمی‌توانند نقطه‌ای بیرون مربع به ضلع $D + ۲d$ داشته باشند و بنابراین $uk \leq (D + ۲d + ۱)^۲$.

حال مساحت S را با s نمایش می‌دهیم. از استدلالی شبیه بالا این بار در مورد مساحت نتیجه می‌شود که:

$$D^۲ \leq us \leq (D + ۲d)^۲$$

از طرف دیگر هم داشتیم:

$$(D + ۱)^۲ \leq uk \leq (D + ۲d + ۱)^۲$$

با استفاده از این دو رابطه داریم:

$$\left(\frac{D + ۱}{D + ۲d}\right)^۲ \leq \frac{k}{s} \leq \left(\frac{D + ۲d + ۱}{D}\right)^۲$$

چون این نابرابری‌ها برای هر D برقرار هستند، با بزرگ‌کردن مقدار D هر دو جمله‌ی سمت چپ و سمت راست نابرابری به ۱ میل می‌کنند و لذا $k = s$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

سؤال شماره ۵. دنباله‌ی جالب

فرض کنید X مجموعه‌ی همه‌ی nتایی‌های مرتب با درایه‌های در مجموعه‌ی $\{+۱, -۱\}$ باشد و $X' = X - \{(۱, ۱, \dots, ۱)\}$.
به علاوه برای هر عنصر $x \in X$ از نماد $[x]_i$ برای نمایش مؤلفه‌ی iام آن استفاده می‌کنیم، یعنی $x = ([x]_۱, [x]_۲, \dots, [x]_n)$.
لم. برای هر k عدد طبیعی $۰ < i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \leq n$، داریم:

$$\sum_{x \in X'} ([x]_{i_۱}[x]_{i_۲} \cdots [x]_{i_k}) = -۱$$

اثبات. توجه کنید که برای هر عنصر x در X می‌توان عنصر یک‌تای x' یافت که فقط در مؤلفه‌ی $i_۱$ام تفاوت داشته باشند و بقیه‌ی مؤلفه‌های آن‌ها یک‌سان باشد در این صورت

$$[x]_{i_۱}, [x]_{i_۲} \cdots [x]_{i_k} + [x']_{i_۱}[x']_{i_۲} \cdots [x']_{i_k} = ۰$$

و در نتیجه اگر مجموع بالا روی کل X باشد، حاصل برابر صفر خواهد شد. حال که مجموع روی X' است، باید مقدار مربوط به $(۱, ۱, \dots, ۱)$ که برابر است را از آن کم کنیم که این رابطه‌ی مورد نظر را نتیجه می‌دهد. □

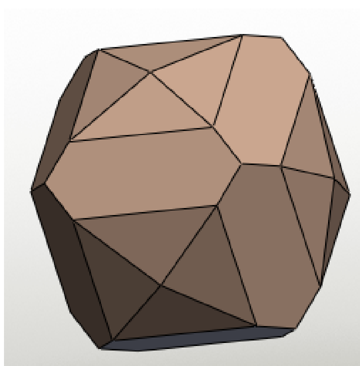
با توجه به دو خاصیت دنباله‌ی x_i در صورت مسئله برای هر $۱ \leq i \leq ۲^n - ۱$، nتایی‌های $(x_i, x_{i+۱}, \dots, x_{i+n-۱})$ همگی متمایز هستند. چرا اگر دو تا از آن‌ها با هم برابر باشند، با توجه به این هر عنصر دنباله با تعیین شدن n عنصر قبلی و یا بعدی‌اش به طور یک‌تا (با قاعده‌ای که دومین خاصیت دنباله در صورت مسئله بیان می‌کند) تعیین می‌شوند، دوره‌ی تناوب دنباله عددی کم‌تر از $۲^n - ۱$ خواهد شد. به علاوه هیچ‌یک از این nتایی‌ها $(۱, ۱, \dots, ۱)$ نیست، چرا که در این صورت دنباله‌ی x_i دنباله‌ی ثابت ۱ خواهد بود. بنابراین همه‌ی $۲^n - ۱$، nتایی مجموعه‌ی X' در این بین دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

دنباله‌ی x_i را می‌توان به صورت $x_i = x_{i+۲^n-۱}$ برای مقادیر منفی i هم تعریف کرد و خواص صورت مسئله در مورد این دنباله‌ی جدید هم کماکان صادق است. نشان می‌دهیم که اعداد صحیح $۰ < u_۱ < u_۲ < \cdots \leq u_p \leq n$ وجود دارد که $x_i x_{i+s}$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب $x_{i-u_۱} x_{i-u_۲} \cdots x_{i-u_p}$ نوشت. برای این منظور دقت کنید که x_i را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از عناصر مجموعه‌ی $\{x_{i-۱}, x_{i-۲}, \dots, x_{i-n}\}$ نوشت. در مورد x_{i+s} هم را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از n عنصر قبلی‌اش در دنباله نوشت و به همین ترتیب هر کدام از عناصر این ضرب را به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از عناصر قبلی آن می‌نویسیم و ... تا این که به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از عنصرهای مجموعه‌ی $\{x_{i-۱}, x_{i-۲}, \dots, x_{i-n}\}$ برسیم. مشکل این است که ممکن است بعضی از عناصر در حاصل‌ضرب نهایی توان‌دار باشند.
اگر x_k^m در حاصل‌ضرب ظاهر شده باشد، با توجه به این که x_iها ۱ یا -۱ هستند، اگر m فرد باشد، $x_i^m = x_i$ و x_i را با x_i^m جای‌گزین می‌کنیم. اگر هم m زوج باشد، $x_i^m = ۱$ که می‌توان آن را از حاصل‌ضرب حذف کرد. حال اگر با این حذف‌کردن‌ها هیچ جمله‌ای باقی نماند نتیجه می‌گیریم که $x_i x_{i+s} = ۱$ و در نتیجه $x_i = x_{i+s}$ که با این فرض که دوره تناوب دنباله ۲^n است تناقض دارد. پس ادعا ما ثابت شد.

با این توضیحات $\sum_{i=۱}^{۲^n-۱} x_i x_{i+s}$ به صورت $\sum_{i=۱}^{۲^n-۱} x_{i-u_۱} x_{i-u_۲} \cdots x_{i-u_p}$ خواهد بود. در نهایت با توجه به تناوب دنباله و لم بالا این مجموع برابر -۱ خواهد بود.

سؤال شماره ۶. چندوجهی

نشان می‌دهیم که چندوجهی خواسته‌شده در صورت مسئله (حجیم‌ترین چندوجهی) ۳۶ وجه دارد. به وضوح این چندوجهی اشتراک سه استوانه‌ی توپر با قاعده‌ی ۱۲ضلعی‌های خوب در سه صفحه‌ی مختصات است.
حال به بررسی اشتراک این سه استوانه می‌پردازیم. ابتدا استوانه‌ی مربوط به ۱۲ضلعی صفحه‌ی xy را در نظر گرفته و اشتراک آن با ۱۲ضلعی مربوط به صفحه‌ی xz را بررسی کنید. ادعا می‌کنیم که هر کدام از وجه‌های استوانه‌ی دوم یک وجه به استوانه‌ی قبلی اضافه می‌کند و تعداد وجه‌های این اشتراک برابر ۲۴ است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که هر کدام از وجه‌های استوانه‌ی مربوط به صفحه‌ی xz، درون (و نه تنها نقاط مرزی) استوانه‌ی صفحه‌ی xy را قطع می‌کند. با توجه به این که استوانه‌ی xy و هر یک از وجه‌های استوانه‌ی xz اشکالی محدب[1] در فضا هستند، اشتراک آن‌ها هم شکلی محدب خواهد شد و لذا حداکثر یک وجه به چندوجهی ما اضافه خواهد کرد. از طرف دیگر تصویر استوانه‌ی xy روی صفحه‌ی xz یک نوار توپر در این صفحه است که ۱۲ضلعی موجود در این صفحه را شامل می‌شود. پس ضلع مربوط به وجه یادشده را هم شامل است و بنابراین استوانه‌ی xy وجه متناظر به آن ضلع را قطع می‌کند.
پس اشتراک این دو استوانه یک چندوجهی است که ۲۴ وجه دارد و از آن‌جا که هر دو استوانه محدب هستند، این چندوجهی که اشتراک دو استوانه است، خود محدب است. از سوی دیگر این چندوجهی شامل نقطه‌های $(۰,۰,۱)$، $(۰,۱,-۱)$، $(۰,-۱,۱)$ و $(۰,-۱,-۱)$ هست و با توجه به محدب بودن، کل مربع با این رئوس را شامل است. در نتیجه تصویر این ۲۴وجهی روی صفحه‌ی yz، کل ۱۲ضلعی موجود در این صفحه را شامل می‌شود.
کاملاً مشابه قسمت قبل، اگر اشتراک این ۲۴وجهی و استوانه‌ی مربوط به صفحه‌ی yz را در نظربگیریم، هر کدام از وجه‌های استوانه ۲۴وجهی را در یک ناحیه‌ی محدب قطع می‌کنند (۲۴وجهی و آن وجه هر دو محدب هستند و اشتراکشان هم محدب است) و یک وجه جدید به آن اضافه می‌کنند.
بنابراین ۱۲ وجه این استوانه، ۱۲ وجه به ۲۴وجهی می‌افزایند و در نتیجه شکل حاصل $۱۲ + ۲۴$ یعنی ۳۶وجهی خواهد بود.
شکل زیر یک نما از این چندوجهی را نمایش می‌دهد.



[1] شکلی در فضا را محدب می‌نامیم، هرگاه این خاصیت را دارا باشد که اگر دو نقطه عضو آن بودند، کل پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه هم عضو آن شکل باشد.

سؤال شماره ۷. تابع جالب

ابتدا یک لم را اثبات می‌کنیم. در همه‌جای راه‌حل به جای $S-A$ از نماد A^c استفاده شده است.

لم. اگر مجموعه‌ی B با اعمال اشتراک و مکمل گرفتن از زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_m$ از S به دست آمده باشد، آن‌گاه:

$$f(B) \le \max\{f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)\}$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که برای هر دو مجموعه‌ی A و B، $f(A\cap B) \le \max\{f(A), f(B)\}$. برای این هم داریم:

$$f(A\cap B) = f\left((A^c \cup B^c)^c\right) = f(A^c \cup B^c) \le \max\{f(A^c), f(B^c)\} = \max\{f(A), f(B)\}$$

$\square$

حال راه‌حل را به صورت می‌توان ادامه داد:

راه‌حل اول. فرض کنید برد f دقیقاً m عضوی باشد و $f(A_1) < f(A_2) < \dots < f(A_m)$ اعضای برد f باشند. با توجه به لم مجموعه‌ی A_m از $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ با عمل‌های اشتراک و مکمل گرفتن به دست نمی‌آید. اما اگر برای هر $i \in A_m$، $\{i\}$ با عمل‌های اشتراک و مکمل از $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ به دست بیاید، نتیجه می‌گیریم که A_m هم با این اعمال قابل دست‌یابی بوده است. پس نتیجه می‌گیریم عنصری مثل $i \in A_m$ هست که $\{i\}$ از $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ به دست نمی‌آید. با انتخاب مناسب مجموعه‌ی B_i برابر A_i یا A_i^c برای $1 \le i \le m-1$، $i \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{m-1}$. پس $i \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{m-1} \cap A_m$ اما با توجه به نکته‌ی بالا این اجتماع برابر $\{i\}$ نیست. این یعنی عنصری مثل i' وجود دارد که $i' \in B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{m-1} \cup A_m$.

در ادامه راه‌حل ایده‌ی ما این است که دو عنصر i و i' را با هم یکی کنیم و تابع جدیدی بسازیم که اعضای دامنه‌ی آن کم‌تر باشد. برای این منظور تعریف می‌کنیم $a = \{i, i'\}$ و اگر دامنه‌ی تابع f را تنها روی زیرمجموعه‌هایی از S که یا شامل هر دوی این دو عضو هستند یا شامل هیچ‌کدام نیستند، محدود کنیم (A_iها چنین مجموعه‌هایی هستند) می‌توان تابع $f' : P\big((S-\{i,i'\}) \cup a\big) \to \mathbb{N}$ تعریف کرد که خواص فرض مسئله را دارا است.

توجه کنید که تعداد اعضای $(S-\{i,i'\}) \cup a$ یک واحد کم‌تر از تعداد اعضای S است و اگر این‌جا از استقرا استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که $m-1 \le n-1$ و در نتیجه $m \le n$ و این اثبات حکم را تمام می‌کند. (تنها باید حالت‌های پایه‌ای مثلاً $n=1$ بررسی شوند که بررسی آن‌ها کاملاً سرراست است.)

راه‌حل دوم. این راه‌حل به مقداری اطلاعات از نظریه‌ی گروه‌ها نیازمند است.

با توجه به لم بالا

$$f(A\Delta B) = f\big((A\cap B^c) \cup (A^c \cap B)\big) \le \max\{f(A\cap B^c), f(B^c \cap B)\} \le \max\{f(A), f(B)\}$$

حال توجه کنید که مجموعه‌ی $P(S)$ و عمل تفاضل متقارن Δ تشکیل یک گروه می‌دهند ($\emptyset$ به عنوان عضو خنثی و A به عنوان وارون خودش). بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که برد تابع f مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, m\}$ باشد و برای هر $1 \le i \le m$ تعریف می‌کنیم:

$$B_i = \{A \in P(S) : f(A) \le i\}$$

با توجه به نکته‌ی بالا B_iها زیرگروه‌هایی از $P(S)$ هستند. طبق قضیه‌ی لاگرانژ در نظریه‌ی گروه‌ها تعداد اعضای $P(S)$ بر تعداد اعضای هر یک از این زیرگروه‌ها بخش‌پذیر است. با توجه به این که $P(S)$، 2^n عضوی است، تعداد اعضای هر کدام

از این زیرگروه‌ها هم توانی از دو است. اما دقت کنید که $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_m = P(S)$. در نتیجه

$$0 < |B_1| < |B_2| < \cdots < |B_m|$$

و چون تعداد اعضای این مجموعه‌ها توان‌هایی از دو است (توجه کنید که اگر $A \in B_1$، آن‌گاه $A^c \in B_1$ و بنابراین B_1 حداقل دو عضو دارد) داریم:

$$|B_1| \geq 2^1, |B_2| \geq 2^2, \ldots, |B_m| \geq 2^m$$

اما $|B_m| = |P(S)| = 2^n$. پس $2^m \leq 2^n$ و در نتیجه $m \leq n$.

توضیح. توجه کنید که تابع f وجود دارد که برد آن دقیقاً n عضو داشته باشد، مثلاً می‌توانید تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(A) = \max\Big\{\min\{x : x \in A\}, \min\{x : x \in A^c\}\Big\}$$

به راحتی می‌توان چک کرد که این تابع خواص صورت مسئله را دارد و به وضوح برد آن n عضو دارد.

سؤال شماره ۸. اعداد n^2+1

راه‌حل اول. یک عدد طبیعی را «منزوی» می‌نامیم، هرگاه به شکل n^2+1 باشد و به علاوه مقسوم‌علیه دیگری به این شکل غیر از خودش و یک نداشته باشد. هدف ما این است که نشان دهیم تعداد اعداد منزوی نامتناهی است. برای این منظور ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم:

لم. هر عدد طبیعی به شکل n^2+1 یک مقسوم‌علیه منزوی بزرگ‌تر از ۱ دارد.

اثبات. اگر n^2+1 منزوی باشد مسئله حل است. در غیر این صورت عددی طبیعی مثل $n_1<n$ یافت می‌شود که $n_1^2+1|n^2+1$. حال اگر n_1^2+1 منزوی باشد که مسئله باز هم حل است. پس عدد طبیعی مثل $n_2<n_1$ وجود دارد که $n_2^2+1|n_1^2+1$. باز هم اگر n_2^2+1 منزوی باشد مسئله حل است و اگر نباشد...

با توجه به این که در این روند هر بار عدد کوچک‌تری را انتخاب می‌کنیم حتماً متوقف خواهیم شد و بنابراین حتماً مقسوم‌علیه منزویی یافت می‌شود. □

حال برای حل مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید تعداد اعداد منزوی متناهی باشد و $a_1^2+1, a_2^2+1, \dots, a_m^2+1$ همه‌ی اعداد منزوی باشند. عدد طبیعی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\Big((a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdots(a_m^2+1)\Big)^2+1$$

A عددی به شکل n^2+1 است و طبق لم بالا مقسوم‌علیهی منزوی دارد. اما A نمی‌تواند بر هیچ‌کدام از اعداد منزوی بخش‌پذیر باشد، زیرا $A-1$ از حاصل‌ضرب اعداد منزوی به دست آمده و بر همه‌ی آن‌ها بخش‌پذیر است. به این ترتیب فرض متناهی بودن اعداد منزوی به تناقض منجر شد و بنابراین بی‌نهایت عدد منزوی داریم.

راه‌حل دوم. قسمت اول این راه‌حل هم اثبات لم بالا است.
در ادامه اعضای دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n=2^{2^n}+1 \quad n\geq 1$$

به وضوح هر کدام از اعضای دنباله به شکل m^2+1 است و طبق لم بالا هر کدام از اعضای دنباله مقسوم‌علیهی منزوی دارند. از طرف دیگر می‌توان به سادگی دید که اگر $m\neq n$ باشد، $(a_m,a_n)=1$، یعنی اعضای دنباله دو به دو نسبت به هم اول هستند. (در واقع اگر $m<n$ باشد، $a_m|a_n-2$ و چون همه‌ی جمله‌ها فرد هستند، نسبت به هم اول بودن نتیجه می‌شود.)

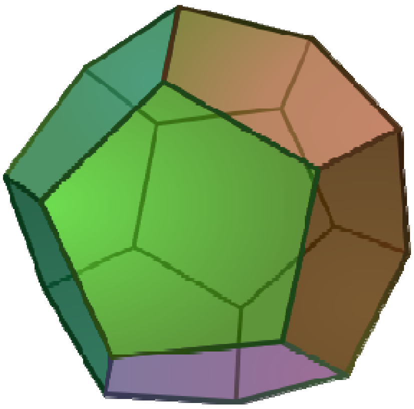
با توجه به این نکته، مقسوم‌علیه‌های منزوی اعضای دنباله دو به دو متمایز هستند و بنابراین بی‌نهایت عدد منزوی داریم و اثبات به پایان می‌رسد.

به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. دوازده وجهی منتظم



دوازده وجهی منتظم یک چند وجهی محدب است که وجوه آن پنج ضلعی منتظم‌اند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود دوازده وجهی منتظم بیست رأس دارد و از هر رأس سه ضلع خارج می‌شود.

فرض کنید ده رأس از بیست رأس یک دوازده وجهی منتظم را علامت زده‌ایم.

الف) نشان دهید می‌توان دوازده وجهی را با یک دوران بر مکان قبلی خود منطبق کرد طوری‌که حداکثر چهار رأس علامت‌دار در جایی قرار گیرند که قبلاً هم رأس علامت‌داری در آن مکان قرار داشته است.

ب) نشان دهید عدد چهار در قسمت قبل قابل تعویض با عدد سه نیست.

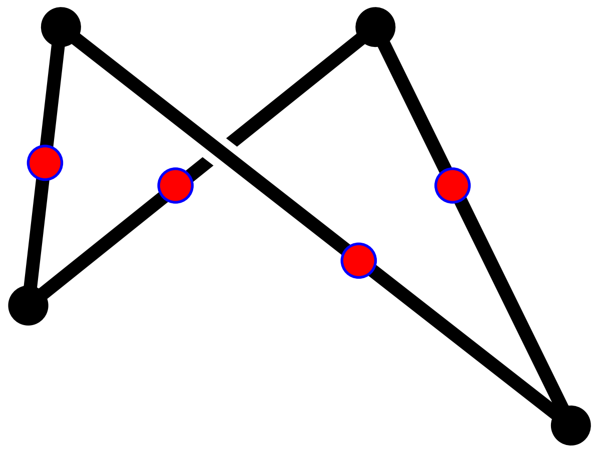
۲. چندجمله‌ای‌های ریش‌ریش!

الف) ثابت کنید برای هر k و n طبیعی، چندجمله‌ای‌های تکین درجه n، با ضرایب صحیح مانند $P_۱(x), \ldots, P_k(x)$ وجود دارند که هیچ دوتایی عامل مشترک نداشته باشند و جمع هر چند تا از آن‌ها تمام ریشه‌هایش حقیقی باشد.

ب) آیا نامتناهی چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح مانند $P_۱(x), P_۲(x), \ldots$ وجود دارد که هیچ دوتایی عامل مشترک نداشته باشند و جمع هر تعداد متناهی از آن‌ها تمام ریشه‌هایش حقیقی باشد؟

۳. چهارضلعی لق

چهار میلهٔ فلزی طوری به هم متصل شده‌اند که اولاً تشکیل یک چهارضلعی در فضا را داده‌اند و ثانیاً زاویهٔ دو میلهٔ متصل آزادانه قابل تغییر است.



در حالتی که چهارضلعی کاملاً در یک صفحه نیست روی هر ضلع چهارضلعی نقطه‌ای را علامت می‌زنیم به نحوی که این چهار نقطه روی یک صفحه باشند. ثابت کنید با لق خوردن چهارضلعی، چهار نقطه علامت‌زده‌شده همیشه هم‌صفحه باقی می‌مانند.

۴. پله برقی هوش‌مند

پله برقی ایستگاه «جوان‌مرد قصاب» دارای این خاصیت است که اگر m نفر سوار آن باشند سرعت آن $m^{-\alpha}$ است که α عددی حقیقی، مثبت و ثابت است.

فرض کنید n نفر می‌خواهند از پله بالا روند و عرض پله‌ها به قدری است که همه می‌توانند هم‌زمان روی یک پله بایستند. اگر طول پله برقی l باشد کوتاه‌ترین زمان لازم برای این که همهٔ n نفر به بالای پله برقی برسند چه‌قدر است؟ چرا؟

۵. اعداد اول طلایی

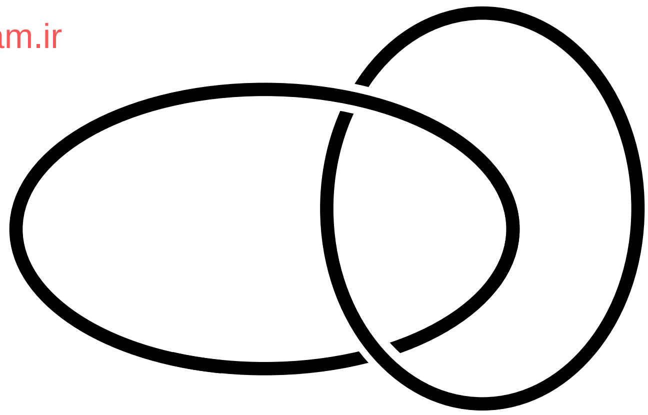
فرض کنید α عددی حقیقی باشد و $a_۱ < a_۲ < \dots$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد که برای هر عدد طبیعی n داریم $a_n \leq n^{\alpha}$. عدد اول q را طلایی می‌نامیم اگر عدد طبیعی m وجود داشته باشد که $q \mid a_m$. فرض کنید $q_۱ < q_۲ < q_۳ < \dots$، همهٔ اعداد طلایی دنبالهٔ $\{a_n\}$ باشند.

الف) ثابت کنید اگر $\alpha = ۱/۵$، آن‌گاه $q_n \leq ۱۳۹۰^n$. آیا می‌توانید کران به‌تری برای q_n بیابید؟

ب) ثابت کنید اگر $\alpha = ۲/۴$، آن‌گاه $q_n \leq ۱۳۹۰^{۲n}$. آیا می‌توانید کران به‌تری برای q_n بیابید؟

۶. دوایر درگیر

دو دایره در فضا را درگیر می‌گوییم هرگاه متقاطع باشند و یا در هم گیر کرده باشند.



در مورد چهار نقطهٔ متمایز A, B, A', B' در فضا یک شرط لازم و کافی «مفید» بیابید برای این‌که هر دایرهٔ گذرنده از زوج A, B و هر دایرهٔ گذرنده از زوج A', B' درگیر باشند.

۷. تابع پیش‌گو

تابع $f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ و زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. تابع f را A-پیش‌گو می‌گوییم اگر مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N}\mid x\notin A\,,f(A\cup\{x\})\neq x\}$ متناهی باشد. نشان دهید تابعی وجود دارد که برای هر زیرمجموعهٔ A از اعداد طبیعی، A-پیش‌گو باشد.

راهنمایی: ابتدا سعی کنید تابعی ارائه کنید که برای زیرمجموعه‌های متناهی پیش‌گو باشد.

(با این تابع می‌توان شعبده‌بازی غریبی ترتیب داد به این طریق که از فردی می‌خواهیم زیرمجموعهٔ ثابتی از اعداد طبیعی انتخاب کند و سپس یک عدد به آن اضافه کند و مجموعهٔ حاصل را به ما بگوید. ما با اعمال این تابع روی مجموعه‌ای که به ما داده است، عدد اضافه شده را تقریباً همیشه، یعنی حداکثر به ازای متناهی اشتباه برای هر A، اعلام می‌کنیم!)

۸. دنباله‌های پوشاننده

دنبالهٔ $d_1, \ldots, d_n$ از اعداد طبیعی، نه لزوماً متمایز، را **پوشاننده** گوییم هرگاه تصاعدهایی با قدر نسبت‌های $d_1, \ldots, d_n$ وجود داشته باشند که هر عدد طبیعی در دست‌کم یکی از آن‌ها آمده باشد. این دنباله را **کوتاه** می‌نامیم هرگاه نتوان هیچ یک از $d_1, \ldots, d_n$ را حذف کرد که دنبالهٔ حاصل هم‌چنان پوشاننده بماند.

الف) $d_1, \ldots, d_n$ را یک دنبالهٔ پوشانندهٔ کوتاه بگیرید و فرض کنید اعداد طبیعی را با تصاعدهایی با قدر نسبت $d_1, \ldots, d_n$ و عضو ابتدایی $a_1, \ldots, a_n$ پوشانده باشیم. هم‌چنین p را یک عدد اول بگیرید که $d_1, \ldots, d_k$ را می‌شمارد اما $d_{k+1}, \ldots, d_n$ را نمی‌شمارد. ثابت کنید باقی‌مانده‌های $a_1, \ldots, a_k$ بر p، تمام اعداد $0, \ldots, p-1$ را شامل می‌شوند.

ب) در مورد دنباله‌های پوشاننده و هم‌چنین دنباله‌های پوشانندهٔ کوتاه در حالتی که هر یک از $d_1, \ldots, d_n$ تنها یک عامل اول داشته باشد هر چه می‌توانید ثابت کنید.

بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. دوازده‌وجهی منتظم

الف. ابتدا تعداد دوران‌های مختلفی که یک دوازده‌وجهی منتظم را به روی خودش منطبق می‌کند می‌شماریم. به دلیل تقارن یک دوازده‌وجهی می‌توان هر کدام از ۱۲ وجه آن را به وجه پایینی برد (فرض کنید ۱۲وجهی در حالتی در فضا قرار گرفته باشد که یک وجه آن افقی باشد). ضمناً با توجه به این که همه‌ی وجوه به شکل ۵ضلعی هستند، این وجه به ۵ طریق مختلف می‌تواند روی وجه پایینی قرار بگیرد. بنابراین $۱۲ \times ۵ = ۶۰$ دوران مختلف برای یک دوازده‌وجهی داریم. دقت کنید که یکی از این دوران‌ها، شکل را تغییر نمی‌دهد و همه‌ی رأس‌ها سر جای خود باقی می‌مانند، پس ۵۹ دوران داریم که وضعیت دوازده‌وجهی را تغییر می‌دهد. (البته می‌توان تعداد این ۶۰ دوران را با شمارش تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌هایی که در هر رأس به هم می‌رسند و با توجه به این نکته که می‌توان با دوران هر رأس و یالی را به هر رأس و یال دیگری فرستاد هم محاسبه کرد.)
در ادامه یک رأس علامت‌دار از چندوجهی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم محاسبه کنیم که در چندتا از دوران‌ها یک رأس علامت‌دار بر این رأس منطبق می‌شود. دقت کنید که به ۱۰ طریق می‌توان یک رأس علامت‌دار از دوازده‌وجهی انتخاب کرد و هر کدام از این ۱۰ رأس هم می‌توانند به ۳ طریق مختلف روی این رأس مورد نظر قرار گیرند. اما باز هم در یکی از این حالت‌ها دوران مورد بحث هیچ تغییری در چندوجهی ایجاد نمی‌کند. پس در کل در $۳ \times ۱۰ - ۱ = ۲۹$ حالت یک رأس علامت‌دار روی این رأس قرار می‌گیرد.
حال با توجه به این که ۱۰ رأس علامت‌دار داریم، در همه‌ی دوران‌ها ۲۹۰ بار دو رأس علامت‌دار روی هم قرار می‌گیرند. بنا به اصل لانه کبوتری و با توجه به این که در کل ۵۹ دوران مختلف و نابدیهی داریم، دورانی وجود دارد که تعداد این منطبق‌شدن‌ها در آن از $\frac{۲۹۰}{۵۹}$ بیش‌تر نیست. از آن‌جا که $\frac{۲۹۰}{۵۹} < ۵$، دورانی وجود دارد که تعداد این انطباق‌ها در آن حداکثر ۴ است و این همان حکم مسئله است.

ب. کافی است مثالی بزنیم که در آن نتوان دورانی یافت که با انجام آن، حداکثر سه نقطه‌ی علامت‌دار روی سه نقطه‌ی علامت‌دار قرار بگیرد. برای این منظور رئوس واقع بر دو وجه رو به روی هم را علامت می‌زنیم. فرض کنید دورانی از این شکل باشد که حداکثر سه رأس علامت‌دارش با رئوس علامت‌دار اولی منطبق باشد. در این صورت باید با هر دوران شکل یکی از دو وجه علامت‌دار شکل جدید حداکثر یک نقطه‌ی علامت‌دار از شکل اولیه را شامل باشد (چون اگر هر کدام از وجه‌ها حداقل دو رأس علامت‌دار را شامل باشند، حداقل چهار انطباق اتفاق افتاده است.)
اما دقت کنید یک جفت از وجه‌های روبه‌رو به هم در دوازده‌وجهی، حتماً یا شامل وجه پایینی و یا یکی از وجه‌های مجاور آن است. پس حداقل دو انطباق در وجه پایینی وجود دارد. با استدلال مشابه می‌توان نشان داد که حداقل دو انطباق هم در وجه بالایی داریم. بنابراین در هر دورانی حداقل چهار انطباق رئوس علامت‌دار اتفاق افتاده و اثبات حکم به اتمام می‌رسد.

سؤال شماره ۲. چندجمله‌ای‌های ریش‌ریش!

الف. برای هر عدد طبیعی $i \in \{1,2,\dots,k\}$ تعریف می‌کنیم:

$$P_i(x) = (x-i)(x-(k+i))\cdots(x-((n-1)k+i))$$

به وضوح ضرایب $P_i(x)$ همه صحیح هستند و این چندجمله‌ای دقیقاً یک ریشه‌ی ساده بین $\frac{1}{2}$ و $k+\frac{1}{2}$ دارد، پس علامت‌های $P_i(\frac{1}{2})$ و $P_i(k+\frac{1}{2})$ متفاوت است. به همین ترتیب برای هر $0 \le j \le n-1$، علامت $P_i(jk+\frac{1}{2})$ و $P_i((j+1)k+\frac{1}{2})$ مختلف هست.

بنابراین اگر $Q(x)$ مجموع تعدادی از P_iها باشد، با توجه به این که علامت P_iها در دو سر بازه‌ی $[jk+\frac{1}{2},(j+1)k+\frac{1}{2}]$ برای هر $0 \le j \le n-1$ مختلف است، علامت Q هم در دو سر این بازه مختلف است و در نتیجه Q هم ریشه‌ای در درون این بازه دارد. در نهایت با توجه به این که درجه‌ی Q برابر n است و n بازه به شکل گفته شده داریم، همه‌ی ریشه‌های Q حقیقی هستند.

ب. بله، چنین خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌ها وجود دارد.

نشان می‌دهیم می‌توان اعداد طبیعی مناسب $c_1 < c_2 < \cdots$ یافت که چندجمله‌ای‌های

$$P_n(x) = x^{2n+1} - c_n(x-1)(x-2)\cdots(x-2n), \quad \forall n \ge 1$$

خاصیت‌های مورد نظر مسئله را داشته باشند.

c_nها را به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $c_1 = 1$. فرض کنید $c_1,\dots,c_{n-1}$ مشخص شده باشند، به گونه‌ای که $P_1,P_2,\dots,P_{n-1}$ عامل مشترکی نداشته باشند و برای هر $\emptyset \subsetneq A \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}$ همه‌ی ریشه‌های $\sum_{j\in A} P_j(x)$ حقیقی باشند. حال c_n را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که برای هر $A \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}$ (در این‌جا A می‌تواند تهی هم باشد)، همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ی

$$f_A(x) = x^{2n+1} - c_n(x-1)(x-2)\cdots(x-2n) + \sum_{j\in A} P_j(x)$$

حقیقی باشند. $M_n > 0$ را عددی حقیقی بگیرید که برای هر $x \in [0,2n+1]$ و هر $1 \le j \le n-1$، $|P_j(x)| < M_n$. ادعا می‌کنیم که اگر c_n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، یعنی به طور دقیق‌تر اگر $c_n > 2^{2n}\Big((2n+1)^{2n+1} + (n-1)M_n\Big)$ انتخاب شود، داریم:

$$f_A(\frac{1}{2}) < 0, f_A(\frac{5}{2}) < 0, \dots, f_A(2k+\frac{3}{2}) < 0, \dots, f_A(2n+\frac{1}{2}) < 0$$
$$f_A(\frac{3}{2}) > 0, f_A(\frac{7}{2}) > 0, \dots, f_A(2k+\frac{1}{2}) > 0, \dots, f_A(2n-\frac{1}{2}) > 0$$

در این صورت طبق قضیه‌ی مقدار میانی f_A در هر یک از بازه‌های $(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2})$، $(2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2})$،... و $(2n-\frac{1}{2},2n+\frac{1}{2})$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. پس f_Aها هر کدام حداقل $2n$ ریشه‌ی حقیقی دارند. از آن‌جا که همه‌ی f_A درجه فرد هستند و تعداد ریشه‌های حقیقی یک چندجمله‌ای درجه فرد همیشه عددی فرد است، همه‌ی $2n+1$ ریشه‌ی f_A حقیقی خواهد بود.

