ریاضی عمومی (۱)

فصل اول اعداد مختلط

فصل دوم جبرخطی

فصل سوم هندسه تحلیلی

فصل چهارم حد و پیوستگی

فصل پنجم مشتق

فصل ششم انتگرال‌گیری و بحث‌های وابسته

فصل هفتم دنباله و سری

فصل اول

اعداد مختلط

هر عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ نوشته می‌شود که در آن x, y اعداد حقیقی بوده و $i = \sqrt{-1}$ به عدد موهومی محض، موسوم است.

$$i^2 = -1$$

قسمت حقیقی z : $\operatorname{Re} z = x$

قسمت موهومی z : $\operatorname{Im} z = y$

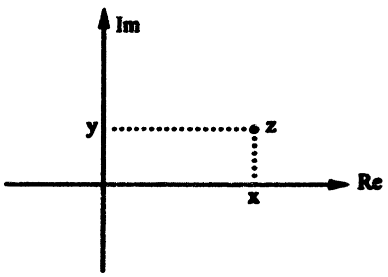
مدول یا اندازه z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مزدوج z : $\bar{z} = x - iy$

$\bar{z}$، مزدوج z می‌باشد که در واقع قرینه نقطه z نسبت به محور xها می‌باشد.

نکته: از نقطه نظر هندسی، هر عدد مختلط مانند $z = x + iy$ را می توان به منزله یک نقطه با مختصات (x, y) در صفحه دکارتی در نظر گرفت.

که طبیعی است در این دستگاه مختصات، محور xها، محور حقیقی و محور yها، محور موهومی می‌باشد.



نکته: حاصل‌ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن، حاصلی صرفاً حقیقی دارد زیرا اگر $z=a+ib$ فرض شود ملاحظه می‌شود که:

$$z\ .\ \overline{z}=(a+ib)\ (a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$$

بنابراین **با** توجه به حقیقت فوق، برای محاسبه حاصل تقسیم دو عدد مختلط کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و مسئله را ادامه دهیم. $(z_2=c+id\ ,\ z_1=a+ib)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\times\frac{c-id}{c-id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

مثال: فرض کنید n یک عدد حقیقی باشد، مقدار n چند انتخاب شود تا عدد مختلط $z=(n+1)+in$ بر روی دایره واحد $|z|=1$ واقع شود؟

حل: از آنجا که تمام نقاط z باید روی دایره $|z|=1$ واقع شوند داریم:

$$|z|=1\rightarrow|(n+1)+in|=1\Rightarrow\sqrt{(n+1)^2+n^2}=1\Rightarrow n^2+2n+1+n^2=1\Rightarrow 2n^2+2n=0\Rightarrow n=0\ ,\ -1$$

مثال: روابط $\begin{cases}\operatorname{Re} z=0\\ \operatorname{Im} z\geq 0\end{cases}$ بیانگر چه شکلی در صفحه مختلط می‌باشد؟

حل: از آنجائی‌که، $\operatorname{Re} z=0$ بیانگر محور yها و $\operatorname{Im} z\geq 0$ شرط $y\geq 0$ را بیان می‌کند. لذا روابط مذکور، توأماً نیم‌محور بالایی محور yها را توصیف می‌کند.

مثال: روابط $|z-1|=\operatorname{Im} z\quad,\quad |z-1|=\operatorname{Re} z$، چه اشکالی را در صفحه مختلط معرفی می‌کنند؟

حل: با فرض $z=x+iy$ داریم:

$$|z-1|=\operatorname{Im} z\Rightarrow|x-1+iy|=y\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=y\Rightarrow(x-1)^2+y^2=y^2\Rightarrow x=+1$$

از طرفی چون $|z-1|\geq 0$ است، لذا یک نیم‌خط به صورت $x=1\ ,\ y\geq 0$ موردنظر می‌باشد.

برای قسمت دوم داریم:

$$|z-1|=\operatorname{Re} z\rightarrow|x-1+iy|=x\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x$$

$$x^2+1-2x+y^2=x^2$$

پس داریم $x=\dfrac{1+y^2}{2}$ که بیانگر یک سهمی می‌باشد.

مثال: اگر z توصیف کننده یک متغیر مختلط باشد، ناحیه ای که با رابطه $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)>1$ توصیف می‌شود را مشخص کنید؟

حل:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}.\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\[2ex] \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)>1\Rightarrow\frac{-y}{x^2+y^2}>1\Rightarrow x^2+y^2+y<0\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

مرز ناحیه مورد نظر $\frac{1}{4}=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+x^2$ می‌باشد و همان‌طور که می‌دانیم دایره‌ای است به مرکز $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$:
با مشخص شدن مرز، کافی است وضعیت یک نقطه را مشخص کنیم به عنوان مثال نقطه $(0\,,1)$ در خارج دایـره قـرار دارد و شرط $\frac{-y}{x^2+y^2}>1$ را ارضا نمی کند. بنابراین، نقاط داخل دایره‌ای به مرکز $\left(0\,,\frac{-1}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$ ناحیه مورد نظر است.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه با رابطه $\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=1$ را مشخص کنید.

حل:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\cdot\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x^2+\left(y^2-1\right)+i\ \ (....)}{x^2+(y+1)^2}\right)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$=\frac{x^2+\left(y^2-1\right)}{x^2+(y+1)^2}=1\Rightarrow x^2+y^2-1=x^2+y^2+2y+1\Rightarrow y=-1$$

پس مکان هندسی این نقاط خط $y=-1$ است.

مثال: چنانچه z یک متغیر مختلط باشد $(z=x+iy)$، رابطه زیر توصیف‌کننده چه اشکال یا نواحی خواهد بود؟

$$z\bar{z}=\mathrm{Im}\left(z^2\right)$$
$$z\bar{z}=x^2+y^2$$
$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy\rightarrow \mathrm{Im}\left(z^2\right)=2xy$$
$$\Rightarrow x^2+y^2=2xy=x^2-2xy+y^2=0\Rightarrow (x-y)^2=0\Rightarrow x-y=0$$

به صورت خط $x=y$ خواهد بود.

نکته: اگر $z=x+iy$ فرض شود و $z_0=x_0+iy_0$ یک عدد مختلط معین باشد، به سادگی می‌توان نشان داد مکان هندسی نقاطی از صفحه که با رابطه $|z-z_0|=R$ مشخص می شود، دایره $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ می باشد، یعنی دایره ای به مرکز z_0 و شعاع R.

بنابراین می توان رابطه $|z-z_0|=R$ را به منزله مکان هندسی نقاطی از صفحه دانست، که فاصله شان تا نقطه z_0 عـدد ثابـت R مـی باشد. و بنابراین به سادگی می توان نتیجه گرفت که اگر $z_1\,,z_0$ دو عدد مختلط معین باشند آنگاه:

الف) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_0|+|z-z_1|=R$ توصیف می شود، یک بیضی به کانونهای $z_0\,,z_1$ است، با شرط:

$$|z_0-z_1|<R$$

ب) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_0|-|z-z_1|=R$ توصیف می شود یک هذلولی به کانونهای $z_0\,,z_1$ است، با شرط:

$$|z_0-z_1|>R$$

ج) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_0|=|z-z_1|$ توصیف می شود، عمود منصف پاره خطی است که $z_0\,,z_1$ را به هـم متصـل می‌کند.

نکته: خواص زیر در مجموعه اعداد مختلط برقرار است:

$\left(\overline{z_1 \pm z_2}\right) = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$	$\lvert z\rvert = \lvert\overline{z}\rvert$
$\left(\overline{z_1\ z_2}\right) = \overline{z}_1\ \overline{z}_2$	$\lvert z_1\ z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\ \lvert z_2\rvert$
$\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right) = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$	$\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$

مثال: هرگاه $z = a+ib$ فرض شود حاصل $\left|\dfrac{i\,z}{\overline{z}}\right|$ چه مقدار است؟

حل: با استفاده از خواص بالا داریم:

$$\left|\frac{i\,z}{\overline{z}}\right| = \frac{|i\,z|}{|\overline{z}|} = \frac{|i||z|}{|\overline{z}|} = \frac{|i||a+ib|}{|a-i\,b|} = \frac{1\times\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$$

مثال: اگر z_2 , z_1 جوابهای معادله $z^2+z+1=i$ باشد حاصل $|z_1 - z_2|$ چقدر است؟

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادله فوق، یک معادله درجه دوم است بنابراین داریم:

$$|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \left|\frac{\sqrt{(1)^2-(4)(1)(1-i)}}{1}\right| = \left|\sqrt{4i-3}\right| = \sqrt{|4i-3|} = \sqrt{5}$$

بیان منحنی در فرم پارامتری

یک منحنی در صفحه مختلط می‌تواند توسط یک رابطه، پارامتری نظیر $z(t) = x(t)+i\,y(t)$ معرفی شود و برای مشخص کردن آن باید پارامتر t را بین y , x حذف کرد.

مثال: منحنی تعریف شده با رابطه $z(t) = \sin^2 t + i\cos^2 t$:

الف) دایره‌ای با محیط 2π است.   ب) دایره‌ای با محیط π است.

ج) پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$ است.   د) پاره‌خطی به طول 1 است.

حل:

$$z(t) = \sin^2 t + i\cos^2 t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

لذا داریم: $x+y=1$ که بیانگر یک خط راست است و چون $x = \sin^2 t \geq 0 \quad , \quad y = \cos^2 t \geq 0$ پس قسمتی از این خط (پاره‌خط) که در ربع اول قرار گرفته مدنظر است و به سادگی می‌توان ملاحظه نمود که طول این پاره‌خط $\sqrt{2}$ است.

مثال: منحنی $z(t) = \cosh t + i\sinh t$ بیانگر چه منحنی‌ای می‌باشد؟

الف) قسمتی از یک بیضی   ب) یک بیضی   ج) قسمتی از یک هذلولی   ج) یک هذلولی

حل:

$$z(t) = \cosh t + i\sinh t \Rightarrow \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$$

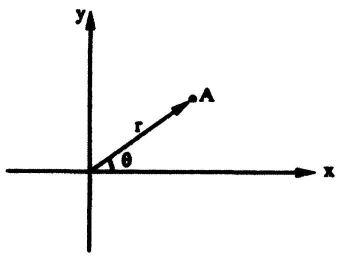
لذا طبق رابطه $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ داریم: $x^2-y^2=1$ که بیانگر یک هذلولی است و از آنجا که $x=\cosh t \geq 1$ لذا یکـی از شاخه‌های این هذلولی مدنظر است.

فرم قطبی اعداد مختلط:

همانطوری که می دانیم، برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه نیاز به دو مختصه داریم کـه در مختصـات دکـارتی ایـن دو مختصـه طول و عرض نقطه (x,y) می باشد، در دستگاه مختصات قطبی از دو مختصه r,θ مطابق شکل زیر استفاده می شود:

$OA=r$: طول شعاع حامل نقطه A

θ: زاویه شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور x ها



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

بنابراین، نقطه A در مختصات قطبی به صورت $A(r,\theta)$ نشان داده می‌شود.

در محاسبه θ از رابطه (I) باید به این نکته توجه داشته باشیم که تمام زوایایی که در π با هم اختلاف دارند تانژانت یکسـانی دارنـد، لذا باید به موقعیت نقطه و این که در کدام ربع دستگاه مختصات قرار می گیرد توجه داشته باشیم.

حال با استفاده از دستگاه مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$\boxed{z=x+iy=r\ (\cos\theta+i\ \sin\theta)\xrightarrow{\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}} z=r\ .\ e^{i\theta}}$$

توجه: به خاطر داشته باشید کار کردن با اعداد مختلط وقتی آنها را به صورت قطبی نوشته ایم، در برخـی مـوارد بـا سـهولت بیشـتری انجام می‌گیرد، به عنوان مثال اگر $z_1=\rho e^{i\phi}$, $z_0=re^{i\theta}$ توصیف کننده دو عدد مختلط معین باشند داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} & z_0.z_1=\left(re^{i\theta}\right)\left(\rho e^{i\varphi}\right)=r\rho e^{i(\theta+\varphi)}=r\rho\left(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\right) \\ & \frac{z_0}{z_1}=\frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\phi}}=\frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\phi)}=\frac{r}{\rho}\left(\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)\right) \\ & (\forall n\in N)\qquad z_0^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n\,e^{in\theta}=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right) \end{aligned}}$$

نکته: رابطه $\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$ به رابطه دمواور معروف است.

مثال: مطلوب است محاسبه مقدار A:

$$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$$

حل: نخست اعداد مختلط صورت و مخرج را در فرم قطبی می‌نویسیم:

می‌دانیم نقطه در ربع چهارم واقع است.

$$1-\sqrt{3}i=\begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\tan^{-1}\sqrt{3}=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} & \text{ربع چهارم} \\ \pi-\dfrac{\pi}{3} & \text{ربع دوم} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 1-\sqrt{3}i=2\ e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

می‌دانیم نقطه در ربع اول واقع است.

$$1+\sqrt{3}i=\begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{1}= \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} & \text{ربع اول} \\ \pi+\dfrac{\pi}{3} & \text{ربع سوم} \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{3}\,i=2\ e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$A=\left(\frac{2e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2e^{\frac{\pi i}{3}}}\right)^{12}=\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)^{12}=e^{-8i\pi}=\cos(-8\pi)+i\sin(-8\pi)=1$$

مثال: اگر z یک عدد مختلط باشد و $|z|=5$ مطلوب است محاسبه عبارت $\left|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z\right|$

حل:

$$\left|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z\right|=\left|(z)\left(e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right)\right|=|z|\left|e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right|=|z|\left|\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-1\right|=|z|\left|\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=5\times\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=5$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $z_n=\cos\dfrac{\pi}{2^n}+i\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ مطلوب است محاسبه:

$$A=\prod_{m=1}^{\infty} z_m$$

حل: با نوشتن z_n به فرم قطبی داریم:

$$z_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}=e^{i\frac{\pi}{2^n}}$$

$$A=z_1.z_2.z_3.z_n\ldots=e^{i\frac{\pi}{2^1}}.e^{i\frac{\pi}{2^2}}.e^{i\frac{\pi}{2^3}}\ldots$$
$$=e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)}$$

ملاحظه می‌شود $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots\right)$ یک تصاعد هندسی است. با استفاده از رابطه $s_\infty=\dfrac{t_1}{1-q}$

که در آن t_1: جمله اول، q قدرنسبت تصاعد (با فرض $|q|<1$) و s_∞: مجموع بی‌نهایت جمله می‌باشد، داریم:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\sim\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$A=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

نکته: با توجه به روابط می‌توان نشان داد:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ \bar{e}^{i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\ i} \\ \cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \end{cases}}$$

نیز داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh x=\cos i x \\ i\sinh x=\sin i x \end{array}}$$

مثال: اگر $A=\sin\ (2+3i)$ باشد، قسمت موهومی A را به‌دست آورید.

حل:

$$\sin(2+3i)=\sin 2\ .\ \cos 3i+\cos 2\ .\ \sin 3i=\sin 2.\cosh 3+i\cos 2.\sinh 3$$

که ملاحظه می‌شود قسمت موهومی عدد A برابر است با:

$$\mathrm{Im}(A)=(\cos 2).(\sinh 3)$$

مثال: مطلوب است قسمت حقیقی عدد $A=(\cos 30+i\sin 30)^8$

حل: طبق رابطه دموآور داریم:

$$A=(\cos 30+i\sin 30)^8=\cos(8\times 30)+i\sin(8\times 30)$$
$$=\cos(240)+i\sin 240=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس داریم $\mathrm{Re}(A)=\dfrac{-1}{2}$

دو نکته در رابطه با اعداد مختلط

الف) محاسبه ریشه های *n* ام یک عدد مختلط:

هر عدد مختلط دارای n ریشه nام می باشد و چنانچه داشته باشیم $z=r\,e^{i\theta}$ می توان نشان داد:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ,\ \ k=0,1,2,\ldots,n-1}$$

یعنی برای مثال:

ریشه هفتم یک عدد مختلط، هفت ریشه (اعم از موهومی و حقیقی) دارد.

ب) محاسبه لگاریتم نپرین یک عدد مختلط *(ln z)* :

در صورتی که $z=re^{i\theta}$ یک عدد مختلط معین باشد، می توان نشان داد:

$$\boxed{\mathrm{Ln}\,z=\mathrm{Ln}\,r+i(\theta+2k\pi)}$$

که در آن k یک عدد صحیح نسبی دلخواه است و لذا، لگاریتم نپرین یک عدد مختلط دارای بی‌شمار جواب است.

مثال: مطلوب است حاصل عبارت $\sqrt{-i}$.

حل: ابتدا نقطه $-i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(-i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

می‌دانیم که عبارت $\sqrt{-i}$ دارای دو ریشه می‌باشد:

$$\sqrt{-i}=\sqrt[2]{1}\left\{\cos\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{2}\right\},\quad k=0,1$$

$$k=0 \Rightarrow w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow w_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: عدد مختلط زیر مفروض است:

$$z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$$

مطلوب است محاسبه ریشه های دوم این عدد مختلط.

حل:

$$z=\frac{1+i}{1+i+1-1-2i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i-1}{1+1}=i$$

$$(i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt[2]{z}=\sqrt[2]{i}=\sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right),\quad k=0,1$$

$k=0\rightarrow$ جواب اول: $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1\rightarrow$ جواب دوم: $\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

مثال: حاصل $\mathrm{Ln}(-1)$ را به‌دست آورید.

حل: نقطه (-1) را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(-1)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\ln(-1)=\ln(1)+i(\pi+2k\pi)=i(\pi+2k\pi)$$

لذا $\ln(-1)$ دارای بی‌نهایت مقدار موهومی می‌باشد.

مثال: حاصل عدد مختلط $z=i^i$ را به‌دست آورید.

حل: نقطه i را به فرم قطبی می نویسیم:

$$(i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\ln\ z=i\ln i=i\left\{\ln\ (1)+i\ \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}=-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$z=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

مثال: مقدار $\overline{\exp z}$ (مزدوج e^z) کدام است؟

الف) $\exp z$ ب) $\exp\overline{z}$ ج) $(\exp z)^{-1}$ د) $\exp z^{-1}$

حل:

$$\overline{\left(e^z\right)}=\overline{\left(e^{x+iy}\right)}=\overline{\left(e^x\ e^{iy}\right)}=e^x\ e^{-iy}=e^{x-iy}=e^{\overline{z}}=\exp(\overline{z})$$

مثال: حاصل عبارت $\left(\dfrac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha}\right)^n$ کدام است؟

الف) $\left(\dfrac{i+\tan n\alpha}{i-\tan n\alpha}\right)$ ب) $\left(\dfrac{1-i\tan n\alpha}{i+i\tan n\alpha}\right)$ ج) $\left(\dfrac{i+i\tan n\alpha}{1+i\cot n\alpha}\right)$ د) $\left(\dfrac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}\right)$

حل:

$$\left(\frac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha}\right)^n=\left(\frac{i-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{i+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n$$

$$\left(\frac{i\cos\alpha-\sin\alpha}{i\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^n=\left(\frac{i(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{i(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right)^n$$

طبق رابطه دموآور داریم:

$$=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

مثال: کدام‌یک از گزینه‌های زیر یکی از ریشه‌های معادله $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ می‌باشد؟

الف) i ب) $-i$ ج) $\dfrac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ د) هیچکدام

حل: با ضرب طرفین معادله در $z-1$ به‌دست می‌آید:

$$(z-1)\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0\Rightarrow z^6-1=0\Rightarrow z^6=1$$

لذا ریشه‌های معادله مذکور $z=\sqrt[6]{1}$ (بجز $z=1$) خواهد بود. $1=\begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases}$

در نتیجه داریم:

$$z=\sqrt[6]{1}\left\{\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6}\right\},\ k=0,1,2,3,\ldots,5$$

به ازای $k=1$ به‌دست می‌آید:

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا ملاحظه می‌شود که گزینه ج صحیح است.