برای اثبات ادعای بالا، توجه کنید که برای هر $0 \le k \le n$، داریم:

$$f_A(2k+\frac{1}{2}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2k+\frac{1}{2})^{2n+1} - c_n(2k+\frac{1}{2}-1)(2k+\frac{1}{2}-2)\cdots(2k+\frac{1}{2}-2n) + \sum_{j\in A} P_j(2k+\frac{1}{2}) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (2k+\frac{1}{2})^{2n+1} + \sum_{j\in A} P_j(2k+\frac{1}{2}) < c_n(2k+\frac{1}{2}-1)(2k+\frac{1}{2}-2)\cdots(2k+\frac{1}{2}-2n)$$

چون در حاصل‌ضرب $(۲k+\frac{۱}{۲}-۱)(۲k+\frac{۱}{۲}-۲)\cdots(۲k+\frac{۱}{۲}-۲n)$ تعداد زوجی از پرانتزها منفی است، مقدار کل حاصل‌ضرب مثبت خواهد بود. پس نابرابری بالا معادل است با این‌که:

$$c_n > \frac{(۲k+\frac{۱}{۲})^{۲n+۱}+\sum\limits_{j\in A}P_j(۲k+\frac{۱}{۲})}{\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۱\right|\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲\right|\cdots\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲n\right|} \qquad (*)$$

اما اگر $c_n > ۲^{۲n}\Big((۲n+۱)^{۲n+۱}+(n-۱)M_n\Big)$ باشد، از آن‌جا که:

$$(۲k+\frac{۱}{۲})^{۲n+۱} < (۲n+۱)^{۲n+۱}$$

$$\sum_{j\in A}P_j(۲k+\frac{۱}{۲}) \leq \sum_{j\in A}|P_j(۲k+\frac{۱}{۲})| < (n-۱)M_n$$

$$\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۱\right|\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲\right|\cdots\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲n\right| > \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n}$$

نابرابری $(*)$ نتیجه می‌گردد. اثبات این که $f_A(۲k+\frac{۳}{۲})<۰$ نیز کاملاً مشابه است.

تنها باید نشان دهیم که می‌توان c_n را به گونه‌ای انتخاب کرد که P_n با هیچ‌یک از P_jها برای $j<n$ عامل مشترک نداشته باشد. برای این منظور لم ساده‌ی زیر را به کار می‌گیریم.

لم. اگر c و c' دو عدد حقیقی و متمایز باشند، آن‌گاه دو چندجمله‌ای زیر ریشه‌ی مشترک ندارند.

$$f(x)=x^{۲n+۱}-c(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۲n), \quad g(x)=x^{۲n+۱}-c'(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۲n)$$

اثبات. اگر $x_۰$ ریشه‌ی مشترک این دو چندجمله‌ای باشد، ریشه‌ی $f(x)-g(x)$ نیز هست. یعنی

$$(c'-c)(x_۰-۱)(x_۰-۲)\cdots(x_۰-۲n)=۰$$

حال چون $c\neq c'$، باید $x_۰$ عضو مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ باشد، اما هیچ یک از اعضای این مجموعه ریشه‌ی $f(x)$ و یا $g(x)$ نیستند. پس این دو چندجمله‌ای نمی‌توانند ریشه‌ی مشترک داشته باشند. $\square$

با توجه به این لم چون تعداد ریشه‌های P_j برای $j<n$ متناهی است، حداکثر برای متناهی مقدار c_n، P_n تعریف شده با استفاده از c_n با یکی از P_jها ریشه‌ی مشترک (عامل مشترک) دارد. پس می‌توان c_n را عددی غیر از این متناهی مقدار انتخاب کرد که ریشه‌ی مشترکی با P_jهای قبلی نداشته باشد.

بنابراین دنباله‌ی P_jهایی که به این شکل به صورت استقرایی معرفی می‌شود، همگی تکین و با ضرایب صحیح هستند، دوبه‌دو عامل مشترکی ندارند و همه‌ی ریشه‌های هر مجموع متناهی از آن‌ها حقیقی است. به این ترتیب اثبات حکم به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۳. چهارضلعی لق

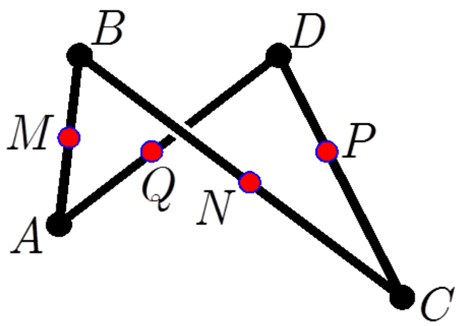
فرض کنید چهارضلعی که این چهار میله‌ی فلزی در فضا می‌سازند را با $ABCD$ نمایش دهیم و نقطه‌های مشخص‌شده روی اضلاع AB، BC، CD و DA را به ترتیب M، N، P و Q بنامیم. صفحه‌ی گذرنده از این چهار نقطه را π می‌نامیم. a، b، c و d را به ترتیب فاصله‌ی A، B، C و D تا صفحه‌ی π بگیرید. به سادگی داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{a}{b}, \frac{BN}{NC}=\frac{b}{c}, \frac{CP}{PD}=\frac{c}{d}, \frac{DQ}{QA}=\frac{d}{a} \Rightarrow \frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CP}{PD}\frac{DQ}{QA}=۱$$

حال فرض کنید میله‌ها تغییر وضعیت بدهیم. π' را صفحه‌ای بگیرید که در این وضعیت جدید از نقطه‌های M، N و P عبور می‌کند. این بار فاصله‌ی A، B، C و D تا π' را به ترتیب با a'، b'، c' و d' نمایش می‌دهیم. بنابراین مشابه بالا داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{a'}{b'}, \frac{BN}{NC}=\frac{b'}{c'}, \frac{CP}{PD}=\frac{c'}{d'}$$

با توجه به این که حاصل‌ضرب $\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CP}{PD}\frac{DQ}{QA}$ برابر ۱ است، $\frac{DQ}{QA}=\frac{d'}{a'}$ خواهد بود و در نتیجه Q هم باید روی صفحه‌ی π' واقع باشد.



سؤال شماره ۴. پله‌برقی هوشمند

در هر لحظه تعداد افرادی که در آن زمان روی پله‌برقی هستند را در نظر بگیرید. حال بازه‌های زمانی را مشخص کنید که در هر کدام از آن‌ها تعداد افرادی که در لحظه از آن بازه روی پله‌برقی هستند، مقدار ثابتی باشد. فرض کنید k بازه‌ی $I_1, I_2, \ldots, I_k$ دارای این خاصیت باشند. از نمادهای t_i و a_i به ترتیب برای نمایش طول بازه‌ی iام و تعدادی افرادی که در بازه‌ی iام روی پله‌برقی هستند، استفاده می‌کنیم. واضح است که زمان کل برای انتقال همه‌ی افراد $\sum_{i=1}^{k} t_i$ است. هم‌چنین می‌دانیم:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{1-\alpha} t_i = nl$$

چرا که هر فرد مسافت l را طی می‌کند، پس مجموع مسافت‌های طی‌شده توسط همه‌ی افراد از یک طرف برابر nl است. از طرف دیگر از آن‌جا که در بازه‌ی I_i، a_i نفر هر کدام به اندازه‌ی $a_i^{-\alpha} t_i$ جابه‌جا می‌شود، مجموع جابه‌جایی‌های همه‌ی افراد برابر سمت چپ عبارت بالا خواهد بود.

در ادامه دو حالت را در نظر می‌گیریم:

- $\alpha \geq 1$ از آن‌جا که a_iها طبیعی هستند(منطقی نیست که در یک بازه‌ی زمانی هیچ کسی روی پله‌برقی نباشد)، $a_i \geq 1$ و چون $\alpha \geq 1$، $a_i^{1-\alpha} \leq 1$. پس داریم:

$$nl = \sum_{i=1}^{k} a_i^{1-\alpha} t_i \leq \sum_{i=1}^{k} t_i$$

پس زمان مورد نیاز حداقل برابر nl است. برای رسیدن به این زمان باید افراد یکی یکی سوار پله‌برقی شوند($a_i = 1$)، یعنی هر نفر به محض پیاده شدن نفر قبلش سوار شود.

- $\alpha < 1$. چون $a_i \leq n$ و $\alpha < 1$، $a_i^{1-\alpha} \leq n^{1-\alpha}$ و در نتیجه

$$nl = \sum_{i=1}^{k} a_i^{1-\alpha} t_i \leq n^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{k} t_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} t_i \geq n^{\alpha} l$$

پس در این حالت حداقل زمان برابر $n^{\alpha} l$ است و برای رسیدن به این زمان باید همه‌ی n نفر، هم‌زمان سوار پله‌برقی شوند. (سرعت برابر $n^{-\alpha}$ است و چون کل مسافت برابر l است، زمان لازم برابر $n^{\alpha} l$ می‌شود.)

سؤال شماره ۵. اعداد اول طلایی

الف. t را تعداد اعداد اول طلایی کم‌تر یا مساوی 1390^n بگیرید. باید نشان دهیم $t \ge n$. S را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی 1390^n بگیرید که همه‌ی عوامل اولشان در مجموعه‌ی $\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$ باشند. به وضوح هر عضو S می‌تواند به شکل a^2b نوشته شود که a و b دو عدد طبیعی هستند و b خالی از مربع است. به وضوح $a \le \sqrt{1390^n} = 1390^{\frac{n}{2}}$. در مورد b هم می‌دانیم که $b = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_t^{\alpha_t}$ که هر α_i برابر ۰ یا ۱ است. پس a و b به ترتیب $1390^{\frac{n}{2}}$ و 2^t حالت دارند و بنابراین $|S| \le 2^t 1390^{\frac{n}{2}}$.

از طرف دیگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $1 \le i \le 1390^{\frac{2}{3}n}$، داریم:

$$a_i \le i^{1.5} \le 1390^{\frac{2}{3}n \times 1.5} = 1390^n$$

توجه کنید که تمام عوامل اول a_i عضو مجموعه‌ی $\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$ هستند و لذا برای هر $1 \le i \le 1390^{\frac{2}{3}n}$، $a_i \in S$ و این یعنی S حداقل $[1390^{\frac{2}{3}}]$ عضو دارد.

در نهایت به آسانی می‌توان دید: $2 \times 1390^{\frac{1}{2}} \le 1390^{\frac{2}{3}} - 1$ و بنابراین

$$2^n \times 1390^{\frac{n}{2}} = (2 \times 1390^{\frac{1}{2}})^n \le (1390^{\frac{2}{3}} - 1)^n \le 1390^{\frac{2}{3}n} - 1 \le |S| \le 2^t \times 1390^{\frac{n}{2}}$$

پس $t \ge n$ و اثبات این قسمت به پایان می‌رسد.

ب. اثبات این قسمت هم بسیار شبیه به قسمت (الف) است. این بار t را تعداد اعداد اول طلایی کم‌تر یا مساوی 1390^{2n} بگیرید. در این‌جا هم باید نشان دهیم $t \ge n$. باز هم مشابه قبل S را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی 1390^{2n} بگیرید که همه‌ی عوامل اولشان طلایی و کم‌تر مساوی q_t باشند.

دقت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت a^4b^2c نوشت که a، b و c طبیعی و b و c دو عدد طبیعی و خالی از مربع باشند. در این‌جا برای a حداکثر $\sqrt[4]{1390^{2n}} = 1390^{\frac{n}{2}}$ و برای b و c هم حداکثر 2^t حالت ممکن است (با استدلال شبیه به قسمت (الف)). پس $|S| \le 2^{2t} \times 1390^{\frac{n}{2}}$.

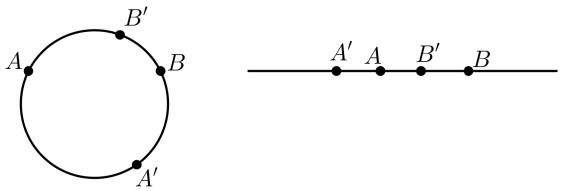
در این حالت اگر i عددی طبیعی و کم‌تر یا مساوی $1390^{\frac{5}{6}n}$ باشد، $a_i \le i^{2.4} \le 1390^{\frac{5}{6}n \times 2.4} = 1390^{2n}$ ضمناً همه‌ی عوامل اول a_iها برای $i \le 1390^{\frac{5}{6}n}$ طلایی هستند و در نتیجه $a_i \in S$. پس داریم:

$$2^{2n} \times 1390^{\frac{n}{2}} = (4 \times 1390^{\frac{1}{2}})^n \le (1390^{\frac{5}{6}} - 1)^n \le 1390^{\frac{5}{6}n} - 1 \le |S| \le 2^{2t} \times 1390^{\frac{n}{2}}$$

که با توجه به این که $4 \times 1390^{\frac{1}{2}} \le 1390^{\frac{5}{6}} - 1$ نابرابری‌ها برقرار هستند. این نابرابری‌ها نتیجه می‌دهند، $t \ge n$ و اثبات این قسمت از مسئله هم به پایان می‌رسد.

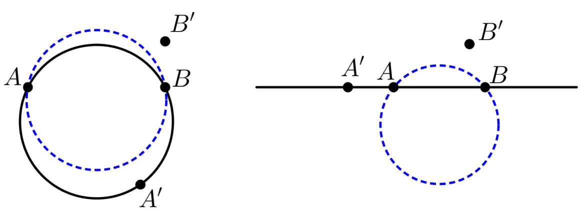
سؤال شماره ۶. دوایر درگیر

ادعا می‌کنیم که شرط لازم و کافی مفید(!) این است که هر چهار نقطه روی یک دایره و یا یک خط واقع باشند و به علاوه A و B، A' و B' را روی این دایره و یا خط از هم جدا کنند.

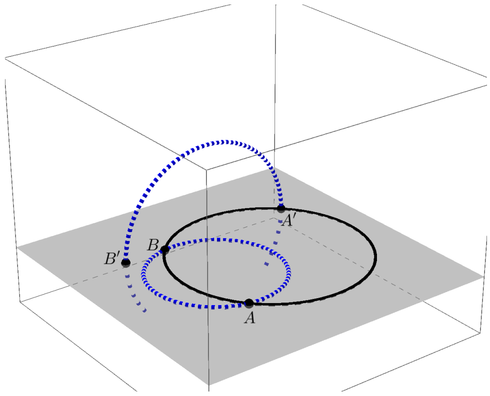


برای اثبات لازم بودن این خاصیت، ابتدا نشان می‌دهیم که چهار نقطه باید در یک صفحه واقع باشند، سپس ثابت می‌کنیم که باید هم‌دایره و یا هم‌خط باشند و در انتها نشان می‌دهیم روی این دایره و یا خط باید A' و B' در یک طرف A و B نباشند.

- اگر این چهار نقطه هم‌صفحه نباشند، خط گذرنده از AB و خط گذرا از $A'B'$ متنافر هستند (متقاطع و یا موازی نیستند). بنابراین می‌توان صفحه‌ای گذرنده از A و B مثل πو صفحه‌ای گذرنده از A' و B' مثل π' یافت که π و π'با هم موازی باشند (یعنی در فضا اشتراکی نداشته باشند). به وضوح دو دایره یکی در صفحه‌ی π و دیگری در صفحه‌ی π'نمی‌توانند با هم درگیر باشند. پس این حالت امکان ندارد و چهار نقطه باید هم‌صفحه باشند.
- حال فرض کنید که چهار نقطه در یک صفحه واقع هستند و B'روی دایره‌ی محیطی مثلث ABA' قرار ندارد (اگر A، B و A'هم‌خط باشند، به جای دایره‌ی محیطی خط گذرنده از این سه نقطه را در نظر می‌گیریم). در این حالت می‌توان دایره‌ی محیطی (یا خط واصل) را کمی تغییر داد و دایره‌ی جدیدی به دست آورد که هنوز از A و B بگذرد و وضعیت A' و B'نسبت به آن یک‌سان باشد؛ یعنی یا هر دو نقطه درون این دایره باشند و یا هر دو بیرون آن واقع باشند.



در این صورت این دایره‌ی تغییریافته و دایره‌ی عمود بر صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ها و به قطر $A'B'$ درگیر نیستند (دو دایره‌ی به صورت خط‌چین در شکل پایین) و این تناقض نشان می‌دهد که باید چهار نقطه هم‌دایره و یا هم‌خط باشند.



- فرض کنید روی این دایره (یا خط) A' و B' در یک سمت A و B واقع باشند. در این‌جا هم کاملاً مشابه قسمت قبلی این دایره (یا خط) گذرنده از نقطه‌ها را اندکی تغییر می‌دهیم تا دایره‌ی جدیدی به دست آید که از A و B بگذرد و هر دو A' و B' درون یا بیرون آن واقع باشند. شبیه قسمت قبل این دایره‌ی تغییریافته و دایره‌ی عمود بر صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ها و به قطر $A'B'$ درگیر نیستند.

در ادامه نشان می‌دهیم که شرط بیان‌شده کافی هم هست. برای این منظور فرض کنید چهار نقطه‌ی A، B، A' و B' خواص یادشده را دارا هستند و می‌خواهیم نشان دهیم که هر دو دایره‌ی گذرنده از A و B مثل C و هر دایره‌ی گذرنده از A' و B' مثل C' درگیر هستند. صفحات شامل C و C' را به ترتیب π و π' بنامید.

- اگر نقطه‌ها هم‌خط باشند، هر دوی πو π' شامل خط گذرنده از نقطه‌ها هستند. $C' \cap \pi$ شامل یک نقطه درون C و یک نقطه بیرون C (در π) است و بنابراین C و C' درگیر هستند.

- اگر نقطه‌ها روی یک دایره واقع باشند، M را محل تقاطع AB و $A'B'$ و l را خط اشتراک π و π' بگیرید. در این صورت حتماً $M \in l$ و $MA.MB = MA'.MB'$. M درون C است، پس خط l دایره‌ی C را در دو نقطه مثل X و Y قطع می‌کند که M بین X و Y قرار دارد. به طریق مشابه خط l دایره‌ی C' را در دو نقطه مثل X' و Y' قطع می‌کند که M بین X' و Y' هم واقع است. فرض کنید X و X' در یک طرف M باشند. داریم:
$$MX.MY = MA.MB = MA'.MB' = MX'.MY'$$

پس اگر $MX \leq MX'$، آن‌گاه $MY \geq MY'$ و بالعکس. بنابراین نقاط $C' \cap \pi = \{X', Y'\}$ یا در دو طرف متفاوت C (در π) قرار دارند و یا هر دو روی C واقع‌اند و این یعنی C و C' درگیر هستند.

سؤال شماره ۷. تابع پیش‌گو

همان طور که در راه‌نمایی صورت سؤال اشاره شده است، ابتدا تابع f را برای زیرمجموعه‌های متناهی از اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم. اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ مجموعه‌ای متناهی باشد، $f(A)$ برابر بزرگ‌ترین عضو این مجموعه تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که این تعریف f شرط پیش‌گو بودن برای مجموعه‌های متناهی را برآورده می‌سازد (چرا که اگر $x > \max_{a \in A} a$، $f(A \cup \{x\}) = x$).

در ادامه سعی می‌کنیم این تابع را f به همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی گسترش دهیم. برای این منظور یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی به این صورت تعریف می‌کنیم که دو زیرمجموعه‌ی $A, B \subseteq \mathbb{N}$ را "نزدیک به هم" می‌گوییم هرگاه با اضافه و یا کم‌کردن تعدادی متناهی عدد طبیعی بتوان از یکی به دیگری رسید. این تعریف معادل آن است که زیرمجموعه‌ی $A \Delta B$ متناهی باشد.

با توجه به خواص زیر از تفاضل متقارن مجموعه‌ها (Δ) می‌توان دید که نزدیک بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی تعریف می‌کند.

$$\begin{cases} A\Delta A = \emptyset \\ A\Delta B = B\Delta A \\ A\Delta C \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C) \end{cases}$$

این رابطه‌ی هم‌ارزی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز می‌کنند. از هر کلاس هم‌ارزی این رابطه یک زیرمجموعه را انتخاب می‌کنیم.[۱] فرض کنید عنصر انتخاب‌شده از کلاس شامل A را با S_A نمایش دهیم.

برای هر $A \neq S_A$ تعریف می‌کنیم $f(A) = \max(A\Delta S_A)$. توجه کنید که $A\Delta S_A$ متناهی است، پس بزرگ‌ترین عضوی برای آن وجود دارد. $f(S_A)$ را هم برابر هر مقدار دل‌خواهی تعریف می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که این تابع جدید، برای هر زیرمجموعه‌ی A از اعداد طبیعی پیش‌گو است. x را یک عدد طبیعی بگیرید که $x \notin A$. در این صورت A و $A \cup \{x\}$ نزدیک به هم هستند و بنابراین در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. پس $S_A = S_{A\cup\{x\}}$ و لذا داریم:

$$f(A \cup \{x\}) = f(A\Delta\{x\}) = \max(A\Delta\{x\}\Delta S_A) = \max((A\Delta S_A)\Delta\{x\})$$

پس اگر $x > \max(A\Delta S_A)$، $f(A \cup \{x\}) = x$ و بنابراین اثبات ادعا به پایان می‌رسد.

(توجه کنید که اگر به عنوان نماینده‌ی کلاس هم‌ارزی زیرمجموعه‌های متناهی، مجموعه‌ی تهی را انتخاب کنیم، $f(A) = \max(A\Delta\emptyset) = \max(A)$ و بنابراین این تابع گسترشی از تابعی است که در ابتدای راه‌حل برای زیرمجموعه‌های متناهی معرفی شد، خواهد بود.)

---

[۱] برای این کار از اصلی به نام اصل انتخاب استفاده می‌کنیم.

سؤال شماره ۸. دنباله‌های پوشاننده

الف. تصاعدهای بیان‌شده در صورت مسئله را با $S_1, S_2, \ldots, S_n$ نمایش می‌دهیم ($S_j = \{a_j + td_j : t = 0, 1, 2, \ldots\}$).
فرض کنید هیچ‌یک از $a_1, \ldots, a_k$ به پیمانه‌ی p با r هم‌نهشت نباشند. حال تصاعد حسابی $S = \{r+tp : t = 0, 1, 2, \ldots\}$ را در نظر بگیرید. این تصاعد با هیچ‌کدام از $S_1, \ldots, S_k$ اشتراکی ندارد و بنابراین با $S_{k+1}, \ldots, S_n$ پوشیده می‌شود. با استفاده از قضیه‌ی باقی‌مانده چینی می‌دانیم که $S \cap S_{k+1}, \ldots, S \cap S_n$ تصاعدهایی با قدر نسبت (به ترتیب) $pd_{k+1}, \ldots, pd_n$ هستند. حال تابع $f : S \to \{0, 1, \ldots\}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-r}{p}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت مجموعه‌های $f(S \cap S_{k+1}), \ldots, f(S \cap S_n)$ تصاعدهایی حسابی با قدر نسبت $d_{k+1}, \ldots, d_n$ هستند. از آن‌جا که S با $S_{k+1}, \ldots, S_n$ پوشیده می‌شد و f تابعی پوشا است، این مجموعه‌ها هم $\mathbb{N} \cup \{0\}$ را می‌پوشانند که با کوتاه‌بودن (مینیمال بودن) $d_1, d_2, \ldots, d_n$ تناقض دارد.

ب. فرض کنید $p_1, \ldots, p_k$ همه‌ی عوامل اول $d_1, \ldots, d_n$ باشند و تعریف کنید $I_i = \{j : p_i | d_j\}$. فرض کنید اعداد طبیعی با تصاعدهای $S_j = \{a_j + td_j : t = 0, 1, 2, \ldots\}$ پوشانده شده اند. ادعا می‌کنیم که حداقل یکی از خانواده‌های $\Theta_i = \{S_j : j \in I_i\}$ اعداد طبیعی را می‌پوشانند و این یعنی یکی از I_iها خود دنباله‌ای پوشاننده است.

فرض کنید برای هر i تصاعدهای Θ_i همه‌ی اعداد طبیعی را نپوشانند و r_i یافت شود که توسط تصاعدهای Θ_i پوشیده نمی‌شود. تعریف کنید $D_i = \prod\limits_{p_i | d_j} d_j$. طبق قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی عدد طبیعی مثل r وجود دارد که برای هر i، $r \equiv r_i \pmod{D_i}$. بنابراین r با هیچ یک از تصاعدها پوشیده نمی‌شود که با پوشاننده بودن تناقض دارد. بنابراین ادعا به طور کامل ثابت شد.

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $d_i = p^{r_i}$. ادعا می‌کنیم دنباله‌ی d_iها یک دنباله‌ی پوشاننده است، اگر و تنها اگر $\sum\limits_i \frac{1}{d_i} \geq 1$ و به علاوه این دنباله‌ی پوشاننده، کوتاه (مینیمال) هم هست، اگر و تنها اگر $\sum\limits_i \frac{1}{d_i} = 1$.

- فرض کنید اعداد طبیعی را طبق بالا با تصاعدهای S_i پوشانده‌ایم. برای هر N طبیعی، S_j حداکثر $\frac{N}{d_j} + 1$تا از اعداد $\{1, 2, \ldots, N\}$ را می‌پوشاند. پس اگر d بزرگ‌ترین عدد در بین d_jها باشد، $\sum_j \frac{N+d}{d_j} \geq N$ و لذا $\sum_j \frac{1}{d_j} \geq \frac{N}{N+d}$ و چون N دل‌خواه است باید داشته باشیم $\sum_j \frac{1}{d_j} \geq 1$.
- حال برعکس فرض کنید $\sum_j \frac{1}{d_j} \geq 1$. با استقرا روی n نشان می‌دهیم که d_jها تشکیل یک دنباله‌ی پوشاننده می‌دهند. اگر $n = 1$ باشد که حکم واضح است. اگر $n > 1$، n_j را برابر تعداد p^jها در بین $d_1, d_2, \ldots, d_n$ تعریف کنید. فرض کنید $n_0 = 0$ (اگر $n_0 \neq 0$ عدد یک هم در بین d_iها هست و لذا حتماً یک دنباله‌ی پوشاننده داریم). در این صورت حتماً قدر نسبتی مثل p^s وجود دارد که حداقل p بار در بین d_iها ظاهر شده است $n_s \geq p$، زیرا اگر چنین نباشد برای هر j، $n_j \leq p - 1$ و لذا

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{p^k} < (p-1)(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots) = (p-1)(\frac{1}{p-1}) = 1$$

حال می‌توان pتا از p^sها را از $d_1, \ldots, d_n$ حذف کرد و به جای آن یک p^{s-1} قرار داد. با این تغییر مجموع $\sum \frac{1}{d_j}$ ثابت می‌ماند. پس طبق فرض استقرا می‌توان اعداد طبیعی را با تصاعدهای حسابی با این قدر نسبت‌های جدید پوشاند. اگر تصاعد با قدر نسبت p^{s-1} در میان این تصاعدها را به p تصاعد با قدر نسبت p^s تقسیم کنیم، تصاعدهایی با قدر نسبت‌های داده شده یافته‌ایم که اعداد طبیعی را پوشانده‌اند و حکم این بخش هم ثابت می‌شود.

- اگر d_iها دنباله‌ای کوتاه نباشند به وضوح باید $\sum \frac{۱}{d_i} > ۱$ زیرا با حذف یکی از آن‌ها باز هم مجموع بیش‌تر یا مساوی یک است.

- برای طرف دیگر فرض کنید $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_n$ و $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{d_i} > ۱$. داریم $\sum_{i=۱}^{n} \frac{d_n}{d_i} > d_n$ و چون همه‌ی $\frac{d_n}{d_i}$ها اعداد طبیعی هستند، باید $\frac{d_n}{d_i} \geq ۱ + d_n$ و بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{d_n}{d_i} \geq ۱ + d_n \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{d_i} \geq ۱ + \frac{۱}{d_n} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{۱}{d_i} \geq ۱$$

که طبق قسمت‌های قبلی این نتیجه می‌دهد $d_۱, \ldots, d_{n-۱}$ هم پوشاننده است و این یعنی می‌توانیم d_n را از اعضای دنباله حذف کنیم طوری که اعضای باقی‌مانده مجدداً پوشاننده باشند و بنابراین دنباله‌ی اولیه کوتاه (مینیمال) نبوده است.

به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. جهت‌گذاری بی‌دور

برای هر گراف سادهٔ بی‌جهت G، $f(G)$ عبارت است از تعداد روش‌های جهت‌دار کردن یال‌های G به طوری که گراف حاصل، دورِ جهت‌دار نداشته باشد. مثلاً $f(K_۳) = ۶$.

برای هر رأس v از گراف G، منظور از $G - v$ گرافی است که از حذف کردن رأس v و تمام یال‌های متصل به آن به دست می‌آید.

الف) ثابت کنید اگر G گرافی با رئوس $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ باشد

$$f(G) \leq f(G - v_۱) + \cdots + f(G - v_n)$$

و همهٔ گراف‌هایی را بیابید که برای آن‌ها تساوی رخ می‌دهد.

ب) برای هر یال e از G که u, v دو سر آن باشند، $G - e$ گرافی است که از حذف کردن یال e به دست می‌آید و G / e گرافی است که در آن u, v و یال‌های متصل به آن‌ها را حذف کرده و رأس z را به جای آن‌ها قرار می‌دهیم و آن را به رأسی وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر دست‌کم یکی از u, v در G به آن متصل باشد.

ثابت کنید برای هر یال e از G داریم: $f(G) = f(G - e) + f(G / e)$.

ج) ثابت کنید برای هر $\alpha > ۱$، گرافِ G و یک یالِ e از آن وجود دارد که $\alpha < \dfrac{f(G)}{f(G - e)}$.

۲. نابرابری محدب

فرض کنید S شکلی محدب در صفحه با مساحت ۱۰ باشد. وتری به طول ۳ در S در نظر بگیرید و A و B را دو نقطه روی این وتر بگیرید که آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند. برای نقطهٔ متغیر X در $S - \{A, B\}$، A' و B' را به ترتیب تقاطع نیم‌خط‌های AX و BX با مرز S تعریف کنید. S' را مجموعهٔ Xهایی بگیرید که به ازای آن‌ها داشته باشیم $AA' > \frac{۱}{۳}BB'$. ثابت کنید مساحت S' دست‌کم ۶ است.

(یک شکل در صفحه محدب گفته می‌شود اگر برای هر دو نقطهٔ آن، پاره‌خط واصل آن‌ها کاملاً درون شکل باشد. در یک شکل محدب منظور از یک وتر، پاره‌خطی است که رئوسش روی مرز باشد.)

۳. فی اویلر نزولی

ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ اعداد طبیعی $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ وجود دارند که $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \cdots > \varphi(a_n)$. ($\varphi(n)$، تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از n است که نسبت به آن اول هستند.)

۴. سکه‌های تقلبی

n کیسه داریم که داخل هر کدام ۱۰۰ سکه است. همهٔ سکه‌ها ۱۰ گرمی هستند به جز سکه‌های یکی از کیسه‌ها که ۹ گرمی هستند. یک ترازوی یک کفه‌ای داریم که وزن اشیاء را تا حداکثر یک کیلوگرم به‌طور دقیق نشان می‌دهد. دست‌کم چند بار وزن کردن لازم است تا بتوانیم کیسهٔ متفاوت را پیدا کنیم.

۵. چندجمله‌ای‌های دوری

چندجمله‌ای سه متغیرهٔ P را دوری می‌نامیم هرگاه $P(x,y,z) = P(y,z,x)$. ثابت کنید چندجمله‌ای‌های سه متغیرهٔ دوریِ $P_۱, P_۲, P_۳, P_۴$ وجود دارند به طوری که برای هر چندجمله‌ای سه متغیرهٔ دوری P، چندجمله‌ای چهار متغیرهٔ Q موجود باشد که

$$P(x,y,z) = Q\big(P_۱(x,y,z), P_۲(x,y,z), P_۳(x,y,z), P_۴(x,y,z)\big).$$

۶. مساحت چندضلعی محدب شبکه‌ای

الف) ثابت کنید $a > ۰$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، n ضلعی محدب P در صفحه با رئوس شبکه‌ای وجود داشته باشد که مساحت P از $an^۳$ بیش‌تر نباشد.

ب) ثابت کنید $b > ۰$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n ضلعی محدب P در صفحه با رئوس شبکه‌ای، مساحت P از $bn^۲$ کم‌تر نباشد.

ج) ثابت کنید $c, \alpha > ۰$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n ضلعی محدب P
رئوس شبکه‌ای، مساحت P از $cn^{۲+\alpha}$ کم‌تر نباشد. ($(۱ + \alpha)$!)

۷. یکی رو یکی زیر!

شهر پل‌آباد تعدادی اتوبان دارد. اتوبان‌ها خم‌های بسته‌ای هستند که با خود و یک‌دیگر تقاطع‌هایی به شکل چهاراه دارند. آقای پل‌دوست، شهردار شهر، تصمیم دارد جهت کاهش تصادفات، در هر تقاطع یک پل بسازد. او می‌خواهد به نحوی پل‌ها را بسازد که در هر اتوبان اتومبیل‌ها، یکی‌درمیان از زیر پل و روی پل عبور کنند. بر حسب تعداد اتوبان‌ها بگویید آیا این کار شدنی است؟

۸. مجموعه‌های اولیه

الف) آیا مجموعهٔ نامتناهی S از اعداد طبیعی وجود دارد که $S \neq \mathbb{N}$ و برای هر n طبیعی که $n \notin S$ دقیقاً n عضو S نسبت به n اول باشند؟

ب) آیا مجموعهٔ نامتناهی S از اعداد طبیعی وجود دارد که برای هر $n \in S$ دقیقاً n عضو S نسبت به n اول باشند؟

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. جهت‌گذاری بی‌دور

الف. در هر جهت‌گذاری بدون دور از گراف G حتماً رأسی مثل v_i وجود دارد که یال‌های متصل به v_i همه به سمت v_i جهت‌گذاری شده اند، زیرا در غیر این صورت همیشه می‌توان از هر رأس (با استفاده از یکی از این یال‌ها) خارج شد که این به دلیل متناهی بودن تعداد کل یال‌ها منجر به ایجاد یک دور در گراف می‌شود. حال با حذف v_i به یک جهت‌گذاری فاقد دور برای $G - v_i$ می‌رسیم که تعدادشان $f(G - v_i)$ است. از طرف دیگر هر جهت‌گذاری بدون دور روی $G - v_i$ با توجه به نکته‌ی بالا با جهت‌دار کردن همه‌ی یال‌های متصل به v_i به سمت آن به یک جهت‌گذاری بدون دور برای G منجر می‌شود. اما دقت کنید که در برخی از جهت‌گذاری‌های روی G بیش از یک رأس با خاصیت گفته‌شده پیدا می‌شود و بنابراین یک جهت‌گذاری روی G ممکن است چند بار در $\sum_{i=1}^{n} f(G - v_i)$ شمرده شود و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

ب. هر جهت‌گذاری بدون دور از $G - e$ یک جهت‌گذاری بدون دور از G به ما می‌دهد؛ زیرا اگر فرض کنیم v_i و v_j دو رأس متصل به e هستند، آن‌گاه این که نتوانیم e را از v_j به v_i جهت‌گذاری کنیم، نتیجه می‌دهد که مسیری جهت‌دار از یال‌ها در $G - e$ از v_i به v_j وجود دارد. به طریق مشابه اگر نتوانیم e را از v_i به v_j جهت‌گذاری کنیم، نتیجه می‌دهد که مسیری جهت‌دار از یال‌های در $G - e$ از v_j به v_i وجود دارد. پس اگر نتوانیم هیچ یک از این دو جهت را روی e اعمال کنیم، نتیجه می‌گیریم که مسیری جهت‌دار از v_i به v_j و از v_j به v_i در $G - e$ وجود دارد که این خود به معنی وجود دور در $G - e$ است که تناقض است. پس نشان دادیم که هر جهت‌گذاری بدون دور از $G - e$ یک یا دو جهت‌گذاری بدون دور از G به ما می‌دهد.
اگر هر دو جهت روی e قابل اعمال کردن باشد، این به معنی آن است که در $G - e$ هیچ‌کدام از دو مسیر یاد شده در بالا (از v_i به v_j و از v_j به v_i) وجود ندارد. پس اگر دو رأس v_i و v_j را با هم یکی کنیم تا G/e به دست بیاید، جهت‌گذاری بدون دور روی G یک جهت‌گذاری بدون دور روی G/e به دست می‌دهد. به عکس یک جهت‌گذاری بدون دور روی G/e به یک جهت‌گذاری یک‌تا روی G منجر می‌شود. پس اثبات این قسمت هم به پایان می‌رسد.