فصل دوم

جبر خطی

ماتریس‌ها

منظور از یک ماتریس، تعدادی از اعداد هستند که در چند سطر و ستون مشخص قرار گرفته‌اند و وقتی می‌گوییم ماتریس $A_{m\times n}$، منظور ماتریسی است که دارای m سطر و n ستون می‌باشد و منظور از درایه یا عنصر a_{ij} عنصری (درایه‌ای) از این ماتریس است که در سطر i ام و ستون j ام واقع شده است.

ترانهاده ماتریس

منظور از ترانهاده ماتریس A که آن را با A' یا A^T نشان می‌دهند، ماتریسی است که برای مشخص کردن آن کافی است جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض کنیم.

لذا طبیعی است که اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد، A' (ترانهاده ماتریس A) یک ماتریس $n\times m$ می‌باشد و البته داریم:

$$\boxed{A_{ij} = A'_{ji}}$$

جمع دو ماتریس

اعمال جمع و تفریق روی دو ماتریس زمانی امکان‌پذیر است که دو ماتریس هم‌مرتبه باشند (تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس برابر باشد). در این حالت تک‌تک درایه‌های نظیر دو ماتریس را با هم جمع و یا از هم کم می‌کنیم.

$$\boxed{A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}}$$

ضرب عدد در ماتریس

اگر بخواهیم عدد حقیقی k را در ماتریس دلخواه A ضرب کنیم، لازم است این عدد را در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب نماییم.

ضرب دو ماتریس

شرط لازم برای ضرب کردن دو ماتریس، آن است که شماره ستون ماتریس اول با شماره سطر ماتریس دوم برابر باشد:

$$\boxed{A_{i\times m}\ .\ B_{m\times j} = C_{i\times j}}$$

و برای به‌دست آوردن درایه‌های ماتریس حاصل‌ضرب (C) از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\boxed{C_{ij} = \sum_{p=1}^{m} A_{ip}\,.\,B_{pj}}$$

نکته: اگر A , B , C سه ماتریس دلخواه باشند، در صورت انجام‌پذیر بودن اعمال گفته شده داریم:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (k.A)' = k.A' & (A\pm B)' = A'\pm B' \\ (A.B)' = B'.A' & (A')' = A \\ A.B \neq B.A & A.(B.C) = (A.B).C \end{array}}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$، مطلوب است به‌دست آوردن حاصلضرب $A.A'$.

$$A.A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(2)+(-1)(-1) & (2)(1)+(-1)(3) \\ (1)(2)+(3)(-1) & (1)(1)+(3)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر A , B ماتریس‌های $n\times n$ متقارن باشند، در مورد ماتریس $A+B$ چه می‌توان گفت؟

حل: بدیهی است در مورد ماتریس متقارن داریم:

$$(A'=A)\ ,\ (B'=B)$$

$$(A+B)' = A'+B' = A+B$$

پس ماتریس $A+B$ نیز یک ماتریس متقارن است.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و چنانچه تعریف کنیم $C=A\times B$، مطلوب است عضو واقع بر سطر دوم و ستون سوم از ماتریس C.

حل: طبیعی است که ما به دنبال C_{23} می‌باشیم لذا کافی است سطر دوم از ماتریس A را در ستون سوم از ماتریس B ضرب نماییم، بدین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$A\times B = C \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه A^{50}.

حل: وقتی می‌خواهیم A^{50} را به‌دست آوریم لازم است ابتدا با چند ضرب متوالی، یک روال منطقی بیابیم و به یک حالت کلی تعمیم دهیم:

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

اگر دقت کنید ملاحظه می‌شود که **اولین عنصر سطر اول یکی بیشتر از توان است، دومین عنصر سطر اول قرینه توان، در اولین عنصر سطر دوم مانند توان** و دومین عنصر سطر دوم، یک واحد کمتر از توان با علامت منفی می‌باشد پس لذا می‌توان گفت که:

$$A^{50}=\begin{bmatrix}51 & -50\\ 50 & -49\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است محاسبه A^{100}:

حل: همانند مثال قبلی داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}$$

با استدلالی مشابه مثال قبل داریم:

$$A^{100}=\begin{bmatrix}101 & 100\\ -100 & -99\end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی و ماتریس همانی:

ماتریس مربعی: یک ماتریس را مربعی گویند، هرگاه تعداد سطرها و ستونهای ماتریس با هم برابر باشند.

ماتریس همانی: یا ماتریس یکه، ماتریسی مربعی است که بجز اعضاء روی قطر اصلی ماتریس که برابر یک هستند سایر اعضاء صفر می‌باشند و با I نمایش می‌دهند.

$$I_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

و البته در مورد این ماتریس‌ها داریم:

$$\boxed{A.I=I.A=A}$$

در مورد ماتریسهای مربعی مباحث زیر مطرح می‌شود:

تریس ماتریس

مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را تریس‌ماتریس گویند و با علامت TrA (تریس ماتریسA) نمایش می‌دهند. برای مثال اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تعریف شده باشد داریم:

$$\boxed{TrA=a+d}$$

دترمینان ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد. همواره می‌توان عددی را به عنوان دترمینان ماتریس به صورت زیر تعریف کرد که آن را با نماد $|A|$ یا $\det A$ نشان می‌دهند.

برای ماتریسهای 2×2 مثل $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$\boxed{\det A = |A| = ad - bc}$$

برای ماتریس‌های مربعی مرتبه‌های بالاتر، می‌توان حاصل دترمینان را از طریق بسط دترمینان نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه محاسبه نمود.

برای مثال برای ماتریس مربعی 3×3 مقابل داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times3}$$

بسط $|A|$ نسبت به سطر اول $= \det A = |A| = (-1)^{1+1}.a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.c.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

بسط $|A|$ نسبت به ستون دوم $= \det A = |A| = (-1)^{1+2}.b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.e.\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.h.\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

تذکر: توجه کنید علامتی که در بسط دترمینان ماتریس برای هر عضو لحاظ می‌گردد از طریق $(-1)^{i+j}$ به‌دست می‌آید که در آن i مبین سطر و j مبین ستون مربوط به آن عنصر می‌باشد.

تذکر: معمولاً علاقه‌مند هستیم که بسط دترمینان را نسبت به سطر یا ستونی انجام دهیم که در آن عناصر صفر بیشتری وجود دارد.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & 3x \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$، x را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $\det A = \mathrm{Tr}A$.

حل: بدیهی است:

$$\left.\begin{array}{l} \det A = 8+3x \\ \mathrm{Tr}\,A = 6 \end{array}\right\} \to 8+3x=6 \to x=\frac{-2}{3}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه دترمینان A.

حل: ملاحظه می‌شود که بیشترین عنصر صفر (0) در سطر سوم ماتریس دیده می‌شود لذا بسط دترمینان را نسبت به سطر سوم انجام می‌دهیم.

$$\det(A) = -3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\left[2(6-4)-3(9-4)+1(3-2)\right] = 30$$

مثال: مطلوب است محاسبه x از حل دترمینان زیر:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 & 3 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

حل: با بسط دترمینان مذکور حول سطر اول داریم:

$$2x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$-2x + x - 1 + 9x - 6 = 11$$

$$8x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{8}$$

مثال: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$ چه مقدار می‌باشد؟

حل: با بسط دترمینان حول سطر اول داریم:

$$2\cos\theta\left(4\cos^2\theta - 1\right) - 1(2\cos\theta - 0) = 4\cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right) = 4\cos\theta\cos 2\theta = \frac{4\cos\theta\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin 2\theta\,\cos 2\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$$

چند خاصیت دترمینان

تذکر: چنانچه تمام درایه‌های یک سطر و یا یک ستون ماتریسی برابر صفر باشد، دترمینان آن ماتریس برابر صفر می‌باشد.

تذکر: دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی، برابراست با حاصل‌ضرب عناصر قطر اصلی. (توجه: یک ماتریس مربعی را زمانی از نوع مثلثی می‌گویند که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی و یا تمام درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشد).

مثال: مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریس مقابل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: از آنجاکه ماتریس مذکور از نوع بالا مثلثی می‌باشد، دترمینان ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$\det(A) = |A| = 1\times 2\times 1\times 3 = 6$$

چند تذکر:

۱ـ چنانچه دو سطر یک ماتریس با هم یکسان و یا دو ستون ماتریس با هم یکسان باشد، دترمینان ماتریس صفر می‌باشد.

۲ـ چنانچه یک سطر ماتریسی k برابر سطر دیگر و یا یک ستون ماتریسی k برابر ستون دیگر باشد، دترمینان ماتریس برابر صفر است.

۳ـ چنانچه k برابر یک سطر ماتریسی با L برابر سطر دیگر این ماتریس جمع شده باشد و حاصل در سطر دیگری از ماتریس نوشته شده باشد، دترمینان ماتریس برابر صفر است (این موضوع برای ستون‌ها نیز صدق می‌کند).

۴ـ اگر یک سطر و یا یک ستون ماتریسی را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان حاصله k برابر دترمینان ماتریس اولیه خواهد بود.

۵ـ فرض کنید A , B دو ماتریس مربعی $n\times n$، k یک عدد حقیقی و p یک عدد طبیعی باشد می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\begin{aligned}&|A'|=|A|\\&|A.B|=|A|.|B|\\&|A^p|=|A|^p\\&|k.A|=k^n|A|\end{aligned}}$$

مثال: مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریسهای زیر:

$$\text{I)}\quad A=\begin{bmatrix}3&-1&2&4\\1&2&3&1\\4&1&5&5\\3&1&0&2\end{bmatrix}$$

حل: با کمی دقت ملاحظه می‌شود مجموع سطر اول و دوم ماتریس در سطر سوم آن نوشته شده است بنابراین $|A|=0$ است.

$$\text{II)}\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&3&4\\1&3&1&1\\2&0&1&2\\-4&2&-6&-8\end{bmatrix}$$

حل: به‌وضوح می‌بینیم از ضرب سطر اول ماتریس در عدد 2- دقیقاً سطر چهارم حاصل می‌شود بنابراین $|B|=0$ است.

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}2&4\\3&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&5\\2&3\end{bmatrix}$ چنانچه $C=A'^3.4B.B^5$، مطلوب است محاسبه دترمینان C .

حل:

$$|A|=2\times5-3\times4=-2=|A'|$$
$$|B|=3\times3-2\times5=-1=|B'|$$
$$|C|=\left|A'^3.4B.B^5\right|=\left|A'^3\right|.|4B|.\left|B^5\right|=|A'|^3.4^2|B|.|B|^5=-2^3\times4^2\times(-1)(-1)^5=-2^3\times4^2=-128$$

دترمینان کهاد و همسازه:

فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد، در این صورت برای هر کدام از عناصر این ماتریس می‌توان یک دترمینان کهاد و یک همسازه تعریف کرد.

دترمینان کهاد عنصر a_{ij}: دترمینان حاصل از حذف سطر iام و ستون j ام از ماتریس A را دترمینان کهاد عنصر a_{ij} گویند که با علامت Δ_{ij} مشخص می‌شود.

همسازه عنصر a_{ij} از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{a_{ij}\ \text{همسازه عنصر}=N_{ij}=(-1)^{i+j}.\Delta_{ij}}$$

ماتریس همسازه‌ها و ماتریس الحاقی (وابسته)

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و ما تمام همسازه‌های آن را یافته باشیم، چنانچه این همسازه‌ها را به ترتیب درون ماتریسی بچینیم به ماتریس حاصله، ماتریس همسازه‌های A گویند و آن را با N نمایش می‌دهند و به ترانهاده آن یعنی N' ماتریس الحاقی ماتریس A می‌گویند و گاهی با علامت $\mathrm{adj}(A)$ و یا A^* نیز نمایش می‌دهند.

با توجه به موارد فوق بدیهی است که داریم:

$$\boxed{N'_{ij} = N_{ji}}$$

اگر ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باشد نخست همسازه‌های ماتریس را به‌دست می‌آوریم. برای مثال داریم:

$$N_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \qquad N_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \qquad N_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

و به همین ترتیب، سایر همسازه‌های ماتریس را به‌دست می‌آوریم. حال ماتریس N (ماتریس همسازه‌ها) را به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

با ترانهاده نمودن ماتریس N و ماتریس الحاقی یا N' به‌دست می‌آید:

$$N' = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{21} & N_{31} \\ N_{12} & N_{22} & N_{32} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ درایه واقع بر سطر دوم ستون سوم از ماتریس الحاقی این ماتریس را به‌دست آورید.

حل: بدیهی است درایه واقع بر سطر دوم، ستون سوم از ماتریس الحاقی همان درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس همسازه می‌باشد پس داریم:

$$N'_{23} = N_{32}$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2} \, . \, \Delta_{32} = (-1).\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-4) = -2$$

معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی غیر منفرد باشد (یعنی $|A| \neq 0$)، آنگاه معکوس‌پذیر است. یعنی می‌توان ماتریسی مانند A^{-1} پیدا کرد به‌طوری‌که $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ که در این رابطه A^{-1} را معکوس ماتریس A گویند و برای پیدا کردن آن می‌توان نوشت:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{N'}{|A|}}$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad-bc\neq 0$ $(|A|\neq 0)$ باشد آنگاه معکوس ماتریس A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc}$$

نکته: اگر A,B دو ماتریس مربعی $n\times n$ و p یک عدد طبیعی و k یک عدد حقیقی باشد داریم:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(A^{-1}\right)'=\left(A'\right)^{-1} & (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \\ \left(A^{-1}\right)^{p}=\left(A^{p}\right)^{-1} & (A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1} \\ \left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|} & \end{array}}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ مطلوب است درایه واقع بر سطر اول ستون دوم از ماتریس معکوس A .

حل: می‌دانیم $A^{-1}=\dfrac{N'}{|A|}$. با توجه به استدلال‌های قبلی می‌دانیم:

$$A_{12}^{-1}=\frac{N'_{12}}{|A|}=\frac{N_{21}}{|A|}$$

بسط دترمینان حول سطر اول:

$$|A|=2(-2-1)-1(-3-5)=2$$

حال می‌نویسیم:

$$N_{21}=(-1)^{2+1}\Delta_{21}=(-1).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{12}^{-1}=\frac{1}{2}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ مطلوب است مجموع عناصر روی قطر اصلی معکوس این ماتریس.

حل: به‌واسطه مثلثی بودن ماتریس داریم:

$$|A|=2\times 4\times(-1)=-8$$

$$A_{11}^{-1}+A_{22}^{-1}+A_{33}^{-1}=\frac{N'_{11}}{|A|}+\frac{N'_{22}}{|A|}+\frac{N'_{33}}{|A|}=\frac{N_{11}+N_{22}+N_{33}}{|A|}=\frac{(-1)^{1+1}\Delta_{11}+(-1)^{2+2}\Delta_{22}+(-1)^{3+3}\Delta_{33}}{|A|}=\frac{-1}{4}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $\left|A^3\right| = 27$ و چنانچه A یک ماتریس مربعی 5×5 باشد مطلوب است محاسبه دترمینان $\frac{1}{2}A^{-1}$.

حل:

$$\left|A^3\right| = |A|^3 = 27 \Rightarrow |A| = 3$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

از طرفی بدیهی است چون A یک ماتریس 5×5 است، A^{-1} نیز یک ماتریس 5×5 است پس می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^5}$$

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی 5×5 باشد و بدانیم دترمینان آن برابر 6 می‌باشد، مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریس الحاقی آن:

حل: می‌دانیم:

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \Rightarrow |A|\,A^{-1} = N'$$

از طرفی داریم:

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{6}$$

از آنجا که می‌دانیم هرگاه یک سطر ماتریس را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان حاصله k برابر دترمینان ماتریس اصلی می‌شود و با توجه به اینکه ماتریس $|A|A^{-1}$، همان ماتریس A^{-1} است که تمام درایه های آن در $|A|$ ضرب شده است می‌توان نوشت:

$$\left||A|A^{-1}\right| = |N'| = 6^5\times\frac{1}{6} = 6^4$$

مثال: اگر A یک ماتریس حقیقی $n\times n$ و k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $\mathrm{adj}(kA)$. برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است: ($\mathrm{adj}A$ ماتریس الحاقی A می‌باشد).

الف) $k^{n-1}\,\mathrm{adj}A$ ب) $k^n\,\mathrm{adj}A$ ج) $k\,\mathrm{adj}A$ د) $\mathrm{adj}A$

حل: با فرض وارون پذیر بودن A می‌توان نوشت:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{|A|} \Rightarrow \mathrm{adj}\,A = |A|A^{-1}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\mathrm{adj}(kA) = |kA|(kA)^{-1}$$

چون ماتریس A یک ماتریس $n\times n$ است لذا خواهیم داشت:

$$|kA| = k^n|A|$$

از طرفی چون $k\in R$ است با مراجعه به خواص ماتریس می‌دانیم که $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ در نتیجه داریم:

$$\mathrm{adj}\,(kA) = k^n|A|\,k^{-1}A^{-1} = k^{n-1}|A|\left|A^{-1}\right| = k^{n-1}\,\mathrm{adj}(A)$$

ماتریس متعامد

ماتریس مربعی A را متعامد گویند هرگاه $A' = A^{-1}$ باشد و البته در این حالت خواهیم داشت: $|A| = \pm 1$

مثال: اگر B , A دو ماتریس $n\times n$ متعامد باشند و داشته باشیم: $|A|+|B|=0$ مطلوب است محاسبه: $|A+B|$.

حل: با توجه به اینکه ماتریسهای A , B متعامد هستند داریم: $A^{-1}=A'$, $B^{-1}=B'$

لذا می‌توان نوشت:

$$A+B=A\left(I+A^{-1}B\right)=A(I+A'B)=A\left(B^{-1}+A'\right)B=A(B'+A')B=A(A+B)'B$$

$$|A+B|=\left|A(A+B)'B\right|=|A|\left|(A+B)'\right||B|$$

با توجه به فرض مساله داریم $|A|=-|B|$ پس می توان نوشت:

$$|A+B|=-\left(|A|\right)^2\ |A+B|$$

در نتیجه داریم: $|A+B|=0$

مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی

تعریف: در ماتریس مربعی $An\times n$ اگر بتوان مقادیر λ را به گونه‌ای تعیین نمود که داشته باشیم: $\boxed{AX=\lambda X}$ که در آن X یک ماتریس $n\times 1$ است، آنگاه λ های به‌دست آمده را مقادیر ویژه ماتریس A , X را بردار ویژه متناظر با این مقادیر ویژه می‌گوییم:

برای محاسبه مقادیر ویژه کافی است که معادله مشخصه ماتریس A را که به فرم زیر نوشته می‌شود را حل نماییم:

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$

برای مثال برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ معادله مشخصه به‌صورت زیر که از حل آن مقادیر ویژه ماتریس A به‌دست می‌آید:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix}=0$$

از حل معادله فوق سه مقدار ویژه برای ماتریس A حاصل می‌شود و با حل معادله $(A-\lambda I)X=0$ بردار X (بردار ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ) به‌دست می‌آید.

مقادیر ویژه و نیز بردارهای ویژه دارای کاربردهای زیادی در علوم مختلف هستند که صحبت در مورد آنها از حوصله این مبحث خارج است.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -2\end{bmatrix}$$

حل: معادله مشخصه ماتریس چنین است:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (3-\lambda)(-2-\lambda)-16=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-22=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+4(22)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{89}}{2}$$

λ_1,λ_2 مقادیر ویژه ماتریس هستند:

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{89}}{2}$$
$$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{89}}{2}$$

مثال: مقادیر ویژه ماتریس زیر چقدر است؟

$$B=\begin{bmatrix}13 & -3 & 5\\ 0 & 4 & 0\\ -15 & 9 & -7\end{bmatrix}$$

حل: معادله مشخصه ماتریس چنین است:

$$\begin{vmatrix}13-\lambda & -3 & 5\\ 0 & 4-\lambda & 0\\ -15 & 9 & -7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

با بسط این دترمینان حول سطر دوم داریم:

$$(4-\lambda)\{(13-\lambda)(-7-\lambda)+(5)(15)\}=0 \Rightarrow (4-\lambda)\{-91-13\lambda+7\lambda+\lambda^2+75\}=0 \Rightarrow (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda-16)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4-\lambda=0\Rightarrow\lambda=4\\ \lambda^2-6\lambda-16=0\Rightarrow\lambda=8\ ,\ -2\end{cases}$$

مثال: مقدار a چقدر باشد تا یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ برابر $\lambda=3$ باشد. بردار ویژه نظیر این مقدار ویژه را تعیین کنید.

حل: با توجه به رابطه $\det(A-\lambda I)=0$ داریم: (در اینجا $\lambda=3$ می‌باشد)

$$\begin{vmatrix}a-3 & 0 & 1\\ 2 & 1-3 & 0\\ 1 & 2 & 2-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow(a-3)\{(2-0)\}-(0)+(1)\{(4+2)\}=0\Rightarrow a=0$$

برای یافتن بردار ویژه نظیر $\lambda=3$ داریم:

$$(A-3I).X=0$$
$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

از حل معادله ماتریسی فوق داریم:

$$\begin{cases}-3x+z=0 \to z=3x \\ 2x-2y=0 \to y=x \\ x+2y-z=0 \to x+2x-3x=0\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که سه معادله وابستگی خطی دارند. در نتیجه داریم:

$$X=\begin{bmatrix} x \\ x \\ 3x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

نکته مهم:

فرض کنید A یک ماتریس مربعی 3×3 باشد که مقادیر ویژه آن λ_1 , λ_2 , λ_3 است. همواره داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Tr}(A)$$
$$\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=\det(A)$$
$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Tr}A)^2-\left(\mathrm{Tr}A^2\right)\right\}$$

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه این ماتریس کدام است؟

الف) 4,-8,2 ب) 2 , 8 , 4- ج) 2- , 8 , 4- د) 2- , 8 , 4

حل: بدون نیاز به حل معادله مشخصه، با توجه به نکات بالا داریم:

$$\mathrm{Tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$
$$\mathrm{Tr}(A)=13+4+(-7)=10$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها ملاحظه می‌شود، تنها گزینه‌ای که رابطه بالا را ارضا می‌کند گزینه (د) می‌باشد.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} -14 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ کدام‌اند؟

الف) 14 , 2 ب) 1 , 2- ج) 14- , 2 د) 15 , 2

حل: اگر چه می‌توان با تشکیل معادله مشخصه مقادیر ویژه را محاسبه کرد اما راه‌حل ساده مساله چنین است:

ماتریس A یک ماتریس مربعی 3×3 می‌باشد بنابراین باید 3 مقدار ویژه داشته باشد وقتی به گزینه‌ها نگاه می‌کنیم در تمام گزینه‌ها فقط دو عدد نوشته شده است. بنابراین، بدیهی است که در هر گزینه یکی از اعداد تکراری می‌باشد و با توجه به این مطلب که داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Tr}(A)=(-14+2+2)=-10$$

می‌توان گزینه‌ها را به طور جداگانه آزمایش کرد به‌عنوان مثال گزینه (الف) می‌تواند دو مقدار ویژه را 2 و یکی را 14 یا دو مقدار ویژه را 14 و یکی را 2 توصیف کند. لذا با این منطق تنها گزینه (ج) می‌تواند صحیح باشد: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-14$

مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید. $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & * \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & 1\end{bmatrix}$ چنانچه یکی از مقادیر ویژه ماتریس $\lambda=2$ باشد و بدانیم $|A|=42$ است، دو مقدار ویژه دیگر ماتریس را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم $\lambda_1=2$ با استفاده از نکاتی که قبلاً ذکر شد داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Tr}(A)\Rightarrow 2+\lambda_2+\lambda_3=6+5+1\Rightarrow \lambda_2+\lambda_3=10$$
$$\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=\det(A)\Rightarrow 2\lambda_2\lambda_3=42\Rightarrow \lambda_2\lambda_3=21$$

از حل دو معادله فوق به‌دست می‌آید: $\lambda_2=7$, $\lambda_3=3$

مثال: بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}5 & 4 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: با حل معادله مشخصه داریم:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0\Rightarrow \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=6$$

برای به‌دست آوردن بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda_1=1$ داریم:

$$\lambda_1=1\Rightarrow (A-(1)I).X=0\Rightarrow \begin{bmatrix}4 & 4 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases}4x+4y=0 \\ x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=-y\Rightarrow \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix}$$

و نیز برای به‌دست آوردن بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda_2=6$ داریم:

$$\lambda_2=6\Rightarrow (A-6I).X=0\Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 4 \\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=0$$
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}-x+4y=0 \\ x-4y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=+4y\Rightarrow \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix}$$

مثال: مطلوب است مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

الف) $\lambda_1=e^{2i\theta}$, $\lambda_2=e^{-2i\theta}$ ب) $\lambda_1=\lambda_2=e^{i\theta}$

ج) $\lambda_1=e^{i\theta}$, $\lambda_2=e^{2i\theta}$ د) $\lambda_1=e^{i\theta}$, $\lambda_2=e^{-i\theta}$

حل: با حل معادله مشخصه داریم:

$$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow \begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-2\cos\theta(\lambda)+1=0\Rightarrow \lambda=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

با توجه به این نکته که می‌دانیم $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌توان نوشت:

$$\lambda_1=e^{i\theta}$$
$$\lambda_2=e^{-i\theta}$$

توجه به نکات زیر در حل تست‌ها می‌تواند مفید باشد:

نکته: یک ماتریس مربعی $n\times n$ دارای n مقدار ویژه می‌باشد که البته ممکن است تعدادی از این مقادیر ویژه، تکراری باشند.

نکته: اگر مقادیر ویژه ماتریسی به‌گونه‌ای باشند که یکی از آنها صفر باشد، واضح است دترمینان آن ماتریس صفر است و لذا ماتریس موردنظر معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

هرگاه دو مقدار ویژه یک ماتریس یکسان باشد، دلیلی ندارد که بردارهای ویژه متناظر با این دو مقدار نیز یکسان باشند.

بردارهای ویژه وابسته به مقدار ویژه متمایز، مستقل از یکدیگرند.

- تعداد بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ بی شمار است.
- مقادیر ویژه A^T, A یکسان است.
- اگر ماتریس A نامنفرد باشد مقادیر ویژه A^{-1}، عکس مقادیر ویژه A می‌باشند.
- اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه λ^n یک مقدار ویژه ماتریس A^n است.

مثال: اگر ماتریس $A_{4\times4}$ دارای مقادیر ویژه 1- , 1 , 0 , 2 باشد در مورد ماتریس معکوس $A\left(A^{-1}\right)$ چه می‌توان گفت؟

حل: با توجه به نکات گفته شده، ماتریس مزبور دارای مقدار ویژه صفر می‌باشد. لذا $\det A = 0$ است پس ماتریس مذکور، معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

مثال: اگر A یک ماتریس 3×3 با مقادیر ویژه 3 , 2 , 1 باشد مقادیر ویژه ماتریس $B = 2A - I$ کدام‌اند؟

الف) 2 , 1 , 0 ب) 6 , 4 , 2 ج) 5 , 3 , 1 د) 5- , 3- , 1

حل: می‌دانیم ماتریس 2A همان ماتریس A است که درایه‌های آن در عدد 2 ضرب شده است. لذا بدیهی است که:

$$Tr(2A) = 2Tr(A)$$

و نیز داریم:

$$Tr(I) = 3 \quad , \quad Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$Tr(B) = Tr(2A) - Tr(I) = 12 - 3 = 9$$

پس مجموع مقادیر ویژه ماتریس B باید معادل 9 باشد و تنها جواب قابل قبول گزینه (ج) می‌باشد.

توجه: البته از آن‌جا که از رابطه $B = 2A - I$ می‌توان نتیجه گرفت: $\lambda_B = 2\lambda_A - 1$ نیز می‌توان صحت گزینه ج را دید.

تعیین رتبه یا رنک یک ماتریس (Rank)

تعریف: رتبه یک ماتریس $A_{m\times n}$ برابر k است، هرگاه بزرگترین ماتریس مربعی با دترمینان غیرصفر که از داخل این ماتریس می‌توان استخراج کرد از مرتبه k باشد. به تعبیر دیگر رتبه یک ماتریس برابر است با حداقل تعداد سطرهای مستقل خطی و تعداد ستون‌های مستقل خطی موجود در آن ماتریس (معمولاً رتبه یک ماتریس را با تلفیق این دو جمله پیدا می‌کنیم).

مثال: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: بدیهی است از آنجا که ماتریس موردنظر یک ماتریس 4×3 می‌باشد، بنابراین رتبه آن 4 نخواهد بود. از طرفی همانطور که ملاحظه می‌شود، تمام ماتریس‌های 3×3 قابل استخراج از داخل این ماتریس دارای دترمینان صفر می‌باشند (همگی یک سطر با

درایه‌های صفر دارند). لذا رتبه ماتریس 3 نخواهد بود.

از طرفی، تمام دترمینان مربعی 2×2 که از داخل این ماتریس می‌توان استخراج کرد برابر صفراند. بنابراین رتبه ماتریس 2 نخواهد بود.

از آنجاکه لااقل یک عدد غیرصفر در این ماتریس وجود دارد لذا رتبه ماتریس موردنظر برابر 1 است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: با کمی دقت ملاحظه می‌شود که تعداد سطرهای مستقل خطی در این ماتریس دو می‌باشد. یعنی سطرهای اول و دوم مستقل‌اند. و نیز داریم:

سطر دوم + سطر اول = سطر سوم

سطر سوم + سطر اول = سطر چهارم

بنابراین، نمی‌توان یک دترمینان مربعی 3×3 از داخل ماتریس استخراج کرد که مخالف صفر باشد.

حال این سوال مطرح است که آیا می‌توان لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر از داخل ماتریس A استخراج کرد؟ با کمی دقت، وجود لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر به‌سادگی قابل رؤیت است.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

لذا رتبه ماتریس A برابر 2 می‌باشد:

$$\text{Rank } A = 2$$

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. مقدار a چقدر باشد تا رتبه این ماتریس برابر 3 نباشد و سپس تعیین کنید در این حالت رتبه ماتریس چند است؟

حل: ماتریس موردنظر ما یک ماتریس 3×3 است. طبیعی است اگر قرار است رتبه آن 3 نباشد، باید دترمینان آن برابر صفر شده باشد. پس داریم:

$$|A| = 0 \Rightarrow 2(-4-0) + 1(8-3) + a(0+2) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

پس ماتریس مذکور به صورت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

حال باید ببینیم آیا لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر در این ماتریس قابل رؤیت است؟ با کمی دقت ملاحظه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

پس رتبه ماتریس مذکور 2 است.

$$\text{Rank } A = 2$$

فصل سوم

هندسه تحلیلی

مقدمه‌ای از مبحث بردارها

دو نقطه A به مختصات $A(x_1, y_1, z_1)$ و B به مختصات $B(x_2, y_2, z_2)$ را در فضا در نظر بگیرید. بردار $\overrightarrow{AB}$ در مختصات دکارتی به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}$$

که در آن $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ به ترتیب بردارهای یکه سه محور z, y, x هستند و طول بردار $\overrightarrow{AB}$ فاصله مستقیم دو نقطه B , A می‌باشد که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

و همچنین مختصات نقطه M به گونه‌ای که پاره‌خط AB را به نسبت λ تقسیم کند به صورت زیر معین می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned} x_m &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y_m &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z_m &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{aligned}}$$

تعریف:

۱ـ اندازه بردار $\vec{u}(a,b,c)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

۲ـ بردار یکه بردار $\vec{u}(a,b,c)$، برداری است که امتداد و جهت آن مانند بردار $\vec{u}$ است ولی طول آن واحد است و آن را با $\vec{\lambda}_u$ نشان می‌دهند و به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{\lambda}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مثال: دو نقطه A , B با مختصات زیر مفروض است. مطلوب است بردار یکه متناظر با بردار $\overrightarrow{AB}$.

$B(3,0,2)$, $A(2,1,-3)$

حل : طبق تعاریف بالا ابتدا بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2\ ,0-1,2+3) = (1,-1,5)$$

طول بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(5)^2} = \sqrt{27}$$

بردار یکه $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\vec{i} - \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\vec{j} + \left(\frac{5}{\sqrt{27}}\right)\vec{k}$$

کسینوس‌های هادی یک بردار

بردار $\vec{A} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ با محورهای x , y , z به ترتیب زوایای γ,β,α می‌سازد که کسینوس‌های این زوایا (کسینوس‌های هادی بردار) را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a}{|\vec{A}|} \qquad \cos\beta = \frac{b}{|\vec{A}|} \qquad \cos\gamma = \frac{c}{|\vec{A}|}}$$

و همواره داریم:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

ـ انواع ضرب بردارها:

ضرب عدد در بردار: بردار $\vec{u} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ و عدد حقیقی k را در نظر بگیرید حاصلضرب عدد در بردار، برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k\vec{u} = (ka)\vec{i} + (kb)\vec{j} + (kc)\vec{k}$$

ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر)

دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب داخلی دو بردار، عددی است که به یکی از دو صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}&=am+bn+cp\\ \vec{u}.\vec{v}&=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta\end{aligned}}$$

که در رابطه بالا θ زاویه بین دو بردار است.

نکته: با دقت به دو رابطه نوشته شده، می‌توان زاویه بین دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را با توجه به فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{am+bn+cp}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

لذا طبیعی است که شرط عمود بودن دو بردار بر هم، آن است که $\vec{u}.\vec{v}=$ $\quad$ $am+bn+cp=$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی بوده و داریم: $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

نکته: دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را در نظر بگیرید به‌سادگی می‌توان نشان داد:

الف) تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ عبارت است از: $\vec{A}_B=(\vec{A}.\vec{\lambda}_B)\vec{\lambda}_B$

(که در آن $\vec{\lambda}_B$ بردار یکه $\vec{B}$ می‌باشد)

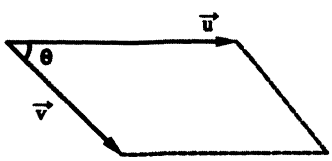
ب) قرینه بردار $\vec{A}$ نسبت به بردار $\vec{B}$ عبارت است از: $\vec{A}'_B=2\vec{A}_B-\vec{A}$

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری)

دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب خارجی دو بردار برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & b & c\\ m & n & p\end{vmatrix}}$$

نکته: از حاصلضرب خارجی دو بردار، برداری حاصل می‌شود که دو ویژگی مهم دارد.



اگر فرض کنیم $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}$ پس می‌توان گفت:

۱) بردار $\vec{N}$ بر هر دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ عمود است.

۲) اندازه بردار $\vec{N}$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که می‌توان بر روی دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ بنا کرد (یعنی به عبارتی دیگر، مساحت متوازی‌الاضلاع همان طول بردار حاصلضرب خارجی دو بردار سازنده آن می‌باشد).

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}=|\vec{N}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

۳) ضرب خارجی دو بردار دارای خاصیت جابه‌جایی نمی‌باشد: $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

حاصل ضرب مختلط سه بردار:

بردارهای $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ و $\vec{\omega}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب مختلط این سه بردار، برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}}$$

توجه داشته باشید قدرمطلق حاصل‌ضرب مختلط این سه بردار، حجم متوازی‌الاسطوحی است که بر روی این سه بردار، قابل ساختن است. لذا طبیعی است که اگر حاصل‌ضرب مختلط سه بردار برابر صفر باشد، آن سه بردار در یک صفحه واقع هستند. پس برای چک کردن هم صفحه بودن سه بردار می‌توان از این مفهوم استفاده کرد.

وابستگی خطی و استقلال خطی در بردارها

تعریف: بردارهای $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ را وابسته خطی گویند هرگاه اعداد ثابتی مانند $k_1, k_2, ..., k_n$ (که همگی همزمان صفر نمی‌باشند) یافت شود به گونه‌ای که:

$$k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+k_3\vec{u}_3+...+k_n\vec{u}_n=0$$

در غیر این صورت بردارهای مزبور را مستقل خطی گویند.

نکته: ثابت می‌شود در یک فضای n بعدی، هر $n+1$ بردار قطعاً وابستگی خطی دارند.

نکته: با استفاده از تعریف فوق، می‌توان گفت دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را دارای وابستگی خطی می‌گویند هرگاه بتوان عدد ثابتی مانند ℓ پیدا کرد به‌طوری‌که $\vec{v}=\ell\vec{u}$. در یک بیان متناظر دو بردار $\vec{u}$, $\vec{v}$ دارای وابستگی خطی گویند، هرگاه با هم موازی باشند و به تعبیری هرگاه داشته باشیم:

$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}}$$

و در غیر این صورت دارای استقلال خطی هستند.