ج. کافی است G را گراف کامل n رأسی در نظر بگیرید. در این صورت $f(G) = n!$ زیرا طبق الف رأس وجود دارد که همه‌ی یال‌ها به سمت آن جهت‌گذاری شده‌اند و با حذف این رأس به یک جهت‌گذاری بدون دور برای گراف کامل $n - ۱$ رأسی می‌رسیم و چون همه‌ی رأس‌ها به هم متصل هستند، هم‌زمان نمی‌توانند دو رأس این خاصیت را داشته باشند و بنابراین در (الف) تساوی اتفاق می‌افتد. دقت کنید که همه‌ی $G - v_i$ ها در این‌جا گراف کامل با $n - ۱$ رأس است و بنابراین طبق (الف) $f(K_n) = nf(K_{n-۱})$ که این رابطه‌ی بازگشتی با محاسبه‌ی مقادیر اولیه نشان می‌دهد که $f(K_n) = n!$ است.
دقت کنید که برای یک یال دل‌خواه e از K_n، K_n/e با تعریف قسمت (ب) همان $K_{n-۱}$ است. پس با توجه به قسمت

ب) $f(G-e)=n!-(n-1)!=(n-1)(n-1)!$. در نتیجه

$$\frac{f(G)}{f(G-e)}=\frac{n!}{(n-1)(n-1)!}=\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$$

که برای هر $\alpha>1$ می‌توان n یافت که $\frac{1}{n-1}<\alpha-1$ و این حکم را نتیجه می‌دهد.

سؤال شماره ۲. نابرابری محدب

ایده‌ی اصلی حل مسئله حذف کردن یک همسایگی از A و Bست، زیرا در نزدیکی این نقطه‌ها نمی‌توانیم کران بالایی مناسبی برای $\frac{AA'}{BB'}$ پیدا کنیم. فرض کنید Zنقطه‌ی تقاطع نیم‌خط AB با مرز S باشد و ZB'، AA'را در نقطه‌ی A'' قطع کند. با توجه به محدب بودن S، A'' بین A و A' قرار دارد و بنابراین اگر S''را مجموعه نقطه‌هایی از S مثل X بگیریم که $AA'' > \frac{1}{4}BB'$، S'' زیرمجموعه‌ای از S' خواهد بود. بنابراین برای حل مسئله کافی است نشان دهیم که مساحت S''حداقل برابر ۶ است. برای این منظور هم با توجه به قضیه‌ی منه‌لائوس داریم:

$$\frac{AA''}{A''X} \cdot \frac{XB'}{B'B} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1 \Rightarrow \frac{AA''}{A''X} \cdot \frac{XB'}{B'B} = 2 \Rightarrow \frac{A''X}{AA''} = \frac{1}{2} \cdot \frac{XB'}{B'B}$$

برای حذف $A''X$ از این روابط، $\frac{AA''}{A''X}$ را بر حسب AA'' و AX می‌نویسیم. در مورد $B'X$هم به طریق مشابه عمل می‌کنیم.

$$\frac{AX}{AA''} = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{BX}{BB'}) \Rightarrow \frac{AX}{AA''} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BX}{BB'} + \frac{1}{2}$$

D_1را مجموعه نقطه‌هایی مثل x بگیرید که برای یک مقدار ثابت و مثبت α، $\frac{1}{2} \cdot \frac{BX}{BB'} + \frac{1}{2} \geq \alpha \frac{BX}{BB'}$ (با انتخاب مناسب α، D_1یک همسایگی از B خواهد بود). حال اگر $X \notin D_1$ آن‌گاه

$$\frac{AX}{AA''} < \alpha \frac{BX}{BB'} \Rightarrow \frac{AA''}{BB'} > \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AX}{BX}$$

حال D_2را مجموعه نقطه‌هایی مثل X در صفحه بگیرید که $\frac{AX}{BX} < \frac{\alpha}{4}$ (با انتخاب مناسب α، D_2یک همسایگی از A خواهد بود). اگر Xدر هیچ‌یک از D_1 و D_2نباشد، آن‌گاه $\frac{AA''}{BB'} > \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$ و در نتیجه $S - D_1 - D_2 \subseteq S'' \subseteq S'$. در ادامه سعی می‌کنیم مساحت D_1 و D_2 را محاسبه کنیم. اگر $\alpha < 3$، D_2درون یک دایره‌ی آپولونیوس برای دو نقطه‌ی A و B خواهد بود و

$$X \in D_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{BX}{BB'} + \frac{1}{2} \geq \alpha \frac{BX}{BB'} \Leftrightarrow \frac{BX}{BB'} < \frac{1}{2\alpha - 1}$$

پس اگر $\alpha > 1$، D_1یک همسایگی B متجانس با S است. حال اگر α را برابر $\frac{3}{2}$اختیار کنیم، نتیجه می‌گیریم که مساحت D_1 برابر $\frac{1}{4}$ مساحت S است که برابر ۲/۵می‌شود. همچنین اگر C و D اشتراک مرز D_2با خط AB باشند و C بین A و B قرار داشته باشد، داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AD+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1, \quad \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{1 - AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{1}{3}$$

بنابراین قطر D_2 برابر $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$ و مساحت آن برابر $\pi(\frac{2}{3})^2$که عددی کم‌تر از ۱/۵ است. بنابراین مساحت $S - D_1 - D_2$ با توجه به مساحت این سه مجموعه حداقل برابر ۶ است که نتیجه می‌دهد مساحت S' هم حداقل ۶ هست.

سؤال شماره ۳. فی اویلر نزولی

دنباله‌ی خواسته‌شده در صورت مسئله را به صورت استقرایی برای مقادیر مختلف n می‌سازیم. برای این منظور دقت کنید که اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ خاصیت مطلوب مسئله را داشته باشد و a عددی طبیعی باشد که نسبت به همه‌ی a_iها اول است، $aa_1 < aa_2 < \cdots < aa_n$ هم خاصیت مطلوب مسئله را دارد؛ زیرا برای هر $1 \leq i \leq n$، $\phi(aa_i) = \phi(a)\phi(a_i)$. وجود چنین دنباله‌ای برای $n = 1$ واضح است. حال فرض کنید اعداد طبیعی $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ را یافته‌ایم که $\phi(a_1) > \phi(a_2) > \cdots > \phi(a_n)$ می‌خواهیم دنباله‌ای به طول $n+1$ از اعداد بسازیم که همین خواص را داشته باشند.
فرض کنید p_N بزرگ‌ترین عامل اول $a_1a_2\cdots a_n$ باشد (منظور ما از p_m، mامین عدد اول است). اگر x عددی طبیعی باشد که همه‌ی عوامل اول آن از p_N بزرگ‌تر باشند، دنباله‌ی $a_1x < a_2x < \cdots < a_nx$ هم با توجه به توضیحات ابتدای راه‌حل خاصیت مطلوب مسئله را دارد. حال اگر y را بتوان به گونه‌ای یافت که $\phi(a_1x) > \phi(y) > y > a_1x$، اعداد $y < a_1x < a_2x < \cdots < a_nx$ دنباله‌ای از $n+1$ عدد می‌شوند که باز هم خاصیت مسئله را دارا هستند.
برای این منظور ادعا می‌کنیم که می‌توان عدد طبیعی x یافت که همه‌ی عوامل اول آن از p_N بزرگ‌تر باشند و به علاوه $\frac{a_1x}{\phi(a_1x)} > 4$. در صورت وجود چنین xای می‌توان عدد طبیعی l یافت که $\phi(a_1x) < 2^{l-1} = \phi(2^l) < 2^l < a_1x$ (چرا؟) و اگر y را برابر 2^l قرار دهیم کار تمام می‌شود.
حال برای یافتن x با خاصیت مورد نظر، برای هر عدد طبیعی مثل m، x_m را برابر $p_{N+1}p_{N+2}\cdots p_{N+m}$ می‌گیریم، در این صورت

$$\phi(a_1x_m) = \phi(a_1)\phi(x_m) = a_1(p_{N+1}-1)(p_{N+2}-1)\cdots(p_{N+m}-1)$$

و بنابراین

$$\frac{x_m}{\phi(x_m)} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \geq \sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i - 1} > \sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i}$$

اما مجموع $\sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i}$ با زیاد شدن m از هر مقداری بزرگ‌تر می‌شود[1] پس می‌توان عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ M یافت که $\frac{x_M}{\phi(x_M)} > 4\frac{\phi(a_1)}{a_1}$ و این نتیجه می‌دهد که x_M خاصیت مورد نظر ما را دارد.

[1] این حکم معروفی است که مجموع معکوس اعداد اول، برابر بی‌نهایت می‌شود و اثبات‌های مختلفی برای آن وجود دارد. برای یافتن اثبات‌هایی از آن می‌توانید به "کتاب اثبات" مراجعه کنید.

سؤال شماره ۴. سکه‌های تقلبی

به وضوح اگر در n کیسه با k بار وزن کردن بتوان کیسه‌ی تقلبی را پیدا کرد، در کم‌تر از n کیسه هم با k بار وزن کردن می‌توان این کار را انجام داد. $f(k)$ را بیش‌ترین تعداد کیسه‌ای بگیرید که با حداکثر k مرتبه استفاده از ترازو، بتوان کیسه‌ی تقلبی را در بین آن‌ها یافت. هدف این است که $f(k)$ را برای مقادیر مختلف k به دست بیاوریم.
ابتدا نشان می‌دهیم $f(1) = 14$. فرض کنید ۱۴ کیسه داشته باشیم. از کیسه‌ی iام، $i - 1$ سکه روی ترازو قرار می‌دهیم. در این صورت اگر مجموع وزن کیسه‌ها برابر $910 - k$ شد می‌فهمیم که k سکه‌ی تقلبی داشته‌ایم و بنابراین سکه‌های تقلبی مربوط به کیسه‌ی $k+1$ام است. توجه کنید که ۹۱۰ برابر حاصل‌جمع $10 + 20 + \cdots + 130$ است.
حال فرض کنید که تعدادی کیسه داریم که با یک بار وزن کردن می‌توانیم کیسه‌ی تقلبی را تشخیص دهیم. فرض کنید از a_0تا از کیسه‌ها صفر سکه، از a_1تا یک سکه، ... و به همین ترتیب از a_mتا از کیسه‌ها، m سکه روی ترازو قرار دهیم. با توجه به محدودیت تعداد سکه‌ها در هر بار توزین

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + ma_m \leq 100 \quad (*)$$

از طرف دیگر نمی‌توان از دو کیسه به تعداد مساوی سکه برداشت. زیرا در صورتی که از دو کیسه تعداد مساوی سکه روی ترازو قرار دهیم با وزن کردن‌مان نمی‌توانیم بین آن دو کیسه تفاوتی قائل شویم. پس برای هر عدد صحیح $i \geq 0$، $a_i \leq 1$. حال با این مفروض‌ها می‌خواهیم کاری کنیم که عبارت $a_0 + a_1 + \cdots + a_m$ بیشینه شود. برای این منظور با توجه به این که ضریب a_k در عبارت $(*)$ برابر k است، به‌تر است a_0 بیش‌ترین مقدار خودش را داشته باشد، سپس a_1 بیش‌ترین مقدار خودش را داشته باشد، سپس a_2 و به همین ترتیب حداکثر ۱۴تا از a_iها می‌توانند ناصفر باشند. به عبارت دقیق‌تر فرض کنید که در حالتی مقدار مجموع a_iها بیشینه می‌شود، kتا از آن‌ها مثل $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ برابر یک و بقیه برابر صفر باشند. دقت کنید که اگر به جای این انتخاب، مقدار a_0، a_1،...، و a_{k-1} را برابر یک و بقیه را برابر صفر انتخاب کنیم، مجموع a_iها تغییر نمی‌کند ولی سمت چپ عبارت $(*)$ کم‌تر می‌شود. بنابراین کافی است به دنبال جواب در انتخابی از a_iها بگردیم که مقادیر a_iها تا جایی برابر یک و از آن‌جا به بعد برابر صفر باشد. چون $1 + 2 + \cdots + 13 = 91$، این بیش‌ترین مقدار برابر ۱۳ می‌شود و لذا $f(1) = 14$.
حال برای به دست آوردن $f(2)$ مجدداً نابرابری $(*)$ را داریم و برای هر $i \geq 0$، $a_i \leq 14$. باز هم به همان دلیل بالا باید ابتدا a_0، سپس a_1، سپس a_2 و به همین ترتیب بقیه بیش‌ترین مقدار خود را اتخاد کنند. بیش‌ترین مقدار $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ در این حالت، زمانی حاصل می‌شود که $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 14$ و $a_4 = 4$ و بقیه برابر صفر باشند. پس $f(2) = 60$.
برای $f(3)$ مجدداً با استدلال‌های مشابه نتیجه می‌شود که $a_0 = a_1 = 60$، $a_2 = 20$ و بقیه برابر صفر هستند. پس $f(3) = 140$.
برای مقادیر $k > 3$، چون $f(k) \geq 100$، در مورد نابرابری $*$ دو شرط $a_0 \leq f(k-1)$ و برای هر $i \geq 1$، $a_i \leq 100$. بنابراین بیش‌ترین مقدار مجموع a_iها زمانی حاصل می‌شود که $a_0 = f(k-1)$، $a_1 = 100$ و بقیه برابر صفر باشند. پس داریم:

$$f(k) = f(k-1) + 100, \forall k \geq 4$$

یعنی در کل جواب سؤال به صورت زیر است:

- اگر $1 \leq n \leq 14$، حداقل یک بار وزن کردن لازم است.
- اگر $15 \leq n \leq 60$، حداقل دو بار وزن کردن لازم است.
- اگر $61 \leq n \leq 140$، حداقل سه بار وزن کردن لازم است.
- و اگر برای یک عدد طبیعی k، $100k + 40 < n \leq 100(k+1) + 40$، حداقل k بار وزن کردن لازم است.

سؤال شماره ۵. چندجمله‌ای‌های دوری

تعریف کنید

$$Q(x,y,z)=P(x,y,z)+P(y,x,z)$$

$$R(x,y,z)=P(x,y,z)-P(y,x,z)$$

واضح است که چندجمله‌ای Q متقارن و چندجمله‌ای R پادمتقارن (یعنی با جابه‌جا کردن هر دو متغیر، مقدار آن منفی می‌شود). دقت کنید که $R(x,x,z)=0$. پس R بر $x-y$ بخش‌پذیر است. مشابهاً $R(x,y,y)=R(x,y,x)=0$، پس R بر $y-z$ و $z-x$ نیز بخش‌پذیر است. پس چندجمله‌ای S وجود دارد که

$$R(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)S(x,y,z)$$

هم‌چنین به وضوح S متقارن است. پس داریم $P=\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}(x-y)(y-z)(z-x)S$. از طرفی می‌دانیم که هر چندجمله‌ای متقارن را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی نوشت[۲]. یعنی بر حسب $P_1=x+y+z$، $P_2=xy+yz+zx$ و $P_3=xyz$. اکنون اگر قرار دهیم $P_4=(x-y)(y-z)(z-x)$ حکم به وضوح نتیجه می‌شود.

[۲] این حکم به قضیه‌ی چندجمله‌ای‌های متقارن اولیه معروف است و این قضیه بیان می‌کند که نمایش یک چندجمله‌ای متقارن برحسب چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی که به آن‌ها چندجمله‌ای‌های متقارن اولیه هم گفته می‌شود، یک‌تا است.

سؤال شماره ۶. مساحت چندضلعی محدب شبکه‌ای

یک nضلعی محدب شبکه‌ای با رئوس $A_۱, A_۲, \dots, A_n$را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بردارهای $\overrightarrow{A_iA_{i+۱}}$ برای $۱ \leq i \leq n-۱$ در ربع اول دستگاه مختصات واقع باشند. کم‌ترین مقدار ممکن برای مساحت nضلعی‌های خوب را با $g(n)$ نمایش می‌دهیم. ادعا می‌کنیم $g(\frac{n}{۴}) \leq f(n) \leq g(n)$ و بنابراین کافی است که حکم‌های مسئله را برای $g(n)$ ثابت کنیم. نابرابری سمت راست واضح است. برای اثبات نابرابری سمت چپ، برای هر nضلعی محدب شبکه‌ای مثل P پایین‌ترین، بالاترین، چپ‌ترین و راست‌ترین رئوس آن را در نظر بگیرید. این چهار رأس (که ممکن است با هم برابر هم باشند) P را به تعدادی کمان تقسیم می‌کنند که یکی از آن‌ها حداقل $\frac{n}{۴}$رأس دارد. مساحت پوش محدب این رأس‌ها حداقل $g(\frac{n}{۴})$ است و به این ترتیب ادعا به طور کامل ثابت می‌شود.

لم. مساحت nضلعی خوب P که با بردارهای $u_۱, \dots, u_{n-۱}$ ساخته شده است برابر است با $\frac{۱}{۲}\sum_{i<j}|u_i \times u_j|$. $(u_i = \overrightarrow{A_iA_{i+۱}})$

اثبات. فرض کنید $A_۱$ مبدأ مختصات باشد. مساحت مثلث $A_۱A_iA_{i+۱}$ برابر است با $\frac{۱}{۲}|u_i \times A_i| = \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{i-۱}|u_i \times u_j|$ (توجه کنید که همه‌ی ضرب خارجی‌ها علامت یک‌سانی دارند). با جمع زدن این تساوی‌ها حکم ثابت می‌شود. $\square$

حال به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم:

الف. قرار دهید $u_i = (۱, i)$ چون شیب‌های $u_۱, \dots, u_{n-۱}$صعودی هستند، چندضلعی ساخته شده با آن‌ها یک چندضلعی خوب است. پس طبق لم بالا مساحت آن برابر است با:

$$\begin{aligned} S &= \frac{۱}{۲}\sum_{۱\leq i<j\leq n-۱}|u_i \times u_j| = \frac{۱}{۲}\sum_{۱\leq i<j\leq n-۱}(j-i) = \frac{۱}{۲}\sum_{۱\leq j\leq n-۱}\frac{j(j-۱)}{۲} \\ &\leq \frac{۱}{۴}\sum_{۱\leq j\leq n}j^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲۴} \end{aligned}$$

و $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲۴} = O(n^۳)$. پس قسمت اول ثابت شد.

ب. طبق لم بالا با توجه به این که $|u_i \times u_j|$ عددی طبیعی است، مساحت هر nضلعی خوب دست‌کم $\binom{n-۱}{۲}$ است. پس $g(n) \geq \binom{n-۱}{۲}$ و $\binom{n-۱}{۲} = \Omega(n^۲)$ پس اثبات این قسمت هم به پایان می‌رسد.

ج. کافی است که ادعای زیر را ثابت کنیم:

ادعا. برای هر عدد طبیعی n به اندازه کافی بزرگ، مساحت هر $(n+۲)$ضلعی خوب حداقل $\frac{۱}{۲۴}n^{\frac{۵}{۲}}$ است.

با توجه به لم، حکم زیر ادعای بالا را نتیجه خواهد داد.

ادعا.برای عدد طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ n و بردارهای صحیح $u_۱, u_۲, \dots u_{n+۱}$با شیب‌های متفاوت داریم:

$$\sum_{i<j}|u_i \times u_j| \geq \frac{۱}{۱۲}n^{\frac{۵}{۲}}.$$

اگر برای هر $۱ \leq i \leq n+۱$ داشته باشیم $\sum_j|u_i \times u_j| \geq \frac{۱}{۶}n^{\frac{۳}{۲}}$حکم از جمع زدن این روابط نتیجه می‌شود. پس فرض کنید چنین نباشد. حال بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد:

$$\sum_i|u_i \times u_{n+۱}| < \frac{۱}{۶}n^{\frac{۳}{۲}}.$$

دقت کنید که در این‌جا فرض صعودی بودن شیب‌ها را نداریم. برای هر i تعریف می‌کنیم $C_i = \{u_l : |u_l \times u_{n+1}| = i\}$ و k_i را تعداد اعضای C_i می‌گیریم. می‌دانیم $\sum_i k_i = n$. اعضای C_i روی دو خط موازی با u_{n+1} قرار دارند. بنابراین برای هر $j \leq n$، از بین مقادیر $|u_j \times u_l|$ برای $u_l \in C_j$ حداکثر چهار مقدار می‌توانند با هم برابر باشند (به جز مقدار صفر که تنها در صورتی که $u_j \in C_i$ دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود و در غیر این صورت ظاهر نخواهد شد). حال چون این مقادیر صحیح هستند داریم:

$$\sum_{u_l \in C_i} |u_j \times u_l| \geq 4\binom{\frac{k_i}{4}}{2}.$$

پس:

$$\sum_{l \leq n} |u_j \times u_l| \geq 4\sum_i \binom{\frac{k_i}{4}}{2} = \frac{1}{8}\sum_i k_i^2 - \frac{n}{2},$$

و

$$\sum_{j,l} |u_j \times u_l| \geq \frac{n}{8}\sum_i k_i^2 - \frac{n^2}{2},$$

اما $\sum_i k_i = n$ و $\sum ik_i \leq \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}$ پس طبق لم زیر می‌فهمیم $\sum k_i^2 \geq \frac{3}{2}n^{\frac{3}{2}}$ و لذا برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ خواهیم داشت:

$$\sum_{j,l} |u_j \times u_l| \geq \frac{3}{16}n^{\frac{5}{2}} - \frac{n^2}{2} \geq \frac{1}{6}n^{\frac{5}{2}}$$

و به این ترتیب اثبات ادعا به پایان می‌رسد. حال لم اشاره‌شده را بیان و اثبات می‌کنیم:

لم. فرض کنید $k_1, k_2, \dots, k_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند که $\sum k_i = a$ و $\sum ik_i \leq b$. در این صورت $\sum k_i^2 \geq \frac{a^3}{4b}$.

اثبات. فرض کنید مقادیر a و b ثابت باشند و k_iها تغییر می‌کنند. با استفاده از خواص پیوستگی می‌توان فرض کرد k_iها در شرایط مسئله صدق می‌کنند و $\sum k_i^2$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد. در این حالت حتماً k_iها نزولی هستند زیرا اگر $k_i < k_j$ برای $i < j$ می‌توان به جای هر دو k_i و k_j مقدار $\frac{k_i + k_j}{2}$ را قرار داد و مقدار $\sum k_i^2$ کم‌تر می‌شود. ادعا می‌کنیم k_iها باید زمانی که به صفر نرسیده‌اند، قسمتی از یک تصاعد حسابی باشند. فرض کنید k_{j-1}, k_j, k_{j+1} سه عنصر متوالی ناصفر از دنباله باشند که تشکیل تصاعد حسابی نداده اند. در این صورت این سه مقدار را با $k_{j-1} + x, k_j - 2x, k_{j+1} + x$ عوض می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که دنباله‌ی جدید هم در فرض‌ها صدق می‌کند. حال تفاوت مقدار $\sum k_i^2$ در دو حالت برابر است با:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left((k_{j-1} + x)^2 + (k_j - 2x)^2 + (k_{j+1} + x)^2\right) - \left(k_{j-1}^2 + k_j^2 + k_{j+1}^2\right) \\ &= 6x^2 + 2x(k_{j-1} - 2k_j + k_{j+1}).\end{aligned}$$

با توجه به این که ضریب x در این عبارت ناصفر است، می‌توان با انتخاب x به مقدار کافی کوچک و با علامت مخالف کاری کرد که مقدار Δ منفی شود. پس اعضای ناصفر دنباله باید تشکیل تصاعد حسابی دهند. با تغییر n در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که همه‌ی k_iها ناصفر هستند و بنابراین تشکیل یک تصاعد حسابی نزولی می‌دهند. یعنی اعداد حقیقی و نامنفی r, s هستند که $k_i = r - si$. پس:

$$\begin{aligned}a &= nr - s\sum i \\ c &= r\sum i - s\sum i^2 \leq b.\end{aligned}$$

را با همین عبارت تعریف کنید.) در این حالت با کمی محاسبه به دست می‌آید: c
$$\sum k_i^۲ = ra - sc$$
. حال مقادیر r و s از دستگاه معادلات بالا برحسب a و c قابل محاسبه‌اند:
$$r = \frac{a\sum i^۲ - c\sum i}{n\sum i^۲ - (\sum i)^۲}\ ,\quad s = \frac{a\sum i - nc}{n\sum i^۲ - (\sum i)^۲}.$$
طبق نابرابری حسابی مربعی داریم:
$$\sum k_i^۲ \geq \frac{(\sum k_i)^۲}{n} = \frac{a^۲}{n}.$$
و چون $r - sn \geq ۰$ خواهیم داشت:
$$\begin{array}{ll} & a\sum i^۲ - c\sum i - an\sum i + n^۲c \geq ۰ \\ \Rightarrow & a(\frac{n^۲(n+۱)}{۲} - \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}) \leq c(n^۲ - \frac{n(n+۱)}{۲}) \leq \frac{cn(n+۱)}{۲} \\ \Rightarrow & a(n - \frac{۲n+۱}{۳}) \leq c \\ \Rightarrow & n \leq ۳\frac{c}{a} + ۱ \leq ۴\frac{c}{a}. \end{array}$$
که در نابرابری آخر از رابطه‌ی بدیهی $c \geq a$ استفاده کردیم ($c = \sum ik_i \geq \sum k_i = a$). با جای‌گذاری این نامساوی در نابرابری قبلی به دست می‌آید که
$$\sum k_i^۲ \geq \frac{a^۲}{n} = \frac{a^۳}{an} \geq \frac{a^۳}{۴c} \geq \frac{a^۳}{۴b}$$
که همان حکم مورد نظر است. □

ادعا. مساحت هر $(n+۲)$ضلعی خوب حداقل $\frac{۱}{۲۰۰}n^۳$ است. پس $f(n) = \Theta(n^۳)$.

برای اثبات این ادعا کافی است نشان دهیم برای بردارهای صحیح $u_۱, u_۲, \ldots, u_{n+۱}$ با شیب‌های متفاوت داریم:
$$\sum_{i<j} |u_i \times u_j| \geq \frac{۱}{۱۰۰}n^۳.$$
شبیه ادعای قبلی کافی است فرض کنیم $\sum\limits_i |u_i \times u_{n+۱}| \leq \frac{۱}{۵۰}n^۲$. C_i و k_i را هم مشابه قبل تعریف می‌کنیم. این بار کران به‌تری برای $\sum_{u_l \in C_i} |u_j \times u_l|$ می‌یابیم. اگر u_l و $u_{l'}$ روی خطی موازی $u_{n+۱}$ باشند، آن‌گاه $u_l - u_{l'}$ مضرب صحیحی از $u_{n+۱}$ است (می‌توانیم فرض کنیم که $u_{n+۱}$ مضرب صحیحی از هیچ بردار دیگری نیست، در غیر این صورت به جای آن یک بردار هم‌جهت و با طول کم‌تر قرار خواهیم داد). پس $u_j \times u_l - u_j \times u_{l'}$ مضربی از $u_j \times u_{n+۱}$ است. با استفاده از این موضوع و این که اعضای C_i روی دو خط موازی با $u_{n+۱}$ قرار دارند، به راحتی نتیجه می‌شود که:
$$\sum_{u_l \in C_i} |u_j \times u_l| \geq ۴j\binom{\frac{k_i}{۴}}{۲}$$
که در این جا فرض کرده‌ایم، $u_j \in C_J$. با جمع زدن این نابرابری‌ها روی اندیس i داریم:
$$\sum_{l \leq n} |u_j \times u_l| \geq ۴j\sum_i \binom{\frac{k_i}{۴}}{۲}.$$
و در نهایت با جمع زدن روی اندیس j خواهیم داشت:
$$\sum_{j,l} |u_j \times u_l| \geq ۴(\sum ik_i)\sum_i \binom{\frac{k_i}{۴}}{۲} = (\sum ik_i)\left(\frac{۱}{۸}\sum k_i^۲ - \frac{n}{۲}\right).$$
از آن‌جایی که $\sum k_i = n$ و $\sum ik_i \leq \frac{۱}{۵۰}n^۲$ با توجه به لم دوم، $\sum k_i^۲ \geq \frac{۲۵}{۲}n$ و در نتیجه:
$$\begin{array}{lll} \sum\limits_{j,l} |u_j \times u_l| & \geq & (\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲۵})(\sum ik_i)(\sum k_i^۲) \\ & \geq & \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲۵})(\sum k_i)^۳ \quad \geq \quad \frac{۱}{۵۰}n^۳. \end{array}$$

سؤال شماره ۷. یکی رو، یکی زیر!

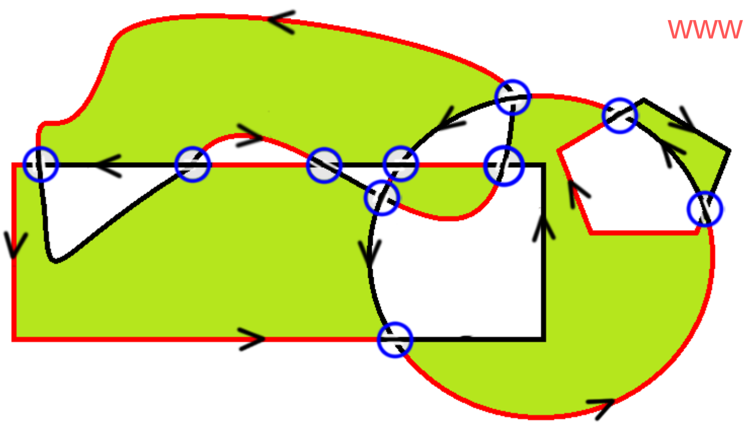
نشان می‌دهیم برای هر تعداد اتوبان این کار امکان‌پذیر است. اتوبان‌ها را C_1، C_2، ...، C_n و گراف حاصل از اجتماعِ اتوبان‌ها را G بنامید.

لم. می‌توان ناحیه‌های G را با دو رنگ رنگ کرد طوری که هیچ دو ناحیه‌ی مجاوری هم‌رنگ نباشند. (دو ناحیه را مجاور گوییم اگر در یک یال مشترک باشند.)

اثبات. حکم را با استقرا روی تعداد رأس‌های G ثابت می‌کنیم. یک رنگ‌آمیزی با خاصیتِ موردِ نظر را «مجاز» می‌نامیم. در بین همه‌ی مسیرهای بسته در گرافِ G که تماماً در یکی از اتوبان‌ها قرار دارند کوتاه‌ترینِ آن‌ها را در نظر بگیرید و آن را C بنامید و فرض کنید مثلاً $C \subset C_1$. با توجه به نحوه‌ی انتخاب، C خودش را قطع نمی‌کند، پس صفحه را به دو ناحیه‌ی درون و بیرون تقسیم می‌کند. از طرفی $C_1 - C$ یک خم بسته است (که البته ممکن است تهی باشد). حال H را گرافی بگیرید که از اجتماعِ $C_1 - C$ و C_2 و ... و C_n به دست می‌آید. بنابر فرض استقرا، نواحیِ H را می‌توان رنگ‌آمیزی مجاز کرد. اکنون خمِ C را به گرافِ H اضافه کنید و رنگِ نقاطِ درونِ خمِ C را برعکس کنید. به راحتی می‌توان دید که این یک رنگ‌آمیزی مجاز برای G می‌دهد.

پایه‌ی استقرا در حالتی است که G تهی باشد. در این حالت فقط یک ناحیه در صفحه داریم آن را به یک رنگ می‌کنیم. □

حال با استفاده از این لم به ادامه‌ی راه‌حل می‌پردازیم. اکنون مشخص می‌کنیم که هر تقاطع چگونه باید پل‌گذاری شود. ابتدا یک رنگ‌آمیزیِ مجاز برای G با سفید و سیاه در نظر بگیرید. روی هر اتوبان یک جهتِ دل‌خواه قرار دهید. پس یال‌های گرافِ G جهت‌دار شده‌اند. اکنون دو نوع یال داریم. یال‌هایی را «نوع اول» می‌نامیم که وقتی روی آن‌ها حرکت می‌کنیم ناحیه‌ی سمت راستمان سفید رنگ است و سایر یال‌ها را «نوع دوم» می‌نامیم (در شکل زیر یال‌های نوع اول قرمز رنگ شده‌اند). اکنون در انتهای هر یالِ نوعِ اول یک پل در راستای همان یال می‌سازیم. این روش سازگار است یعنی از هر دو یالی که به یک تقاطع وارد می‌شوند یکی از نوع اول و یکی از نوع دوم است، بنابراین در هر تقاطع دقیقاً یک پل ساخته می‌شود. همچنین این پل‌گذاری خاصیت مورد نظر مسئله را دارد زیرا وقتی روی یک اتوبان حرکت می‌کنیم یال‌ها یکی در میان از نوع اول و دوم هستند.



سؤال شماره ۸. مجموعه‌های اولیه

الف. فرض کنید چنین مجموعه‌ی Sای موجود باشد و n عضوی از S نباشد. این نتیجه می‌دهد که دقیقاً nتا از اعضای S نسبت به n اول هستند. در نتیجه بی‌نهایت عدد اول وجود دارد که در S نیستند. دو تا از آن‌ها مثل p و q را در نظر بگیرید. چون $p \notin S$، پس تنها pتا از اعضای S عامل p ندارند. در نتیجه بی‌نهایت m طبیعی وجود دارد که p^m عضو S است. اما $(p^m, q) = ۱$. پس S بی‌نهایت عضو دارد که نسبت به q اول هستند و این تناقض است. در نتیجه چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

ب. مجموعه‌ی S را به صورت گام به گام می‌سازیم. فرض کنید $S = \{a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots\}$. در ابتدا همه‌ی a_iها برابر یک هستند و در هرگام عوامل اولی را در a_iها ضرب می‌کنیم تا به مقدار مطلوب برسند. در واقع برای هر عدد طبیعی n، در مرحله‌ی nام:

۱. اعداد اول جدیدی به نام $p_{۲n}$ و $p_{۲n-۱}$ را در a_n ضرب می‌کنیم، تا مقدار آن از $a_{n-۱}$ بیش‌تر شود.

۲. تعداد اعضای مجموعه‌ی $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}\}$ که نسبت به a_n اول هستند، را b_n بگیرید. پس $b_n < n$. حال t_n را برابر $a_n - b_n$ تعریف می‌کنیم.

۳. با توجه به نحوه‌ی ساخت ما در پایان این دو عمل هنوز بی‌نهایت a_i با اندیس $i > n$ وجود دارند که نسبت به a_n اول هستند. در بین این اعداد t_n عدد نخست را رها می‌کنیم. فرض کنید t_nامین عدد، a_m باشد. حال در دنباله‌ی $a_{m+۱}, a_{m+۲}, \ldots$، $۲^{n-۱}$ جمله‌ی نخست را در $p_{۲n-۱}$، $۲^{n-۱}$ جمله‌ی بعدی را در $p_{۲n}$، $۲^{n-۱}$ جمله‌ی بعدی را در $p_{۲n-۱}$ ضرب می‌کنیم و همین عمل را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهیم.

به این ترتیب در پایان مرحله‌ی nام:

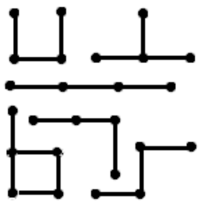
- دقیقاً $b_n + t_n$ یعنی a_n عدد نسبت به a_n اول هستند.
- برای هر nتایی مثل $(q_۱, q_۲, \ldots, q_n)$ از اعداد اول که $q_i \in \{p_{۲i-۱}, p_{۲i}\}$، بی‌نهایت‌تا از a_kها هستند که دقیقاً همین عوامل اول را دارند. پس برای هر a_i، بی‌نهایت جمله از دنباله وجود دارد عوامل اولشان با عوامل اول a_i متفاوت است و به این ترتیب نسبت به a_i اول هستند.

به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. چند چوبه!



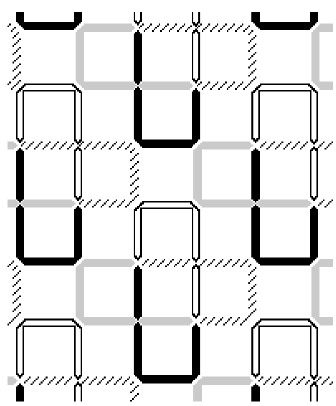
یک $\boldsymbol{n}$ **چوبه،** شکلی همبند است که با n چوب کبریت افقی یا عمودی به طول واحد ساخته می‌شود. شکل‌هایی را که با دوران و تقارن به یکدیگر تبدیل می‌شوند یکی میگیریم. مثلاً در شکل روبرو همه ی ۳چوبه‌ها و یک ۵چوبه دیده می‌شود.

یک $\boldsymbol{n}$ **مینو** شکلی است که با چسباندن n مربع واحد از روی یال‌ها به یکدیگر به دست آید به طوریکه بین هر دو مربع واحد مسیری از مربع‌های متصل در شکل یافت شود.

فرض کنید S_n تعداد n چوبه‌ها و M_n تعداد n مینوها باشد. مثلاً با توجه به شکل های بالا داریم $S_۳ = ۵$ و $M_۳ = ۲$.

الف) ثابت کنید به ازای هر n طبیعی داریم: $S_n \geq M_{n+۱}$

ب) ثابت کنید برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم: $\left(۲.۴\right)^n \leq S_n \leq ۱۶^n$



یک **یال شبکه‌ای** پاره خطی به طول واحد در صفحه است که مختصات رئوس آن صحیح باشد. یک چندچوبه را **دانا** گوییم، هرگاه به وسیله‌ی آن بتوان مجموعه‌ی یال‌های شبکه‌ای را فرش کرد (استفاده از دوران و تقارن مجاز است). در غیر این صورت آن را **نادان** می‌نامیم. برای مثال شکل مقابل نشان می‌دهد که ۴چوبه‌ی  دانا است. همچنین به سادگی دیده می‌شود که ۵چوبه‌ی  نادان است.

ج) ثابت کنید حداقل $۲^{n-۶}$ تا n چوبه‌ی نادان وجود دارد.

د) ثابت کنید هر چندچوبه به شکل یک مسیر که هربار به سمت راست یا بالا می رود، دانا است.

ه) (نمره اضافه) ثابت کنید برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم: $۳^n \leq S_n \leq ۱۲^n$

۲. فاصله‌ی بین دوایر!

فاصله‌ی *بین دو دایره ω, ω' را برابر با طول مماس مشترک خارجی آن‌ها تعریف می کنیم و با نماد $d(\omega, \omega')$ نمایش می دهیم. اگر دو دایره مماس مشترک خارجی نداشته باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها تعریف نمی‌شود. توجه کنید که یک نقطه هم یک دایره‌ی به شعاع صفر است و فاصله‌ی دو دایره می‌تواند صفر باشد.*

الف) مرکزثقل. تعدادی دایره ثابت $\omega_1, \dots, \omega_n$ در صفحه داریم. نشان دهید دایره یکتای $\overline{\omega}$ در صفحه وجود دارد که برای دایره متغیر ω، مربع فاصله‌ی بین ω و $\overline{\omega}$ منهای میانگین مربعات فواصل بین ω و ω_iها عددی ثابت باشد (به ازای ωهایی که همه این فواصل تعریف شده هستند). یعنی:

$$\forall\omega: \quad d(\omega, \overline{\omega})^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega, \omega_i)^2 = \text{مقدار ثابت}$$

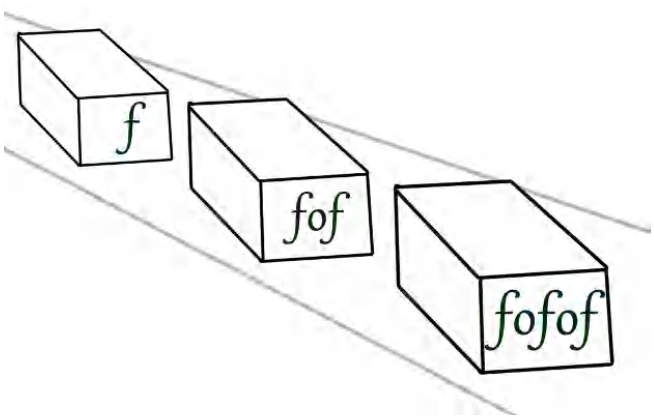
$\overline{\omega}$ را **مرکز ثقل** $\omega_1, \dots, \omega_n$ می‌نامیم، زیرا خاصیت فوق مشابه خاصیت مرکز ثقل نقاط است.

ب) عمود منصف. فرض کنید دایره‌ی ω از دوایر ω_1 و ω_2 هم‌فاصله باشد. ω_3 را دایره‌ی دلخواهی بگیرید که مرکز آن روی خط‌المرکزین ω_1 و ω_2 است و بر مماس مشترک خارجی ω_1 و ω_2 مماس است. ثابت کنید « فاصله‌ی بین ω و مرکز ثقل ω_1 و ω_2 » از « فاصله‌ی بین ω و ω_3 » بیشتر نیست. (در صورتی که این فواصل همگی تعریف شده باشند)

ج) مرکز دایره‌ی محیطی. C را مجموعه همه‌ی دایره‌هایی را در نظر بگیرید که هر کدام از آن‌ها از سه دایره‌ی ثابت ω_1، ω_2 و ω_3 هم فاصله است. ثابت کنید نقطه‌ی ثابتی در صفحه وجود دارد که مرکز تجانس مستقیم دو به دوی اعضای C است.

د) چهاروجهی منتظم. آیا چهار دایره در صفحه وجود دارد که فاصله‌ی هر دو تا از آنها برابر واحد باشد؟

۳. تولید توابع!



می گوییم تابع حقیقی f تابع g را **تولید** می‌کند (و با نماد $f \to g$ نمایش می دهیم)، اگر g از ترکیب چندباره f با خودش بدست آید؛ یعنی عدد طبیعی k موجود باشد که: $\underbrace{fofo \dots of}_{k \text{ بار}} = g$

به دنبال یافتن خواصی برای این رابطه هستیم. مثلاً به راحتی می توان ثابت کرد که اگر $f \to g$ و $g \to h$ آنگاه $f \to h$. (خاصیت ترایایی)

الف) دو تابع حقیقی $f \neq g$ مثال بزنید که $f \to g, g \to f$.

ب) ثابت کنید به ازای هر تابع حقیقی f، تعداد متناهی تابع g وجود دارد که $f \to g, g \to f$.

ج) آیا تابع g وجود دارد که هیچ تابعی جز خودش، آن را تولید نکند؟

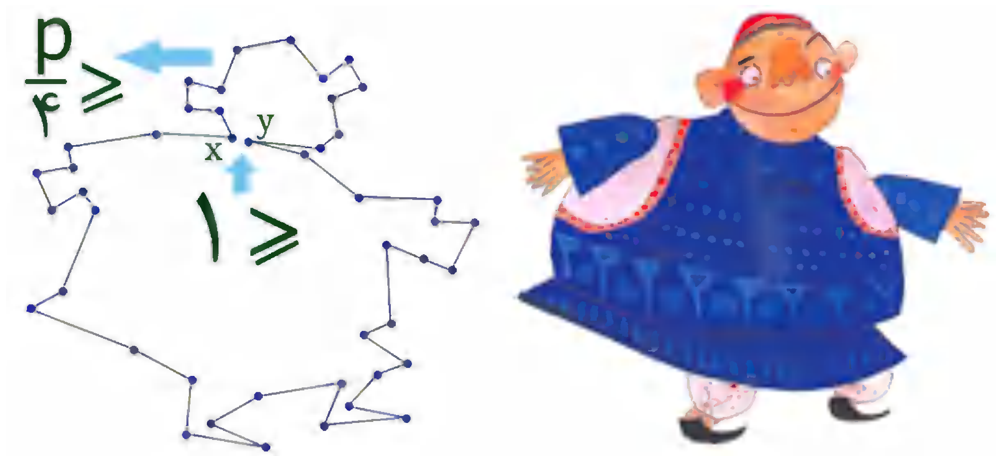
د) آیا تابع f وجود دارد که $x^۳$ و $x^۵$ را تولید کند؟

ه) ثابت کنید اگر تابعی دو چندجمله‌ای درجه یک P, Q را تولید کند آنگاه یک چندجمله‌ای درجه یک نیز P, Q را تولید می‌کند.

۴. چندضلعی تپل!

*چندضلعی A را که خودش را قطع نمی‌کند و دارای محیط p است، **چندضلعی تپل** می‌گوییم، در صورتی که برای هر دو نقطه‌ی x,y روی محیط A که فاصله‌ی آنها در صفحه حداکثر ۱ باشد، فاصله‌ی آنها روی محیط A (یعنی جزء کوچکتر محیط A که بین x,y قرار دارد) حداکثر $\frac{p}{۴}$ باشد.*

می‌خواهیم ثابت کنیم در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره ای به شعاع $\frac{۱}{۴}$ جای داد.



متفکران سیاره‌ی زمین و محققان **سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار** دو رویکرد متفاوت برای حل سوال در پیش گرفتند. در هر دو رویکرد منظور از **وتر** پاره خطی است که دو سر آن روی محیط چندضلعی باشد. **قطر** وتری است که دو سر آن رئوس چندضلعی باشد. **وتر داخلی**، وتری است که هر نقطه از آن داخل یا روی محیط چندضلعی است. **فاصله روی محیط** بین دو نقطه روی چندضلعی را طول جزء کوچکتر محیط بین آن دو نقطه در نظر می‌گیریم.

رویکرد زمینی: وتر بیشینه!

این واقعیت را می دانیم که برای هر چندضلعی، وتر داخلی xy با طول حداکثر واحد یافت می‌شود به طوری که برای هر وتر داخلی $x'y'$ با طول حداکثر واحد، فاصله روی محیط x,y بزرگتر یا مساوی فاصله روی محیط x',y' باشد. این وتر را **وتر بیشینه** می نامیم.

در چندضلعی تپل A_o دو حالت برای وتر بیشینه وجود دارد:

الف) **حالت اول:** طول وتر بیشینه برابر واحد باشد. ثابت کنید نیم دایره‌ای به قطر وتر بیشینه به طور کامل درون A_o قرار دارد و در نتیجه در این حالت می توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در داخل چندضلعی جای داد.

ب) **حالت دوم:** طول وتر بیشینه کمتر از واحد باشد. ثابت کنید در این حالت نیز دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ یافت می‌شود که به طور کامل درون A_o قرار می گیرد.

زمینی‌ها بارها گمان کردند این سؤال را حل کرده‌اند ولی هر بار متوجه ایرادی ظریف در اثبات خود شدند تا نهایتاً موفق به حل سؤال شدند.

رویکرد آب‌دوغ‌خیاری: مثلث بندی!

دو گزاره زیر را در نظر بگیرید.

گزاره اول: « هر چندضلعی دلخواه را که طول اضلاعش حداکثر واحد است و نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد می‌توان به وسیله‌ی قطرهایی داخلی با طول حداکثر واحد مثلث‌بندی کرد. »

گزاره دوم: « هر چندضلعی دلخواه را که نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد می‌توان به وسیله‌ی وترهایی داخلی مثلث‌بندی کرد به نحوی که طول اضلاع همه‌ی مثلث‌ها حداکثر واحد باشند.»

آب‌دوغ‌خیاری‌ها با برهان خلف به این نتیجه رسیدند که اگر گزاره دوم درست باشد آنگاه در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ جای داد.

ج) شما نیز ثابت کنید اگر گزاره دوم درست باشد آنگاه در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ جای داد.

آنها به سادگی دریافتند که اگر گزاره اول درست باشد آنگاه گزاره دوم هم درست است. پس برای حل گزاره اول یک دوغ جایزه گذاشتند! مدتی بعد، جوانی به نام **ج.ن.** که خود را زمینی می‌دانست، موفق شد با نقض گزاره اول، نقشه‌های آب‌دوغ‌خیاری‌ها را نقش بر آب کرده و دوغ را از آن خود کند.

د) یک ۱۳۹۲ضلعی مثال بزنید که گزاره اول را نقض کند.

با این حال آب‌دوغ‌خیاری‌ها ناامید نیستند و می‌خواهند گزاره دوم را مستقیماً اثبات‌کنند.

ه) (نمره اضافه) درباره درست بودن گزاره دوم هرچه می توانید بنویسید.

۵. در جستجوی اعداد از دست رفته!

*یک **زیرجمع** n عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$، به معنای جمع تعدادی از این n عدد است؛ یعنی $\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \cdots + \epsilon_n a_n$ که ϵ_iها صفر یا یک هستند و حداقل یکی از ϵ_iها ناصفر است. اکنون با داشتن این زیرجمع‌ها در جستجوی اعداد هستیم!*

سال‌ها پیش لیستی ارزشمند شامل n عدد حقیقی (نه لزوماً متمایز) به همراه تمام $2^n - 1$ زیرجمع آن‌ها را در دست داشتیم. تعدادی موجود عجیب از سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار، (پس از شکست در حل مسئله‌ی چندضلعی تپل!)، n عدد اولیه‌ی ما را دزدیده‌اند و تنها چیزی که از آن‌ها در دست داریم همان $2^n - 1$ زیرجمع است!

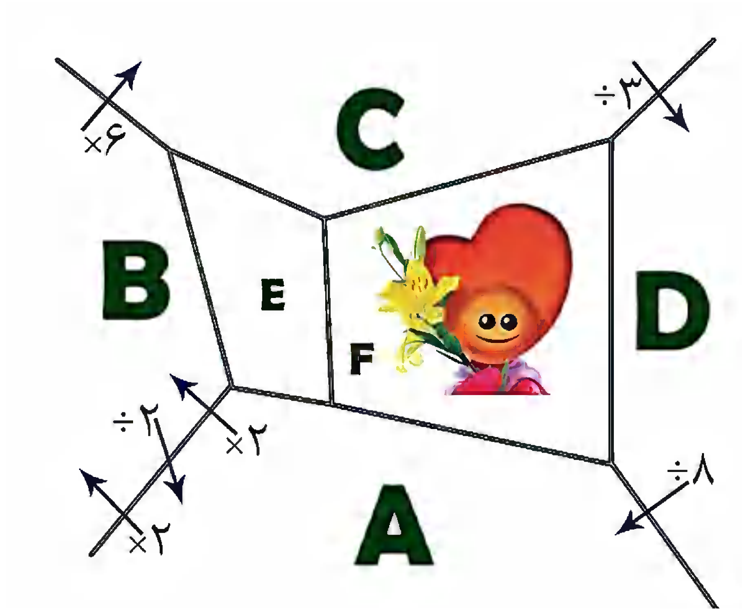
الف) ثابت کنید اگر همه‌ی زیرجمع‌ها مثبت باشند، می‌توانیم اعداد دزدیده شده را به صورت یکتا بدست آوریم.

ب) فرض کنید تعدادی از زیرجمع‌ها مثبت و تعدادی منفی باشند، اما هیچ یک از آن‌ها صفر نباشد. نشان دهید در این حالت نیز می‌توانیم اعداد دزدیده شده را به صورت یکتا بدست آوریم.

ج) نشان دهید برای $n = 1392$، مثالی وجود دارد که نتوانیم به طور یکتا n عدد دزدیده شده را با داشتن تمام $2^n - 1$ زیرجمع آنها تعیین کنیم.

۶. جهانگردان سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار!

در گیر و دارهای میان‌سیاره‌ای، منجمان خبره‌ی زمینی، **سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار** را در کهکشان راه دوغی کشف کردند. این سیاره به شکل یک ۱۳۹۲وجهی محدب است ولی منجمان هیچ اطلاعی از شیوه‌ی قرار گیری وجه‌های آن ندارند. دانشمندان با تجزیه‌ی طیفی پرتوهایی که از سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار ساطع می‌شوند، حقایقی راجع به زندگی موجودات روی این سیاره کشف کرده‌اند! از جمله این که هر وجه سیاره یک کشور است، هر کشور واحد پول جداگانه‌ای دارد و سرتاسر مرز هر دو کشور مجاور، **نرخی ثابت** برای تبدیل ارز این دو کشور موجود است. کسانی که از مرز دو کشور عبور می‌کنند باید تمام پول خود را به واحد پول کشور مقصد تبدیل کنند و هیچ راه دیگری برای تبدیل ارز وجود ندارد. منجمان در کمال ناباوری مشاهده کردند که ممکن است یک مسافر طی چندین سفر و بازگشت به نقطه‌ی اولیه، پولش تغییر کرده‌باشد. متفکران دلیل این پدیده را تفاوت نرخ تبادل ارز روی مرزها با نسبت واقعی ارزش پول‌ها می‌دانند. مثلاً در شکل زیر اگر کسی از کشور A به ترتیب به کشورهای B، A، B، C و D برود و سپس به کشور خودش باز گردد، دارایی نهایی‌اش نصف دارایی اولیه‌اش خواهد بود. اما اگر کسی فقط به یک کشور همسایه برود و برگردد دارایی‌اش تغییر نمی‌کند (زیرا حاصلضرب نرخ تبدیل ارز دو طرف یک مرز برابر واحد است).



در یک پروژه‌ی تحقیقاتی، تعداد زیادی جهانگرد در سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار کشف شدند که با سرمایه اولیه‌ی یکسان از یک کشور شروع به سفر کردند و هر کدام پس از طی مسیری به شکل خط‌شکسته‌ی بسته روی چندوجهی که خودش را قطع نکرده است به نقطه‌ی شروعشان بازگشته‌اند! حداکثر چند تا از این جهانگردها وجود دارند که سرمایه‌ی نهایی آنها دو به دو متمایز باشد؟

توجه ۱: هیچ جهانگردی در طول سفر پولی خرج نمی‌کند!

توجه ۲: تنها ثابت سوال تعداد کشورها (۱۳۹۲) است. باقی مقادیر مانند چیدمان کشورها و نرخ تبدیل ارز روی مرزها متغیرهای سوال به حساب می‌آیند. پس پاسخ شما باید یک عدد باشد.

توجه ۳: با توجه به ناشناخته بودن ساختار سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار، باید در بین همه‌ی ۱۳۹۲وجهی‌های ممکن این حداکثر را بیابید.

۷. خواص جالب معادلات جالب!

معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ را **جالب** می‌گوییم اگر P و Q چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح و درجه‌ی حداقل یک باشند و این معادله بی‌نهایت جواب در اعداد طبیعی داشته باشد. می‌گوییم معادله‌ی $F(x) = G(y)$ از معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ **نتیجه می‌شود،** اگر چندجمله‌ای R با ضرایب گویا موجود باشد که $F(x) = R(P(x))$ و $G(y) = R(Q(y))$.

الف) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ باشد. می‌گوییم S در معادله‌ی جالب $P(x) = Q(y)$ **صدق می‌کند،** اگر هر عضو آن در این معادله صدق کند. نشان دهید معادله‌ی جالب $P_o(x) = Q_o(y)$ وجود دارد که هر معادله‌ی جالبی که S در آن صدق کند (در صورت وجود)، از معادله‌ی $P_o(x) = Q_o(y)$ نتیجه می‌شود.

ب) درجه‌ی معادله‌ی جالب $P(x) = Q(y)$ را برابر بزرگترین درجه بین درجات P و Q تعریف می‌کنیم. یک معادله‌ی جالب را **اولیه** می‌گوییم اگر از هیچ معادله‌ی جالبی با درجه‌ی کمتر نتیجه نشود. نشان دهید اگر $P(x) = Q(y)$ یک معادله‌ی جالب اولیه باشد و P و Q تکین باشند، آن‌گاه درجه‌ی P و درجه‌ی Q نسبت به هم اول هستند.

۸. پنج‌ضلعی گویا!

فرض کنید $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵$ یک پنج‌ضلعی محدب در صفحه باشد که مختصات رئوس آن گویا است. برای هر $۱ \leq i \leq ۵$، محل تقاطع امتداد اضلاع $A_{i+۱}A_{i+۲}$ و $A_{i+۳}A_{i+۴}$ را با B_i نامگذاری می‌کنیم. (رئوس پنج‌ضلعی به صورت دوری شماره‌گذاری شده‌اند؛ یعنی برای هر i، $A_i = A_{i+۵}$.)

نشان دهید حداکثر سه تا از خطوط A_iB_i $(۱ \leq i \leq ۵)$ همرس‌اند.

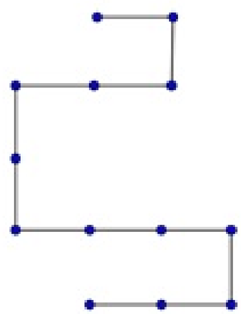
بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. چند چوبه!

الف. یک $(n+1)$مینو در نظر بگیرید و مراکز مربع‌های مجاور در آن را به هم وصل کنید. به وضوح گراف حاصل هم‌بند است پس حداقل n یال دارد. حال یک زیردرخت آن یک nچوبه می‌شود. $(n+1)$مینوی مربوط به هر n چوبه، در صورت وجود یک‌تا است. پس S_n بزرگ‌تر یا مساوی تعداد n چوبه‌های بدون دور است و این مقدار هم حداقل M_{n+1} است.

ب.



راه اول. [1] می‌توانیم مسیرهای nتایی به سمت بالا و راست و چپ را بشماریم و کران پایین به‌تری برای S_n به دست آوریم. این گونه مسیرها متناظر است با تعداد رشته‌های nتایی از نمادهای $\uparrow, \leftarrow, \rightarrow$ به طوری‌که هیچ $\leftarrow, \rightarrow$ مجاور نداشته باشند. اگر تعداد این رشته‌ها را A_n نام‌گذاری کنیم آن‌گاه $8S_n \geq A_n$ زیرا هر چندچوبه را حداکثر به ۸ طریق می‌توان روی صفحه قرار داد.

A_n در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$A_1 = 3,\ A_2 = 7,\ A_n = 2A_{n-1} + A_{n-2}$$

به عنوان تمرین می‌توانید این رابطه‌ی بازگشتی را با حالت‌گیری روی اولین نماد هر رشته‌ی nتایی به دست آورید.
معادله‌ی مشخصه‌ی این رابطه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم: $t^2 = 2t + 1$ و در نتیجه $t_1, t_2 = 1 \pm \sqrt{2}$.
با حل این رابطه‌ی بازگشتی درمی‌یابیم که: $A_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$ با مقدارگذاری اولیه‌ی $n = 1, 2$، مقدار α, β به دست می‌آید:

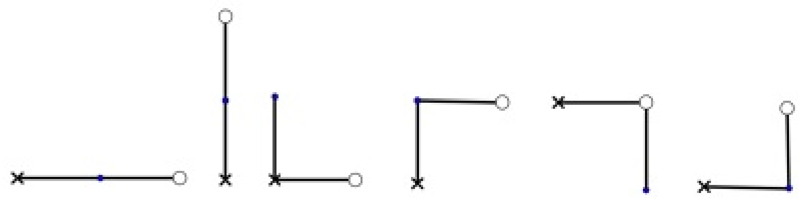
$$\begin{cases} \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = 3 \\ \alpha(3+2\sqrt{2}) + \beta(3-2\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

پس: $A_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$.
از طرفی: $1+\sqrt{2} > 2/41$ و $|1-\sqrt{2}| < 1$. پس از جایی به بعد $S_n \geq \frac{A_n}{8} > (2/41)^n$.

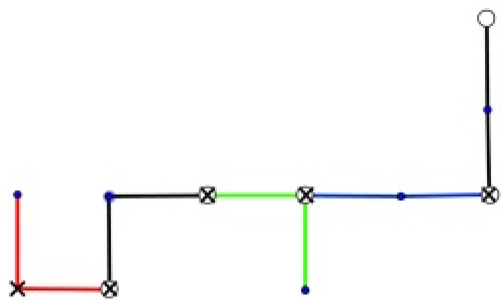
راه دوم همه‌ی ۲چوبه‌ها را در نظر بگیرید که با انتقال به یک‌دیگر تبدیل نمی‌شوند. تعداد این ۲چوبه‌ها ۶تا است. در هرکدام رأس سمت راست‌ترین، و در بین آن‌ها بالاترین را با $\circ$ و رأس سمت چپ‌ترین و در بین آن‌ها پایین‌ترین را با $\times$

[1] برای مطالعه‌ی بیش‌تر می‌توانید به مقاله‌ی «سرگذشت چندچوبه» در شماره‌ی تابستان ۹۲ فصل‌نامه‌ی پرگار مراجعه کنید.

مشخص می‌کنیم.



حال برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، $[\frac{n}{۲}]$تا از این ۲چوبه‌ها را انتخاب می‌کنیم و به ترتیب رأس × هریک را به رأس ∘ِقبلی وصل می‌کنیم. (اگر n فرد بود، یک چوب کبریت افقی هم به ∘ِآخرین ۲چوبه وصل می‌کنیم.)



هر یک از این $[\frac{n}{۲}]$ تا ۲چوبه، ۶ حالت دارند، به این ترتیب $۶^{[\frac{n}{۲}]}$ تا nچوبه به دست می‌آید که با انتقال به یک‌دیگر تبدیل نمی‌شوند. هر n چوبه حداکثر ۸ بار در بین این $۶^{[\frac{n}{۲}]}$ شکل آمده است. پس: $۸S_n \geq ۶^{[\frac{n}{۲}]} \geq \sqrt{۶}^{n-۱}$. از طرفی $\sqrt{۶} \geq ۲/۴$ پس از جایی به بعد: $S_n \geq (۲/۴)^n$.

برای کران بالا هم با استفاده از لم زیر مسئله را اثبات می‌کنیم.

لم. در هر گراف هم‌بند که در آن درجه‌ی هر رأس زوج است، دوری وجود دارد که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند.

اثبات. با استقرا روی تعداد یالها و شروع از یک رأس و خارج شدن از هر رأسی که به آن وارد می‌شویم حکم نتیجه می‌شود.
□

پس اگر می‌توانستیم درجه‌ی هر رأس از گراف چندچوبه را زوج کنیم، آن‌گاه طبق قضیه‌ی بالا یک دور در آن گراف یافت می‌شد که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند. مثلاً می‌توانیم هر یال را دو بار رسم کنیم. در این صورت یک گراف با $۲n$ یال داریم که در آن درجه‌ی هر رأس زوج است. پس طبق قضیه‌ی بالا دوری در این گراف وجود دارد که از همه‌ی یال‌ها عبور کند. پس تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه بیش‌تر یا مساوی تعداد nچوبه‌ها است. کافی است کران بالایی برای تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه بیابیم.

تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه هم حداکثر برابر است با تعداد رشته‌های $۲n$تایی با استفاده از نمادهای $\leftarrow, \downarrow, \rightarrow, \uparrow$ به طوری‌که در هر رشته تعداد $\downarrow, \uparrow$ها باهم، و تعداد $\rightarrow, \leftarrow$ها باهم برابر باشد. این تعداد هم برابر است با انتخاب تعدادی

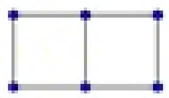
مکان برای ↑ و همان تعداد مکان برای ↓ و سپس انتخاب نصف مکان‌های باقی‌مانده برای ← و قرار دادن → در بقیه‌ی جاها. یعنی:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

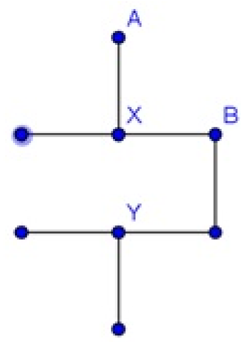
با ساده کردن عبارت بالا به دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}=\binom{2n}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\binom{2n}{n}^2$$

و $\binom{2n}{n}^2\leq(2^{2n})^2=16^n$. پس تعداد دورهای به طول $2n$ روی شبکه، و به تبع آن تعداد nچوبه‌ها حداکثر 16^n است.



ج. برای $n=7$ چندچوبه‌ی مقابل نادان است. برای $n>7$ اگر از نقطه‌ی A یا B در شکل زیر شروع کنیم و $n-7$ یال به سمت بالا یا راست برویم، چندچوبه‌ی حاصل نادان است زیرا در چندچوبه شامل پاره‌خط عمودی XY این پاره‌خط همسایه‌ای نخواهد داشت. پس حداقل $2^{n-7}+2^{n-7}=2^{n-6}$ تا n چوبه‌ی نادان یافتیم.



د. یک مسیر به سمت بالا و راست در نظر بگیرید و با بی‌نهایت نسخه از آن، یک مسیر نامتناهی به سمت بالا و راست تشکیل دهید.

لم ۱. اگر مسیر نامتناهی بالا و راست را یک واحد به سمت بالا و چپ انتقال دهیم، مسیر حاصل با مسیر اولیه در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارد.

اثبات. فرض کنید یک مسیر و انتقال‌یافته‌اش در نقطه‌ای مثل x اشتراک داشته باشند. پس x و انتقال‌یافته x به سمت پایین و راست، هر دو روی مسیر اولیه هستند که چنین چیزی با بالا و راست بودن مسیر در تناقض است.

□

حال مسیر نامتناهی را L بنامید و بی نهایت نسخه انتقال‌یافته به سمت بالا و چپ از این مسیر را در کنارش قرار می‌دهیم. طبق لم ۱ هیچ دو مسیری اشتراک ندارند. حال قرینه L نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) را L' می‌نامیم.

لم ۲. L,L' در هیچ یالی اشتراک ندارند.

اثبات. فرض کنید یال e در L,L' باشد. پس e و متقارن e نسبت به خط $y=x$، هر دو روی L هستند که چنین چیزی با بالا و راست بودن L در تناقض است.

در نتیجه می‌توان L, L' و انتقال‌یافته‌های آن‌ها (به سمت بالا و چپ) را روی صفحه قرار داد و هیچ دو مسیری اشتراک یالی ندارند. حال ادعا می‌کنیم هر یال پوشیده می‌شود. یال e را در نظر بگیرید و آن را آن قدر به سمت بالا و چپ (یا پایین و راست) انتقال دهید تا به مسیر L برخورد کند. این برخورد یا در یک یال اتفاق افتاده است و یا در یک رأس، در حالت اول e روی انتقال‌یافته‌ی L است و در حالت دوم e روی انتقال‌یافته‌ی L' است.

ه برای کران پایین اگر در راه حل دوم قسمت (ب)، به جای ۲چوبه‌ها از ۴چوبه‌ها استفاده کنیم به کران زیر می‌رسیم: $S_n \geq \left(\sqrt[4]{۸۸}\right)^n \sim (۳/۰۶)^n$.

برای کران بالا حداکثر ۱۶×۸^nشکل هم‌بند رسم می‌کنیم و ادعا می‌کنیم هر n چوبه حداقل یک بار رسم شده است. اشکال را به این صورت رسم می‌کنیم: در مرحله‌ی اول یک رأس رسم می‌کنیم، آن را علامت می‌زنیم و $۲^۴$ حالت برای یال‌های متصل به آن را رسم می‌کنیم. پس تا این‌جا ۱۶ شکل رسم شده است.

در هر مرحله، از هر شکل رسم‌شده در مرحله‌ی قبلی، حداکثر ۸ شکل جدیدتر می‌سازیم و آن‌ها را رسم می‌کنیم. به این صورت که هر یک از اشکال رسم‌شده را در نظر می‌گیریم و در بین رئوس علامت‌نخورده‌اش، رأس سمت راست‌ترین و در بین آن‌ها بالاترین را علامت می‌زنیم، حداقل یکی از یال‌های این رأس رسم شده است زیرا شکل هم‌بند است. در بین یال‌های دیگر منتهی به این رأس به حداکثر $۸ = ۲^۳$ حالت برخی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم و شکل جدیدی با اضافه کردن این یال‌ها رسم می‌کنیم.