نکته: سه بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+c\vec{k}$ و $\vec{w}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ را دارای وابستگی خطی گویند، هرگاه بتوان اعداد ℓ_1 , ℓ_2 را به‌گونه‌ای یافت که داشته باشیم: $\vec{w}=\ell_1\vec{u}+\ell_2\vec{v}$

و می‌توان ثابت کرد شرط وابستگی خطی داشتن سه بردار، آن است که ضرب مختلط آنها برابر صفر شود:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0}$$

وضعیت دو بردار نسبت به هم

دو بردار $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(m,n,p)$ را در نظر بگیرید:

$am+bn+cp=0$: شرط عمود بودن دو بردار
$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$: شرط موازی بودن دو بردار

مثال: دو نقطه $A(1,2,3)$, $B(-1,3,3)$ مفروض می‌باشند. نقطه m را بر پاره‌خط AB به گونه‌ای بیابید که این پاره‌خط را به نسبت $\lambda=3$ تقسیم کند.

حل : طبق روابط گفته شده داریم:

$$x_m=\frac{1+3(-1)}{1+3}=\frac{-1}{2}$$
$$y_m=\frac{2+3(3)}{1+3}=\frac{11}{4}$$
$$z_m=\frac{3+3(3)}{1+3}=3$$

با کمی دقت ملاحظه می‌شود که مساله دارای جواب دیگری نیز می‌باشد که به صورت هندسی به راحتی قابل توجیه است.

مثال: نزدیکترین فاصله مبدا مختصات تا منحنی $\vec{r}=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$ را به‌دست آورید.

حل : نقطه $A\left(e^t,e^{-t}\right)$ روی منحنی مزبور قرار دارد، فاصله آن تا مبدا مختصات به صورت زیر می‌باشد:

$$d=\sqrt{\left(e^t\right)^2+\left(e^{-t}\right)^2}=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}=\sqrt{\left(e^t-e^{-t}\right)^2+2}$$

بنابراین، **حداقل** فاصله هنگامی اتفاق می‌افتد که عبارت $\left(e^t-e^{-t}\right)^2$ معادل صفر باشد و این امر زمانی ممکن می‌شود که $t=0$ باشد و لذا داریم:

$$d_{min}=\sqrt{2}$$

مثال: مطلوب است برداری که در جهت بردار $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ بوده و طولش برابر 9 باشد.

حل : بردار یکه بردار موردنظر به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{\lambda}_A=\frac{2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

لذا بردار مذکور به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{u}=|\vec{u}|\vec{\lambda}=9\left[\frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)\right]=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

مثال: مقدار ثابت m چقدر باشد تا دو بردار زیر بر هم عمود باشند؟

$$\vec{u}=(2m+1)\vec{i}+(-3)\vec{j}+(1-m)\vec{k}$$
$$\vec{v}=-2\vec{i}+1\vec{j}+2\vec{k}$$

حل : شرط عمود بودن می‌طلبد که ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد.

$$\vec{u}.\vec{v}=0 \Rightarrow -4m-2-3+2-2m=0 \Rightarrow -6m-3=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

مثال: زاویه بردار $\vec{r}=\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\varphi\vec{k}$ **با محور xها کدام است؟**

حل : محور xها با بردار $\lambda=i$ قابل توصیف است.

بنابراین، چنانچه زاویه موردنظر را α در نظر بگیریم می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{r}\,.\,\vec{\lambda}}{|\vec{r}|\,|\vec{\lambda}|}$$

$$|\vec{r}|=\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\sqrt{\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}$$
$$=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=1 \qquad , \qquad |\vec{\lambda}|=1$$
$$\vec{r}.\vec{\lambda}=\cos\theta\sin\varphi$$
$$(\cos\alpha)\left(|\vec{r}|.|\vec{\lambda}|\right)=\vec{r}.\vec{\lambda} \Rightarrow \cos\alpha=\cos\theta\sin\varphi \Rightarrow \alpha=\cos^{-1}(\cos\theta\sin\varphi)$$

مثال: فرض کنید $B(2,-3,5)$, $A(8,3,2)$, $P(4,1,6)$ نقاطی در فضای R^3 باشند. در این صورت، **طول تصویر بردار $\overline{AP}$ روی** بردار $\overline{AB}$ را به‌دست آورید.

حل : داریم:

$$\overline{AP}=(-4,-2,4)\ ,\ \overline{AB}=(-6,-6,3)$$

و بردار یکه $\overline{AB}$ عبارت است از:

$$\vec{\lambda}_{AB}=\frac{-6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{36+36+9}}$$

لذا طول تصویر $\overline{AP}$ بر $\overline{AB}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\overline{AP}\,.\,\vec{\lambda}_{AB}=\left(-4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right).\left(\frac{-6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}}{9}\right)=\frac{48}{9}$$

مثال: می‌دانیم بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}$ بر هم عموداند. چنانچه $|\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{b}|$ باشد، **مطلوب است زاویه بین دو بردار $\vec{b},\vec{a}$.**

مثال: شرط تعامد دو بردار آن است که ضرب داخلی آنها صفر باشد، لذا داریم:

$$2\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0 \Rightarrow 2\vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow 2a^2+2ab\cos\theta=0$$

چون می‌دانیم که:

$$\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta$$

از طرفی طبق فرض داریم $a=\frac{b}{2}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$2a^2+2a(2a)\cos\theta=0 \quad\Rightarrow\quad 2a^2(1+2\cos\theta)=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{-1}{2} \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{2\pi}{3}$$

مثال: دو بردار $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ مفروض است. مختصات یکه برداری را بیابید که بر هر دو بردار مذکور عمود باشد.

حل : مطابق بحث‌های گفته شده، برداری که از ضرب خارجی دو بردار حاصل می‌شود عمود بر آن دو می‌باشد:

$$\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}==\vec{i}(6+1)-\vec{j}(9-1)+\vec{k}(3+2)\Rightarrow\vec{N}=7\vec{i}-8\vec{j}+5\vec{k}$$

بردار یکه این بردار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\lambda}_N=\frac{7\vec{i}-8\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{49+64+25}}$$

مثال: حجم هرم مثلث‌القاعده‌ای به رئوس $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ و $D(3,7,2)$ را به‌دست آورید:

حل : داریم: $\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{AC}=(6,2,2)$, $\overrightarrow{AD}=(3,7,1)$

لذا طبق بحث‌های قبل حجم متوازی‌السطوح ایجاد شده روی این سه بردار عبارت است از:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=120$$

لذا حجم هرم موردنظر $\frac{1}{6}$ مقدار یعنی 20 واحد مکعب خواهد بود.

مثال: مقدار k چقدر باشد، تا دو بردار $\vec{A}=(2k+1,3,-1)$, $\vec{B}=(3,-1,-k)$ وابستگی خطی داشته باشند؟

حل : همان‌طور که قبلاً ذکر شد دو بردار زمانی با هم وابستگی خطی دارند که موازی باشند. بنابراین داریم:

$$\frac{2k+1}{3}=\frac{3}{-1}=\frac{-1}{-k}$$

برای این‌که وابستگی خطی بین دو بردار باشد باید معادلهٔ بالا ارضاء شود.

$$\begin{cases} \frac{2k+1}{3}=\frac{3}{-1}\Rightarrow k=-5 \\ \frac{3}{-1}=\frac{1}{k}\Rightarrow k=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین نمی‌توان k را پیدا کرد که در هر دو معادله صدق کند به تعبیری دیگر، به ازای هر مقدار دلخواه k این دو بردار استقلال خطی دارند.

مثال: مقدار ثابت m چقدر باشد تا سه بردار $\vec{u}=(2m,1,m)$, $\vec{v}=(-2,0,1)$, $\vec{w}=(1,2,3)$ وابستگی خطی داشته باشند.

حل : همان‌طور که قبلاً اشاره شد سه بردار زمانی وابستگی خطی دارند، که روی یک صفحه واقع شده باشند بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} 2m & 1 & m \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 2m(0-2)-1(-6-1)+m(-4-0)=0\Rightarrow m=\frac{7}{8}$$

معادلات صفحه و خط در فضا

معادله صفحه در فضا

معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ بر آن عمود باشد به یکی از دو صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{array}{l} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{array}}$$

که در **حالت** دوم، مقدار d را می‌توان از این نکته که نقطه A متعلق به صفحه است و باید مختصاتش در آن صفحه صدق کند، به‌دست آورد.

در حالات خاص می‌توان معادله صفحه را به راحتی مشخص نمود و به عنوان مثال:

۱) اگر $a = 0$ باشد، صفحه موردنظر موازی محور xهاست.

۲) اگر $a = b = 0$ باشد، صفحه موردنظر موازی صفحه xoy است.

۳) اگر $d = 0$ باشد، صفحه موردنظر از مبدا مختصات خواهد گذشت.

تذکر: دو صفحه زمانی با هم موازی هستند که بردار نرمال‌هایشان با هم موازی باشند.

تذکر: دو صفحه زمانی بر هم عمود هستند که بردار نرمال‌هایشان بر هم عمود باشد.

تذکر: زاویه بین دو صفحه، زاویه بین بردار نرمال‌های آن دو صفحه می‌باشد.

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{AH = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|}$$

نکته: فاصله دو صفحه موازی $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$ عبارت است از:

$$\boxed{\text{فاصله} = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

نکته: معادله کلیه صفحاتی که از فصل مشترک دو صفحه $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ می‌گذرد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

نکته: معادله صفحه گذرنده از سه نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$ عبارت است از:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0}$$

معادله خط در فضا

معادله خطی که از نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ بگذرد و با بردار $\vec{u}(p,q,r)$ موازی باشد به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}}$$

(دقت کنید که در این رابطه ضریب x , y , z , $+1$ می‌باشد).

به مقادیر p , q , r پارامترهای هادی خط می‌گویند و به همین ترتیب به بردار $\vec{u}$ بردار هادی خط گویند. معادله همین خط در فرم پارامتری (بر حسب پارامتر t) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases}$$

که در این حالت به ازای tهای مختلف، مختصات نقاط مختلف خط مزبور مشخص می‌شود.

تذکر: توجه کنید که با نوشتن معادله خط به صورت پارامتری، می‌توان بسیاری از مسایل مربوط به خط را حل نمود، به عنوان مثال برای فهمیدن این که آیا دو خط D_1, D_2 متقاطع هستند می‌توان مساله را این‌گونه تعبیر کرد که آیا نقطه‌ای روی خط D_1 موجود است که مختصات آن در معادله خط D_2 نیز صدق کند و اگر چنین نقطه‌ای یافت بشود، آن نقطه، نقطه تقاطع دو خط است. البته به این نکته توجه داشته باشید که عدم توازی دو خط به منزله متقاطع بودن آن دو خط نمی‌باشد چرا که ممکن است آن دو خط متنافر باشند.

نکته: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$

در حالات خاص نیز می‌توان معادله خط را به راحتی مشخص نمود به عنوان مثال:

الف) معادله خطی که به موازات محور xها می‌باشد به صورت $y=y_0$, $z=z_0$ نوشته می‌شود که در آن y_0, z_0 مولفه‌های y , z دریک نقطه خاص از خط موردنظر است.

ب) معادله خطی که به موازات صفحه yoz می‌باشد به صورت $\begin{cases} x=x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} \end{cases}$ می‌باشد که در آن x_0, y_0, z_0 مختصات یک نقطه خاص موردنظر است.

وضعیت دو خط نسبت به همدیگر:

دو خط به معادلات $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$, $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ را در نظر بگیرید. بدیهی است شرط توازی و تعامد دو خط، همان شرط توازی و تعامد بردارهای هادی دو خط می‌باشد.

برای شرط توازی دو خط داریم: $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$

و برای شرط تعامد دو خط داریم: $p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$

و بدیهی است که زاویه بین دو خط همان زاویه بین بردارهای هادی دو خط است.

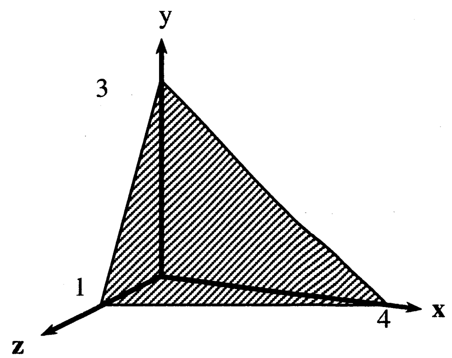
شرط هم‌صفحه بودن این دو خط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0$$

بنابراین، شرط متنافر بودن دو خط مزبور آن است که دترمینان فوق مخالف صفر باشد.

مثال: صفحه $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+z=1$ را در نظر بگیرید. حجم ساخته شده توسط این صفحه و صفحات مختصات چقدر است؟

حل :



محل تقاطع صفحه با محور xها $\xrightarrow{y=z=0} \frac{x}{4}=1 \Rightarrow x=4$

محل تقاطع صفحه با محور y ها $\xrightarrow{x=z=0} \frac{y}{3}=1 \Rightarrow y=3$

محل تقاطع صفحه با محور z ها $\xrightarrow{x=y=0} z=1$

حجم هرم مورد نظر $= \frac{1}{3} \times$ (مساحت قاعده) $\times$ (ارتفاع) $=$

$\frac{1}{3}\times\frac{4\times3}{2}\times1=2$

مثال: معادله $(x+2y+3z+4)^2+(x-2y+2z-4)^2=0$ بیانگر چه شکلی در فضا می‌باشد؟

حل : با توجه به معادله، ملاحظه می‌شود که این معادله به صورت $A^2+B^2=0$ بدیهی است برای داشتن جواب لازم است $A=B=0$ پس داریم:

$$\begin{cases} x-2y+2z-4=0 \\ x+2y+3z+4=0 \end{cases}$$

این دو معادله، معادلات دو صفحه متقاطع می‌باشند (به دلیل آنکه ضرایب دو معادله متفاوت هستند دو صفحه موازی نمی‌باشند). پس شکل موردنظر فصل مشترک دو صفحه، یعنی یک خط راست می‌باشد.

مثال: خطی به معادله $\frac{2x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{3z+1}{2}$ نسبت به صفحه‌ای به معادله $4x+4y-21z=1$ چه وضعیتی دارد؟

حل : بردار نرمال صفحه به صورت $\vec{N}=(4,4,-21)$ می‌باشد.

از طرفی معادله خط به صورت $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$ می‌باشد در نتیجه بردارهای خط به صورت $\vec{u}\left(\frac{3}{2},2,\frac{2}{3}\right)$ می‌باشد. ملاحظه می‌شود دو بردار فوق بر هم عمودند، چرا که ضرب داخلی آنها صفر است:

$$4\left(\frac{3}{2}\right)+4(2)-21\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

پس بدیهی است که صفحه و خط مزبور با هم موازیند.

مثال: معادله خط و صفحه‌ای به صورت زیر داده شده است. مطلوب است:

الف) محل تقاطع خط و صفحه را بیابید. ب) زاویه بین خط و صفحه را به‌دست آورید.

$$\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{1}=z+1$$
$$p:x+2y+z+4=0$$

حل : الف) برای حل این تست اگر مساله به صورت تستی مطرح شده بود سریعترین راه‌حل، چک کردن نقاط در معادلات خط و صفحه بود. بدیهی است نقطه‌ای که در هر دو معادله صدق کند محل تقاطع خط و صفحه می‌باشد.

برای حل تشریحی معادله خط را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$\Delta:\begin{cases}x=2t+1\\ y=3-t\\ z=t-1\end{cases}$$

مقادیر z, y, x را به صورت پارامتری در معادله صفحه قرار می‌دهیم تا پارامتر t به‌دست آید.

$$(2t+1)+2(3-t)+(t-1)+4=0\rightarrow t=-10$$

مقدار t را در معادلات خط قرار می‌دهیم تا مقادیر نقطه تلاقی به‌دست آید:

$$x=2(-10)+1=-19$$
$$y=3-(-10)=13$$
$$z=(-10)-1=-11$$

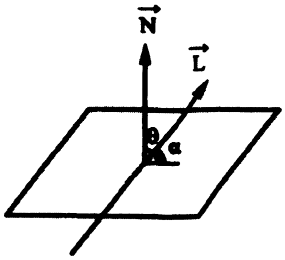
ب) بدیهی است بردار نرمال صفحه $\vec{N}(1,2,1)$ عمود بر صفحه و بردار هادی خط $\vec{L}(2,-1,1)$ موازی خط Δ می‌باشند.

زاویه بین دو بردار به صورت روبرو به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta=\frac{\vec{N}.\vec{L}}{|\vec{N}|\,|\vec{L}|}=\frac{(2)(1)+(2)(-1)+(1)(1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$$
$$\cos\theta=\frac{1}{6}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{1}{6}$$

همان‌طور که در شکل نیز ملاحظه می‌شود زاویه بین خط و صفحه (α) متمم زاویه θ می‌باشد.

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$



مثال: معادله دو صفحه به صورت زیر موجود است.

$$P: x+2y-z+1=0$$
$$Q: 2x+z+3=0$$

الف) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1,2,3)$ بگذرد و با هر دو صفحه فوق موازی باشد.

ب) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک این دو صفحه بگذرد و بر صفحه $R: 3x-y+2z=0$ عمود باشد.

حل: (الف) بدیهی است بردار نرمال‌های دو صفحه P , Q به ترتیب برابر $\vec{N}_1(1,2,-1)$ و $\vec{N}_2(2,0,1)$ می‌باشند. چون خط مذکور با هر دو صفحه موازی است، در نتیجه باید بردار هادی خط بر بردارهای $\vec{N}_1 , \vec{N}_2$ عمود باشد.

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$$

بردار $\vec{N}$ بر هر دو بردار $\vec{N}_1 , \vec{N}_2$ عمود است، در نتیجه همان بردار هادی خط است.

معادله خط: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-4}$

ب) می‌دانیم معادله کلیه دسته صفحاتی که از فصل مشترک دو صفحه P , Q می‌گذرد به صورت $P+kQ=0$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$(x+2y-z+1)+k(2x+z+3)=0 \quad\Rightarrow\quad x(1+2k)+2y+z(k-1)+1+3k=0 \qquad (I)$$

شرط تعامد صفحه I با صفحه $R: 3x-y+2z=0$ عمود بودن بردارهای نرمال آنهاست.

$$(3,-1,2)\ .\ (1+2k,2,k-1)=0$$
$$(3)(1+2k)-(1)(2)+2(k-1)=0\Rightarrow 8k=1\Rightarrow k=\frac{1}{8}$$

حال k را در معادله (I) قرار می‌دهیم:

$$x\left(1+2\times\frac{1}{8}\right)+2y+z\left(\frac{1}{8}-1\right)+1+3\left(\frac{1}{8}\right)=0$$
$$\frac{5}{4}x+2y-\frac{7}{8}z+\frac{11}{8}=0$$

مثال: دو وجه یک مکعب بر روی دو صفحه زیر واقع شده‌اند. مطلوب است حجم این مکعب.

$$\begin{cases} P: 2x+y-3z+1=0 \\ Q: 4x+2y-6z+4=0 \end{cases}$$

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود دو صفحه مذکور موازی هستند:

$$P: 2x+y-3z+1=0$$
$$Q: 2x+y-3z+2=0$$

فاصله بین دو صفحه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L=\frac{|1-2|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

این فاصله همان طول ضلع مکعب است در نتیجه حجم مکعب برابراست با:

$$V=L^3=\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^3$$

دستگاه معادلات خطی

دو مبحث زیر، برای حل دستگاه معادلات خطی برای دستگاه‌های سه معادله و سه مجهول مطرح شده، اما به سادگی برای دستگاه‌های n معادله و n مجهول نیز قابل تعمیم است.

الف) دستگاه معادلات همگن:

به معادلات به فرم زیر که طرف دوم آنها صفر است، همگن گویند.

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

به‌وضوح دیده می‌شود $x=y=z=0$ جوابی برای دستگاه مزبور است که اصطلاحاً به آن جواب بدیهی گفته می‌شود.

ثابت می‌شود، شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه همگن فوق دارای جواب غیربدیهی نیز باشد و به تعبیری بی‌نهایت دسته جواب داشته باشد این است، که دترمینان ضرایب این دستگاه صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$$

مثال: مقدار ثابت k چقدر باشد تا دستگاه معادلات زیر دارای بی‌نهایت دسته جواب گردد؟

$$\begin{cases} (2k+3)x+(3k+1)y=0 \\ -2x+3y=0 \end{cases}$$

حل : برای وجود بی‌نهایت دسته جواب باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 2k+3 & 3k+1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(2k+3)+2(3k+1)=0 \Rightarrow k=\frac{-11}{12}$$

مثال: مقدار ثابت حقیقی m را به‌گونه‌ای بیابید تا دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی نیز باشد؟

$$\begin{cases} 2x+my+z=0 \\ x-3y+(m+1)z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$$

حل :

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & m+1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad 2(-6-m-1)-m(2+m+1)+1(1-3)=0$$

$$\Rightarrow \quad -14-2m-3m-m^2-2=0 \quad \Rightarrow \quad m^2+5m+16=0$$

با تشکیل Δ معادله درجه دوم می‌بینیم:

$$\Delta=25-4(16)<0$$

یعنی معادله موردنظر دارای ریشه حقیقی نمی‌باشد. به این تعبیر، دستگاه معادلات مذکور نمی‌تواند دارای جواب غیربدیهی باشد.

ب) دستور کرامر در حل دستگاه معادلات خطی

دستگاه مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

مطابق روش کرامر، مجهولات این دستگاه را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\boxed{x=\frac{\Delta x}{\Delta}\ ,\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}\ ,\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}}$$

که در آن Δ، دترمینان ضرایب دستگاه است یعنی:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

و Δx , Δy , Δz دترمینان‌های محذوف هستند به‌طوری‌که:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

دقت کنید دو حالت خاص زیر قابل بررسی است:

۱) اگر $\Delta=0$ باشد ولی $(\Delta x\ ,\ \Delta y\ ,\ \Delta z)\neq 0$ باشند، در این حالت، دستگاه مذکور غیرممکن است و یا به تعبیری فاقد جواب می‌باشد.

۲) اگر $(\Delta\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y\ ,\ \Delta z)=0$ باشند، در این حالت دستگاه مذکور مبهم بوده و به تعبیری دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب می‌باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه z از دستگاه زیر:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x-3y+2z=0 \\ 3x+4y+2z=5 \end{cases}$$

حل : مطابق دستور کرامر داریم:

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{7}{-29}$$

مقادیر x , y را به عنوان تمرین محاسبه کنید. $\left(x=\frac{41}{29}\ ,\ y=\frac{9}{29}\right)$

مثال: دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید. مقدار m , k را طوری پیدا کنید تا این دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب باشد.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=k \\ 3x+2y+z=3 \\ mx-y+10z=6 \end{cases}$$

حل : می دانیم برای آنکه دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب باشد باید $\Delta=0$ و $(\Delta x=\Delta y=\Delta z=0)$ باشند.

پس می‌نویسیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & -1 & 10 \end{vmatrix}=0$$

$$2(20+1)+1(30-m)+3(-3-2m)=0\Rightarrow 7m=61\Rightarrow m=\frac{61}{7}$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} k & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 10 \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ k(20+1)+1(30-6)+3(-3-12)=0\Rightarrow 21k=21\Rightarrow k=1$$

فصل چهارم

حد و پیوستگی

تعریف حد

گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حدی معادل ℓ است، هرگاه استلزام منطقی زیر برقرار باشد.

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \;;\; 0<|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x)=L}$$

به همین ترتیب، می‌توان استلزام‌های منطقی برای حدود چپ و راست بیان نمود:

برای حد راست داریم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \,;\, 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x)=L$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \,;\, 0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x)=L$$

مثال: اگر به ازای هر x که $\delta>|1-x|$ آنگاه $\left|\frac{2x^2+x}{x}-3\right|<\frac{1}{5}$ در این صورت مقدار δ را به‌دست آورید؟

حل:

$$\left|\frac{2x^2+x}{x}-3\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow \left|\frac{2x^2+x-3x}{x}\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow \left|\frac{2x^2-2x}{x}\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow |2|\,|x-1|<\frac{1}{5} \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{10}$$

بنابراین داریم: $\delta=\frac{1}{10}$

توجه: می‌گویند تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای حد است هرگاه، در این نقطه دارای حد چپ و راست باشد و این دو حد با هم برابر باشند یعنی: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)=\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

می گویند تابع $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته است هرگاه: $\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{[x^2]}{x} & x<0\\ \left[\cos\dfrac{\pi}{2}(x+1)\right] & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{[x^2]}{x}=\frac{[\text{عدد مثبت بی‌نهایت کوچک}]}{-\varepsilon}=\frac{\text{صفر واقعی}}{-\varepsilon}=0$$

(با توجه به این نکته که می‌دانیم: اگر صفر واقعی $=\lim_{x\to a} f(x)$ باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ باشد بدون هیچ ابهامی داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\cos\frac{\pi}{2}(x+1)\right]=\left[\cos\frac{\pi^+}{2}\right]=[\text{عدد منفی بی‌نهایت کوچک}]=-1$$

$$f(0)=0$$

لذا تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته نمی باشد ولی از چپ پیوستگی دارد.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x}{x}=\frac{\text{صفر واقعی}}{+\varepsilon}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2$$

$$f(0)=2$$

بنابراین تابع موردنظر در نقطه $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

مثال: تابع $f(x)=[x-1]+[-x]$ به ازای کدام مقادیر x ناپیوسته است؟

الف) تمام مقادیر x به جز صفر

ب) فقط در صفر

ج) تمام مقادیر صحیح و مثبت

د) تمام مقادیر صحیح

حل: با توجه به آن‌که:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin z\\ 0 & x\in z\end{cases}$$

لذا چناچه x_0 یک عدد صحیح باشد داریم:

$$\lim_{x\to x_0} = \lim\left(\left[x\right]+\left[-x\right]\right)-1=-2$$
$$f\left(x_0\right)=\left[x_0\right]+\left[-x_0\right]-1=-1$$

یعنی تابع $f\left(x\right)$ در تمام مقادیر صحیح x ناپیوسته می‌باشد.

مثال: نقاط گسستگی تابع $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-\left[\left|x\right|\right]}$ را بیابید.

حل: بدیهی است که صفرهای مخرج کسر، نقاط گسستگی تابع فوق می‌باشند. داریم:

$$1-\left[\left|x\right|\right]=0 \Rightarrow \left[\left|x\right|\right]=1 \Rightarrow 1\le\left|x\right|<2 \Rightarrow \begin{cases} 1\le x<2 \\ -2<x\le -1 \end{cases}$$

مثال: حاصل حد چپ و حد راست تابع $f\left(x\right)=\dfrac{\left[x^2-4\right]}{\left[x\right]^2-4}$ را در مجاورت نقطه $x=2$ به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\left[x^2-4\right]}{\left[x\right]^2-4}=\frac{\left[\varepsilon^+\right]}{\text{صفر واقعی}}=\frac{\text{صفر واقعی}}{\text{صفر واقعی}}$$

دقت کنید صورت و مخرج هر دو صفر واقعی هستند، لذا به‌واسطه صفر شدن مخرج، حد راست اساساً موجود نمی‌باشد.

در بررسی حد چپ داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\left[x^2-4\right]}{\left[x\right]^2-4}=\frac{-1}{1-4}=+\frac{1}{3}$$

مثال: چه تعدادی از نقاط ناپیوستگی تابع $y=\left[\sin^2 x\right]$ دربازه $(-2,2)$ قرار دارد؟

حل: می‌دانیم: $\forall x\in R \;,\; 0\le\sin^2 x\le 1$

بنابراین تابع موردنظر تنها درنقاطی که $\sin^2 x$ معادل یک باشد ناپیوسته خواهد بود، زیرا در بقیه نقاط که $\sin^2 x$ مخالف یک است، مقدار تابع y برابر صفر می‌باشد.

لذا نقاط ناپیوستگی تابع عبارت‌اند از: $\sin^2 x=1 \quad\Rightarrow\quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{2}\,,\pm\frac{3\pi}{2}\,,\dots$

و ملاحظه می‌شود که تنها دو نقطه یعنی نقاط $\pm\frac{\pi}{2}$ در بازه مذکور قرار دارند.

مثال: تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-5} & x\in Q\\[2mm] \dfrac{x}{2x^2+1} & x\notin Q\end{cases}$ در چند نقطه گویا پیوسته است؟

حل: چنانچه تابع مزبور در عدد گویایی مثل x_0 پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{x_0-5}=\frac{x_0}{2x_0^2+1}\Rightarrow 3x_0^2+5x_0+2=0\Rightarrow x_0=-1\,,\,\frac{-2}{3}$$

پس ملاحظه می‌شود تابع مزبور در 2 نقطه گویا پیوسته می‌باشد.

تذکر: اگر توابع $g\,,f$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشند، مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم آنها (در صورت تعریف شدن) پیوسته است.

تذکر: اگر یکی از توابع f و یا g در $x=a$ ناپیوسته باشد، مجموع و تفاضل آنها ناپیوسته ولی ضرب و تقسیم آنها ممکن است پیوسته باشد.

تذکر: اگر توابع $g\,,f$ در نقطه $x=a$ ناپیوسته باشند، در مورد مجموع ، تفاضل ، ضرب و تقسیم آنها اظهارنظر قطعی نمی‌توان کرد.

تذکر: تابع f به معادله $f(x)=\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\ldots}$ ، اگر مخرج ریشه نداشته باشد در R پیوسته است.

تذکر: تابع $f(x)=[ax]$ اگر $a>0$ باشد در نقاطی که ax عدد صحیح باشد، فقط پیوستگی راست و اگر $a<0$ باشد در نقاطی که ax عدد صحیح است، فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال: در تابع $f(x)=2\operatorname{sgn}\left(x^2\right)-3\operatorname{sgn}(x)$ مجموع حد چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ کدام است؟

الف) 0 ب) 2 ج) 4 د) 6

حل: می‌دانیم که در مورد تابع $\operatorname{sgn}(x)$ داریم:

$$\operatorname{sgn}(x)\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

و لذا داریم:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=2(1)-3(1)=-1$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=2(1)-3(-1)=5$$

پس جواب موردنظر $-1+5=4$ خواهد بود.

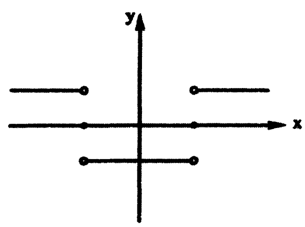
مثال: مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-1\right)$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف تابع $f(x)=\operatorname{sgn}(u(x))$، این تابع زمانی ناپیوسته می‌شود که $u(x)=0$ شود. بنابراین داریم:

$$x^2-1=0\to x=\pm1$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+1\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-1\\ f(1)=0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+1\\ f(-1)=0\end{cases}$$

شکل تابع به صورت زیر است:



قاعده هوپيتال:

هرگاه در محاسبه حد $I=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از صور مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد کنیم، می‌توان حاصل حد را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$I=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

چنانچه مجدداً به حالت مبهم برخورد کنیم، می توان مجدداً از قاعده هوپيتال استفاده کرد تا رفع ابهام نهایی حاصل گردد.

یادآوری: در این قسمت چند نمونه از فرمولهای مشتق که در استفاده از قاعده هوپيتال مفید می‌باشند مطرح می‌شود.

تابع	مشتق
$y=u^n$	$y'=nu'\,u^{n-1}$
$y=a^u$	$y'=u'a^u\ \mathrm{Lna}$
$y=\log_a^u$	$y'=\frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$
$y=\tan u$	$y'=u'\left(1+\tan^2 u\right)$
$y=\mathrm{Arc}\sin u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\mathrm{Arc}\cos u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\mathrm{Arc}\tan u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
$y=\sinh u$	$y'=u'\cosh u$
$y=\cosh u$	$y'=u'\sinh u$
$y=\tanh u$	$y'=u'\left(1-\tanh^2 u\right)$

مثال: حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{xe^x-e}$$

حل:

$$I=\frac{\ln(1+1-1)}{1e^1-e}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x-1}}{e^x+xe^x}=\frac{\frac{3}{1}}{e+e}=\frac{3}{2e}$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^{e^x}-k}{k^x-1}$ را با شرط $(k\neq 1\ ,\ k>0)$ به‌دست آورید.

حل:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{k^{e^x}-k}{k^x-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 0}\frac{e^x k^{e^x}\ln k}{k^x\ln k}=k$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2-\cosh x^2}{x^4}$ را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-\cosh x^2}{x^4}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x^2-2x\sinh x^2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2+\sinh x^2}{-2x^2}$$

با توجه به هم‌ارزی های $\underset{u\to 0}{\sin u}\sim u\ ,\ \underset{u\to 0}{\sinh u}\sim u$ داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2}{-2x^2}=-1$$

مثال: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$I=\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

$$I=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}}{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ باشد. مطلوب است محاسبه a .

حل: حد مذکور باید مبهم به صورت $\dfrac{0}{0}$ باشد با استفاده از قضیه هوپیتال به‌دست می‌آید:

$$I=\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to -3}\frac{a}{-\dfrac{5}{2\times\sqrt{5x+16}}}=\frac{a}{\dfrac{-5}{2}}=\frac{-2a}{5}$$

اما از آنجا که طبق فرض داریم $I=2$ لذا نتیجه می‌شودکه $a=-5$.

مثال: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^3-\left[x^3\right]}{x-3}$ را به‌دست آورید.

حل: وقتی $x\to 3^+$ داریم $\left[x^3\right]=27$ لذا هدف محاسبه حد زیر خواهد بود:

$$I=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 3^+}\frac{3x^2}{1}=27$$

قاعده مشتق گیری از انتگرال (قضیه لایپنیتز):

یادآوری: فرض کنید $\beta(x)$, $\alpha(x)$ دو تابع دلخواه از x باشند. چنانچه داشته باشیم:

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x,t)\,dt$$

می توان ثابت کرد:

$$\boxed{\frac{df}{dx}=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}h(x,t)\right)dt+\beta'(x).h(x,\beta(x))-\alpha'(x).h(x,\alpha(x))}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}dt}{\int_2^{x+1}e^{t^2}dt}$$

مثال: مبهم $I=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^1\frac{e^t}{t}dt}{\int_2^2 e^{t^2}\,dt}=\frac{0}{0}$

$$H: I=\lim_{x\to 1}\frac{0+2x.\frac{e^{x^2}}{x^2}-\frac{e^x}{x}}{0+e^{(x+1)^2}-0}=\frac{2e^1-e}{e^4}=e^{-3}$$

مثال: مقادیر b , a را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=1$$

حل:

$$\lim_{x\to 0} I=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=\frac{0}{b-1}$$

چون قرار است حاصل برابر 1 شود پس باید:

$$b-1=0\to b=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x}}\times\frac{x^2}{1-\cos x}\xrightarrow{H}\lim\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{2x}{\sin x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{2}{1}=1\to a=4$$

مشتق گیری از تابع مرکب:

اگر $f(x), g(x)$ دو تابع دلخواه از x باشند می‌توان نشان داد:

$$y=fog(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2+x+1)+f(2x+1)-2f(3)}{x^3-1}$$

حل:

$$I=\frac{f(3)+f(3)-2f(3)}{1-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)\ \ f'\left(x^2+x+1\right)+2\ \ f'(2x+1)}{3x^2}=\frac{3f'(3)+2f'(3)}{3}=\frac{5}{3}\ \ f'(3)$$

مشتق‌گیری از $y=f(x)^{g(x)}$:

یادآوری: اگر $g(x), f(x)$ دو تابع از x باشند و داشته باشیم $y=f(x)^{g(x)}$ ، برای محاسبه y' می‌توان نوشت:

$$\ln y=g(x)\ln(f(x))$$

$$\frac{y'}{y}=g'(x).\ln(f(x))+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y'=\left(g'(x).\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).\ f(x)^{g(x)}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^{x^2}-2}{x^2-1}$$

حل:

$$I=\frac{(1+1)^1-2}{1^2-1}=\frac{0}{0}\qquad \text{مبهم}$$

ابتدا مشتق تابع $y=(x+1)^{x^2}$ را حساب می‌کنیم و بعد با استفاده قاعده هوپیتال به رفع ابهام حد مورد نظر می‌پردازیم.

با فرض $y=(x+1)^{x^2}$ داریم:

$$\ln y=x^2\ln(x+1)$$

$$\frac{y'}{y}=2x\ln(x+1)+x^2\frac{1}{1+x}$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x.\ln(x+1)+x^2\frac{1}{x+1}\right)(x+1)^{x^2}}{2x}=\frac{\left(2\ln 2+\frac{1}{2}\right)(2)^1}{2(1)}=2\ln 2+\frac{1}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر $I=\lim\limits_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$:

حل: با فرض $y=(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ داریم:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(\cosh x)\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(\cosh x)\right)=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ و $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ داریم:

$$\xrightarrow{H}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\Rightarrow y=e$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

حل: با فرض $y=(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ داریم:

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln\sin x \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\ln y)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)}\right)=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

با توجه به هم‌ارزی $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x}=1 \Rightarrow y=e$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x)^{\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{4}}$$

حل:

$$I=\frac{1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

با فرض $y=\tan x^{\cos x}$ داریم:

$$\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{y'}{1}$$

$$y=\tan x^{\cos x}\to \ln y=\cos x\ln(\tan x)\to \text{مشتق} \to \frac{y'}{y}=(-\sin x)(\ln(\tan x))+(\cos x)\left(\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right)$$

در $x=\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\frac{y'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{y\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\ln(1)+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1+1}{1}\to y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}y'=\sqrt{2}$$

نکته: بسیاری از حدهای مبهم به فرم $\infty-\infty$ یا $0\times\infty$ را می‌توان به سادگی به یکی از حالات $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرد و با اعمال قاعده هوپیتال به رفع ابهام آنها پرداخت.