پس در هر مرحله اشکال هم‌بند هستند و تعداد آن‌ها حداکثر ۸ برابر مرحله‌ی قبلی است. از طرفی هر n چوبه حداکثر $n + ۱$ رأس دارد، در نتیجه حتماً پس از حداکثر n مرحله رسم می‌شود. پس:

$$S_n \leq ۱۶ + ۱۶ \times ۸ + ۱۶ \times ۸^۲ + \ldots + ۱۶ \times ۸^{n-۱} \leq ۱۶ \times ۸^n$$

و از جایی به بعد: $۱۶ \times ۸^n \leq (۸/۰۱)^n < ۱۲^n$.

سؤال شماره ۲. فاصله‌ی بین دوایر!

دایره‌ی به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نشان می‌دهیم. اگر $\omega_1 = C(O_1,R_1)$ و $\omega_2 = C(O_2,R_2)$ می‌دانیم:

$$d(\omega_1,\omega_2)^2 = O_1O_2{}^2 - (R_1 - R_2)^2$$

و $d(\omega_1,\omega_2)$ تعریف‌شده است اگر و تنها اگر عبارت سمت راست نامنفی باشد. این موضوع معادل است با این که ω_1 و ω_2 متداخل نباشند و یا مماس داخلی باشند.

الف. قرار دهید $\omega = C(O,R)$ و $\omega_i = C(O_i,R_i)$ داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega,\omega_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} OO_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R-R_i)^2$$

اگر $\bar{R}$ را میانگین اعداد $R_1,\dots,R_n$ بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R-R_i)^2 = R^2 - 2R\bar{R} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^2 = (R-\bar{R})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}-R_i)^2$$

به طور مشابه، اگر $\bar{O}$ را مرکز ثقل نقاط $O_1,\dots,O_n$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} OO_i{}^2 = O\bar{O}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{O}O_i^2$$

(برای اثبات این رابطه باید مختصات این نقاط را در نظر بگیریم و از رابطه‌ی مشابه برای R_iها استفاده کنیم) بنابراین

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega,\omega_i)^2 = O\bar{O}^2 + (R-\bar{R})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{O}O_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}-R_i)^2$$

پس دایره‌ی $C(\bar{O},\bar{R})$ در خاصیت مسأله صدق می‌کند.

حال فرض کنید $\bar{\omega}_1 = C(P_1,r_1)$ و $\bar{\omega}_2 = C(P_2,r_2)$ دو دایره باشند که در فرض مسئله صدق می‌کنند. اگر $\omega = C(O,R)$ را دایره‌ای بگیریم که با همه‌ی $\omega_1,\dots,\omega_n$ و $\bar{\omega}_1$ و $\bar{\omega}_2$ متخارج است، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
& d(\omega,\bar{\omega}_1)^2 - d(\omega,\bar{\omega}_2)^2 = \text{Constant} \\
& \Rightarrow OP_1^2 - OP_2^2 + (R-r_1)^2 - (R-r_2)^2 = \text{Constant} \\
& \Rightarrow OP_1^2 - OP_2^2 - 2R(r_1 - r_2) = \text{Constant}
\end{aligned}$$

(که منظور از Constant یک مقدار ثابت است.)

با ثابت نگه‌داشتن O نتیجه می‌گیریم $r_1 = r_2$. بنابراین $OP_1^2 - OP_2^2$ نیز مقداری ثابت است. بنابراین $P_1 = P_2$ و در نتیجه $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ پس $\bar{\omega} = C(\bar{O},\bar{R})$ تنها جواب مسئله است.

ب. برای $i = 1,2$ قرار دهید $\omega_i = C(O_i,R_i)$ و $\omega = C(O,R)$ همچنین فرض کنید $O_i = (x_i,0)$ و $O = (x,y)$. می‌توانیم بنویسیم:

$$x_3 = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

که α یک عدد حقیقی است. چون فاصله‌ی O_1 و O_2 از مماس مشترک خارجی ω_1 و ω_2 به‌ترتیب برابر با R_1 و R_2 است، نتیجه می‌گیریم که فاصله‌ی O_3 از این خط برابر است با $|(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2|$ (اگر داخل قدر مطلق منفی باشد، به این

معنی است که O_3 و O_1 در دو طرف خط مذکور هستند. بنابراین:

$$R_3 = |(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2|$$

مرکز ثقل ω_1 و ω_2 نیز برابر است با $\overline{\omega} = C\left(\left(\frac{x_1+x_2}{2}, 0\right), \frac{R_1+R_2}{2}\right)$ که یعنی در رابطه‌ی مربوط به ω_3، $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد. می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
&d(\omega,\omega_1) = d(\omega,\omega_2)\\
&\Rightarrow OO_1^2 - (R-R_1)^2 = OO_2^2 - (R-R_2)^2\\
&\Rightarrow OO_1^2 - OO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1-R_2)\\
&\Rightarrow (x-x_1)^2 - (x-x_2)^2 = R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1-R_2)\\
&\Rightarrow 2x(x_1-x_2) - 2R(R_1-R_2) = x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2
\end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
&d(\omega,\omega_3)^2 = (x-x_3)^2 + y^2 - (R-R_3)^2\\
&= (x - ((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2))^2 + y^2 - (R - ((1-\alpha)R_1 + \alpha R_2))^2\\
&= ((x-x_1) + \alpha(x_1-x_2))^2 + y^2 - ((R-R_1) + \alpha(R_1-R_2))^2
\end{aligned}$$

دایره‌های ω و ω_1 و ω_2 را ثابت بگیرید و α را متغیر. بنابراین $d(\omega,\omega_3)^2$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ برحسب α است. ضریب α^2 در این چندجمله‌ای برابر است با $(x_1-x_2)^2 - (R_1-R_2)^2$ که این مقدار نامنفی است زیرا $d(\omega_1,\omega_2)$ تعریف‌شده است. هم‌چنین ضریب α برابر است با:

$$2(x_1-x_2)(x-x_1) - 2(R_1-R_2)(R-R_1)$$

طبق رابطه‌ای که بین x و R به‌دست آوردیم، این مقدار برابر است با:

$$x_1^2 - R_1^2 - x_2^2 + R_2^2 - 2x_1(x_1-x_2) + 2R_1(R_1-R_2) = -(x_1-x_2)^2 + (R_1-R_2)^2$$

بنابراین ضریب α^2 و α قرینه‌ی یک‌دیگر هستند. در صورتی که این ضرایب برابر با صفر باشند (یعنی ω_1, ω_2 مماس داخل باشند)، مقدار $d(\omega,\omega_3)$ مستقل از α است. در غیر این صورت، کم‌ترین مقدار $d(\omega,\omega_3)$ به‌ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد و حکم ثابت می‌شود.

ج. ابتدا توجه کنید که مرکز اصلی ω_1 و ω_2 و ω_3 به عنوان دایره‌ای با شعاع صفر از این سه دایره به یک فاصله است (در صورتی که خارج آن‌ها باشد). پس حدس می‌زنیم:

لم. اگر هر یک از دو دایره‌ی C_1 و C_2 از دو دایره‌ی ω_1 و ω_2 به یک فاصله باشد، آن‌گاه مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 روی محور اصلی ω_1 و ω_2 است. در صورتی که مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 تعریف نشده باشد (یعنی شعاع آن‌ها مساوی باشد)، خط‌المرکزین C_1 و C_2 موازی با محور اصلی ω_1 و ω_2 است.

فرض کنید لم درست باشد. در صورتی که مراکز ω_1 و ω_2 و ω_3 هم‌خط نباشند، آن‌گاه محورهای اصلی دوبه‌دوی آن‌ها هم‌رس‌اند و موازی نیستند. حال طبق لم فوق مرکز اصلی ω_1 و ω_2 و ω_3 در شرایط مسئله صدق می‌کند. در صورتی که

مراکز آن‌ها هم‌خط باشند، محورهای اصلی موازی هستند. اگر محورهای اصلی متمایز باشند، آن‌گاه حداکثر یک دایره از همه‌ی ω_iها به یک فاصله است و حکم به انتفاء مقدم درست است.

راه اول. قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و $C_i = C(P_i, r_i)$. فرض کنید $O_i = (x_i, ۰)$ و $P_i = (a_i, b_i)$ اگر نقطه‌ی $(x, ۰)$ روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ باشد، آن‌گاه:

$$(x - x_۱)^۲ - R_۱^۲ = (x - x_۲)^۲ - R_۲^۲ \Rightarrow x = \frac{x_۱^۲ - x_۲^۲ - R_۱^۲ + R_۲^۲}{۲(x_۱ - x_۲)}$$

این رابطه، معادله‌ی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است. مقدار فوق را c می‌نامیم. در اثبات قسمت (ب) به‌دست آوردیم:

$$۲a_i(x_۱ - x_۲) - ۲r_i(R_۱ - R_۲) = x_۱^۲ - R_۱{}^۲ - x_۲^۲ + R_۲^۲ \Rightarrow a_i = r_i \frac{R_۱ - R_۲}{x_۱ - x_۲} + c$$

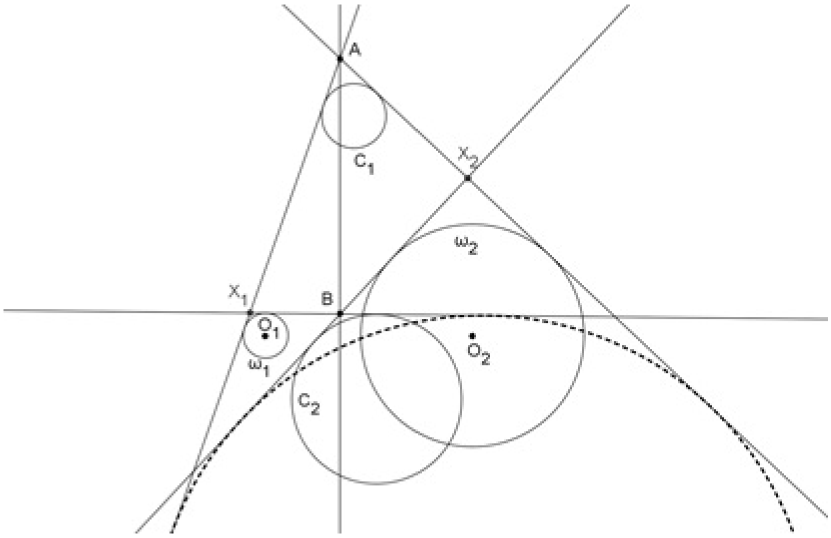
مرکز تجانس $C_۱$ و $C_۲$ روی $P_۱P_۲$ است. پس می‌توانیم بنویسیم $S = (۱ - \alpha)P_۱ + \alpha P_۲$ با توجه به نسبت فاصله‌های آن از $P_۱$ و $P_۲$ می‌توان دید: $S = \frac{r_۲}{r_۲ - r_۱}P_۱ - \frac{r_۱}{r_۲ - r_۱}P_۲$ (در صورتی که $r_۱ \neq r_۲$). بنابراین مؤلفه‌ی اول S برابر است با:

$$\frac{r_۲ a_۱ - r_۱ a_۲}{r_۲ - r_۱} = \frac{۱}{r_۲ - r_۱}\left[r_۲\left(r_۱\frac{R_۱ - R_۲}{x_۱ - x_۲} + c\right) - r_۱\left(r_۲\frac{R_۱ - R_۲}{x_۱ - x_۲} + c\right)\right] = c$$

بنابراین S روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است.

در صورتی که $r_۱ = r_۲$، طبق روابط فوق خواهیم داشت $a_۱ = a_۲$ پس خط‌المرکزین $C_۱$ و $C_۲$ موازی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است.

راه دوم. برای هر i و j یکی از مماس مشترک‌های C_i و ω_j را رسم کنید و تقاطع‌های آن‌ها را مطابق با شکل A، B، $X_۱$ و $X_۲$ بنامید. مسئله را تنها در حالتی حل می‌کنیم که شکل مسئله شبیه به شکل زیر باشد. در حالت‌های دیگر استدلال مشابه است (البته باید مماس مشترک‌ها به طور مناسبی انتخاب شوند. نوشتن راه حلی که در همه‌ی حالت‌ها معتبر باشد نیاز به تعاریف و نمادگذاری‌های زیادی دارد که از حوصله‌ی خواننده خارج است). با توجه به این که $C_۱$ از $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به یک فاصله است، نتیجه می‌گیریم که A نیز از این دو دایره به یک فاصله است. پس A روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است. به طور مشابه، B نیز روی محور اصلی آن‌ها است. هم‌چنین با توجه به برابری دو مماس رسم شده از $X_۱$ بر $\omega_۱$ و دو مماس رسم شده از $X_۲$ بر $\omega_۲$ به دست می‌آوریم: $BX_۱ + AX_۱ = BX_۲ + AX_۲$ بنابراین امتداد اضلاع چهارضلعی $AX_۱BX_۲$ مطابق شکل بر یک دایره مثل C مماس‌اند. حال A مرکز تجانس مستقیم C و $C_۱$ است و B مرکز تجانس مستقیم C و $C_۲$ پس طبق قضیه‌ی سه مرکز تجانس، مرکز تجانس مستقیم $C_۱$ و $C_۲$ روی AB است و حکم ثابت می‌شود.



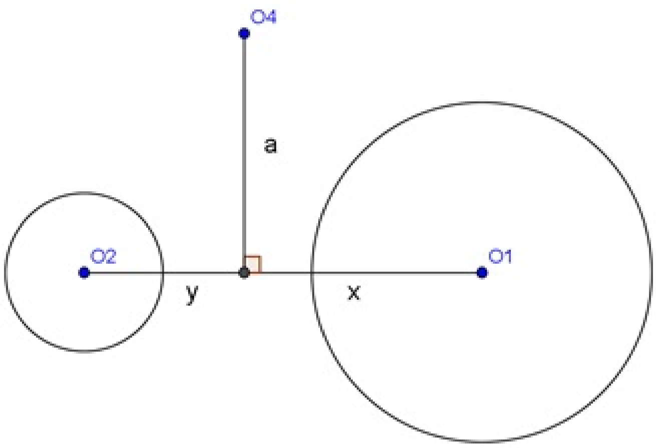
د. خیر.

قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و فاصله‌ی O_i و O_j را d_{ij} بنامید. طبق فرض باید داشته باشیم:

$$d_{ij}^{۲} - (R_i - R_j)^{۲} = ۱$$

چون تفاضل R_iها در این روابط ظاهر می‌شود، پس با افزایش یا کاهش همه‌ی شعاع‌ها به مقدار برابر، روابط فوق تغییری نمی‌کنند. پس می‌توانیم فرض کنیم $R_۴ = ۰$ هم‌چنین فرض کنید $R_۳ \geq R_۲ \geq R_۱$. $O_۴$ روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است. مطابق شکل زیر داریم:

$$\begin{aligned} a^{۲} + x^{۲} - R_۱^{۲} &= ۱ \\ a^{۲} + y^{۲} - R_۲^{۲} &= ۱ \\ (x+y)^{۲} - (R_۱ - R_۲)^{۲} &= ۱ \end{aligned}$$



با کم کردن دو رابطه‌ی اول از رابطه‌ی سوم به‌دست می‌آوریم:

$$۲xy + ۲R_۱R_۲ + ۲ - ۲a^{۲} = ۱ \Rightarrow a = \sqrt{\frac{۱}{۲} + xy + R_۱R_۲}$$

از طرفی با تفاضل دو رابطه‌ی اول داریم:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = R_1^2 - R_2^2 \\ x + y = d_{12} \end{cases} \Rightarrow x - y = \frac{R_1^2 - R_2^2}{d_{12}}$$

$$\Rightarrow \{x, y\} = \frac{d_{12}}{2} \pm \frac{R_1^2 - R_2^2}{2d_{12}}$$

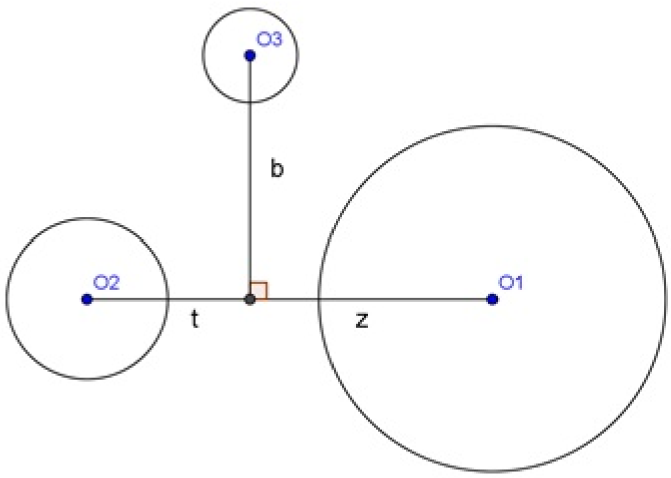
$$\Rightarrow xy = \frac{d_{12}^2}{4} - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{d_{12}}\right)^2$$

بنابراین:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{d_{12}^2}{4} - \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{4d_{12}^2} + R_1R_2}$$

حال وضعیت $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ را بررسی می‌کنیم. به طور مشابه، با کوچک کردن هر سه شعاع به اندازه‌ی R_3 به‌دست می‌آوریم:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{d_{12}^2}{4} - \frac{((R_1 - R_3)^2 - (R_2 - R_3)^2)^2}{4d_{12}^2} + (R_1 - R_3)(R_2 - R_3)}$$



دو حالت در نظر می‌گیریم:

- **حالت اول**. فرض کنید O_3 و O_4 دو طرف خط O_1O_2 باشند. در این صورت داریم:

$$O_3O_4^2 - R_3^2 = 1 \Rightarrow 1 + R_3^2 = O_3O_4^2 \geq (a+b)^2 \geq a^2 + b^2$$

اما داریم:

$$a^2 > \frac{1}{2} + R_1R_2$$

$$b^2 > \frac{1}{2} + (R_1 - R_3)(R_2 - R_3)$$

بنابراین:

$$R_3^2 > R_1R_2 + (R_1 - R_3)(R_2 - R_3) \Rightarrow (R_1 + R_2)R_3 > 2R_1R_2$$

اما این با $R_1 \geq R_2 \geq R_3$ متناقض است.

• **حالت دوم.** O_3 و O_4 یک طرف خط O_1O_2 هستند. در این صورت:

$$\begin{aligned}
&1+R_3^2=(a-b)^2+(x-z)^2=(a^2+x^2)+(b^2+z^2)-2ab-2xz\\
&=1+R_1^2+1+(R_1-R_3)^2-2ab-2xz\\
&\Rightarrow 0=1+2R_1^2-2R_1R_3-2ab-2xz\\
&\Rightarrow 4ab+4xz=2+4R_1(R_1-R_3)
\end{aligned}$$

از طرفی با قرار دادن $d_{12}^2=1+(R_1-R_2)^2$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{d_{12}^2}{4}-\frac{(R_1^2-R_2^2)^2}{4d_{12}^2}+R_1R_2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{(R_1+R_2)^2}{4}-\frac{(R_1-R_2)^2(R_1+R_2)^2}{4(1+(R_1-R_2)^2)}}$$

و به طور مشابه:

$$b=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{(R_1+R_2-2R_3)^2}{4}-\frac{(R_1-R_2)^2(R_1+R_2-2R_3)^2}{4(1+(R_1-R_2)^2)}}$$

پس اگر قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
t&:=R_1-R_2\\
s&:=R_1+R_2-2R_3\\
r&:=R_1+R_2
\end{aligned}$$

آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
a&=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{r^2}{4}-\frac{r^2t^2}{4(1+t^2)}}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{r^2}{4(1+t^2)}}\\
b&=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{s^2}{4(1+t^2)}}
\end{aligned}$$

هم‌چنین:

$$xz=\left(\frac{d_{12}}{2}+\frac{R_1^2-R_2^2}{2d_{12}}\right)\left(\frac{d_{12}}{2}+\frac{(R_1-R_3)^2-(R_2-R_3)^2}{2d_{12}}\right)=\frac{1+t^2}{4}+\frac{rt}{4}+\frac{st}{4}+\frac{rst^2}{4(1+t^2)}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
&4ab+4xz=2+4R_1(R_1-R_3)\\
&\Rightarrow\sqrt{\left(3+\frac{r^2}{1+t^2}\right)\left(3+\frac{s^2}{1+t^2}\right)}+1+t^2+rt+st+\frac{rst^2}{1+t^2}=2+(r+t)(s+t)
\end{aligned}$$

با ضرب در $1+t^2$ و ساده کردن به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{(3+3t^2+r^2)(3+3t^2+s^2)}=1+t^2+rs$$

اما این با نامساوی کوشی-شوارتز در تناقض است.

سؤال شماره ۳. تولید توابع!

به اختصار $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k}$ را با f^k نمایش می‌دهیم.

الف. قرار دهید:

$$f(x)=\begin{cases}۲ & x=۱\\ ۳ & x=۲\\ ۱ & x=۳\\ x & x\notin\{۱,۲,۳\}\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}۳ & x=۱\\ ۱ & x=۲\\ ۲ & x=۳\\ x & x\notin\{۱,۲,۳\}\end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود $f^۲(x)=g(x),\ g^۲(x)=f(x)$.

ب. فرض کنید حداقل یک تابع مثل g موجود است که $f\to g,\ g\to f$. پس اعداد طبیعی m و n موجودند که $f^m(x)=g(x),\ g^n(x)=f(x)$. در نتیجه $f^{mn}(x)=f(x)$. پس f حداکثر $mn-۱$ تابع مختلف را تولید می‌کند که این تعداد متناهی است.

ج. چنین تابعی وجود دارد. فرض کنید:

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & x\in\mathbb{Z}\\ x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

با برهان خلف ثابت می‌کنیم هیچ تابعی g را تولید نمی‌کند. فرض کنید تابع حقیقی f و عدد طبیعی $k>۱$ وجود دارد به طوری که $f^k(x)=g(x)$. برای هر $z\in\mathbb{Z}$ اگر $f(z)\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $f(f(z))=f(z)$ پس $z+۱=g(z)=f^k(z)=f(z)$ که با صحیح نبودن $f(z)$ در تناقض است. پس f هر عدد صحیح، عددی صحیح است. حال برای هر $z\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$f(z)+۱=g(f(z))=f^{k+۱}(z)=f(g(z))=f(z+۱).$$

بنابراین تابع f روی اعداد صحیح تابع انتقال است، یعنی t وجود دارد که برای هر عدد صحیح z، $f(z)=z+t$ ولی در این صورت $z+۱=g(z)=f^k(z)=z+kt$. که در تناقض با $k>۱$ است. پس f وجود ندارد که تابع g را تولید کند.

د. فرض کنید m,n موجودند که $f^m(x)=x^۳,\ f^n(x)=x^۵$. در این صورت $x^{۳^n}=f^{mn}(x)=x^{۵^m}$ بنابراین $۳^n=۵^m$ که تناقض است.

هـ با استفاده از لم زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

لم. اگر برای تابع حقیقی f اعداد طبیعی $a>b$ موجود باشند که $f^a(x),f^b(x)$ چندجمله‌ای‌های خطی باشند آن‌گاه $f^{a-b}(x)$ هم خطی است.

اثبات. فرض کنید $f^a(x)=a_۱x+a_۰,\ f^b(x)=b_۱x+b_۰$. در نتیجه $f^{a-b}(b_۱x+b_۰)=a_۱x+a_۰$ قرار می‌دهیم $y=b_۱x+b_۰$. پس $f^{a-b}(y)=\frac{a_۱}{b_۱}y+\left(a_۰-\frac{a_۱b_۰}{b_۱}\right)$ و چون y همه‌ی مقادیر را می‌تواند به خود بگیرد پس $f^{a-b}(y)$ هم تابعی خطی است. $\square$

حال فرض کنید $f^m(x)=P(x),\ f^n(x)=Q(x)$ و $(m,n)=d$ آن‌گاه طبق لم بالا و با توجه به الگوریتم تقسیم $f^d(x)$ هم تابعی خطی است که به وضوح $P(x),Q(x)$ را تولید می‌کند.

سؤال شماره ۴. چندضلعی تپل!

الف. فرض کنید xy وتر بیشینه باشد. کمان کوچک‌تر بین x و y را C_1 و کمان بزرگ‌تر را C_2 بنامید. بنابر فرض، طولِ C_1 کوچک‌تر از $\frac{p}{4}$ است. فاصله‌ی دو نقطه روی محیط را با $d(a,b)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم نشان دهیم نیم‌دایره‌ی به قطر xy که در طرف C_2 است، درون چندضلعی قرار دارد.

لم ۱. C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد.

اثبات. فرض کنید z نقطه‌ای از C_2 روی پاره‌خط xy و بین x و y باشد. به وضوح xz و yz وترهایی داخلی هستند. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرضِ تپل بودن، طول هر کدام حداکثر $\frac{p}{4}$ است. این تناقض نشان می‌دهد که C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد. □

لم ۲. اشتراک ضلع متصل به x با C_2 خارج از نیم‌دایره قرار دارد. مشابهاً برای y.

اثبات. اثبات. فرض کنید این طور نباشد. z را نقطه‌ای درون نیم‌دایره و روی C_2 و بسیار نزدیک به x و روی همان ضلعی که x قرار دارد بگیرید به طوری که yz چندضلعی را تنها در دو سرش قطع کند (با توجه به لم ۱ این کار امکان‌پذیر است). اکنون چون کمان کوچک‌تر بین x و y طولش از $\frac{p}{4}$ بیش‌تر نیست و چون z بسیار نزدیک به x انتخاب شد پس کمان yxz کمان کوچک‌تر بین y و z است و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. □

لم ۳. C_2 با نیم‌دایره تقاطعی ندارد (به جز در x و y).

اثبات. z را نقطه‌ای روی C_2 در نظر بگیرید که درون نیم‌دایره قرار دارد و در بین نقاط با این خاصیت کم‌ترین فاصله را با پاره‌خط xy دارد (بنابر لم ۱ و ۲، این نقطه فاصله‌ی مثبتی از xy دارد). ادعا می‌کنیم xz و yz وترهای داخلی هستند. چون در غیر این صورت نقطه‌ای از چندضلعی مانند z' درون مثلث xyz قرار می‌گیرد که این با نحوه‌ی انتخاب z تناقض دارد.

□

پس xz و yz وترهای داخلی هستند. ادامه‌ی اثبات مشابه لم ۱ است. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرضِ تپل بودن، طول هر کدام حداکثر $\frac{p}{4}$ است.

اکنون با توجه به لم ۳، C_2 نیم‌دایره را قطع نمی‌کند. پس C_1 نیز آن را قطع نمی‌کند چون در غیر این صورت چندضلعی خودش را قطع می‌کند. پس نیم‌دایره کاملاً درون چندضلعی قرار دارد.

ب. فرض کنید xy وتر بیشینه باشد. مشابه قسمت قبل کمان کوچک‌تر بین x و y را C_1 و کمان بزرگ‌تر را C_2 بنامید. بنابر فرض، طولِ C_1 کوچک‌تر از $\frac{p}{4}$ است.

به مرکز x و y نیم‌دایره‌هایی به شعاع ۱ و در طرفی از xy که C_2 قرار دارد رسم می‌کنیم. اشتراک این دو نیم‌دایره را ناحیه‌ی S می‌نامیم. می‌خواهیم نشان دهیم ناحیه‌ی S درون چندضلعی قرار دارد.

لم ۱. C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد.

اثبات. مشابه قسمت (الف).

□

لم ۲. اشتراک ضلع متصل به x با C_2 خارج از ناحیه‌ی S قرار دارد. مشابهاً برای y.

اثبات. فرض کنید این طور نباشد. z را نقطه‌ای درون S و روی C_2 و بسیار نزدیک به x و روی همان ضلعی که x قرار دارد بگیرید به طوری که yz چندضلعی را تنها در دو سرش قطع کند (با توجه به لم ۱ این کار امکان‌پذیر است). اکنون چون کمان کوچک‌تر بین x و y طولش از $\frac{p}{4}$ بیش‌تر نیست و چون z بسیار نزدیک به x انتخاب شد پس کمان yxz کمان کوچک‌تر بین y و z است و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد.

□

لم ۳. C_2 با ناحیه‌ی S تقاطعی ندارد (به جز در x و y).

اثبات. z را نقطه‌ای روی C_2 در نظر بگیرید که درون ناحیه‌ی S قرار دارد و در بین نقاط با این خاصیت کم‌ترین فاصله را با پاره‌خط xy دارد (بنابر لم ۱ و ۲، این نقطه فاصله‌ی مثبتی از xy دارد). ادعا می‌کنیم xz و yz وترهای داخلی هستند. چون در غیر این صورت نقطه‌ای از چندضلعی مانند z' درون مثلث xyz قرار می‌گیرد که این با نحوه‌ی انتخاب z تناقض دارد.

□

پس xz و yz وترهای داخلی هستند و چون z درون S قرار دارد پس طول آن‌ها کم‌تر مساوی ۱ است پس بنابر فرضِ تپل بودن، فاصله‌ی دو سر آن‌ها روی محیط کم‌تر مساوی $\frac{p}{4}$ است. ادامه‌ی اثبات هم مشابه لم ۱ است. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که طول آن‌ها کم‌تر مساوی $\frac{p}{4}$ است. اکنون با توجه به لم ۳، C_2 ناحیه‌ی S را قطع نمی‌کند. پس C_1 نیز آن را قطع نمی‌کند چون در غیر این صورت چندضلعی خودش را قطع می‌کند. پس ناحیه‌ی S کاملاً درون چندضلعی قرار دارد. اکنون به راحتی می‌توان دید که یک دایره به شعاع $\frac{1}{4}$ درون ناحیه‌ی S جای می‌گیرد.

ج. فرض کنید چندضلعی تپلی داریم که نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد. بنابر گزاره دوم می‌توان آن را به وسیله‌ی وترهای داخلی مثلث‌بندی کرد به نحوی که طول اضلاع همه‌ی مثلث‌ها حداکثر واحد باشد.

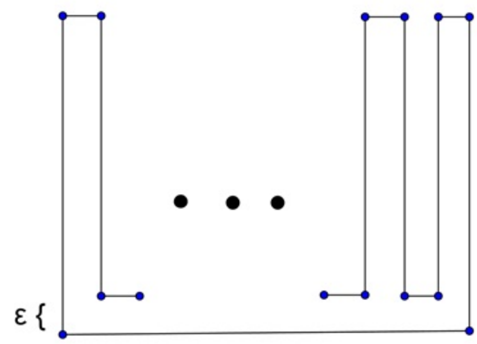
اکنون در بین وترهای داخلی یکی را که بیش‌ترین فاصله‌ی روی محیط بین دو سرش را دارد در نظر بگیرید مثلاً xy جزء

بزرگ‌تر محیط چندضلعی بین x و y را C می‌نامیم. دو حالت ممکن است:

- **حالت اول.** C شامل رأسی دیگر از چندضلعی باشد.
در این حالت حتماً رأسی مانند z روی C وجود دارد که xyz یکی از مثلث‌های مثلث‌بندی است. اکنون کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با نحوه‌ی انتخاب xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرض تپل بودن، طول هریک از آن‌ها کم‌تر مساوی $\frac{p}{۴}$ است.

- **حالت دوم.** C شامل هیچ رأس دیگری از چندضلعی نباشد.
در این حالت xy باید ضلع چندضلعی باشد و در عین حال، این ضلع جزء بزرگ‌تر محیط بین x و y باشد که این با نابرابری مثلث در تناقض است.

د. اگر ϵ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد شکل زیر یک مثال نقض برای گزاره‌ی اول است.



سؤال شماره ۵. در جست‌وجوی اعداد از دست رفته!

الف. در بین زیرجمع‌ها کوچک‌ترین عدد را در نظر می‌گیریم. چون زیرجمع‌ها مثبتند پس اعداد اولیه نیز مثبت و در نتیجه کوچک‌ترین زیرجمع همان کوچک‌ترین عدد میان اعداد اولیه است. اعداد اولیه را $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ بگیرید.
پس تا این‌جا ما a_1 را به دست آوردیم . حال فرض کنید $a_1, \ldots, a_i$ به صورت یک‌تا مشخص شده بودند. از زیرجمع‌ها آن‌هایی را که با این i عدد ساخته می‌شوند، حذف می‌کنیم. در میان باقی‌مانده‌ها کوچک‌ترین عدد باید a_{i+1} باشد.

ب. راه اول (اثبات ساختاری، جبری)
فرض کنید $a_1 \leq \cdots \leq a_k < 0 \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_n$. $(1+x^{a_1})\cdots(1+x^{a_n}) = x^{s_1} + \cdots + x^{s_{2^n}}$ با تقسیم عبارت بر x^{s_1} داریم:

$$\left(1+x^{-a_1}\right)\cdots\left(1+x^{-a_k}\right)\left(1+x^{a_{k+1}}\right)\cdots\left(1+x^{a_n}\right) = x^{s_1-s_1} + \cdots + x^{s_{2^n}-s_1}$$

که با توجه به حالت مثبت (قسمت (الف)) مقادیر $|a_i|$ها به دست می‌آیند. اکنون باید ثابت کنیم که اگر بخواهیم x^{s_1} را در دو طرف ضرب کنیم به یک طریق یک‌تا می‌شود بین پرانتزها پخش شود. فرض کنید که به دو طریق این کار انجام پذیرد. توجه کنید در این پخش شدن قدرمطلق‌ها نباید تفاوت کنند. پس این معادل این است که ۲ زیرجمع از $|a_i|$ها برابر $-s_1$ خواهد بود. یعنی:

$$|a_{i_1}| + \cdots + |a_{i_l}| = |a_{i_{l+1}}| + \cdots + |a_{i_k}|$$

(اندیس‌های مشترک را حذف کردیم) اما در این صورت در یک حالت $|a_{i_1}|, \ldots, |a_{i_l}|$ ز اعداد اولیه به صورت منفی ظاهر شده و $|a_{i_{l+1}}|, \ldots, |a_{i_k}|$ به صورت مثبت، پس مجموع آن‌ها صفر می‌شود و این تناقض است.

پس به صورت یک‌تا می‌توانیم در پرانتزها پخش کنیم و درنتیجه اعداد اولیه‌مان یک‌تا به دست می‌آیند.
نکته. توجه کنید که عبارت‌های ما یک تابع از اعداد حقیقی مثبت به اعداد حقیقی مثبت هستند و در نتیجه خوش‌تعریف هستند!
راه دوم. (اثبات وجودی، ترکیبیاتی)
ابتدا بزرگ‌ترین عدد و عدد قبلی آن (از نظر بزرگی) را در نظر بگیرید. واضح است که تفاضل این دو کوچک‌ترین قدر مطلق در میان اعداد اولیه‌مان خواهد بود. مجموعه‌ی زیرجمع‌ها به هم‌راه صفر (زیرجمع مجموعه‌ی تهی) را S بگیرید و کوچک‌ترین قدر مطلق را d بنامید.
لم. اگر $A \bigcup (A+d) = B \bigcup (B+d) = S$ آن‌گاه خود A, B برابرند.