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$$

حل:

$$I=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\infty-\infty \quad \text{مبهم}$$

با استفاده از قاعده هوپیتال و هم‌ارزی $\left(\underset{u\to0}{\tan u\sim u}\right)$ داریم:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2}\xrightarrow{H}I=\lim_{x\to0}\frac{1+\tan^2x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

حل: می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}\quad \xrightarrow{H}\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\times\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\xrightarrow{H}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)$$

حل: $I=\infty-\infty$ مبهم

با توجه به این هم‌ارزی که داریم: $\underset{n\to\infty}{\sqrt[k]{n+a}\sim\sqrt[k]{n}}$

$$I=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right).\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2n+1}\ .\ \frac{(n+2)-(n+3)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}\right)\times(-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}\quad \text{هم ارزی}\quad \to=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2n}\right)\times(-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. می‌دانیم به ازای $x=0$ داریم $y=0$ مطلوب است حاصل حد:

$$y'=\frac{x}{x^2y+y^3}\qquad\qquad I=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y^2}$$

حل:

$$I=\lim_{x\to0\ ,\ y\to0}\frac{x^2}{y^2}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}\quad \xrightarrow{\text{هوپیتال}}I=\lim_{x\to0\ ,\ y\to0}\frac{2x}{2yy'}=\lim\frac{x}{y\times\frac{x}{x^2y+y^3}}$$

$$=\lim\frac{x}{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0\ ,\ y\to0}x^2+y^2=0$$

هم‌ارزی‌ها

تعریف هم‌ارزی: هرگاه $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ و نیز داشته باشیم:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ ، آنگاه می‌گوییم دو تابع $g(x),f(x)$ در نقطه x_0 هم‌ارزند و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\sim\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

به بیان ساده‌تر زمانی که x به سمت نقطه x_0 میل می‌کند $(x\to x_0)$ می‌توان از تابع $g(x)$ بجای تابع $f(x)$ استفاده کرد و مساله را حل نمود (و یا می‌توان از $f(x)$ بجای $g(x)$ استفاده نمود). البته در استفاده از قاعده هم‌ارزی ذکر این نکته ضروری است، که هرگاه در مساله‌ای از یک قاعده هم‌ارزی استفاده کردیم و هم‌ارز عبارتی را نوشتیم، چنانچه در کنار این عبارت دقیقاً قرینه آن وجود داشته باشد، استفاده از قاعده هم‌ارزی حاصل در مساله مجاز نمی‌باشد.

در ادامه تعدادی از قضایای هم‌ارزی که در حل مسایل کمک زیادی می‌کنند معرفی می‌گردد.

هم‌ارزی‌های مثلثاتی:

هرگاه $A(x)\to 0$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin A(x)\sim A(x)\\ \tan A(x)\sim A(x)\\ \sin^{-1}A(x)\sim A(x)\\ \tan^{-1}A(x)\sim A(x)\end{array}}$$

وقتی $A(x)\to 0$ میل می‌کند داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin A(x)\sim A(x)-A^3(x)/6\\ \tan A(x)\sim A(x)+A^3(x)/3\\ \operatorname{Arc}\sin A(x)\sim A(x)+A^3(x)/6\\ \operatorname{Arc}\tan A(x)\sim A(x)+A^3(x)/3\\ \cos(A(x))\sim 1-\dfrac{A^2(x)}{2}\end{array}}$$

هم‌ارزی جزء صحیح‌ها:

در مورد جزء صحیح‌ها وقتی که $A\to\infty$ میل می کند داریم:

$$\boxed{[A]\sim A}$$

رابطه برنولی: روابط زیر، به روابط برنولی موسوم‌اند، وقتی $A(x)\to 0$ میل می‌کند داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[m]{1+A(x)}\sim 1+\dfrac{1}{m}A(x)\\ (1+A(x))^m\sim 1+mA(x)\end{array}}$$

هم‌ارزی نیوتن:

رابطه زیر به هم‌ارزی نیوتن موسوم است. وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند داریم:

اگر p زوج باشد $\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} \sim \sqrt[p]{a}\left|x + \frac{b}{pa}\right|$
اگر p فرد باشد $\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots\dots} \sim \sqrt[p]{a}\left(x + \frac{b}{pa}\right)$

هم‌ارزی‌های جبری:

وقتی $x \to 0$ هر کثیرالجمله‌ای از x ، هم‌ارز با کوچکترین درجه x در آن جمله می‌باشد.

برای مثال:

$$\underset{x \to 0}{x^5 - x^4 - x^2 \sim -x^2}$$

وقتی $x \to +\infty$ هرکثیرالجمله‌ای از x ، هم‌ارز با بزرگترین درجه x در آن جمله است.

برای مثال:

$$\underset{x \to +\infty}{x^5 - x^4 - x^2 \sim x^5}$$

مثال: مقادیر حدهای زیر را بیابید.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + \tan 2x}{2x - \tan^{-1} x} = \dfrac{0}{0} \to \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + 2x}{2x - x} = 5$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim \dfrac{x - x}{x^3}$

دقت شود که نمی‌توان از قاعده هم‌ارزی $\tan x \sim x$ استفاده کرد. چون طبق نکته بالا بعد از نوشتن هم‌ارزی، قرینه آن دقیقاً در کنار آن وجود دارد.

راه‌حل اول: از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{3x^2} = \frac{-1}{3}$$

راه حل دوم: راه‌حل ساده‌تر استفاده از هم‌ارزی $\tan x - x \sim \dfrac{x^3}{3}$ (وقتی $x \to 0$ میل می‌کند) می‌باشد.

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{-x^3} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} I = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

3) $I = \lim\limits_{x \to 0} (\sin 2x - x) \cdot \left[\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right]$

طبق قاعده هم‌ارزی $\underset{f(x) \to \infty}{[f(x)] \sim f(x)}$ داریم:

$$\text{هم‌ارزی} \to L = \lim_{x \to 0} (2x - x) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right) = \sqrt{3}$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\ .\sin^2 x}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^2\sin^2 x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{(x+x)(\sin x-x)}{x^2\times x^2}=\frac{(2x)\left(\frac{-x^3}{6}\right)}{x^4}=-\frac{1}{3}$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\infty-\infty$$ مبهم

طبق قاعده هم‌ارزی نیوتن داریم:

$$\longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x-\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$ مبهم

با استفاده از قاعده هم‌ارزی $\left(\left(\underset{x\to 0}{1-\cos x}\right)\sim\frac{x^2}{2}\right)$ داریم:

$$\longrightarrow=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}$$

بنابراین باید دو حالت را در نظر گرفت:

$$\begin{cases}\text{حد راست} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}(x)}=\sqrt{2}\\[2ex] \text{حد چپ} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}(-x)}=-\sqrt{2}\end{cases}$$

لذا چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند، حد مزبور موجود نیست.

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{1-(1+x)^5}=\frac{0}{0}$$ مبهم

طبق هم‌ارزی برنولی داریم:

$$\longrightarrow=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x-1}{1-(1+5x)}=\frac{\frac{1}{3}x}{-5x}=\frac{-1}{15}$$

$$8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

می‌دانیم که مجموع مقابل یک تصاعد حسابی است. پس می‌توان نوشت:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}\longrightarrow=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

$$9)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\text{Arc}\sin x^4}=\frac{0}{0}$$ مبهم

با توجه به قاعده‌های هم‌ارزی $\left(\text{Arc}\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\right)$, $\left(1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\right)$ می‌توان نوشت:

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4}=\frac{1}{8}$$

مثال: حاصل حد $I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+}}}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

با استفاده از قاعده هم‌ارزی می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

نکته: مرتبه بی‌نهایت:

در محاسبه بسیاری از حدها دانستن مرتبه بی‌نهایت‌های موجود در مساله، تحلیل آن را بسیار ساده می‌کند. لذا در رابطه با برخی بی‌نهایت‌ها و شدت و ضعف آنها نسبت به یکدیگر، بجاست موارد زیر بیان شود:

۱) از نظر شدت و مرتبه بزرگی بی‌نهایت‌ها وقتی $x\to+\infty$ به ترتیب داریم:

$$\boxed{x^x >> x! >> a^x >> x^b >> \ln x}$$

(که در اینجا b عدد مثبت حقیقی و $a>1$ است).

۲) وقتی $x\to+\infty$ و داشته باشیم $a>b>1$، آنگاه داریم:

$$\boxed{a^x >> b^x}$$

۳) وقتی $x\to 0^+$ و داشته باشیم $a>1$, $b>c>0$ آنگاه، داریم:

$$\boxed{x^c >> x^b >> a^{-\frac{1}{x}}}$$

مثال: مطلوب است حاصل حد زیر:

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5^n}=5$$

حل: بدیهی است $\underset{n\to\infty}{2^n < 3^n < 5^n}$ پس داریم:

مثال: مطلوب است حاصل حد زیر:

$$I = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x^2 + e^x}$$

حل: می‌دانیم $\underset{n\to\infty}{x^2 < e^x}$ پس داریم:

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x^2 + e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ پس می‌توان نوشت:

$$I = \lim_{x\to-\infty} \frac{x.e^{\frac{x}{2}}}{x^2 + e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x^2} = 0$$

مثال: حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\frac{1}{x}} + 4x}{2x + 5^{\frac{1}{x}}}$$

حل: بررسی حد راست:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} + 4x}{2x + 5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

بررسی حد چپ:

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} 5^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}} + 4x}{2x + 5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{2x} = 2$$

بنابراین حد موجود نمی باشد.

مثال: حاصل حد زیر را بیابید.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2} - 3^n - 5}{3^{n+1} + 3^n - 1}$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2 \times 3^n - 3^n - 5}{3^1 \times 3^n + 3^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\times 3^n - 5}{4\times 3^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\times 3^n}{4\times 3^n} = 2$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر: $(n > 0)$

$$I = \lim_{x\to 0^+} x^n e^{\frac{1}{x}}$$

حل:

$$I=\lim_{x\to 0^+} x^n e^{\frac{1}{x}}=0\times e^{+\infty}=0\times\infty$$ مبهم

با تغییر متغیر $x=\frac{1}{T}$ داریم:

$$I=\lim_{T\to+\infty}\frac{e^T}{T^n}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

اما چون مرتبه بی‌نهایت e^T از T^n بالاتر است، لذا نتیجه می‌شود $I=\infty$

نکته: هرگاه $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ باشد و تابع g(x) در مجاورت نقطه x_0 کراندار باشد (محدودیت داشته باشد)، می‌توان ثابت کرد:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$$

بیان بدیهی: اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ برابر صفر واقعی باشد و $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ باشد داریم: $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$ (بدون هیچ ابهامی)

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}$$

حل:

$$\forall x\neq 0\Rightarrow -1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$$

می‌دانیم تابع $\sin\frac{1}{x}$ تابعی کران‌دار است:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0\times(\text{عبارت کراندار})=0$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]=\left[0^+\right]=0\ \text{واقعی}$$

$$I=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]=+\infty\times 0\ \text{واقعی}=0$$

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x^2+2x+1}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) صفر ج) 1 د) موجود نیست.

حل: از آنجائی‌که $0\le x-[x]<1$. بنابراین کران‌دار است:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x^2+2x+1}=\frac{\text{کراندار}}{\infty}=0$$

صور مبهم نمایی و رفع ابهام:

همان‌طور که می دانیم وضعیت‌های $1^{\infty}, 0^0, \infty^0, 0^{\infty}$ به صور مبهم نمایی موسوم هستند و چنانچه در مسئله‌ای به یکی از این وضعیت ها برخورد کنیم، مسئله نیاز به رفع ابهام دارد.

چنانچه در محاسبه حد مقابل:

$$I = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$$

به یکی از صور مبهم فوق الذکر برخورد کردیم، قاعده کلی آن است که از دو طرف رابطه فوق $(\ln)$ بگیریم. بدین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\ln I = \lim_{x \to a} g(x).\ln f(x)$$

حال کافی است حد ایجاد شده در سمت راست تساوی فوق را رفع ابهام کنیم، بدین ترتیب $\ln I$ به‌دست می آید و از آن I قابل محاسبه است.

نکته: اگر d, c, b, a اعداد ثابت حقیقی باشند، در این صورت حد زیر که البته مبهم از نوع 1^{∞} می باشد:

$$I = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x+b}\right)^{cx+d}$$

پس از رفع ابهام به صورت زیر خواهد بود:

$$I = e^{ac}$$

مثال: حاصل حد زیر کدام است؟

$$\lim_{x \to +\infty} (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$$

حل: با توجه به این نکته که می‌دانیم $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ داریم:

$$I = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

از آنجا که $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ لذا خواهیم داشت:

$$I = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{2^{\frac{1}{x}}} = \frac{e}{2^{0^+}} = e$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x-1}$$

حل:

$$\lim_{x \to \infty} I = 1^{\infty} \text{ مبهم}$$

$$I = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+3}\right)^{3x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-2}{x + \frac{3}{2}}\right)^{3x-1} = e^{-2\times 3} = e^{-6}$$

مثال: مقدار c را طوری تعیین کنید که حاصل حد زیر برابر 4 شود.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=4$$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{x}=e^{2c}$$

$$e^{2c}=4\Rightarrow 2c=\ln 4\Rightarrow c=\frac{\ln 4}{2}\Rightarrow c=\ln 2$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{3}{x}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{3}{x}}=1^{\infty}\ \text{مبهم}$$

از تغییر متغیر $x=\frac{1}{T}$ استفاده می کنیم: (استفاده از قاعده هم ارزی $\lim\limits_{u\to 0}u \sim \lim\limits_{u\to 0}\sin u$)

$$=\lim_{T\to\infty}\left(1+\sin\frac{4}{T}\right)^{3T}=\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{4}{T}\right)^{3T}=e^{4\times 3}=e^{12}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

حل:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}\ \text{مبهم}$$

با توجه به قاعده هم‌ارزی $\left(\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x-\frac{x^3}{6}\right)$ که از بسط مک‌لوران تابع $\sin x$ به‌دست می‌آید داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

با تغییر متغیر $x^2=\frac{1}{T}$ داریم:

$$I=\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{1}{6}}{T}\right)^{T}=e^{-\frac{1}{6}}$$

توجه: به چند مثال زیر که در آنها، رفع ابهام صورت مبهم نمایی بااستفاده از قاعده کلی انجام شده است توجه کنید:

1) $I=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$ مبهم

حل: ابهام را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\ln I=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\ln I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\ .\ \cos x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x\ .\ \cos x}=\frac{-1}{2}\Rightarrow I=e^{\frac{-1}{2}}$$

2) $I=\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)^{(x-1)}=0^0$ مبهم

حل:

$$\ln I=\lim_{x\to 1}(x-1)\ln(x^2+x-2)=0\times\infty$$

صورت مبهم را به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده، سپس از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\ln I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+x-2)}{\frac{1}{x-1}}\xrightarrow{H}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x-2}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)^2}{-(x^2+x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)^2}{-(x-1)(x+2)}$$

$$\ln I=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)\ (x-1)}{-(x+2)}=0\Rightarrow\ln I=0\Rightarrow I=e^0=1$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to+\infty}(1+4x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

حل:

$I=(+\infty)^{\frac{1}{+\infty}}=+\infty^0$ مبهم

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}.\ln(1+4x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+4x)}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{H}$$

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{1+4x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{1+4x}=1\ \Rightarrow\ \ln I=1\to I=e^1$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$$

حل:

$I=1^\infty$ مبهم

$$\Rightarrow\ \ln I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\times\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}\xrightarrow{H}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{-2(1+\cot^2 2x)}=\frac{2}{-2(1+0)}=-1\ \Rightarrow\ I=\frac{1}{e}$$

فصل پنجم

مشتق

تعاریف اولیه

مشتق و برخی مسائل مربوط به آن

تعریف مشتق تابع در یک نقطه: می گویند تابع $f(x)$ در نقطه $x=x_0$ مشتق‌پذیر است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) در این نقطه پیوسته باشد.

۲) حد زیر موجود باشد.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

که در صورت موجود بودن حد فوق، به آن مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 گفته و با علامت $f'(x_0)$ نشان داده می‌شود.

که معنای هندسی آن این است که، خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای شیبی معادل $f'(a)$ می‌باشد.

توجه کنید اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، حتماً در آن نقطه پیوسته خواهد بود.

مشتق چپ و راست تابع را نیز می‌توان تعریف نمود. به عنوان مثال، تعریف مشتق راست یک تابع در نقطه $x=a$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

و به همین ترتیب می‌توان مشتق چپ تابع را نیز تعریف کرد.

مشتق تابع $f(x)$ در نقطه متعلق به دامنه تعریفش به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثال: مطلوب است بررسی پیوستگی و مشتق پذیری تابع $f(x)=(1+x)[x]$ در نقطه $x=-1$.

حل: ابتدا به بررسی پیوستگی در $x=-1$ می‌پردازیم:

الف) بررسی حد راست:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1+x)[x]$$
$$\lim_{x\to -1^+} -1<x<0\Rightarrow [x]=-1$$
$$\lim_{x\to -1^+}(x+1)\times -1=0$$

ب) بررسی حد چپ:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1+x)[x]$$
$$\lim_{x\to -1^-} -2<x<-1\Rightarrow [x]=-2$$
$$\lim_{x\to -1^-}(x+1)\times -2=0$$

ج) بررسی مقدار تابع:

$$f(-1)=0\times -1=0$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)$$

پس اولین شرط را برای مشتق پذیری دارا می‌باشد. یعنی تابع پیوسته می‌باشد.

بررسی مشتق چپ و راست:

الف) مشتق راست:

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)\ \ [x]-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}[x]=-1$$
$$(-1<x<0\Rightarrow [x]=-1)$$

ب) مشتق چپ:

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)\ \ [x]-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}[x]=-2$$
$$(-2<x<-1\Rightarrow [x]=-2)$$

پس این تابع در نقطه $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(-1)\neq f'_-(-1)$$

مثال: تابع زیر مفروض است. راجع به $f'(0)$, $f''(0)$ اظهار نظر کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 .\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

حل: ابتدا بررسی پیوستگی در نقطه $x=0$ می پردازیم:

ملاحظه می‌شود طبق قضیه ساندویچ حد چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ برابر صفر می‌باشد.

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\end{matrix}\right\}\to \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

پس تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است.

- بررسی $f'(0)$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

- بررسی $f''(0)$: از تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم و ضابطه $f'(x)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=\begin{cases}2x.\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

بررسی پیوستگی تابع $f'(x)$ در $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

برای تابع $f'(x)$ چون $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ موجود نیست، بنابراین تابع $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست و تابع $f(x)$ در $x=0$ مشتق دوم نـدارد. پس $f''(0)$ موجود نمی‌باشد.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}2x^3-5x-2 & x\geq 1\\ x^2+2x & x<1\end{cases}$ مفروض است. چنانچه در منحنی این تابع در همسایگی نقطه $x=1$ دو خط مماس رسم کنیم، زاویه بین این دو خط چه مقدار است؟

حل:

$$f'(1^+)=\left(2x^3-5x-2\right)'=\left(6x^2-5\right)\Big|_{x=1}=1=m_1$$

$$f'(1^-)=\left(x^2+2x\right)'=(2x+2)\Big|_{x=1}=4=m_2$$

با استفاده از رابطه $\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ داریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{4-1}{1+4}\right|\Rightarrow\alpha=\tan^{-1}\frac{3}{5}$$

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+x & x\geq 1\\ ax+b & x<1\end{cases}$ ، $f'(1)$ وجود دارد. مطلوب است محاسبه a,b.