اثبات. کوچک‌ترین عدد در S را x بنامید می‌دانیم که x در A آمده، چرا که اگر در $A+d$ آمده باشد ان‌گاه $x-d$ باید در A آمده باشد و درنتیجه در S باید آمده باشد ولی چون $d > 0$ این عدد کم‌تر است و این تناقض است. به طریق مشابه x در B نیز آمده و درنتیجه $x+d$ در $A+d$ و $B+d$ آمده است. حال $x, x+d$ را از S حذف کرده و همین روند را تکرار می‌کنیم نتیجه می‌شود که اعضای A, B دوبه دو با هم مساوی هستند پس $A = B$.

□

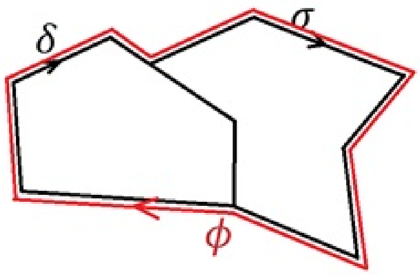
حال به اثبات سوال باز می‌گردیم. ثابت می‌کنیم که زیر مجموعه‌ای یک‌تا از زیرجمع‌ها را می‌توان یافت (مانند A) که $S = A \bigcup (A+d)$. در این صورت بنابر استقرا مجموعه‌ی A مجموعه‌ی زیرجمع‌های یک مجموعه‌ی یک‌تای $n-1$

عضوی خواهد بود و مسئله حل می‌شود.
حال فرض کنید در حالتی d عضو مجموعه اعداد اولیه باشد و در حالتی دیگر dعضو مجموعه اعداد اولیه باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیرجمع‌های $n-۱$ عدد دیگر را در حالت اول A و در حالت دوم B می‌نامیم. پس $S = A\bigcup(A+d) = B\bigcup(B-d)$. در نتیجه بنا بر لم داریم $A = B - d$. صفر عضو A است پس d باید عضو B باشد. پس مجموع تعدادی از اعداد در حالت دوم d شده است که اگر d را هم به آن‌ها اضافه کنیم مجموع صفر ظاهر می‌شود. تناقض حاصل نشان می‌دهد که مجموعه‌ی مورد نظر یک‌تا است.

جمجموع‌های همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,-۳\}$ با مجموع‌های همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{-۱,-۲,۳\}$ برابر است. کافی است ۱۳۸۹ تا صفر به هر دو مجموعه اضافه کنیم.

سؤال شماره ۶. جهان‌گردان سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار!

ابتدا به لم زیبای زیر توجه می‌کنیم که کلید حل سوال است.



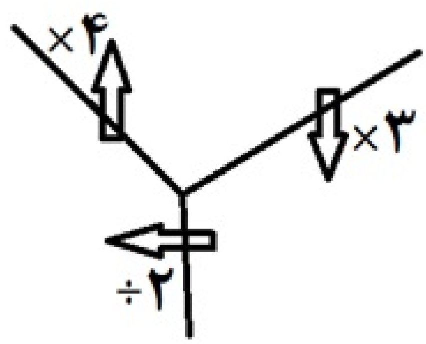
لم. دو دور هم‌جهت δ, σ را در نظر بگیرید که در یک قسمت مشترک باشند، دور ϕ را اجتماع این دو دور و با حذف قسمت‌های مشترک در نظر می‌گیریم. حال اگر در مسیرهای δ, σ جهان‌گرد پس از اتمام یک دور سرمایه‌اش $\kappa_\sigma, \kappa_\delta$ برابر شود، پس از پیمودن مسیر ϕ، سرمایه‌اش $\kappa_\sigma \times \kappa_\delta$ برابر خواهد شد. در واقع داریم: $\kappa_\phi = \kappa_\sigma \kappa_\delta$.

اثبات. توجه کنید که هر یال مسیر ϕ در دقیقاً یکی از مسیرهای δ, σ آمده است. و یال‌هایی از δ, σ که در مسیر ϕ نیامده‌اند در هر دوی این دور میسر بوده و جهتشان متفاوت است. پس یال‌های مشترک در $\kappa_\sigma \times \kappa_\delta$ یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و یال‌های دیگر موجب می‌شوند که رابطه‌ی $\kappa_\phi = \kappa_\sigma \kappa_\delta$ برقرار باشد.

□

حال یک ۱۳۹۲وجهی را در نظر بگیرید. یک رأس دل‌خواه آن را در نظر گرفته و با تصویر نقطه‌ای کل ۱۳۹۲وجهی را به روی یک صفحه انتقال می‌دهیم. توجه کنید که وجوه مجاور رأس مورد نظر به نواحی مانند چندضلعی بی‌نهایت رفته و دیگر وجوه ۱۳۹۲ وجهی و هر خط‌شکسته‌های بسته روی آن ، چندضلعی خواهند ماند.

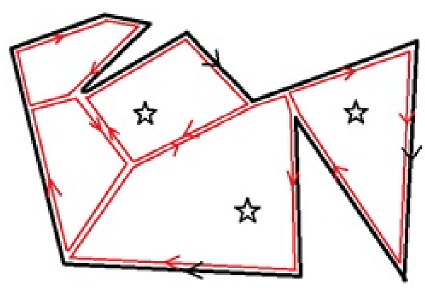
به هر رأس ضرب یال‌های متصل به آن رأس را در جهت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد نسبت می‌دهیم. برای مثال به رأس شکل زیر، مقدار ساعت‌گرد ۶ و مقدار پادساعت‌گرد $\frac{1}{۶}$ را نسبت می‌دهیم. پس اگر دقیقاً یک دور نزدیک و ساعت‌گرد دور این رأس بزنیم، سرمایه‌یمان ۶ برابر می‌شود.



حال ادعا می‌کنیم که κ هر مسیر تنها به مقادیر رئوس درون آن مسیر بستگی دارد. برای اثبات ابتدا توجه می‌کنیم که هر مسیری که درون خود هیچ رأسی نداشته باشد، دارای κ برابر یک است. با در نظر گرفتن هر پاره‌خط و امتداد آن می‌توان به سادگی این نکته را ثابت کرد که هر مسیری که درون خود رأسی ندارد، پاره‌خط را به اندازه‌ی برابر از دو طرف قطع می‌کند.

به عنوان لم دوم به این نکته توجه کنید که اگر مسیری دل‌خواه با ضریب نهایی κداشته‌باشیم، می‌توان این مسیر را از هر کشور دل‌خواه شروع کرد برای اثبات کافی‌است مسیری بسته که از کشور مورد نظر می‌گذرد و یال مشترکی با مسیر اصلی دارد و هیچ رأسی درونش نیست را به مسیر اصلی اضافه کنیم. طبق لم اول این کار مسیر مناسب با ضریب κ به ما خواهد داد.

اکنون با استفاده از این نکته می‌توان اثبات این قسمت را کامل کرد. یک مسیر ساعت‌گرد را در نظر بگیرید. دور رئوس این مسیر دورهایی مجزا و نزدیک به رأس رسم می‌کنیم. باقی مسیر را نیز با دورهای خالی از رأس می‌پوشانیم. اکنون توجه کنید که κاین دورهای خالی از رأس برابر واحد است و κدورهای شامل یک رأس و نزدیک به آن برابر مقدار ساعت‌گرد این رأس است. با توجه به لم کلیدی ابتدای سوال و استفاده از استقرا می‌توان ادعا کرد که κ مسیر اصلی برابر ضرب مقادیر ساعت‌گرد درون مسیر است.

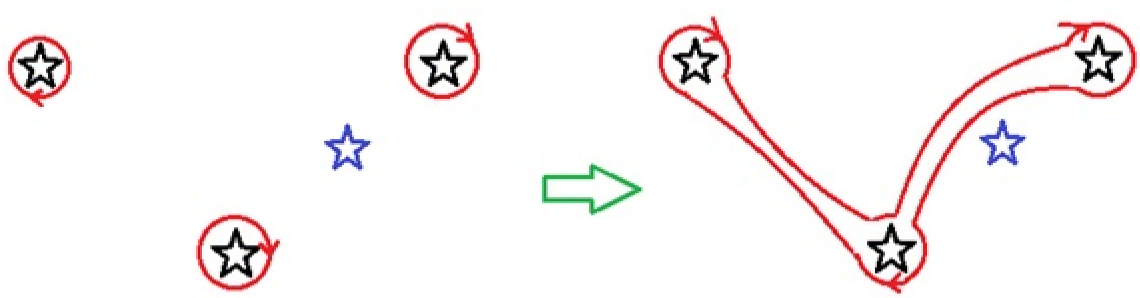


پس κ هر مسیر را که در نظر بگیریم با توجه به این که ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد است، برابر حاصل‌ضرب تعدادی مقدار ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد رئوس است. پس برای هر زیرمجموعه از رئوس حداکثر دو مسیر ساعت‌گرد و یا پادساعت‌گرد شامل این رئوس داریم. با توجه به این که مسیر خالی از رأس دارای κ یک است پس این مسیر حداکثر یک κ به ما می‌دهد. پس در کل حداکثر می‌توان $2^v - 1$ تا κ متمایز تولید داشت که v تعداد رئوس در صفحه است.

حال ثابت می‌کنیم که این تعداد مسیر با رئوس درونی متمایز وجود دارد.

ابتدا توجه کند که برای $= \kappa$ مسیر وجود دارد.

برای ادامه کار نشان می‌دهیم که برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از رئوس صفحه و هر جهت‌گذاری (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) می‌توان مسیری شامل این رئوس و با جهت دل‌خواه پیدا کرد. برای این کار دور رئوسی که قرار است درون دور باشند دورهای کوچکی رسم کرده و این دورها را مانند شکل با هم تلفیق می‌کنیم تا مسیر مناسب به دست آید.



حال کافی است نشان دهیم می‌توان مرزها را طوری عدد گذاری کرد که هر دو مسیر با رئوس درون متمایز، دارای κ متمایز باشند. برای این کار روی مرزها اعداد اول متمایز قرار می‌دهیم. فرض کنید دو مسیر با رئوس درونی متمایز، κی برابر

داشته باشند. اگر هر دو دور جهت برابر داشته باشند، با استفاده از لم اول می‌توان تعدادی رأس یافت که ضرب مقدار آن‌ها (تعدادی ساعت‌گرد و تعدادی پادساعت‌گرد) برابر یک باشد که به سادگی می‌توان این را رد کرد. اگر هم یکی ساعت‌گرد و دیگری پادساعت‌گرد باشد، می‌توان ادعا کرد که این دو مسیر مکمل یک‌دیگرند و با توجه به این که هیچ کدام تهی نیستند به سادگی می‌توان به تناقض رسید. پس همواره انتخاب رأس‌های متمایز و جهت متمایز kی متمایزی به ما می‌دهد.

پس با توجه به آن چه گفته شد می‌توان ادعا کرد که حداکثر تعداد kهای متمایز برابر $۲^v - ۱$ خواهد بود. پس برای ماکزیمم شدن این تعداد کافی است تعداد رئوس در صفحه ماکزیمم شوند که با دو بار محاسبه‌ی زوایای چندضلعی‌ها (هر رأس زاویه‌ی ۳۶۰ درجه دارد و هر چندضلعی (متناهی و نامتناهی) زاویه‌ی حداقل ۱۸۰ درجه) به این نتیجه می‌رسیم که تعداد رئوس روی صفحه حداکثر برابر $۲ \times ۱۳۹۲ - ۵$است. در حین اثبات به این نتیجه می‌رسیم که حالت تساوی تنها وقتی رخ می‌دهد که تمام رئوس درجه ۳ باشند و این ما را در ساخت حالت تساوی کمک خواهد کرد. این تعداد رأس در صفحه وقتی به دست می‌آید که در فضا $۲ \times ۱۳۹۲ - ۴$ رأس داشته باشیم.

حال توجه کنید این حالت امکان دارد رخ دهد. کافی است یک منشور در نظر بگیرید که دو قاعده‌ی آن ۱۳۹۰ضلعی و وجوه جانبی آن مستطیل‌هایی باشند. این چندوجهی محدب است، ۱۳۹۰ وجه دارد و $۲ \times ۱۳۹۲ - ۴$ رأس دارد.

پس بیشینه‌ی خواسته شده توسط سوال برابر $۲^v - ۱$ است و برای آن مثال هم داریم.

سؤال شماره ۷. خواص جالب معادلات جالب!

الف. دقت کنید که برای هر x ثابت، حداکثر تعدادی متناهی عضو S هستند که مؤلفه‌ی اولشان x باشد. بنابراین برای هر عدد مثبت R، حداکثر تعداد متناهی از اعضای S هستند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها از R کم‌تر باشد. مشابهاً برای مؤلفه‌ی دوم هم این گزاره برقرار است.

فرض کنید $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ معادله‌ای جالب با کم‌ترین درجه باشد که در بی‌نهایت نقطه از S صدق می‌کند (منظور از درجه‌ی معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ درجه‌ی $P(x) - Q(y)$ به عنوان یک چندجمله‌ای دو متغیره است). مجموعه نقاطی که این معادله در آن صدق می‌کند را S' بنامید. $P(x) = Q(y)$ را معادله‌ی دل‌خواهی فرض کنید که در S صدق می‌کند. اکنون P را بر $P_\circ$ و Q را بر $Q_\circ$ تقسیمِ چندجمله‌ای می‌کنیم، داریم:

$$P(x) = A(x)P_\circ(x) + B(x)$$
$$Q(y) = C(y)Q_\circ(y) + D(y)$$

به طوری که A، B، C و D چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب گویا هستند و $\deg B < \deg P_\circ$ و $\deg D < \deg Q_\circ$. عدد صحیح N را طوری بگیرید که وقتی در این چندجمله‌ای‌ها ضرب می‌شود همه‌ی ضرایب صحیح شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} NP(x) &= A'(x)P_\circ(x) + B'(x) \\ NQ(y) &= C'(y)Q_\circ(y) + D'(y) \end{aligned} \qquad (*)$$

به طوری که A'، B'، C' و D' چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح هستند.

اگر $(x_\circ, y_\circ) \in S'$ می‌دانیم که $P(x_\circ) = Q(y_\circ)$ برابر عددی صحیح مانند a و $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ برابر عددی صحیح مانند b است. اکنون اگر دو معادله‌ی $(*)$ را از هم کم کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\big(A'(x_\circ) - C'(y_\circ)\big)b = B'(x_\circ) - D'(y_\circ) \qquad (**)$$

از طرفی می‌دانیم که $\deg B' < \deg P_\circ$ و $\deg D' < \deg Q_\circ$. بنابراین عدد مثبت R وجود دارد که اگر $|x|, |y| > R$ آن‌گاه:

$$|B'(x)| < \frac{|P_\circ(x)|}{۲} \ , \ |D'(y)| < \frac{|Q_\circ(y)|}{۲}$$

در نتیجه اگر $|x_\circ|, |y_\circ| > R$ بنابر نابرابری مثلث، $|B'(x) - D'(y)| < b$ در حالی که از معادله‌ی $(**)$ نتیجه می‌شود که باید بر b بخش‌پذیر باشد، پس $B'(x_\circ) - D'(y_\circ) = ۰$ و در نتیجه $A'(x_\circ) - C'(y_\circ) = ۰$، یعنی $(x_\circ, y_\circ)$ جوابی از $B'(x) = D'(y)$ نیز هست. از طرفی بنابر توضیحی که در ابتدا دادیم، به جز متناهی عضو برای بقیه‌ی اعضا داریم $|x|, |y| > R$. پس معادله‌ی $B'(x) = D'(y)$ نیز بی‌نهایت جواب در S دارد و در عین حال درجه‌اش از معادله‌ی $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ کم‌تر است. بنابر این تنها حالت ممکن این است که B' و D' ثابت (و برابر) باشند، یعنی $B'(x) = D'(y) = c$.

بنابراین داریم $A'(x) = \frac{NP(x)-c}{P_\circ(x)}$, $C'(y) = \frac{NQ(y)-c}{Q_\circ(y)}$. حال اگر معادله‌ی $A'(x) = C'(y)$ هنوز یک معادله‌ی جالب باشد، A' را بر $P_\circ$ و C' را بر $Q_\circ$ تقسیم کرده و استدلال بالا را تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این کار نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای $F(x)$ با ضرایب گویا وجود دارد که $P(x) = F(P_\circ(x))$ و $Q(y) = F(Q_\circ(y))$ یعنی معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ از $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ نتیجه می‌شود.

ب. از لم زیر برای اثبات حکم استفاده می‌کنیم.

لم. اگر $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ تکین باشد و $\deg P = dm$ ،$d|$ آن‌گاه وجود دارند عدد صحیح N و چندجمله‌ای‌های $T(x)$ و $R(x)$ با ضرایب صحیح به طوری که: $NP(x) = (T(x))^d + R(x)$، و برای x به اندازه‌ی کافی بزرگ، $T(x)^d \leq NP(x) < (T(x)+۱)^d$

اثبات. ابتدا چندجمله‌ای $T_۱(x)$ را طوری میابیم که $P(x) - T_۱(x)^d$ از درجه‌ی کم‌تر از $(m-۱)d$ باشد. برای این کار فرض کنید:

$$P(x) = x^{md} + a_{md-۱}x^{md-۱} + \cdots + a_۰$$

و قرار دهید $T_۱(x) = x^m + b_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + b_۰$ کافی است ضرایب $b_۰, \ldots, b_{m-۱}$ را طوری بیابیم که:

$$(x^m + b_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + b_۰)^d = x^{md} + a_{md-۱}x^{md-۱} + \cdots + a_{md-d}x^{md-d} + c_{md-d-۱}x^{md-d-۱} + \cdots$$

ضرایب را می‌توان به طور بازگشتی تعیین کرد و $T_۱$ را به دست آورد. $\square$

ضرایب $T_۱$ اعدادی گویا می‌شوند. سپس می‌توان با ضرب کردن عدد صحیح n همه‌ی ضرایب را صحیح کرد. بنابراین $T_۲(x) = nT_۱(x)$ و $NP(x) - T_۲(x)^d = S_۲(x)$ که در آن $N = n^d$ و $\deg S_۲ < (m-۱)d$. حال اگر ضریب پیشروی $S_۲$ مثبت بود، مسأله حل است و اگر منفی بود قرار می‌دهیم: $T(x) = T_۲(x) - ۱$ و $S(x) = NP(x) - T(x)$.

اکنون به مسأله اصلی باز می‌گردیم. فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید $d|(\deg P, \deg Q)$. بنابر لم بالا، عدد صحیح N و چندجمله‌ای‌های T، R، U و V با ضرایب صحیح وجود دارند به طوری که:

$$NP(x) = (T(x))^d + R(x)\ ,\ \ NQ(y) = (U(y))^d + V(y)$$

و برای x و y به اندازه‌ی کافی بزرگ،

$$T(x)^d \leq NP(x) < (T(x)+۱)^d,\ U(y)^d \leq NQ(y) < (U(y)+۱)^d$$

اکنون هرگاه $P(x) = Q(y)$، از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که $T(x) = U(y)$. پس این دو معادله‌ی جالب، بی‌نهایت جواب مشترک دارند و در نتیجه بنابر قسمت (الف) هر دو توسط یک معادله تولید می‌شوند.

سؤال شماره ۸. پنج‌ضلعی گویا!

قبل از اثبات حکم چند نکته‌ی لازم را متذکر می‌شویم:

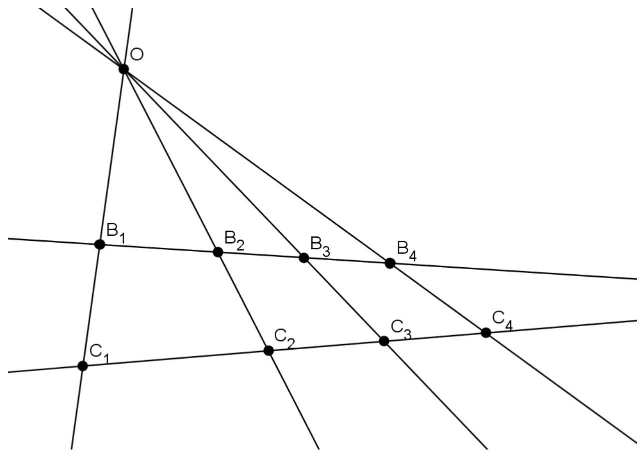
نکته ۱. اگر $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$ و $B_۴$ چهار نقطه روی یک خط باشند، نسبت «ناهمساز» آن‌ها به این صورت تعریف می‌شود:

$$(B_۱B_۲, B_۳B_۴) = \frac{|B_۱B_۳|}{|B_۱B_۴|} / \frac{|B_۲B_۳|}{|B_۲B_۴|}$$

(در این تعریف یک جهت برای خط گذرا از B_iها در نظر گرفته می‌شود و طول هر پاره‌خط بسته به این‌که هم جهت با جهت خط یا خلاف آن باشد، مثبت یا منفی در نظر گرفته می‌شود.)

مهم‌ترین خاصیت نسبت ناهمساز چهارتایی‌ها، ناوردا بودن آن نسبت به تصویر از یک کانون روی خط دیگر است:

$$(B_۱B_۲, B_۳B_۴) = (C_۱C_۲, C_۳C_۴).$$



روابط زیر را می‌توان با اندکی محاسبه از تعریف نسبت ناهمساز به دست آورد: (B_iها نقاطی هم‌خط هستند.)

رابطه‌ی (۱) $$(B_۱B_۲, B_۳B_۴) = (B_۳B_۴, B_۱, B_۲)$$

رابطه‌ی (۲) $$(B_۱B_۴, B_۳B_۲) = \frac{(B_۱B_۲, B_۳B_۴)}{(B_۱B_۲, B_۳B_۴) - ۱}$$

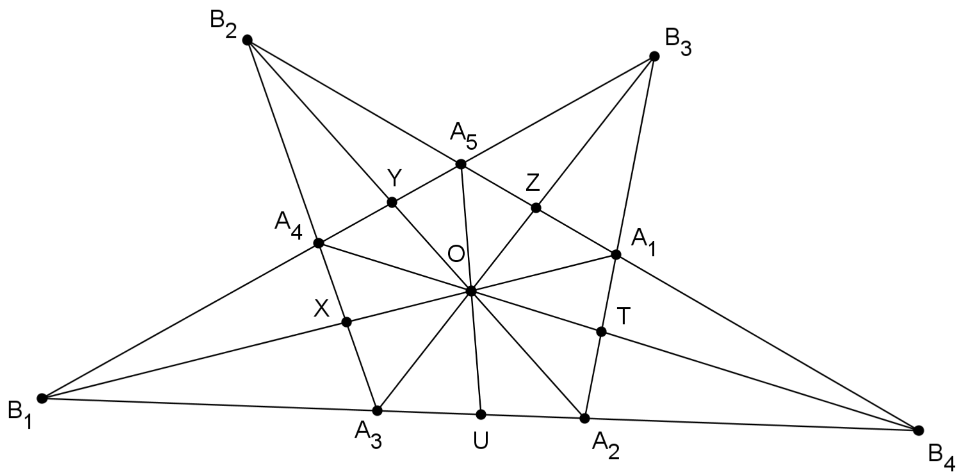
رابطه‌ی (۳) $$(B_۱B_۲, B_۳B_۴)(B_۱B_۲, B_۴B_۵) = (B_۱B_۲, B_۳B_۵)$$

نکته ۲. اگر $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ دو نقطه با مختصات گویا در صفحه باشند، معادله‌ی خط گذرنده از آن‌ها به صورت:

$$\frac{y - y_۱}{x - x_۱} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

است. در نتیجه معادله‌ی این خط را نیز می‌توان با اعداد گویا بیان کرد؛ به چنین خطی «گویا» می‌گوییم. به راحتی می‌توان دید که تقاطع دو خط گویا، نقطه‌ای گویاست و نسبت فواصل نقاط گویا روی یک خط، عددی گویاست. علی‌الخصوص نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ی گویای هم‌خط، گویاست.

حال به سراغ اثبات حکم مسأله با استفاده از برهان خلف می‌رویم. فرض کنید $A_۱ \ldots A_۵$ یک پنج‌ضلعی گویا باشد که برای آن، چهار تا از خطوط A_iB_i مثل $A_۱B_۱, \ldots, A_۴B_۴$ در نقطه‌ای مانند O هم‌رسند. با توجه به گویا بودن A_iها، خطوط واصل آن‌ها و تقاطع‌های این خطوط همگی گویا هستند. در نتیجه همه‌ی نقاطی که در شکل نام‌گذاری شده‌اند و همه‌ی نسبت‌های ناهمسازی که با آن‌ها ساخته می‌شوند، گویا هستند.



نسبت ناهمساز (B_1A_3, A_2B_4) را λ می‌نامیم. با توجه به شکل بالا داریم:

$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (B_1A_4, YA_5) \quad (\text{تصویر از } B_2)$$
$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (B_1B_4, A_2U) \quad (\text{تصویر از } O)$$

همین‌طور:

$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (A_5Z, A_1B_4) \quad (\text{تصویر از } B_3)$$
$$= (UA_3, B_1B_4) \quad (\text{تصویر از } O)$$
$$= (B_1B_4, UA_3) \quad (\text{رابطه‌ی } (1))$$

درنتیجه با توجه به روابط (۲) و (۳):

$$\lambda^2 = (B_1B_4, A_2U)(B_1B_4, UA_3) = (B_1B_4, A_2A_3) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

پس λ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $X^2 = X + 1$ است که ریشه‌ی گویا ندارد! پس هم‌رسی چهارتا از خطوط A_iB_i با گویا بودن پنج‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5$ سازگار نیست.

به نام او

آزمون خلاقیت

---

۱. تابع صعودی از چی به چی!

در هر کدام از قسمت‌های (الف) تا (ت) مشخص کنید که آیا تابعی دوسویی (یک به یک و پوشا) و صعودی بین دو مجموعهٔ A و B معرفی‌شده وجود دارد یا خیر.

الف. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{۲}\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{۳}\}$.

ب. $A = \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{Q} \cup \{\pi\}$.

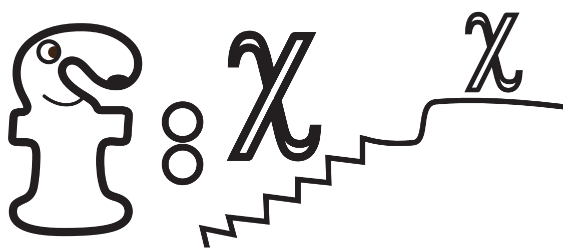
برای قسمت‌های (پ) و (ت)، روی نقاط صفحه ($\mathbb{R}^۲$)ترتیب را اینگونه تعریف می‌کنیم که برای مقایسهٔ دو زوج مرتب ابتدا مؤلفهٔ اول آن‌ها را مقایسه می‌کنیم، اگر این عدد برای یکی بزرگ‌تر بود، می‌گوییم آن زوج مرتب بزرگ‌تر است و اگر این مؤلفه در هر دو برابر بود، زوج مرتبی که مؤلفهٔ دوم بیش‌تری دارد بزرگ‌تر می‌گیریم (به این ترتیب، ترتیب لغت‌نامه‌ای می‌گویند).

$$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a < c) \text{ یا } (a = c \text{ و } b < d)$$

با در نظر گرفتن ترتیب لغتنامه‌ای، می‌توانیم تابع صعودی بین زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^۲$ و مجموعه‌های دیگر دارای ترتیب تعریف کنیم. حال با این توضیحات به دو قسمت پیش رو پاسخ دهید.

پ. $A = \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{R}^۲$.

ت. $A = X \times (X \cup \{۰\})$ و $B = (X \cup \{۰\}) \times X$ که در این‌جا $X = \{۲^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

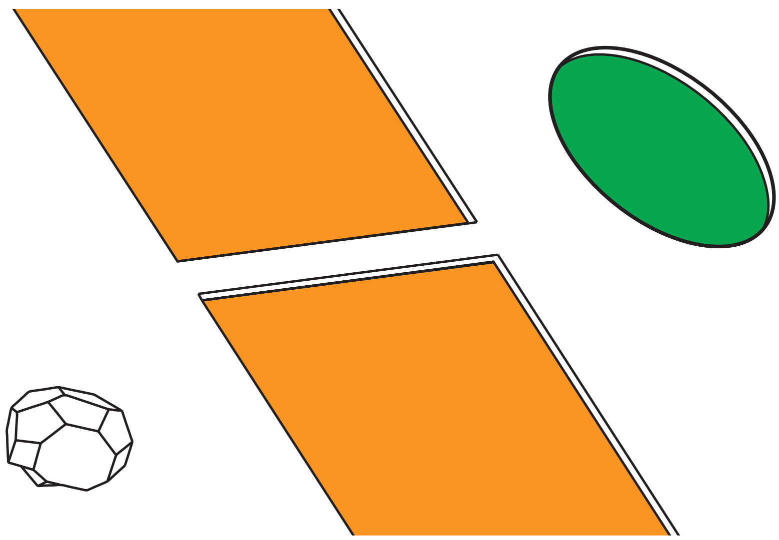


ث. A و B دو زیرمجموعه از اعداد حقیقی هستند که تابعی پوشا و صعودی از A به B و همین طور تابعی پوشا و صعودی از B به A وجود دارند. آیا همواره می‌توان تابعی یک به یک، پوشا و صعودی بین این دو مجموعه پیدا کرد؟

۲. چالش چاله!

زمینی کاملا صاف در نظر بگیرید که روی آن یک دره به شکل نوار نامتناهی و با عرض دل‌خواه ω قرار دارد. یک چندوجهی به قطر d [1] در یک سمت دره و یک چاله با شعاع d در سمت دیگر دره قرار دارند. می‌خواهیم چندوجهی را بغلتانیم و درون چاله بیندازیم به طوری که در طی مسیر **چندوجهی و زمین همواره در حداقل یک نقطه اشتراک داشته باشند** (خلاف دنیای واقع چندوجهی حتی اگر در یک نقطه با زمین تماس داشته باشد به دره سقوط نمی‌کند.) برای این کار پلی به شکل مستطیل با عرض $\frac{d}{۱۰}$ روی دره احداث کرده‌ایم. ثابت کنید با شرایط گفته شده می‌توان چندوجهی را درون چاله انداخت.

(به اثبات برای حالت خاص $\omega = ۰$ (اصلا دره وجود نداشته باشد) نیز نمرهٔ قابل توجهی تعلق می‌گیرد.)



[1] در یک چندوجهی قطر بیشترین فاصله میان نقاط چندوجهی است.

۳. باقی‌ماندهٔ ایرانی!

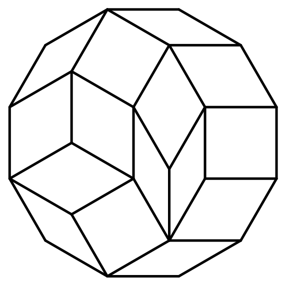
الف. n عدد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول مانند $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ و هم‌چنین اعداد طبیعی دل‌خواه $r_۱, r_۲, \ldots, r_n$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید عددی طبیعی مانند x، $۱ \leq x \leq ۳^n$، وجود دارد که در دستگاه نامعادلات هم‌نهشتی زیر صدق کند:

$$\begin{gathered} x \overset{d_۱}{\not\equiv} r_۱ \\ x \overset{d_۲}{\not\equiv} r_۲ \\ \vdots \\ x \overset{d_n}{\not\equiv} r_n \end{gathered}$$

ب. برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$، ثابت کنید عددی مانند N وجود دارد که برای هر عدد طبیعی $n > N$ و اعداد طبیعی $d_۱, \ldots, d_n$ و $r_۱, \ldots, r_n$ که d_iها دو به دو نسبت به هم اولند، دستگاه بالا جوابی طبیعی مانند x داشته‌باشد که $۱ \leq x \leq (۲ + \varepsilon)^n$.

۴. چهار لوزا!

یک $۲n$ ضلعی منتظم را مانند P در نظر بگیرید. منظور از یک لوزی‌بندی P، قرار دادن تعدادی لوزی در P است طوری که درون P را بپوشانند، درونشان از هم مجزا باشد و هیچ رأسی از لوزی‌ها درون یک ضلع از لوزی‌های دیگر یا درون یک ضلع از P قرار نگیرد.



۱. ثابت کنید تعداد لوزی‌ها تابعی از n است. مقدار این تابع را بیابید. همچنین تعداد رئوس و ضلع‌ها را برحسب n بیان کنید.

۲. آیا درست است که همواره ضلعی یافت می شود که با حذف لوزی‌هایی که ضلعی موازی آن دارند P تبدیل به یک چندضلعی با تعداد اضلاع کمتر می شود؟

۳. آیا درست است که هر دو لوزی‌بندی با چند مرحله از گام زیر به هم تبدیل می‌شوند؟

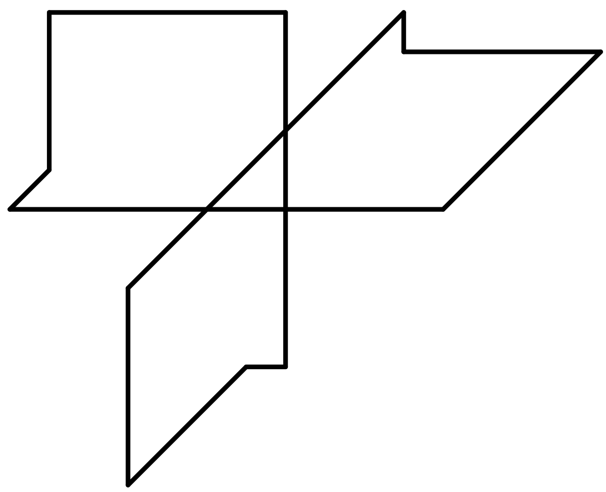
در هر گام می توانیم رأسی که فقط سه لوزی شامل آن هستند را به همراه لوزی‌های آن حذف کنیم و شش ضلعی خالی حاصل را به طریق دیگری لوزی‌بندی کنیم.

۴. اگر $f(n)$ تعداد روش‌های لوزی‌بندی کردن یک $۲n$ ضلعی منتظم باشد ثابت کنید

$$\prod_{k=۱}^{n-۱}\left(\binom{k}{۲}+۱\right) \leq f(n) \leq \prod_{k=۱}^{n-۱} k^{n-k}$$

۵. چندضلعی کذایی!

یک چندضلعی فضایی (چندضلعی در فضای سه‌بعدی) را **شبکه‌ای** گوییم هرگاه اضلاع آن موازی محورهای مختصات باشد.
الف. بین هر دو ضلع مجاور از هر چندضلعی شبکه‌ای یک زاویهٔ قائمه ایجاد می‌شود که این زاویه یا در صفحه‌ای موازی xy قرار دارد یا yz و یا zx. ثابت کنید تعداد زوایا از این سه نوع، زوجیت یک‌سان دارند.
ب. یک چندضلعی شبکه‌ای را **محاطی** گوییم، هرگاه نقطه‌ای در صفحه موجود باشد که از همهٔ رئوس آن به یک فاصله باشد. ثابت کنید هر شش‌ضلعی شبکه‌ای که همه رئوس آن هم‌صفحه نباشند محاطی است.
پ. آیا یک ۲۰۱۴ ضلعی فضایی شبکه‌ای بدون رأس تکراری وجود دارد که یک صفحه همهٔ اضلاع آن را در یک نقطهٔ درونی قطع کند؟
ت. a, b, c سه عدد طبیعی بزرگتر از یک هستند. ثابت کنید سه نقطه در صفحه با فواصل صحیح a، b و c یافت می‌شود، اگر و تنها اگر یک چندضلعی شبکه‌ای موجود باشد طوری که تعداد اضلاع آن در سه راستای مختلف برابر a، b و c باشد.



۶. چند جمله‌ای از یک تابع!

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ چندجمله‌ای تکین از درجه‌ی فرد بزرگ‌تر از یک است. همچنین $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ تابعی است که برای هر x حقیقی داریم $p(f(x)) = f(p(x))$.

۱. ثابت کنید برد f مجموعه‌ای متناهی است.

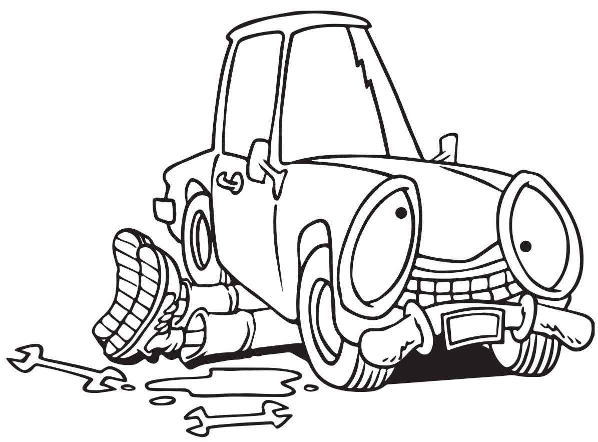
۲. اگر f تابعی ناثابت باشد، نشان دهید معادله‌ی $p(x) = x$ حداقل دو جواب حقیقی متمایز دارد.

۳. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n > 1$، تابع f با برد n عضوی و چندجمله‌ای $p(x)$ پیدا می‌شوند که در همه‌ی شرایط مسئله صدق کنند.

۷. تعمیر ماشین!

همان‌گونه که شاید بدانید، ماشین M دارای یک ورودی و یک خروجی است که از ورودی آن می‌توان حروف الفبای انگلیسی (مجموعه‌ی I) را وارد کرد و در خروجی آن در هر لحظه یکی از رنگ‌های $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ نمایش داده می‌شود. این ماشین در هر لحظه وضعیتی دارد که یکی از اعضای مجموعه‌ی متناهی S است و وارد کردن هر حرف در ورودی آن، وضعیت ماشین را تحت قاعده‌ای از پیش تعیین شده تغییر می‌دهد. خروجی ماشین هم تابعی پوشا از وضعیت آن است. ما فقط خروجی ماشین را می‌بینیم و به طور مستقیم از وضعیت آن اطلاعی نداریم.

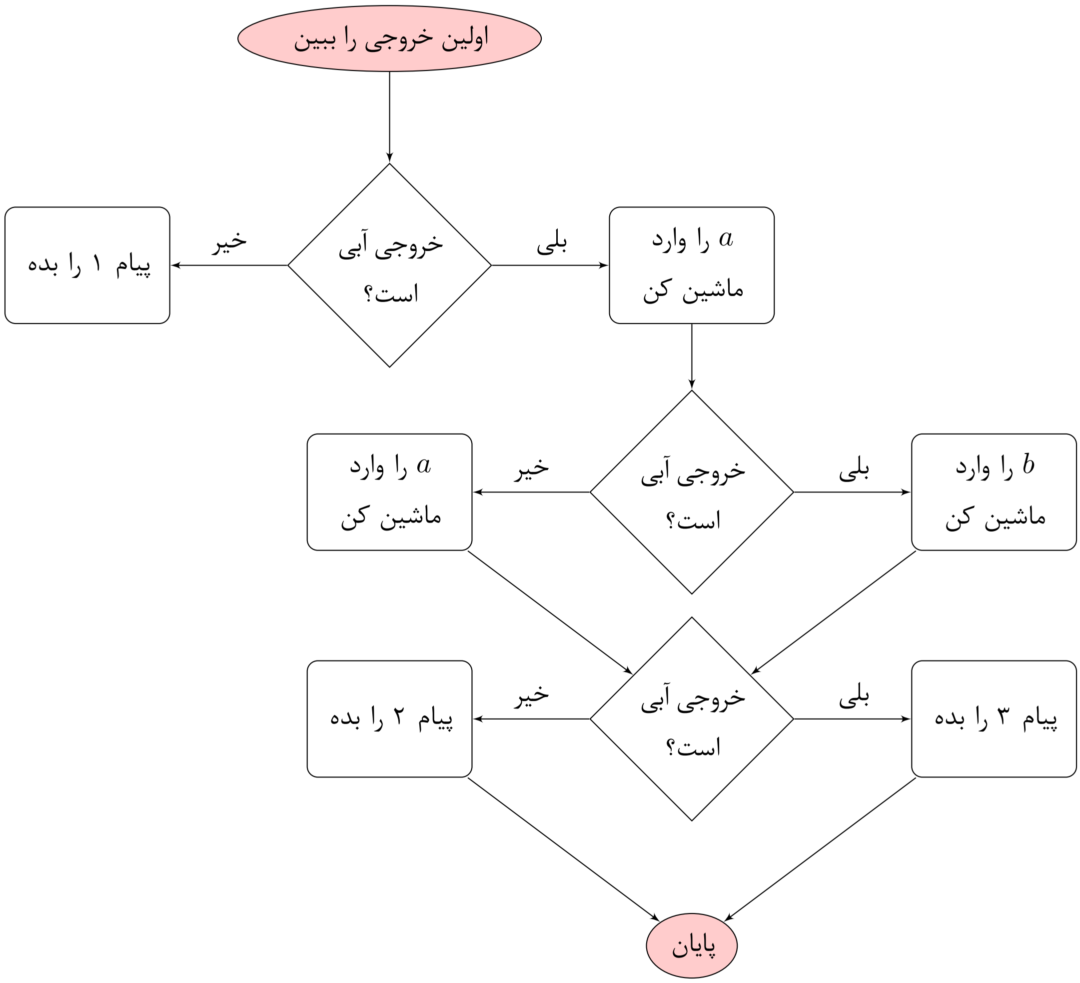
به بیانی دیگر $M = (S, I, C, t, o)$ که S, I, C مجموعه‌هایی متناهی و $t : S \times I \to S$ و $o : S \to C$ دو تابع هستند. t قاعده‌ی تغییر وضعیت و o تابعی پوشاست که خروجی را بر حسب وضعیت تعیین می‌کند. همیشه فرض می‌کنیم که وضعیت‌های متفاوت M با وارد کردن یک کلمه (دنباله‌ای از حروف) در ورودی و مشاهده‌ی خروجی، از یک‌دیگر قابل تفکیک هستند. (یعنی برای هر دو وضعیت s_i و s_j، کلمه‌ای پیدا می‌شود که با دادن آن کلمه به ماشین، در نهایت خروجی متمایزی تولید شود.)



این را هم احتمالاً می‌دانید که یک دستورالعمل برای ماشین M، الگوریتمی برای کار کردن با M براساس خروجی‌های آن است که در نهایت به یک پیام منجر می‌شود. به عبارت دقیق‌تر در هر مرحله از دستورالعمل، یکی از فرمان‌های وارد کردن یک حرف در ورودی و یا یک پیام (که به معنای پایان دستورالعمل است و ممکن است حاوی اطلاعاتی برای کاربر باشد)، بر اساس خروجی‌هایی که تا این مرحله مشاهده شده است به کاربر داده می‌شود. طول دستورالعمل بیش‌ترین تعداد حروفی است که در همه‌ی اجراهای ممکن آن وارد می‌شود.

مثلاً اگر $I = \{a, b\}$ و $C = \{\mathrm{red}, \mathrm{blue}\}$، شکل صفحه‌ی بعد یک دستورالعمل به طول دو است.

در این دستورالعمل طی اجراهای مختلف و بسته به شرایط، ممکن است کلمه‌های a، aa یا ab به عنوان ورودی به ماشین داده شود و چون طول این کلمات حداکثر ۲ است، طول دستورالعمل را ۲ می‌گیریم.



۱. ماشین M، n وضعیت و p رنگ خروجی دارد. نشان دهید برای هر دو وضعیت متفاوت M، یک کلمه به طول حداکثر $n-p$ وجود دارد که با وارد کردن آن در ورودی می‌توان دو خروجی متفاوت از این دو وضعیت گرفت. (بعد از وارد کردن هر حرف، وضعیت و در نتیجه خروجی ماشین بنابر قاعده‌ای مشخص تغییر می‌کند، پس وارد کردن یک کلمه از طول k در ورودی، یک دنباله به طول $k+۱$ (با احتساب خروجی اولیه) از خروجی‌ها به ما می‌دهد. البته در این سؤال می‌توان فقط آخرین خروجی را در نظر گرفت.)

۲. نشان دهید برای هر ماشین n-وضعیتی مانند M می‌توان یک دستورالعمل به طول حداکثر $n^۲$ طراحی کرد که انجام آن وضعیت نهایی دستگاه را (بر اساس خروجی‌ها) با شروع از هر وضعیت نامعلومی به کاربر اطلاع دهد. (یعنی به یک معنی ماشین را تعمیر کرد. چون با دانستن وضعیت ماشین، می‌دانیم برای گرفتن یک خروجی چه ورودی‌ای باید وارد کنیم و وقتی وضعیت ماشین گم شود به یک معنی خراب شده است!)

می‌توانید این مسئله را برای $\frac{n^۲}{۲}$ نیز حل کنید؟

۸. K_n [illegible]!

برای هر عدد صحیح نامنفی n، چندجمله‌ای $K_n(x_۱, x_۲, \dots . x_n)$ به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$K_۰ = ۱$$

$$K_۱(x_۱) = x_۱$$

$$K_n(x_۱, \dots, x_n) = x_n K_{n-۱}(x_۱, \dots, x_{n-۱}) + (x_n^۲ + x_{n-۱}^۲) K_{n-۲}(x_۱, \dots, x_{n-۲})$$

نشان دهید $K_n(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = K_n(x_n, \dots, x_۲, x_۱)$.

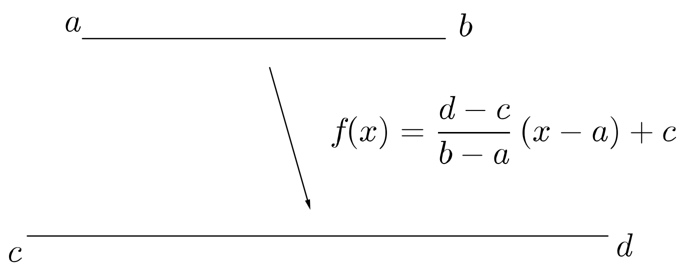
بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت

سؤال شماره ۱. تابع صعودی از چی به چی؟!

الف. بله، وجود دارد.

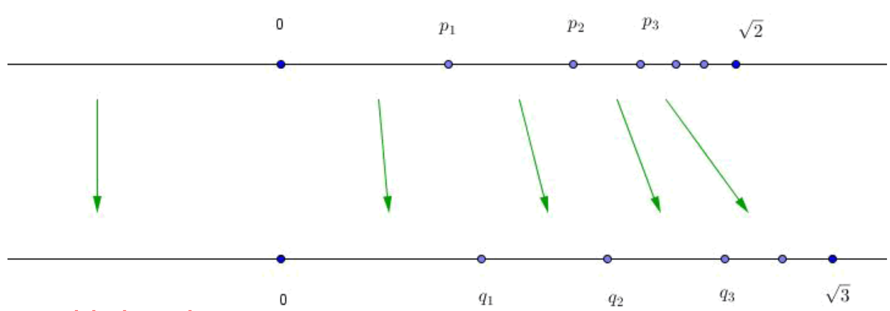
ابتدا توجه کنید که اگر a، b، c و d اعدادی گویا باشند نگاشتی یک‌به‌یک، پوشا و صعودی از بازه (a,b) به بازه (c,d) وجود دارد. کافی است تابع $\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ را در نظر بگیریم.



اکنون فرض کنید p_n دنباله‌ای صعودی از اعداد گویا باشد که به $\sqrt{2}$ میل می‌کند و q_n دنباله‌ای صعودی از اعداد گویا باشد که به $\sqrt{3}$ میل می‌کند. هم‌چنین فرض می‌کنیم $p_0 = 0$ و $q_0 = 0$. در این صورت تابع $f : A \to B$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \quad \text{اگر} \\ \frac{q_{i+1}-q_i}{p_{i+1}-p_i}(x-p_i)+q_i & x \in [p_i, p_{i+1}] \quad \text{اگر} \end{cases}$$

شکل زیر، نحوه تعریف f را نشان می‌دهد. واضح است که f یک به یک، پوشا و صعودی است.



ب. بله، وجود دارد.

هر دو مجموعه‌ی A و B شمارا هستند. پس می‌توان اعضای آن‌ها را شماره‌گذاری کرد:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

هم‌چنین دقت کنید که هر دو مجموعه A و B این خاصیت را دارند که بین هر دو عددی، بی‌نهایت عضو از A و بی‌نهایت عضو از B وجود دارد.

اکنون تابع f را در به طور استقرایی تعریف می‌کنیم. ابتدا تعریف می‌کنیم $f(a_1) = b_1$. فرض کنید در مرحله nام، تابع f را روی تعداد متناهی از اعضای A تعریف کرده‌ایم به طوری که صعودی و یک‌به‌یک است. اکنون دو عمل روی تابع f انجام می‌دهیم.

- **عمل الف.** فرض کنید k کوچک‌ترین اندیسی باشد که تا کنون $f(a_k)$ را تعریف نکرده‌ایم. و فرض کنید i هایی که $f(a_i)$ها را تعریف کرده‌ایم عبارت باشند از i_1، i_2 و $\dots$ و i_r. اعداد a_{i_1}، a_{i_2}، $\dots$، a_{i_r} را به ترتیب صعودی مرتب کنید و ببینید که a_k بین کدام دو تا از آن‌ها قرار می‌گیرد. فرض کنید مثلاً بین a_r و a_s قرار بگیرد. اکنون $f(a_r)$ و $f(a_s)$ را در نظر بگیرید. بنابر خاصیتی که گفته شد، بین این دو عدد، بی‌نهایت عضو از B وجود دارد. پس حتماً عضوی از B در این بین هست که تا کنون در برد f قرار نگرفته است. آن را q بنامید و تعریف کنید $f(a_k) = q$. اکنون به اعضای دامنه‌ی f یک عضو اضافه شد و توجه کنید که با توجه به نحوه‌ی تعریف $f(a_k)$، تابع f هم‌چنان صعودی است.

- **عمل ب.** اکنون عمل مشابهی برای وارون f انجام می‌دهیم. در واقع فرض کنید l کوچک‌ترین اندیسی باشد که تا کنون b_l در برد f قرار نگرفته است. و فرض کنید i هایی که b_i ها در برد f هستند عبارت باشند از i_1، i_2 و $\dots$ و i_r. اعداد b_{i_1}، b_{i_2}، $\dots$، b_{i_r} را به ترتیب صعودی مرتب کنید و ببینید که b_k بین کدام دو تا از آن‌ها قرار می‌گیرد. فرض کنید مثلاً بین b_r و b_s قرار بگیرد. اکنون $f^{-1}(b_r)$ و $f^{-1}(b_s)$ را در نظر بگیرید. بنابر خاصیتی که گفته شد، بین این دو عدد، بی‌نهایت عضو از A وجود دارد. پس حتماً عضوی از A در این بین هست که تا کنون f آن تعریف نشده است. آن را q بنامید و تعریف کنید $f(q) = b_k$ اکنون به تعداد اعضای دامنه‌ی f یک واحد اضافه شد و توجه کنید که با توجه به نحوه‌ی تعریف $f(q)$، تابع f هم‌چنان صعودی است.

پس دیدیم که با انجام عمل الف و عمل ب، دامنه تابع و برد تابع دو عضو بیش‌تر شد. مهم‌تر از آن این که با توجه به نحوه انتخاب اندیس k و اندیس l، هر بار اولین a_iای که در دامنه نیست به دامنه اضافه می‌شود و نیز اولین b_i ای که در برد نیست به برد اضافه می‌شود. بنابر این اگر انجام عمل‌های الف و ب را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، دامنه f کل A و برد f کل B خواهد شد و چون در تمام مراحل تابع یک‌به‌یک و صعودی باقی می‌ماند پس حکم ثابت می‌شود.

پ. خیر، وجود ندارد.

فرض کنید چنین تابعی وجود داشته باشد. زیرمجموعه‌ی C از B را به صورت $C = \{0\} \times \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. C دارای این خاصیت است که اگر x و y عضو آن باشند آن‌گاه هر zای عضو B که بین x و y باشد نیز عضو آن است. اکنون تعریف کنید

$$D = f^{-1}(C)$$

دقت کنید که D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. از آنجا که f صعودی، یک‌به‌یک و پوشا است پس D نیز باید همان خاصیت C را داشته باشد. یعنی اگر x و y عضو آن باشند آن‌گاه هر zای عضو $\mathbb{R}$ که بین x و y باشد نیز عضو آن است. چنین زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باید یک بازه باشد. ادعا می‌کنیم دو سر این بازه باید باز باشند. چون اگر یکی از سرهای بازه، بسته باشد آن‌گاه D عضو ماکزیمم یا مینیمم دارد در حالیکه C عضو ماکزیمم یا مینیمم ندارد. پس مجموعه‌ی D بازه‌ای به شکل (a,b) است. اکنون $x = f^{-1}(b)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $x = (x_1, x_2)$. از آنجا که b از همه اعضای D بزرگ‌تر است پس x نیز از همه اعضای C بزرگ‌تر است. پس باید $x_1 > 0$. ولی در این صورت $y = (x_1/2, 0)$ عضوی

از B است که از همه اعضای C بزرگ‌تر و از x کوچک‌تر است. پس $f^{-1}(y)$ نیز عضوی از $\mathbb{R}$ است که از همه اعضای D بزرگ‌تر و از bکوچک‌تر است، ولی چنین عددی وجود ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که تابع f وجود ندارد.

ت. خیر، وجود ندارد.

اگر x و y دو عضو از یک مجموعه مرتب باشند، گوییم y عضو بعد از x است اگر $x < y$ و هیچ عضوی بین x و y نباشد. عضو x از یک مجموعه مرتب $\mathcal{A}$ را «بن‌بست» می‌نامیم اگر هیچ عضو بعدی نداشته باشد.

فرض کنید تابع یک‌به‌یک، پوشا و صعودی f از A به B موجود باشد. در این صورت xیک عضو بن‌بست از A است اگر و تنها اگر $f(x)$یک عضو بن‌بست از B باشد.

اکنون دقت کنید که اعضای بن‌بست A عبارتند از

$$\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{2}),\dots\}$$

و اعضای بن‌بست B عبارتند از

$$\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{2}),\dots,(0,\tfrac{1}{2})\}$$

بنابراین $(0,\frac{1}{2})$یک عضو مینیمم در بین اعضای بن‌بست B است پس باید $f^{-1}((0,\frac{1}{2}))$ نیز یک عضو مینیمم در بین اعضای بن‌بست Aباشد حال‌آنکه اعضای بن‌بست Aدارای عضو مینیمم نیستند. این تناقض نشان می‌دهد که تابع f وجود ندارد.

ث. مجموعه‌ی $Y = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$A = Y \cup (1+Y) \cup (2+Y) \cup \cdots$$

$$B = A \cup \{-1\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم تابعی پوشا و صعودی از A به Bو هم‌چنین از B به A وجود دارد.

تابع $f : A \to B$ را به این صورت تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{اگر } x < 1 \\ x-1 & \text{اگر } x \geq 1 \end{cases}$$

به راحتی مشاهده می‌شود که f صعودی و پوشا است.

هم‌چنین تابع $g : B \to A$ را به این صورت تعریف کنید:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x = -1 \\ x & \text{اگر } x \neq -1 \end{cases}$$

به راحتی مشاهده می‌شود که g نیز صعودی و پوشا است.

اکنون نشان می‌دهیم تابعی یک‌به‌یک، پوشا و صعودی از A به B وجود ندارد. فرض کنید چنین تابعی وجود داشته باشد. از آنجا که 0 عضو مینیمم A است پس باید $f(x)$ نیز عضو مینیمم B باشد که -1 است. اما در B، 0 عضو بعد از -1 است پس باید $f^{-1}(0)$ نیز عضو بعد از 0 در Aباشد حال آن‌که در A 0 دارای عضو بعدی نیست. این تناقض نشان می‌دهد که f وجود ندارد.

سؤال شماره ۲. چالش چاله!

ادعا می‌کنیم می‌توان چندوجهی را به هر اندازه‌ی دل‌خواه در هر جهت دل‌خواه حرکت داد.

برای به حرکت در آوردن چندوجهی ابتدا یک خط راست از نقطه‌ای درون آن به نقطه‌ی مقصد بکشید. چون چندوجهی محدب است، این پاره‌خط حتماً یک وجه را قطع می‌کند. در جهت این پاره‌خط و به سمت مورد نظر چندوجهی را بغلتانید. حال اگر فاصله‌ی نزدیک‌ترین محل تماس چندوجهی با زمین تا نقطه‌ی مقصد را اندازه بگیریم از حالت اولیه کم‌تر شده است.

تنها باید نشان دهیم مقدار مثبت ثابتی وجود دارد که هر بار حداقل به آن اندازه به نقطه‌ی مقصد نزدیک می‌شویم، یعنی در واقع مقدار نزدیک شدن‌های ما یک دنباله‌ی هم‌گرا به صفر را تشکیل نمی‌دهد. اگر چنین اتفاقی بیفتد، در این صورت چندوجهی حول یک راس غلتیده است (یعنی وجه‌های متصل به یک راس را مرتباً طی کرده‌است) زیرا اگر در دو غلتیدن متوالی، ضلع‌های چندوجهی را طوری طی شود که رأس زاویه‌ی بین اضلاع اول و دوم و رأس زاویه بین اضلاع دوم و سوم متفاوت باشد حداقل مسیر طی شده در این دو غلتیدن به اندازه‌ی فاصله‌ی بین این دو راس است، در نتیجه دنباله‌ی مقادیر غلتیدن به صفر هم‌گرا نمی‌شود.

لم ادعا می‌کنیم غلتیدن حول یک راس تنها به اندازه‌ی تعداد وجوه متصل به آن امکان‌پذیر است.

اثبات. چندوجهی را حول یک راس باز کنید. در هر بار غلتاندن چندوجهی حول خط، مسیری را که این خط روی آن وجه‌ها را قطع می‌کند علامت گذاری کنید. چون چندوجهی در مسیر یک خط می‌غلتد بعد از باز کردن آن باید یک خط راست روی وجوه ببینیم. می‌دانیم در یک صفحه یک خط هر چندضلعی محدب را حداکثر یک بار قطع می‌کند. بنابراین چندوجهی در غلتیدن حول یک رأس حداکثر یک بار روی یک وجه فرود آمده است. □

با استفاده از این لم و شرطی که برای هم‌گرا بودن مسیر غلتیدن به دست آوردیم نتیجه می‌گیریم که طول طی شده توسط غلتیدن چندوجهی به این شکل هیچ‌گاه هم‌گرا نمی‌شود. سپس چندوجهی را به هر اندازه و در هر جهت که بخواهیم می‌توانیم حرکت دهیم.

برای کامل کردن حل مسئله‌ی اصلی، پاره‌خطی شکسته در صفحه در نظر می‌گیریم، که نقطه‌ی شروع حرکت را به نقطه‌ی ابتدایی پل، سپس نقطه‌ی ابتدایی پل را به نقطه‌ی انتهایی آن و در نهایت نقطه‌ی انتهایی پل را به نقطه‌ی وسط چاله متصل کند. طبق بالا می‌توان چندوجهی را روی این مسیر حرکت داد و چون همواره یک نقطه از چندوجهی با این پاره‌خط‌ها اشتراک دارد، چندوجهی به درون دره نمی‌افتد و از پل جان سالم به در می‌برد. وقتی که چندوجهی به نقطه‌ی نهایی برسد چون شعاع چاله به اندازه‌ی قطر چندوجهی است، حتماً دورترین نقطه از چندوجهی به مرکز چاله، درون آن قرار گرفته و در نتیجه چندوجهی به داخل چاله خواهد افتاد و چالش چاله را به سلامت پشت سر گذاشته‌ایم!

سؤال شماره ۳. باقی‌نمانده‌ی ایرانی!

توجه. باید این فرض به صورت سؤال اضافه شود که d_iها همه بزرگ‌تر از یک هستند.

الف. با توجه به اینکه d_iها بزرگ‌تر از ۱ و نسبت به هم اول هستند، از یک‌دیگر متمایزند. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت سؤال می‌توان فرض کرد $1 < d_1 < \cdots < d_n$. ابتدا مسأله را در حالت $d_1 > 2$ حل می‌کنیم و بعد حالات دیگر را از آن نتیجه می‌گیریم.

برای هر زیرمجموعه‌ی $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ از اعداد ۱ تا n، d_I را به صورت $d_{i_1} \cdots d_{i_k}$ تعریف می‌کنیم. از قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی می‌دانیم که معادلات هم‌نهشتی

$$x \overset{d_{i_1}}{\equiv} r_{i_1}, \ \ldots x \overset{d_{i_k}}{\equiv} r_{i_k}$$

تنها یک جواب به پیمانه‌ی d_I دارد. یکی از این جواب‌ها را با r_I نمایش می‌دهیم. (وقتی I تهی باشد، هیچ معادله‌ای نداریم و بنابراین همه‌ی اعداد صحیح جواب هستند. در این حالت می‌توان d_I و r_I را برابر ۱ تعریف کرد.) پس $x \overset{d_I}{\equiv} r_I$ معادل با دستگاه‌های هم‌نهشتی ذکرشده است.

حال فرض کنید M یک عدد مثبت دل‌خواه باشد. بنابر اصل شمول و عدم شمول تعداد جواب‌های طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی M برای دستگاه نامعادلات هم‌نهشتی

$$x \overset{d_1}{\not\equiv} r_1, \ \ldots \ , x \overset{d_n}{\not\equiv} r_n$$

برابر است با:

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |\{1 \le x \le M | x \overset{d_I}{\equiv} r_I\}|.$$

با یک استدلال ساده می‌توان نشان داد که تعداد جواب‌های هر معادله‌ی هم‌نهشتی به صورت $x \overset{d}{\equiv} r$ در بازه‌ی $[1, M]$ برابر با یکی از اعداد $\lfloor \frac{M}{d} \rfloor$ و یا $\lceil \frac{M}{d} \rceil$ است و در هر دو صورت اختلافش با $\frac{M}{d}$ کم‌تر از ۱ است. با توجه به این نکته عبارت بالا از مقدار زیر بیش‌تر است:

$$\begin{aligned}
(\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \frac{M}{d_I}) - 2^n &= M(1 - \frac{1}{d_1} - \cdots - \frac{1}{d_n} + \frac{1}{d_1 d_2} + \cdots) - 2^n \\
&= M(1 - \frac{1}{d_1}) \cdots (1 - \frac{1}{d_n}) - 2^n.
\end{aligned}$$

حال اگر $M = 3^n$ و همه‌ی d_iها حداقل برابر ۳ باشند، این عبارت حداقل برابر است با:

$$3^n (1 - \frac{1}{3})^n - 2^n = 0.$$

پس در این حالت نتیجه می‌شود که تعداد جواب‌های نامعادلات مسأله عددی مثبت است.

اما برای حالت $d_1 = 2$، بسته به زوجیت r_1 نامعادله‌ی اول زوجیت x را تعیین می‌کند. در هر دو صورت می‌توان از یکی از تغییر متغیرهای صحیح $x = 2y$ و یا $x = 2y - 1$ استفاده کرد. حال در بقیه‌ی نامعادلات به جای x عبارت معادل بر حسب y را جای‌گذاری کنید و با استفاده از وارون ضربی ۲ در هر یک از پیمانه‌ها، نامعادلات را بر حسب y بازنویسی کنید تا به مجموعه‌ی جدیدی از نامعادلات به صورت

$$y \overset{d_2}{\not\equiv} s_2, \ \ldots \ , y \overset{d_n}{\not\equiv} s_n$$

برسید. با توجه به این‌که $۳ \leq d_۲ < \cdots < d_n$ بنابر قسمت قبل این نامعادلات جوابی طبیعی و کم‌تر یا مساوی $۳^{n-۱}$ دارند و در نتیجه با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین x و yیک جواب کم‌تر یا مساوی $۲ \times ۳^{n-۱}$برای همه‌ی نامعادلات اصلی بر حسب xبه دست می‌آید و $۲ \times ۳^{n-۱} < ۳^n$!

ب. مانند قسمت قبل فرض می‌کنیم که d_iها به صورت صعودی مرتب شده‌اند. در نتیجه برای هر i، d_i از i بیش‌تر است. همین‌طور فرض کنید ϵ یک عدد مثبت داده شده است. عدد aرا در بازه‌ی $(\frac{۲}{۲+\epsilon}, ۱)$انتخاب می‌کنیم. به وضوح عدد طبیعی $N_۱$ وجود دارد که $a < ۱ - \frac{۱}{N_۱}$. از طرف دیگر با توجه به اینکه $\frac{(۲+\epsilon)a}{۲} > ۱$، عدد طبیعی $N_۲$ وجود دارد که

$$\left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{N_۲} > ۲^{N_۱}.$$

N را برابر با $N_۱ + N_۲$تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم برای هر $N < n$دستگاه نامعادلات هم‌نهشتی مسأله جوابی حداکثر برابر $(۲+\epsilon)^n$ دارد.

با توجه به قسمت قبل می‌دانیم که تعداد جواب‌های این نامعادلات در بازه‌ی $[۱, (۲+\epsilon)^n]$ بیش‌تر از عبارت زیر است:

$$(۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{d_۱})\cdots(۱-\frac{۱}{d_n}) - ۲^n.$$

اما برای $n > N$ داریم:

$$\begin{aligned}
(۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{d_۱})\cdots(۱-\frac{۱}{d_n}) &\geq (۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{۲})\cdots(۱-\frac{۱}{n+۱}) \\
&\geq (۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{۲})^{N_۱}(۱-\frac{۱}{N_۱})^{n-N_۱} \\
&> (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱} a^{n-N_۱} \\
&= (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱} \left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n-N_۱} \left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{n-N_۱}.
\end{aligned}$$

توجه کنید که $\frac{۲}{۲+\epsilon} < ۱$پس با بیش‌تر کردن توانش کم‌تر می‌شود و از طرف دیگر $\frac{(۲+\epsilon)a}{۲} > ۱$؛ پس با کم‌تر کردن توانش کم‌تر می‌شود. پس با استفاده از این نکات و $n - N_۱ > N_۲$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}
(۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱} \left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n-N_۱} \left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{n-N_۱} &> (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱} \left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n} \left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{N_۲} \\
&> (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱} \left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n} ۲^{N_۱} \\
&= ۲^n.
\end{aligned}$$

پس در نهایت نتیجه می‌گیریم که:

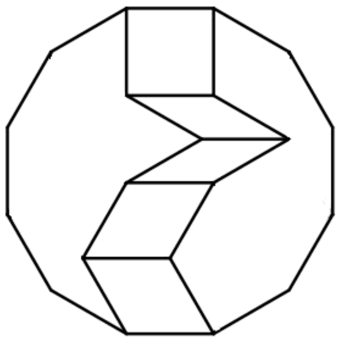
$$(۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{d_۱})\cdots(۱-\frac{۱}{d_n}) - ۲^n > ۰$$

و ادعای ما ثابت می‌شود.

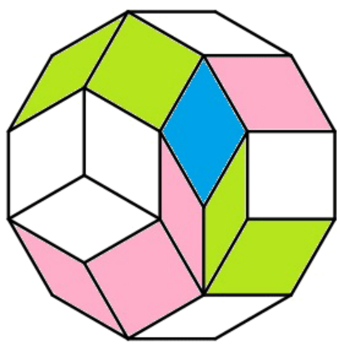
سؤال شماره ۴. چهار لوزا!

مسئله را برای یک $2n$ ضلعی محدب P که اضلاعش برابر و اضلاع روبه‌رویش موازی باشند اثبات می‌کنیم. این تعمیم برای استفاده از استقرا در قسمت سوم مسئله مهم است.

یک لوزی‌بندی دل‌خواه از P و یک لوزی دل‌خواه از این لوزی‌بندی را در نظر بگیرید. فرض کنید که دو ضلع موازی از این لوزی با محور x موازی باشند. در این صورت می‌توان این لوزی را از بالا و پایین با لوزی‌هایی که دو ضلع موازی محور x دارند، ادامه داد تا در نهایت از هر دو سمت به یک از اضلاع P برخورد کنیم. با توجه به این فرض که رأس‌های لوزی‌های لوزی‌بندی نمی‌توانند شامل هیچ نقطه‌ی درونی از اضلاع P باشند، نتیجه می‌گیریم که هر ضلع لوزی موازی و مساوی با یکی از اضلاع P است.



حال اگر دو ضلع موازی از P مانند a و a' را در نظر بگیریم، شبیه به استدلال بالا می‌توان مسیرهایی از لوزی‌هایی با اضلاع موازی این دو ضلع یافت که آن‌ها را به هم متصل کنند. به علاوه از آن‌جا که هر لوزی در این مسیر را تنها توسط یک لوزی می‌توان ادامه داد، مسیری یگانه مابین a و a' وجود دارد. پس هر لوزی محل تقاطع دو مسیر از اضلاع روبه‌رو خواهد بود. برای مثال در شکل زیر لوزی آبی‌رنگ محل تقاطع مسیر سبزرنگ و صورتی رنگ است. می‌دانیم که تعداد این مسیرها برابر n تا است و بنابراین $\binom{n}{2}$ لوزی در لوزی‌بندی وجود دارد.