حل: پیوستگی تابع در نقطه $x=1$ نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 1^+}\left(x^3+x\right)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)\Rightarrow a+b=2$$

وجود مشتق تابع در $x=1$ نتیجه می‌دهد:

$$f'(x)\big|_{x=1^+}=f'(x)\big|_{x=1^-}\Rightarrow\frac{d\left(x^3+x\right)}{dx}\bigg|_{x=1^+}=\frac{d(ax+b)}{dx}\bigg|_{x=1^-}\Rightarrow a=4$$

با جایگذاری در معادله قبل به‌دست می‌آید: $b=-2$

مثال: اگر $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=\sqrt{x}$ باشد. مقدار مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

حل:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2f'(x+2h)+f'(x-h)}{1}=3f'(x)=\sqrt{x}\to f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{3}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{3}$$

حال به محاسبه مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ می‌پردازیم:

$$y=f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y'(1)=-1\times f'(1)=-\frac{1}{3}$$

مثال: اگر برای $|x|<1$، داشته باشیم: $x\le f(x)\le x+x^2$ مقدار $f'(0)$ را به‌دست آورید.

حل: به ازای $x=0$ داریم:

$$0\le f(0)\le 0+0^2\Rightarrow f(0)=0$$

بنابراین برای هر $|x|<1$ داریم:

$$x\le f(x)\le x+x^2\Rightarrow x\le f(x)-f(0)\le x+x^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x+x^2}{x} & , \quad x>0\\ \frac{x+x^2}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x}{x} & , \quad x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1\le f'(x)\le 1+x & , \quad x>0\\ 1+x\le f'(x)\le 1 & , \quad x<0\end{cases}$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ داریم:

$$f'(0)=1$$

مثال: تابع f در رابطه $f(x+y)=f(x)f(y)+4xy$ صدق می‌کند. چنانچه داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=2$ و اگر حاصل $f'(x)$ به فرم $f'(x)=af(x)+bx$ باشد. مطلوب است مقادیر a , b.

حل: طبق تعریف مشتق و با استفاده از خواص تابع f داریم:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)+4x\Delta x-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\frac{4x\,\Delta x}{\Delta x}=2f(x)+4x$$

در نتیجه داریم:

$$b=4\ ,\ a=2$$

مشتق گیری از توابعی به فرم $y=u(x)^{v(x)}$

برای مشتق‌گیری از توابعی به فرم $y=u(x)^{v(x)}$ (v , u توابعی از x هستند) می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$y=u^{v} \Rightarrow \ln y = v\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'\ln u + v\times\frac{u'}{u}$$

و بدین ترتیب y' محاسبه می شود:

$$y' = \left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right)u^{v}$$

مثال: مشتق تابع $y=(\tan x)^{\cos x}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ چه مقدار است؟

$$\ln y = \cos x \times \ln(\tan x) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \left(-\sin x \ln(\tan x) + \cos x \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right) \Rightarrow$$

$$y' = \left(-\sin x \ln(\tan x) + \cos x \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right)(\tan x)^{\cos x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\ln(1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1+1}{1}\right)(1)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

محاسبه مشتق مرتبه n ام

اگر u , v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، مشتق مرتبه nام تابع uv از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)}\ v^{(i)}}$$

که در آن $v^{(i)}$ بیانگر مشتق iام تابع است و $\binom{n}{i}$ که ترکیب i از n است به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

در بسیاری از مسایل بدون نیاز به رابطه بالا با چند بار مشتق‌گیری از توابع، می‌توانیم به یک قاعده کلی برسیم. گاهی برای رسیدن به یک مشتق‌گیری آسان، نیاز داریم ابتدا مساله را ساده‌سازی نماییم.

مثال: تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ مفروض است. مطلوب است $f^{(n)}(0)$.

حل: ابتدا تابع $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

با چند بار مشتق‌گیری از تابع می‌توان به سادگی به رابطه زیر دست یافت:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0) = -n! + (-1)^n n! = n!\left((-1)^n - 1\right)$$

مثال: مطلوب است مشق دوازدهم تابع $y = x\sin x$ به ازای $x = \pi$:

حل: با توجه به رابطه بیان شده می‌توان نوشت:

$$y^{(12)} = \binom{12}{0}(\sin x)^{12}\ x^{(0)} + \binom{12}{1}(\sin x)^{(11)}\ x^{(1)} + \binom{12}{2}(\sin x)^{(10)}\ x^{(2)} + \ldots$$

ملاحظه می‌شود از جمله سوم به بعد در سمت راست معادله، صفر می‌باشد. پس داریم:

$$= \frac{12!}{12!}\sin x + \frac{12!}{1!(12-1)!}(-\cos x)(1) = \sin x - 12\cos x$$

$$y_{(\pi)}^{(12)} = 12$$

کاربرد مشتق در تعیین وضعیت صعودی و نزولی تابع و یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع:

همان‌طوری‌که می دانیم اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع در این فاصله را می توان با توجه به علامت مشتق اول تعیین کرد. بدین معنا که هر کجا $f'(x) > 0$ باشد، تابع در آن فاصله اکیداً صعودی و هر کجا $f'(x) < 0$ باشد، تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است و با توجه به این معنا می توان نقاط اکسترمم نسبی یک تابع را مشخص کرد. بدین صورت که می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای اکسترمم نسبی است هرگاه:

۱) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۲) علامت $f'(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر کند.

کاربرد مشتق در تعیین وضعیت تحدب و تقعر تابع و یافتن نقاط عطف یک تابع:

همان‌طوری‌که می دانیم هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، با توجه به علامت مشتق دوم تابع، می‌توان وضعیت تقعر و تحدب آنرا مشخص کرد. بدین معنا که:

۱ـ هر کجا $f''(x) > 0$ باشد، تقعر تابع به سمت بالا است.

۲ـ هر کجا $f''(x) < 0$ باشد تقعر تابع به سمت پایین است.

و البته با توجه به این معنا می توان نقاط عطف تابع را مشخص کرد. بدین ترتیب که می گوییم تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای نقطه عطف است هرگاه:

الف) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ب) تابع در این نقطه دارای خط مماس منحصر به فرد باشد.

ج) علامت $f''(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر کند (یعنی جهت تقعر و تحدب تابع عوض شود).

مثال: در مورد تابع با ضابطه $f(x) = e^x + x - \cos x$ کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) یک ماکزیمم و دو مینیمم دارد. ب) نزولی است.

ج) دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد. د) صعودی اکید است.

حل:

$$f'(x) = e^x + 1 + \sin x$$

از آنجا که $-1 \le \sin x \le +1$ می‌باشد. پس $f'(x)$ همواره مثبت است، لذا گزینه (د) صحیح است.

مثال: تابع $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ دارای چند ماکزیمم و مینیمم است؟

حل: بدیهی است دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و این تابع همواره پیوسته است.

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\,\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3x+2(x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	∞	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

نقاط بحرانی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{x}=0\Rightarrow x=0$$

$$5x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

پس تابع دارای یک ماکزیمم در $x=0$ و یک مینیمم در $x=\frac{2}{5}$ می‌باشد.

مثال: تابع $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ چند اکسترمم نسبی و نقطه عطف دارد؟

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=-\frac{x+2}{x^3}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$-$	
f			

لذا تابع مذکور در دامنه خود اکیداً صعودی بوده و اکسترمم نسبی ندارد و تقعر آن همواره به سمت پایین بوده و نقطه عطف نیز ندارد.

مثال: تابع $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ مفروض است، مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق این تابع را به‌دست آورید.

حل: با توجه به وضعیت خاص تعریف تابع $f(x,y)$ می‌توان با فرض $x^2+y^2=t$ رفتار این تابع را از طریق رفتار تابع یک متغیره زیر ارزیابی کرد:

$$f(t)=te^{-t}\quad,\quad t\geq 0$$

$$f'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow t=1$$

$$f(1)=1e^{-1}=\frac{1}{e}$$

t	0		1		$+\infty$
f'		+		−	
f		↗		↘	

ماکزیمم **مطلق** تابع $\frac{1}{e}$ می‌باشد.

$$f(0)=0e^{-0}=0$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

مینیمم **مطلق** تابع 0 می‌باشد.

تذکر: هرگاه در معادله $f(x)=0$، معادله دارای ریشه مکرر رتبه زوج باشد، این ریشه طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم نسبی خواهد بود به‌طوری‌که، **اگر** عرض نقاط مجاور **این** ریشه مثبت باشد، نقطه مینیمم، و اگر منفی باشد، نقطه ماکزیمم است و اگر معادله $f(x)=0$ دارای ریشه مکرر مرتبه فرد باشد، **این** ریشه طول نقطه عطف منحنی است.

مثال: در **تابع** $y=\frac{(x+a)^3}{x^2}$ **نقطه** $x=1$ متناظر با نقطه عطف است. مقدار a کدام است؟

حل: راه حل اول:

$$y'=\frac{3(x+a)^2x^2-2x(x+a)^3}{x^4}=\frac{x^3-3a^2x-2a^3}{x^3}$$

$$y''=\frac{\left(3x^2-3a^2\right)x^3-3x^2\left(x^3-3a^2x-2a^3\right)}{x^6}=\frac{6a^2(x+a)}{x^4}$$

از آنجا که **در** نقطه عطف $x=1$، مشتق دوم باید تغییر علامت دهد پس $x=1$ ریشه عبارت $x+a$ باشد یعنی خواهیم داشت: $a=-1$

راه حل دوم: طبق نکته گفته شده **داریم** $x=-a$ چون ریشه مکرر مرتبه فرد است، پس این نقطه‌ی عطف است. پس: $a=-1$.

مثال: نقاط **اکسترمم** و عطف تابع $f(x)=e^{-x^2}$ را، در صورت وجود، بیابید.

حل:

$$y=e^{-x^2}$$

$$y'=-2xe^{-x^2}$$

$$y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

با توجه به **این** نکته که می‌دانیم دامنه تابع مقادیر حقیقی است، می‌توان نوشت:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
y'		+	+	0	−	−
y''	+		0	−	0	+

لذا تابع در **نقطه** $x=0$ دارای **ماکزیمم** نسبی و در $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ دارای عطف است.

مثال: اگر نقطه عطف منحنی $y=x^3+mx^2$ بر روی خط $y=2x$ واقع شده باشد. مقدار m را به‌دست آورید.

حل:

$$y'=3x^2+2mx$$
$$y''=6x+2m$$

در نقطه عطف لازم است داشته باشیم $y''=0$ بنابراین داریم:

$$6x+2m=0 \Rightarrow x=\frac{-m}{3} \quad (I)$$

و طبق فرض مساله $x=\frac{-m}{3}$ را در معادله $y=2x$ قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{-2m}{3} \qquad (II)$$

مقادیر (I) , (II) به‌دست آمده را در معادله تابع قرار می‌دهیم:

$$\frac{-2m}{3}=\frac{-m^3}{27}+\frac{m^3}{9} \Rightarrow -18m=2m^3 \Rightarrow 2m\left(m^2+9\right)=0 \Rightarrow m=0$$

قضیه آزمون مشتق دوم:

اگر $f'(a)=0$ باشد، می‌توان گفت:

الف) اگر $f''(a)>0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای min نسبی است.

ب) اگر $f''(a)<0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای max نسبی است.

ج) اگر $f''(a)=0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ ممکن است دارای max یا min نسبی و یا نقطه عطف باشد (آزمون بی‌نتیجه است).

مثال: معادله دیفرانسیل همراه با شرایط کمکی روبرو را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y^2y''+x^2\cos y'+(x+1)y=0 \\ y(1)=3\ ,\ y'(1)=0 \end{cases}$$

نقطه $x=1$ برای جواب این معادله دیفرانسیل:

الف) یک max نسبی است. ب) یک min نسبی است. ج) یک عطف است. د) یک نقطه معمولی است.

حل: با توجه به این نکته که $y'(1)=0$ است، متوجه می‌شویم که نقطه $x=1$ برای این تابع یک نقطه معمولی نیست و با بررسی این معادله دیفرانسیل در نقطه $x=1$ خواهیم داشت:

$$y^2(1).y''(1)+1.\cos y'(1)+(1+1).y(1)=0 \Rightarrow 9.y''(1)+1+6=0 \Rightarrow y''(1)=\frac{-7}{9}$$

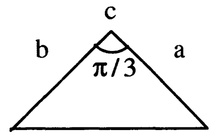
پس $y(x)$ در نقطه $x=1$ دارای max نسبی است و گزینه (الف) صحیح است.

نسبت‌های وابسته:

ممکن است یک کمیت به چندین متغیر وابسته باشد و لذا با تغییر کردن آن متغیرها، کمیت موردنظر نیز تغییر می کند. برای اینکه مشخص شود نحوه تغییرات کمیت موردنظر چگونه است، کافی است ارتباط این کمیت را با متغیرهای مذکور نوشته و با استفاده از مفهوم مشتق (که بیانگر تغییرات لحظه ای است) معلوم کنیم که تغییرات متغیرهای مربوط، کمیت مذکور را چگونه تغییر می دهد.

مثال: دو ضلع مثلثی به ترتیب $b=4m$, $a=5m$ بوده و زاویه بین این دو ضلع $\hat{c}=\frac{\pi}{3}$ می باشد. چنانچه ضلع a دارای طول ثابتی بوده و ضلع b با سرعت $1\frac{m}{s}$ در حال بزرگ شدن و زاویه c با سرعت $1\frac{rad}{s}$ در حال کم شدن باشد، سرعت تغییرات مساحت این مثلث را به‌دست آورید.

حل:



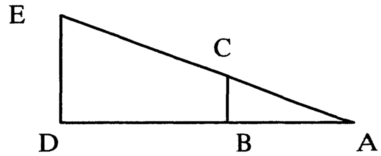
$$\left.\begin{array}{ll} a=5m & \frac{da}{dt}=0 \\ b=4m & \frac{db}{dt}=1\frac{m}{s} \\ \hat{c}=\frac{\pi}{3} & \frac{dc}{dt}=-1\frac{rad}{s} \end{array}\right\} \frac{ds}{dt}=?$$

$$s=\frac{1}{2}a.b.\sin c=\frac{5}{2}b.\sin c$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{5}{2}\left(\frac{db}{dt}.\sin c+\frac{dc}{dt}.b.\cos c\right)=\frac{5}{2}\left(1\times\sin\frac{\pi}{3}+(-1).(4).\cos\frac{\pi}{3}\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right)=-2.83\frac{m^2}{s}$$

مثال: اندازه قد مردی $180cm$ می باشد، این مرد با سرعت $3\frac{m}{s}$ در حال دور شدن از تیر چراغ برق با ارتفاع $540cm$ است. سرعت حرکت سایه این مرد را به‌دست آورید:

$$\left.\begin{array}{l} BC=180cm \\ DE=540cm \\ \frac{d(BD)}{dt}=3\frac{m}{s} \\ \frac{d(AD)}{dt}=?\frac{m}{s} \end{array}\right\} \text{فرضیات:}$$



با توجه به دو مثلث ADE , ABC می توان نوشت:

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD} \rightarrow \frac{180}{540}=\frac{AD-BD}{AD} \rightarrow 3(AD-BD)=AD \rightarrow$$

$$AD=\frac{3}{2}BD \rightarrow \frac{d(AD)}{dt}=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}(BD)=\frac{3}{2}(3)=\frac{9}{2}\frac{m}{s}$$

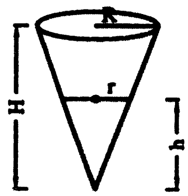
مثال: آب با $\frac{\pi}{4}$ واحد مکعب در هر ثانیه وارد مخزن مخروطی وارونه شکلی به بلندی 12 واحد و شعاع قاعده 4 واحد می‌شود، سرعت افزایش ارتفاع آب در مخزن وقتی ارتفاع آب 6 واحد باشد را محاسبه کنید؟

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{4} \\ H=12 \\ R=4 \\ h=6 \end{cases} \qquad \frac{dh}{dt}=?$$

حل: اگر ارتفاع آب داخل مخزن h فرض شود، طبق شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{h}{H}=\frac{r}{R} \Rightarrow \frac{h}{12}=\frac{r}{4} \Rightarrow h=3r$$

لذا حجم آب عبارت است از:



$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h \Rightarrow V=\frac{\pi h^3}{27}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{9}(6)^2\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{16}$$

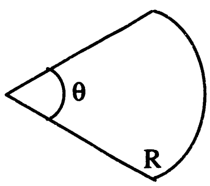
اکسترمم کردن کمیتهای دلخواه با استفاده از مشتق:

برخی مواقع یک کمیت موردنظر که می خواهیم آن را اکسترمم کنیم، تابعی از دو متغیر می باشد. به گونه ای که بین این دو متغیر ارتباط خاصی نیز موجود است، در چنین مواقعی کافی است، رابطه کمیت مذکور را با متغیرهای گفته شده نوشته و سپس با توجه به رابطه خاصی که بین این دو متغیر وجود دارد، کمیت مذکور را تنها برحسب یک متغیر بازنویسی کنیم و در نهایت با استفاده از مشتق به اکسترمم کردن آن بپردازیم.

مثال: قطاعی از یک دایره با شعاع R و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان) مفروض است. چنانچه محیط این قطاع ثابت باشد، مساحت این قطاع به ازای چه θای اکسترمم می شود؟ و این اکسترمم از چه نوعی است؟

حل:

$$\text{محیط قطاع}=2R+R\theta=k\longrightarrow R=\frac{k}{2+\theta}$$



مساحت	زاویه مرکزی
$s=\pi R^2$	2π
$s=\frac{\pi R^2\theta}{2\pi}=\frac{R^2\theta}{2}$	θ

با توجه به اینکه در قسمت اول $R=\frac{k}{2+\theta}$ بەدست آمد، داریم:

بجای R مقدار $R=\frac{k}{2+\theta}$ را قرار می‌دهیم:

$$s=\frac{R^2\theta}{2}=\left(\frac{k}{2+\theta}\right)^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{ds}{d\theta}=0\Rightarrow\frac{k^2}{2}\,\frac{(2+\theta)^2-2(2+\theta)\theta}{(2+\theta)^4}=0\Rightarrow 2+\theta-2\theta=0\Rightarrow\theta=2\,\text{rad}$$

لذا در $\theta=2\,\text{rad}$ مساحت قطاع مذکور اکسترمم شده و این اکسترمم از جنس ماکزیمم است.