محاسبه‌ی تعداد یال‌ها نتیجه‌ی یک دوگونه‌شماری ساده است.
اگر همه‌ی اضلاع لوزی‌ها را بشماریم، از یک سو این تعداد برابر $4\binom{n}{2}$ و از سوی دیگر برابر $2E + 2n$ است که E نمایان‌گر تعداد اضلاع درونی لوزی‌ها است. پس

$$\text{تعداد کل اضلاع} = E + 2n = n + 2\binom{n}{2} = n + (n^2 - n) = n^2$$

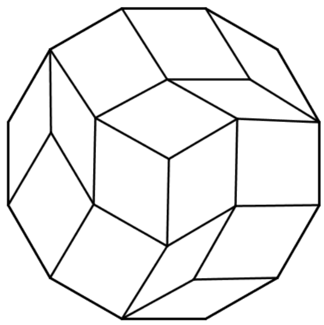
برای تعداد رأس‌ها هم با توجه به فرمول در مورد گراف‌های مسطح داریم:

$$\text{تعداد ناحیه‌ها} - \text{تعداد یال‌ها} + \text{تعداد رأس‌ها} = ۲$$

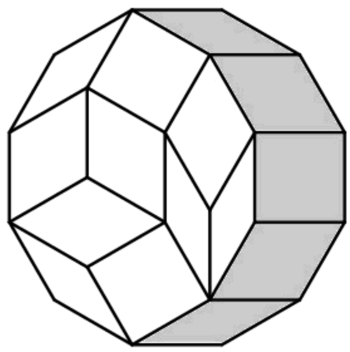
یعنی

$$\text{تعداد رأس‌ها} + n^۲ - \left(\binom{n}{۲}+۱\right) = ۲ \Rightarrow \text{تعداد رأس‌ها} = \binom{n+۱}{۲}+۱$$

۲. این گزاره درست نیست. شکل زیر مثال نقض این ادعا را نمایش می‌دهد.



۳. با استقرا روی n مسئله را ثابت می‌کنیم. برای $n=۲$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $(۲n-۲)$-ضلعی‌ها درست باشد. اضلاع P را با $e_۱,\dots,e_{۲n}$ نام‌گذاری کنید. یک لوزی‌بندی از P را استاندارد می‌نامیم هرگاه مسیری که اضلاع $e_۱$ و $e_{n+۱}$ را به هم وصل می‌کند مجاور به اضلاع $e_۲,\dots,e_n$ باشد. در شکل زیر یک لوزی‌بندی استاندارد رسم شده است. در این جا اضلاع را با شروع از ضلع بالایی و در جهت ساعت‌گرد شماره‌گذاری کرده‌ایم.



در ادامه نشان می‌دهیم که با حرکت بیان‌شده در صورت سؤال می‌توان هر لوزی‌بندی دل‌خواه را به یک لوزی‌بندی استاندارد تبدیل کرد. در این صورت، اگر دو لوزی‌بندی دل‌خواه داشته باشیم، می‌توانیم هر دو را به دو لوزی‌بندی استاندارد تبدیل کنیم. سپس مسیر بین دو ضلع $e_۱$ و $e_{n+۱}$ (که در هر دو لوزی‌بندی مشترک است) را حذف می‌کنیم تا یک $(۲n-۲)$-ضلعی محدب P' ایجاد شود که اضلاع روبه‌رویش موازی و مساوی‌اند. سپس از فرض استقرا برای P' نتیجه می‌شود که می‌توان دو لوزی‌بندی را به هم تبدیل کرد (توجه کنید که حرکت مذکور برگشت‌پذیر است).

یک لوزی‌بندی دل‌خواه در نظر بگیرید و مسیر بین اضلاع $e_۱$ و $e_{n+۱}$ را C بنامید. اگر C مجاور به تمام اضلاع $e_۲,\dots,e_n$ باشد چیزی برای اثبات نداریم. در غیر این صورت، در ادامه با اعمال مذکور به لوزی‌بندی دیگری خواهیم رسید که تعداد لوزی‌های سمت راست C (بین C و اضلاع $e_۲,\dots,e_n$) کم‌تر شود. با تکرار این عمل ادعا ثابت می‌شود.

فرض کنید C مجاور به اضلاع $e_۱,\dots,e_{i-۱}$ باشد که $۲\leq i\leq n$ و مجاور به ضلع e_i نباشد. فرض کنید اولین ضلع بعدی مجاور به C ضلع $e_{j+۱}$ باشد $(j\leq n)$. به اضلاع e_i تا e_j و C یک $۲(j-i+۱)$-ضلعی Q محدود می‌شود که لوزی‌بندی

شده است (اما لزوماً محدب نیست). اضلاع دیگر Qرا به‌ترتیب $e'_i,\dots,e'_j$ بنامید (e'_i با e_i ام رأس مشترک دارد). کافی است ثابت کنیم یکی از رئوس Q که بین اضلاع e'_i و e'_j است تنها مجاور به یک لوزی در Q است. در این صورت این رأس مجاور با سه لوزی در Pاست و اگر عمل مذکور را روی این رأس اعمال کنیم، در لوزی‌بندی حاصل تعداد لوزی‌های سمت راست Cکم‌تر می‌شود و هو المطلوب.

با توجه به این که مسیر شامل هر e_k با Cمتقاطع است، نتیجه می‌گیریم که هر یک از $e'_i,\dots,e'_j$ موازی و مساوی با یکی از $e_i,\dots,e_j$ است. لوزی شامل e'_k در Q را M_k بنامید. فرض کنید ضلع دیگر M_k موازی با e_{f_k} باشد و e'_k موازی با e_{g_k} باشد. توجه کنید که $f_k \neq g_k$ برای هر k. اگر به ازای یک k داشته باشیم $f_k = g_{k+1}$رأس مطلوب پیدا می‌شود. پس فرض کنید این طور نیست. توجه کنید که f_iباید کم‌تر از g_i باشد، زیرا درغیر این صورت M_i یا خارج از Q می‌افتد و یا e_i را قطع می‌کند (در حالت کلی، $f_k < g_k$ به این معنی است که ضلع دیگر M_k رو به پایین باشد). حال فرض کنید $f_k < g_k$ (استقرا روی k با شروع از $k = i$). با توجه به این که ضلع e'_{k+1} خارج M_kاست، نتیجه می‌گیریم $g_{k+1} \geq f_k$ و از فرض خلف به دست می‌آوریم $g_{k+1} > f_k$ هم‌چنین باید داشته باشیم $f_{k+1} < g_{k+1}$ وگرنه M_{k+1} یا خارج از Q می‌افتد و یا M_kرا قطع می‌کند (این‌جا از این که $f_k \neq g_{k+1}$استفاده کرده‌ایم، درغیر این صورت ممکن بود $M_k = M_{k+1}$و نتیجه‌ی مذکور برقرار نباشد). حال استقرا کامل می‌شود و نتیجه می‌گیریم برای هر k داریم $f_k < g_k$ و $g_{k+1} > f_k$. حال ضلعی را در نظر بگیرید که e'_{k+1} موازی e_i باشد. در نتیجه $g_{k+1} = i$. اما داریم $f_k \geq i$ و این با $g_{k+1} > f_k$ متناقض است.

به عنوان مرور، در پاراگراف قبل نتیجه گرفتیم kای یافت می‌شود که $f_k = g_{k+1}$. بنابراین یک رأس بین $e'_i,\dots,e'_j$ یافته‌ایم که تنها مجاور به یک لوزی در Qاست. همان‌طور که گفتیم، با اعمال عمل مذکور روی این رأس تعداد لوزی‌های سمت راست Cکم‌تر می‌شود. پس با تکرار کل این فرآیند Cبه مسیری تبدیل می‌شود که مجاور به ضلع‌های $e_2,\dots,e_n$ است. پس لوزی‌بندی به یک لوزی‌بندی استاندارد تبدیل شده‌است و همان‌طور که گفتیم مسئله ثابت می‌شود.

۴. با توجه به قسمت اول سؤال مسیری که ضلع بالایی و پایینی Pرا به هم متصل می‌کند $n-1$ لوزی دارد، چرا که باید دقیقاً یک لوزی با ضلع موازی هر راستای دیگری از اضلاع Pدر آن موجود باشد. حال ترتیب قرار گرفتن این لوزی‌ها می‌تواند به هر شکلی باشد، در واقع برای راستای دوم پایین‌ترین لوزی (فرض کرده‌ایم که مسیر دو ضلع موازی محور x را هم متصل کرده است.) $n-1$انتخاب، برای لوزی بعدی $n-2$ انتخاب و... داریم. بنابراین $(n-1)!$ حالت برای این مسیر وجود دارد. با حذف این مسیر و انتقال مناسب دو چندضلعی حاصل از حذف آن به یک $(2n-2)$ضلعی می‌رسیم (در صورتی که با حذف این مسیر P دو قسمت نشود هم باز با یک $(2n-2)$ضلعی روبه‌رو هستیم) که لوزی‌بندی شده است.

پس اگر تعداد روش‌های لوزی‌بندی $2n$ضلعی را با $f(n)$ نمایش دهیم:

$$f(n) \leq (n-1)!f(n-1)$$

در نتیجه:

$$f(n) \leq (n-1)! \times (n-2)! \times \cdots \times 1! = \prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k}$$

در ادامه سعی می‌کنیم کران پایین خواسته‌شده در صورت مسئله را ثابت کنیم.

در این‌جا منظورمان از یک «نیمه‌مسیر» مجموعه‌ای از اضلاع لوزی‌ها است که تشکیل خطی شکسته بدهند، دو ضلع مقابل چندضلعی را به هم متصل کنند و ضمناً برای هر راستا از اضلاع چندضلعی دقیقاً یک ضلع از لوزی‌ها موازی با آن راستا انتخاب شده باشد.

اگر یک $(2n-2)$ضلعی را از روی یک نیمه‌مسیر آن دو قسمت بکنیم و یکی از قسمت‌ها را با برداری هم طول با اضلاع $(2n-2)$ضلعی که موازی با هیچ‌کدام از اضلاع آن نیست انتقال دهیم و سپس فضای خالی بین نیمه‌مسیر و انتقال آن را با لوزی‌هایی پر کنیم، در این صورت به یک لوزی‌بندی از $2n$ضلعی خواهیم رسید. پس

$$\left(\text{تعداد نیمه‌مسیرها در } (2n-2)\text{ضلعی}\right) \times f(n-1) \le f(n)$$

از سوی دیگر به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که

$$k + \left(\text{نیمه‌مسیرها در } 2(k-1)\text{ضلعی}\right) \le \text{نیمه‌مسیرها در } 2k\text{ضلعی}$$

پس تعداد نیمه‌مسیرها در $2k$ضلعی حداقل $\binom{k}{2}+1$ است و لذا حکم مسئله به کمک رابطه‌ای که در بالا بیان شد ثابت می‌گردد.

سؤال شماره ۵. چندضلعی کذایی!

ابتدا نام‌گذاری‌های زیر را قرارداد می‌کنیم:

A	تعداد اضلاع در راستای محور x
B	تعداد اضلاع در راستای محور y
C	تعداد اضلاع در راستای محور z
X	تعداد زوایای موازی صفحه‌ی yz
Y	تعداد زوایای موازی صفحه‌ی zx
Z	تعداد زوایای موازی صفحه‌ی xy

الف. یک ضلع در راستای محور x در نظر بگیرید. دو رأس این ضلع دو زاویه تشکیل می‌دهند که یا موازی صفحه‌ی xy هستند یا موازی صفحه‌ی xz. هم‌چنین هر زاویه موازی صفحه xy یک ضلع در راستای محور y دارد و یک ضلع در راستای محور x. به طور مشابه برای زوایای راستاهای دیگر این احکام برقرار هستند.
پس مجموع تعداد زوایای موازی صفحه‌های xy و xz برابرست با دو برابر تعداد اضلاع در راستای محور x. یعنی داریم:

$$Y + Z = ۲A$$

و به طور مشابه:

$$X + Z = ۲B, \quad X + Y = ۲C$$

که از این سه معادله نتیجه می‌شود که هر سه عدد X، Y و Z زوجیت یک‌سانی دارند و بنابراین حکم این قسمت ثابت می‌شود.

ب. با توجه به قسمت (الف) یک ۶ ضلعی شبکه‌ای که همه‌ی رئوسش هم‌صفحه نیستند تنها دو شکل می‌تواند داشته باشد.

- موازی هر یک از سه صفحه‌ی مختصاتی دو زاویه داشته باشد.
- موازی یکی از صفحه‌های مختصاتی ۴ زاویه، موازی دیگری ۲ زاویه و موازی صفحه‌ی سوم زاویه‌ای نداشته باشد.

در حالت اول چندضلعی را به دو مستطیل که در یک ضلع مشترکند تفکیک کنید. از مرکز هر مستطیل خطی عمود بر صفحه‌ی گذرا از آن رسم کنید. صفحه‌ی گذرنده از مرکز دو مستطیل و وسط ضلع مشترک آن‌ها به صفحه‌ی هر دو مستطیل عمود است. پس دو خط عمود گذرا از مرکز مستطیل‌ها روی این صفحه قرار دارند و درنتیجه یک‌دیگر را قطع می‌کنند. محل تقاطع آن‌ها از همه‌ی رئوس ۶ضلعی شبکه‌ای به یک فاصله است.
ثابت می‌کنیم حالت دوم امکان‌پذیر نیست. طبق معادلات قسمت (الف)، دو برابر تعداد اضلاع در راستای یک محور برابر ۲ خواهد شد. یعنی در راستای یک محور فقط یک ضلع داریم. فرض کنید این محور، محور x باشد. اگر روی اضلاع ۶ضلعی شروع به حرکت کنیم با عبور از ضلع راستای محور x مقدار مختصه‌ی x افزایش یا کاهش می‌یابد و این مقدار دیگر تغییر نمی‌کند زیرا ضلع دیگری در این راستا نداریم، در نتیجه هیچ وقت به رأس ابتدایی نمی‌رسیم.

پ.بله؛ چنین چندضلعی‌ای وجود دارد.

فرض کنید رئوس آن را با $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲۰۱۴}$ نمایش دهیم. رئوس این چندضلعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_n = \begin{cases} (k, k, ۰) & n = ۲k + ۱, ۱ \leq n \leq ۱۰۰۷ \\ (k, k - ۱, ۰) & n = ۲k, ۱ \leq n \leq ۱۰۰۷ \\ (۵۰۳ - k, ۵۰۳ - k, ۱) & n = ۱۰۰۷ + ۲k + ۱, ۱۰۰۸ \leq n \leq ۲۰۱۴ \\ (۵۰۳ - k, ۵۰۳ - k + ۱, ۱) & n = ۱۰۰۷ + ۲k, ۱۰۰۸ \leq n \leq ۲۰۱۴ \end{cases}$$

می‌توان به راحتی دید که صفحه‌ی $۲x - ۲y + ۲z = ۱$ از وسط همه‌ی اضلاع چندضلعی می‌گذرد (کافی است نشان دهیم برای هر ضلع مقدار $۲x - ۲y + ۲z - ۱$ در یک سر آن مثبت و در سر دیگر آن منفی است).

تابتدا با استفاده از معادلات قسمت (الف) ثابت می‌کنیم تعداد زاویه‌ها در راستاهای مختلف اضلاع یک مثلث هستند.

$$X + Y + ۲Z = ۲A + ۲B$$

پس:

$$۲C + ۲Z = ۲A + ۲B, C + Z = A + B$$

و در نتیجه:

$$C < A + B$$

و شبیه به همین نکته در مورد راستاهای دیگر هم برقرار است.

در مورد عکس این قسمت، بدون کم‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که a بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد. می‌دانیم $b + c > a$ و تعریف می‌کنیم $n = \frac{b+c-a}{۲}$.

روی صفحه‌ی xy، $\frac{b+a-c}{۲}$ ضلع در راستای محورهای x و y می‌کشیم به این صورت که اضلاع یکی در میان موازی محور x و محور y باشند. سپس روی صفحه‌ی موازی xz به اندازه‌ی $\frac{c+a-b}{۲}$ تا از اضلاع در راستای محور x و z می‌کشیم (اگر $a + b + c$ فرد بود، به اندازه‌ی $\frac{c+a-b}{۲}$ از هر ضلع انتخاب می‌کنیم.)

در این‌جا فقط n تا از ضلع‌های y و z باقی می‌مانند. یکی در میان n تا از هر ضلع رسم می‌کنیم و توسط این صفحه، دو صفحه‌ی دیگر را به هم متصل می‌کنیم.

سؤال شماره ۶. چند جمله‌ای از یک تابع!

قبل از هرچیز نشان می‌دهیم که در چنین وضعیتی چندجمله‌ای p یک تابع پوشا از برد f به برد f تعریف می‌کند (برای راحتی نمادگذاری برد f را با $\mathcal{R}(f)$ نمایش می‌دهیم).

اگر $y \in \mathcal{R}(f)$ باشد، داریم:

$$y \in \mathcal{R}(f) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R};\ f(x_\circ) = y \Rightarrow p(y) = p(f(x_\circ)) = f(p(x_\circ)) \Rightarrow p(y) \in \mathcal{R}(f)$$

پس p تابعی از $\mathcal{R}(f)$ به خودش تعریف می‌کند. برای این نشان دهیم این تابع پوشا است، فرض کنید $y \in \mathcal{R}(f)$ عنصر دل‌خواهی باشد. در این صورت $x_\circ \in \mathbb{R}$ هست که $f(x_\circ) = y$ حال دقت کنید که هر چندجمله‌ای درجه فرد روی کل اعداد حقیقی پوشا است (مقدارش برای مقادیر بزرگ مثبت از هر مقداری بزرگ‌تر و برای مقادیر منفی بزرگ از هر مقدار کوچک‌تر می‌شود و با توجه به پیوستگی پوشا خواهد بود). پس می‌توان $z \in \mathbb{R}$ یافت که $p(z) = x_\circ$. در نتیجه:

$$y = f(x_\circ) = f(p(z)) = p(f(z))$$

پس عنصر $f(z)$ در $\mathcal{R}(f)$ تحت p به y تصویر می‌شود و بنابراین استدلال ما تمام می‌شود.

۱. فرض کنید برد f مجموعه‌ای نامتناهی باشد. با توجه به این که درجه‌ی p از یک بیش‌تر است چندجمله‌ی $p(x) - x$ از جایی به بعد تغییر علامت نمی‌دهد، یعنی می‌توان $N > \circ$ یافت که

$$x > N \Rightarrow p(x) > x, \quad x < -N \Rightarrow p(x) < x$$

فرض کنید برد f شامل بی‌نهایت عدد مثبت و بی‌نهایت عدد منفی باشد. در این صورت $x_\circ, y_\circ \in \mathcal{R}(f)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $y_\circ < -N < N < x_\circ$. دقت کنید تمام عناصر $\mathcal{R}(f) \cap [y_\circ, x_\circ]$ باید تصویر عنصری از $\mathcal{R}(f)$ تحت p باشند. اما این عنصر نمی‌تواند بزرگ‌تر از $x_\circ$ و یا کم‌تر از $y_\circ$ باشد، زیرا در حالت اول تصویر آن از خودش بزرگ‌تر و در حالت دوم تصویر آن از خودش کوچک‌تر خواهد بود. پس عناصر $\mathcal{R}(f) \cap [y_\circ, x_\circ]$ همگی تصویر خود این مجموعه تحت p هستند. حال توجه کنید که تصویر خود $x_\circ$ و $y_\circ$ هم در خارج از این مجموعه قرار می‌گیرد. پس با توجه به این که این مجموعه متناهی است (اعداد صحیح این بازه متناهی است)، لزوماً عنصری از آن وجود دارد که با اعمال تابع p روی عنصرهای $\mathcal{R}(f)$ پوشیده نمی‌شود که این با پوشا بودن تناقض دارد. با تغییری جزئی در استدلال بالا می‌توان حالت‌هایی که برد f تنها متناهی عدد مثبت یا متناهی عدد منفی را شامل می‌شود را هم رد کرد.

۲. چون p چندجمله‌ای درجه فرد با درجه‌ی بیش‌تر از یک است، $p(x) - x$ هم همین خواص دارد. پس حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد که آن را $x_\circ$ می‌نامیم. فرض کنید $p(x) = x$ جوابی به جز $x_\circ$ ندارد. در این صورت برای مقادیر x بیش‌تر از $x_\circ$، $p(x) > x$ و برای مقادیر کم‌تر از $x_\circ$، $p(x) < x$ خواهد بود. از سوی دیگر توجه کنید که اگر a ریشه‌ای از $p(x) = x$ باشد، $p(f(a)) = f(p(a)) = f(a)$ و این یعنی $f(a)$ هم ریشه‌ای از این معادله است. حال چون $x_\circ$ طبق فرض ما تنها ریشه است، نتیجه می‌گیریم $f(x_\circ) = x_\circ$. فرض کنید $x_{-m} < \cdots < x_{-1} < x_\circ < x_1 < \cdots < x_n$ اعضای برد f باشند. اگر $n > \circ$ باشد، $p(x_n) > x_n$ و این با این موضوع که تصویر اعضای برد f تحت p مجدداً در برد f هستند، تناقض دارد. به همین ترتیب اگر $m > \circ$ باشد، $p(x_{-m}) < x_{-m}$ و این مجدداً تناقض است. پس $m = n = \circ$ و بنابراین برد f تک عضوی است که در صورت سؤال فرض شده بود که چنین نیست.

۳. فرض کنید $z, y_1, \ldots, y_m$، $n = m + 1$ عدد صحیح متمایز دل‌خواه باشند. در این صورت به کمک درون‌یابی می‌توان

چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی یافت که

$$p(z) = z, \quad p(y_1) = y_2, p(y_2) = y_3, \dots, p(y_m) = y_{m+1}$$

(اندیس y_iها را به پیمانه‌ی m در نظر می‌گیریم.)

در صورت لزوم با جمع کردن چندجمله‌ای حاصل از درون‌یابی با $x^k(x-z)(x-y_1)\cdots(x-y_m)$ می‌توان فرض کرد چندجمله‌ای p با خاصیت بالا تکین و از درجه‌ی فرد است. حال برای هر عدد حقیقی x تابع f را صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- **حالت اول.** اگر برای عدد حقیقی x بتوان عدد صحیح نامنفی k یافت که $p^k(x) = y_i$ (منظور k بار ترکیب تابع f است و $f^0(x) = x$ فرض می‌شود) برای یک $1 \le i \le m$، $f(x)$ را برابر y_{i-k} تعریف می‌کنیم (اندیس‌ها به پیمانه‌ی m هستند). توجه کنید که این تعریف ابهامی ندارد، چرا که اگر k کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی باشد که $p^k(x)$ برابر یکی از y_iها مثلاً y_j باشد، برای هر s صحیح نامنفی $p^{k+s}(x) = y_{i+s}$ و چون $(i+s)-(k+s) = i-k$ است، فرقی نمی‌کند که از کدام یک برای تعریف f استفاده کنیم. (به صورت خاص با این تعریف $f(y_i) = y_i$.)

- **حالت دوم.** اگر برای عدد حقیقی x هیچ یک از $p^k(x)$ها برابر y_iها نشود، $f(x)$ را z تعریف می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که این نحوه‌ی تعریف خاصیت مسئله را دارد.

- اگر $f(x) = y_i$، یعنی عدد صحیح نامنفی k و $1 \le j \le m$ وجود دارد که $p^k(x) = y_j$ و $y_i = y_{j-k}$. حال $p^k(p(x)) = p(y_j) = y_{j+1}$ پس $f(p(x)) = y_{j+1-k} = y_{i+1} = p(y_i) = p(f(x))$.

- اگر هم $f(x) = z$ باشد، یعنی $p^k(x)$ها هیچ‌گاه برابر y_iها نمی‌شوند، پس $p^k(p(x)) = p^{k+1}(x)$ها هم هیچ‌گاه برابر y_iها نخواهند بود و بنابراین $f(p(x)) = z = p(z) = p(f(x))$.

به این ترتیب کار به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۷. تعمیر ماشین!

ابتدا چند قرارداد:
اولاً خروجی هر وضعیت را به رنگ آن تعبیر می‌کنیم و دو وضعیت با خروجی یک‌سان را «هم‌رنگ» می‌گوییم.
ثانیاً برای نمایش حروف ورودی از فونت خاصی استفاده می‌کنیم: $I = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots\}$.
ثالثاً یک دنباله از حروف ورودی (اعضای I) را یک کلمه می‌گوییم و وضعیتی که پس از وارد کردن کلمه‌ی w از وضعیت s به آن می‌رسیم را با s_w نشان می‌دهیم. مثلاً $s_\mathfrak{a} = t(s, \mathfrak{a})$ و اگر $w = \mathfrak{ab}$، $s_w = t(t(s, \mathfrak{a}), \mathfrak{b})$.

۱. از آنجایی که بنابر فرض تابع $o : S \to C$ پوشاست، $n - p$ عددی نامنفی است. حکم را با استقرا روی $n - p$ ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا، یعنی $n - p = ۰$ واضح است، چون در این حالت یک تناظر بین وضعیت‌ها و خروجی وجود دارد و در نتیجه بدون وارد کردن هیچ حرفی، می‌توان وضعیت ماشین را با مشاهده‌ی خروجی تشخیص داد.
برای اثبات گام استقرا، به لم زیر احتیاج داریم:
لم. اگر n بیش‌تر از p باشد، دو وضعیت هم‌رنگ s و t و عضوی مانند a از I وجود دارد که s_a و t_a هم‌رنگ نباشند.

اثبات. توجه به اینکه تعداد رنگ‌ها از تعداد وضعیت‌ها کم‌تر است، دو وضعیت هم‌رنگ متفاوت مانند $\tilde{s}$ و $\tilde{t}$ وجود دارد. بنابر فرض مسأله، کلمه‌ای یافت می‌شود که $\tilde{s}$ و $\tilde{t}$ را از نظر خروجی از هم تفکیک کند. w را کوتاهترین کلمه‌ی با این خاصیت در نظر بگیرید. بنابراین با شروع از $\tilde{s}$ و $\tilde{t}$ و وارد کردن هر کلمه‌ی کوچک‌تر از w، خروجی دستگاه یک‌سان است، ولی خروجی $\tilde{s}_w$ و $\tilde{t}_w$ متفاوت است. حال فرض کنید آخرین حرف w برابر a باشد، یعنی $w = \tilde{w}a$. (a یک متغیر است و نه یک عضو خاص از I، به قراردادمان در ابتدا توجه کنید!) پس اگر قرار دهیم $s = \tilde{s}_{\tilde{w}}$ و $t = \tilde{t}_{\tilde{w}}$، s و t هم‌رنگ هستند ولی $s_a = \tilde{s}_w$ و $t_a = \tilde{t}_w$ هم‌رنگ نیستند. □

در ادامه‌ی استقرا فرض کنید $n - p > ۰$ و حکم برای همه‌ی ماشین‌های با مقدار کم‌تر $n - p$ صادق است. بنابر لم دو وضعیت هم‌رنگ s و t (مثلاً به رنگ $c_۱$) و حرف a وجود دارد که s_a و t_a هم‌رنگ نباشند. ماشین $\tilde{M}$ را با همان وضعیت‌های M، ورودی‌های I و قاعده‌ی تغییر وضعیت در نظر بگیرید که فقط خروجی‌های آن - به صورتی که خواهد آمد - تغییر یافته است. دو عضو c' و c'' بیرون از C (مجموعه‌ی خروجی‌های M) در نظر بگیرید. خروجی وضعیت دل‌خواه u در $\tilde{M}$ را در صورتی که در M رنگی غیر از $c_۱$ داشته باشد، خروجی u در M بگیرید و اگر خروجی آن در M، $c_۱$ باشد، بسته به اینکه رنگ u_a در M برابر s_a باشد، c' و در غیر این‌صورت c'' تعریف کنید. با این تعریف، $\tilde{M}$ یک ماشین با n وضعیت و $p + ۱$ خروجی است که بنابر فرض استقرا حکم برای آن صادق است.
حال دو وضعیت u و v را در نظر بگیرید. می‌دانیم کلمه‌ی w به طول حداکثر $n - p - ۱$ وجود دارد که خروجی u_w و v_w در $\tilde{M}$ یک‌سان نباشد. اگر یکی از u_w و یا v_w به رنگی غیر از c' و c'' باشند، به وضوح خروجی آنها در M هم متفاوت است. در غیر این‌صورت می‌توان فرض کرد u_w به رنگ c' و v_w به رنگ c'' است. با توجه به تعریف رنگ‌ها در $\tilde{M}$، رنگ u_{wa} با s_a یک‌سان است و رنگ v_{wa} با رنگ s_a یک‌سان نیست. پس در هر صورت یکی از کلمات w و یا wa که طول حداکثر $n - p$ دارند، خروجی متفاوتی از u و v می‌گیرند.

۲. فرض کنید بدانیم که وضعیت کنونی ماشین در یک زیرمجموعه‌ی $n_۱$ عضوی $S_۱$ از مجموعه‌ی کل وضعیت‌ها (یعنی S) قرار دارد. در این‌صورت اگر $n_۱$ بیش‌تر از ۱ باشد، $S_۱$ شامل دو عضو مانند s و t است. بنابر قسمت قبل، کلمه‌ای مانند w با طول حداکثر n وجود دارد که s_w و t_w ناهم‌رنگ باشند. پس خروجی دستگاه پس از وارد کردن w با شروع از همه‌ی وضعیت‌های $S_۱$ یک‌سان نیست. حال فرض کنید با دانستن اینکه وضعیت در $S_۱$ است، w را وارد کنیم و خروجی نهایی مثلاً به رنگ c باشد. تمامی وضعیت‌های $S_۱$ که پس از وارد کردن w رنگ c را می‌دهند، زیرمجموعه‌ای اکید مانند

$T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ از S_1 هستند، پس وضعیت دستگاه پس از وارد کردن w یکی از وضعیت‌های $T_w = \{(t_1)_w, \ldots, (t_k)_w\}$ است که تعداد کم‌تری از S_1 عضو دارد.

با این ایده می‌توان یک دستورالعمل به طول حداکثر n^2 ارائه کرد که ماشین را از هر وضعیت نامشخصی به یک وضعیت معلوم برساند، به این ترتیب که در هر مرحله با وارد کردن یک کلمه به طول حداکثر n می‌توان تعداد احتمالاتی که برای وضعیت کنونی ماشین وجود دارد کم‌تر کرد و نهایتاً وضعیت ماشین را مشخص کرد.

برای اثبات کران $\frac{n^2}{2}$ می‌توان از لم زیر و اثباتی کاملاً مشابه با ایده‌ی بالا استفاده کرد.

لم. فرض کنید S_1 زیرمجموعه‌ای n_1 عضوی از وضعیت‌ها باشد. در این‌صورت کلمه‌ای با طول حداکثر $\max(n - n_1 - p + 2, 0)$ وجود دارد که خروجی اعضای S_1 بعد از وارد کردن آن، یک‌سان نیست.

اثبات. حالت خاص $n_1 = 2$ در لم بالا همان قسمت اول سؤال است. برای اثبات حالت کلی لم، مانند قسمت قبل روی $n - p$ استقرا بزنید و بررسی کنید که اگر $n_1 \geq n - p + 2$ چه اتفاقی می‌افتد. $\square$

سؤال شماره ۸. K_n و دیگر هیچ!

جدول $n\times 1$ای در نظربگیرید که در خانه‌های آن به ترتیب از چپ به راست x_1 تا x_n نوشته شده است.

x_1	x_2	$\cdots$		x_n

حال ما به هر کاشی‌کاری از این جدول $n\times 1$ با کاشی‌های 1×1 و 2×1 یک چندجمله‌ای از x_iها را به این صورت نسبت می‌دهیم که برای هر کاشی 2×1 جمع مربع متغیرهای خانه‌های آن و برای کاشی‌های 1×1 تنها متغیر خانه‌ی مربوط به آن را در نظر می‌گیریم. سپس چندجمله‌ای‌های مربوط به کاشی‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم تا چندجمله‌ای مربوط به آن کاشی‌کاری به دست بیاید. برای مثال در یک جدول 4×1 پنج روش زیر برای کاشی‌کاری وجود دارد.

$x_1\ \ x_2$	$x_3\ \ x_4$

$x_1\ \ x_2$	x_3	x_4

x_1	x_2	$x_3\ \ x_4$

x_1	$x_2\ \ x_3$	x_4

x_1	x_2	x_3	x_4

که به ترتیب چندجمله‌ای‌های $(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2)$، $(x_1^2+x_2^2)x_3x_4$، $x_1x_2(x_3^2+x_4^2)$، $x_1(x_2^2+x_3^2)x_4$ و $x_1x_2x_3x_4$ به این پنج کاشی‌کاری نسبت داده می‌شود. چندجمله‌ای مربوط به کاشی‌کاری جدول $n\times 1$ که به این روش به دست می‌آید را P_n می‌نامیم.

دقت کنید که وقتی $n=0,1$ تنها یک روش برای کاشی‌کاری داریم و در نتیجه $P_0=1$ و $P_1(x_1)=x_1$. پس برای مقادیر اولیه P_i و K_i یک‌سان هستند. حال ادعا می‌کنیم که P_i و K_i در یک رابطه‌ی بازگشتی صدق می‌کنند. دقت کنید که اگر در یک کاشی‌کاری جدول n خانه‌ای، خانه‌ی آخر به تنهایی یک کاشی باشد، جمله‌ی x_n در همه‌ی چندجمله‌ای‌های مربوط به کاشی‌کاری‌های $n-1$ تایی ضرب می‌شود و اگر این خانه در یک کاشی 2×1 قرار بگیرد، جمله‌ی $x_{n-1}^2+x_n^2$ برای این کاشی در همه‌ی چندجمله‌هایی مربوط به کاشی‌کاری‌های جدول $n-2$ تایی ضرب می‌شود. یعنی $P_n = x_nP_{n-1}+(x_n^2+x_{n-1}^2)P_{n-2}$. پس P_n و Q_n با هم همیشه برابر هستند.

اما دقت کنید که قرینه‌کردن هر کاشی‌کاری نسبت به محور تقارن جدول ما را به کاشی‌کاری جدید می‌رساند، که چندجمله‌ای مربوط به آن کاشی‌کاری جدید از جابه‌جا کردن x_i با x_{n-i} در چندجمله‌ای کاشی‌کاری اولیه به دست می‌آید. اما دقت کنید که با این قرینه کردن مجموعه‌ی همه‌ی کاشی‌کاری‌ها را تغییر نمی‌دهد و بنابراین باید چندجمله‌ای $P_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ با $P_n(x_n,\dots,x_2,x_1)$ یک‌سان باشد و بنابراین حکم مسئله به اثبات می‌رسد.