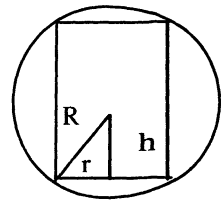
مثال: می‌خواهیم در داخل کره ای با شعاع واحد، استوانه ای با حجم ماکزیمم را محاط کنیم، ارتفاع این استوانه چقدر است؟

حل: داریم:

R: شعاع کره

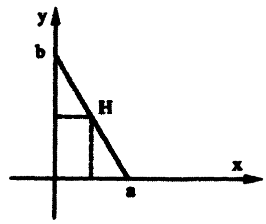
r: شعاع قاعده استوانه

h: نصف ارتفاع استوانه



$$v = 2\pi\ r^2\ .\ h$$
$$r^2 + h^2 = R^2 = 1$$
$$v = 2\ \pi\ \left(1 - h^2\right)\ .\ h$$
$$\frac{dv}{dh} = 0 \Rightarrow 2\pi\ \left(1 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{ارتفاع استوانه} = 2h = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با رئوس $(0,0)\ (a,0)\ (0,b)$ مفروض است. $(a,b>0)$ یک مستطیل در داخل این مثلث به گونه‌ای محاط شده که یک راس آن روی مبدا، دو ضلع آن منطبق بر محورهای مختصات و راس چهارم آن بر روی وتر مثلث می‌باشد. مساحت بزرگترین مستطیل ممکن چقدر است؟



حل: معادله وتر مثلث به صورت زیر خواهد بود:

$$y = \frac{-b}{a}x + b$$

مختصات نقطه H به صورت زیر خواهد بود:

$$H\left(x, \frac{-b}{a}x + b\right)$$

مساحت مستطیل رسم شده عبارت است از:

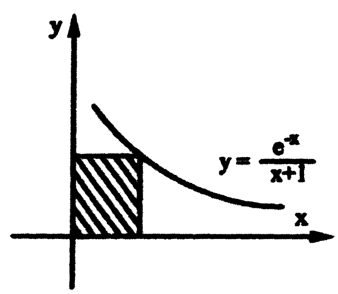
$$s = x_H \cdot y_H = x\left(\frac{-b}{a}x + b\right)$$
$$\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-2b}{a}x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

با جایگذاری در معادله مساحت داریم:

$$s_{max} = \frac{a}{2}\left(\frac{-b}{a} \times \frac{a}{2} + b\right) = \frac{ab}{4}$$

مثال: در شکل مقابل مساحت مستطیل وقتی ماکزیمم می‌شود که x برابر چه مقداری باشد؟

حل: مساحت مستطیل برابراست با:



$$s = x.y$$
$$s = x \times \frac{e^{-x}}{x+1} \Rightarrow s'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}e^{-x} - \frac{x}{1+x}e^{-x}$$
$$s'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{(1+x)^2}\left(1 - x(1+x)\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

بدیهی است $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول نبوده، لذا پاسخ $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد.

پیدا کردن کوتاهترین و بلندترین فاصله نقاط یک منحنی تا مبدا مختصات

اگر چه راه‌های متفاوتی وجود دارد، اما چنانچه منحنی موردنظر را در مختصات قطبی و برحسب متغیرهای r,θ بازنویسی کنیم، در حقیقت بیشترین و کمترین مقادیر ممکن برای r که به ازای θ های ممکن اتفاق می‌افتد، می‌تواند پاسخ به سؤالات موردنظر باشد. از آنجا که در این گونه مسایل r مبین فاصله هر نقطه از منحنی تا مبدا مختصات می‌باشد، لذا هدف، یافتن حداقل مقدار r به ازای θ می‌باشد.

مثال: بیشترین و کمترین فاصله منحنی $x^2+xy+y^2=16$ تا مبدا مختصات کدام است؟

حل: با استفاده از دستگاه قطبی می‌توان نشان داد:

$$(r\cos\theta)^2+\left(r^2\cos\theta\sin\theta\right)+(r\sin\theta)^2=16$$

$$r^2+r^2\cos\theta\sin\theta=16\rightarrow r^2=\frac{16}{1+\sin\theta.\cos\theta}=\frac{32}{2+\sin 2\theta}$$

برای اینکه r^2 ماکزیمم مقدار خود را داشته باشد، باید مخرج کمترین مقدار را داشته باشد.

پس لذا باید: $\sin 2\theta=-1$

$$\sin 2\theta=-1\rightarrow r_{max}^2=\frac{32}{+2-1}=32\rightarrow r_{max}=\sqrt{32}$$

و برای اینکه r^2 مینیمم مقدار خود را داشته باشد باید مخرج ماکزیمم مقدار را داشته باشد.

پس باید: $\sin 2\theta=1$

$$\sin 2\theta=1\rightarrow r_{min}^2=\frac{32}{2+1}=\frac{32}{3}\rightarrow r_{min}=\sqrt{\frac{32}{3}}$$

مثال: کمترین و بیشترین فاصله مبدا مختصات از منحنی $x^2+y^2-2x-8=0$ است؟

حل: با استفاده از دستگاه قطبی می‌توان نشان داد:

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-2r\cos\theta-8=0\;\Rightarrow\; r^2-2r\cos\theta-8=0\;\Rightarrow\; r=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

با حل معادله درجه دوم به ازای مجهول r داریم:

از آنجا که $\cos\theta<\sqrt{\cos^2\theta+8}$ است و اساساً r نمی‌تواند منفی باشد داریم:

$$r=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta+\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{2\sqrt{\cos^2\theta+8}}=\frac{-\sin\theta\left(\sqrt{\cos^2\theta+8}+\cos\theta\right)}{\sqrt{\cos^2\theta+8}}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=0\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=0\\ \sqrt{\cos^2\theta+8}+\cos\theta=0\end{cases}$$

بنابراین اکسترم‌های r به ازای $\sin\theta=0$ اتفاق می‌افتد.

$$\theta=0\Rightarrow r=1+\sqrt{1+8}=4$$

$$\theta=\pi\Rightarrow -1+\sqrt{1+8}=2$$

لذا حداقل و حداکثر فاصله مبدا از منحنی موردبحث به ترتیب $r_{min}=2$ و $r_{max}=4$ می‌باشد.

تقریب زدن توابع در نقاط خاص با استفاده از تعریف مشتق:

چنانچه Δx بسیار کوچک باشد، با استفاده از تقریب مشتق می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0).\Delta x \\ \Delta x \to 0 \quad \text{با شرط} \end{cases}$$

از این رابطه، زمانی استفاده می‌شود که مقدار این تابع و مقدار مشتق آن را در نقطه ای بدانیم و مقدار تابع مذکور را در نزدیکی های این نقطه بخواهیم.

مثال: تقریب مناسبی برای $\tan 29°$ به‌دست آورید.

حل:

$$f(x)=\tan x \to f'(x)=1+\tan^2 x$$

$$x_0=30° \qquad \Delta x=-1°=-\frac{\pi}{180}\text{rad}$$

$$\tan 29°=\tan(30°-1°)\sim \tan 30°+(1+\tan^2 30°).\frac{-\pi}{180}=0.554$$

مثال: اگر Δx کوچک باشد، کدام عبارت زیر تقریب بهتری برای $\frac{1-\Delta x}{1+\Delta x}$ است؟

الف) 1 ب) $1-\Delta x$ ج) $1-2\Delta x$ د) $1+\Delta x$

حل:

$$I=\frac{1-\Delta x}{1+\Delta x}=\frac{1-\Delta x}{1+\Delta x}.\frac{1-\Delta x}{1-\Delta x}=\frac{1+(\Delta x)^2-2\Delta x}{1-(\Delta x)^2}$$

چون Δx کوچک است، لذا $(\Delta x)^2$ بسیار کوچک است و قابل صرف‌نظر است. بنابراین داریم: $I\sim 1-2\Delta x$

مثال: مقدار تقریبی $\text{Arc}\tan\sqrt{1.01}$ را بیابید:

حل:

$$f(x)=\text{Arc}\tan\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$x_0=1 \quad , \quad \Delta x=\frac{1}{100}$$

$$\text{Arc}\tan\sqrt{1+\frac{1}{100}}=\text{Arc}\tan\sqrt{1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{1}}}{1+1}\times\frac{1}{100}$$

$$\text{Arc}\tan\sqrt{1.01}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{400}$$

چند قضیه:

الف) قضیه بولتزانو (قضیه مقدار میانی):

هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم: $f(a).f(b)<0$ آنگاه می توان نتیجه گرفت: $\exists c\in(a,b) \mid f(c)=0$

از این قضیه در برخی مواقع برای مشخص کردن این‌که یک معادله در یک فاصله دارای ریشه است یا خیر استفاده می شود.

ب) قضیه رول:

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید. چنانچه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ـ تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

۲ـ تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

۳ـ $f(a)=f(b)$

آنگاه می توان نشان داد: $\exists c\in(a,b) \mid f'(c)=0$

توجه: از این قضیه نتیجه‌ای به‌دست آمده، که با استفاده از آن می توان در برخی مواقع راجع به تعداد ریشه های یک معادله در یک فاصله اظهارنظر کرد، نتیجه مذکور چنین است:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این‌صورت می‌توان نشان داد، اگر معادله $f'(x)=0$ در فاصله $[a,b]$ دارای m ریشه باشد، معادله $f(x)=0$ در فاصله مذکور حداکثر $m+1$ ریشه دارد.

مثال: معادله $x^5+x^3-1=0$ در کدام فاصله زیر دارای یک ریشه حقیقی است؟

الف) $[-2,-1]$ ب) $[-1,1]$ ج) $[1,3]$ د) $[3,5]$

حل: تابع $f(x)=x^5+x^3-1$ همواره پیوسته است. با جایگذاری گزینه‌ها در معادله داریم:

$f(-1)=-3 \;,\; f(1)=1 \Rightarrow f(-1)\,.\,f(1)<0$

پس طبق قضیه بولتزانو، $f(x)$ در فاصله $[-1,1]$ حتماً دارای صفر حقیقی خواهد بود.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $g(x)=e^{-kx}.f(x)$ که در آن k یک عدد ثابت می باشد. چنانچه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و بدانیم $f(a)=f(b)=0$ و $\exists c\in(a,b)$ آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) $f(c)=0$ ب) $g''(c)=0$ ج) $f'(c)=-kf(c)$ د) $f'(c)=+kf(c)$

حل: با توجه به فرضیات مسئله بدیهی است برای تابع $f(x)$ شرایط قضیه رول در فاصله داده شده برقرار است. بنابراین داریم:

$\exists n\in(a,b) \mid f'(n)=0$

از طرفی تابع e^{-kx} هموار پیوسته و مشتق‌پذیر است. لذا تابع $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $g(a)=g(b)=0$.

لذا طبق قضیه رول برای تابع $g(x)$ داریم: $\exists n\in(a,b) \mid g'(n)=0$

$\rightarrow g'(x)=-ke^{-kx}.f(x)+e^{-kx}.f'(x)$

$g'(n)=0 \rightarrow -ke^{-kn}.f(n)+e^{-kn}.f'(n)=0 \rightarrow f'(n)=kf(n)$

پس گزینه (د) صحیح است.

مثال: در رابطه با تعداد ریشه‌های معادله $xe^x-1=0$ در بازهٔ $[0,1]$ کدام عبارت صحیح است؟

الف) دارای ریشه حقیقی نمی باشد. ب) حداکثر یک ریشه حقیقی دارد.

ج) دو ریشه حقیقی دارد. د) فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل: از هر دو قضیه رول و مقدار میانی استفاده می کنیم:

ملاحظه می شود تابع $f(x)=xe^x-1$ در فاصله $[0,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=e-1>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق قضیه مقدار میانی}} \exists c\in(0,1) \mid f(c)=0$$

اما داریم: $f'(x)=e^x+xe^x$

ملاحظه می شود تابع $f'(x)$ در فاصله مذکور دارای ریشه نمی باشد و لذا طبق قضیه رول معادله $f(x)=0$ در این فاصله تنها یک ریشه دارد و گزینه (د) صحیح است.

مثال: در مورد معادله $x^2-x\sin x-\cos x=0$ می‌توان گفت؟

الف) **فقط** یک جواب دارد. ب) فقط دو جواب دارد. ج) بیش از دو جواب دارد. د) اصلاً جواب ندارد.

حل: با تعریف تابع $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$ ملاحظه می‌شود که تابع مذکور زوج است.

$$f(-x)=(-x)^2-(-x)\sin(-x)-\cos(-x)=x^2-x\sin x-\cos x=f(x)$$

و نیز ملاحظه می‌شود $f(0)=-1\neq 0$ و لذا معادله در $x=0$ جوابی ندارد.

پس بحث خود را در $x\in(0,+\infty)$ ادامه می‌دهیم:

$$f'(x)=2x-x\cos x-\sin x+\sin x=x(2-\cos x)>0$$

$$f(2\pi)=4\pi^2-1>0 \quad , \quad f(0)=-1<0$$

پس طبق قضیه بولتزانو، معادله مزبور در فاصله $(0,+\infty)$ فقط و فقط یک ریشه دارد. لذا به‌واسطه زوج بودن تابع $f(x)$ در کل مجموعه اعداد حقیقی دارای تنها دو جواب است.

مثال: معادله $x^6+x^4+x^2-1=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

الف) 6 ریشه ب) 4 ریشه ج) 2 ریشه د) ریشه حقیقی ندارد.

حل: تابع $f(x)=x^6+x^4+x^2-1$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x)=6x^5+4x^3+2x=2x\left(3x^4+2x^2+1\right)$$

بدیهی است $f'(0)=0$ پس تابع مذکور حداکثر دارای دو ریشه است. ملاحظه می‌شود:

$$f(10)>0 \qquad f(0)<0 \qquad f(-10)>0$$

نمودار فقط دوبار محور xها را قطع کرده است، تابع فقط دو ریشه دارد.

مثال: معادله $\cos^2 x+3x+2=0$ مفروض است، راجع به تعداد ریشه های حقیقی این معادله چه می توان گفت؟

الف) **فاقد** ریشه حقیقی ب) حداکثر یک ریشه حقیقی

ج) دو ریشه حقیقی د) فقط یک ریشه حقیقی

حل: با تعریف $f(x)=\cos^2 x+3x+2$ داریم: $f'(x)=-\sin 2x+3>0$

بنابراین، معادله $f'(x)=0$ در R جواب ندارد. لذا معادله $f(x)=0$ در R حداکثر یک جواب دارد. با کمی دقت متوجه می شویم شرایط قضیه مقدار میانی برقرار است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)>0 \\ f(-10)<0 \end{array}\right\} \rightarrow \exists c\in(-10,0) \mid f(c)=0$$

لذا معادله موردنظر یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد و گزینه (د) صحیح است.

ج) قضیه لاگرانژ (قضیه مقدار میانگین در مشتق):

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید چنانچه:

الف) تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

آنگاه می توان نشان داد:

$$\boxed{\exists c\in(a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$$

از این قضیه نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$دارای شرایط قضیه لاگرانژ باشد، می توان گفت:

$$\boxed{\min f'(x)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\max f'(x)}$$

که در نامساوی فوق مقادیر ماکزیمم و مینیمم $f'(x)$ با توجه به x های متعلق به فاصله $[a,b]$ انتخاب می شود.

مثال: اگر $f(1)=10$ به ازای $1\le x\le 4$ داشته باشیم؛ $f'(x)\ge 2$، در این صورت کمترین مقدار $f(4)$ چقدر است؟

الف) 13   ب) 14   ج) 15   د) 16

حل: طبق نتیجه قضیه لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\ge 2\Rightarrow\frac{f(4)-10}{3}\ge 2\Rightarrow f(4)\ge 16$$

گزینه (د) صحیح است.

مثال: فرض کنید $f(x)$ همواره مشتق‌پذیر باشد و $f(2)=-3$، اگر به ازای $2<x<5$ داشته باشیم $1<f'(x)<2$ آنگاه، مطلوب است حدود $f(5)$.

حل: شرایط قضیه لاگرانژ در بازه $[2,5]$ برقرار است.

$$\min f'(x)<\frac{f(5)-f(2)}{5-2}<\max f'(x)$$

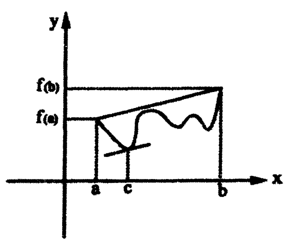
$$1<\frac{f(5)+3}{3}<2\Rightarrow 3<f(5)+3<6\Rightarrow 0<f(5)<3$$

مثال: برای تابع $f(x)=x^2-3x+1$ که در فاصله $[1,3]$ تعریف شده است، c متناظر با قضیه لاگرانژ را پیدا کنید، این c از نظر هندسی چه مفهومی دارد؟

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع مذکور در فاصله $[1,3]$ شرایط قضیه لاگرانژ را دارد.

$f(3)=1$

$f(1)=-1$



مطابق قضیه لاگرانژ باید داشته باشیم:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-(-1)}{3-1}=\frac{2}{2}=1$$
$$f'(x)=2x-3=1 \Rightarrow x=2\ ,\ c=x=2$$

از نظر هندسی: مماس در c بر روی نمودار تابع f(x) موازی خطی است که از دو نقطه $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ می گذرد.

مثال: تابع $f(x)$ در فاصله $[-2,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{x^4+x^2+1}$$

چنانچه بدانیم $f(1)=2$ می باشد، راجع به حدود $f(-2)$ چه اظهارنظر می کنیم:

حل: بدیهی است که تابع مذکور شرایط قضیه لاگرانژ را دارد و نیز داریم:

$$\min f'(x)=f'(-2)=\frac{1}{21}\ ,\ \max f'(x)=f'(0)=1$$

لذا طبق قضیه لاگرانژ داریم:

$$\frac{1}{21}\le\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}\le 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{21}\le\frac{2-f(-2)}{3}\le 1$$
$$-1<f(-2)\le 2-\frac{3}{21} \quad\Rightarrow\quad -1\le f(-2)\le\frac{13}{7}$$

مثال: در تابع با ضابطه $0\le x\le 1$, $f(x)=\tan^{-1}x$، مقدار $\frac{\tan^{-1}x}{x}$ در کدام فاصله واقع است؟

حل: تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ در فاصله $[0,x]$ که در آن $0\le x\le 1$ است، شرایط قضیه لاگرانژ را داراست.

$$\min f'(x)\Big|_{(0,x)} < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < \max f'(x)\Big|_{(0,x)}$$

اما داریم $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و بدیهی است در فاصله مورد بحث، حداقل و حداکثر f' به ترتیب در نقاط $x=1$, $x=0$ رخ می‌دهد و $\frac{1}{2}$, 1 خواهند بود.

$$\frac{1}{2}<\frac{\tan^{-1}x}{x}<1$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & -1\le x\le 0\\ x^2+x+1 & 0<x\le 1\end{cases}$ مفروض است. آیا تابع مذکور حائز شرایط قضیه لاگرانژ در فاصله $[-1,+1]$ می باشد؟

حل: بدیهی است، هدف بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در فاصله داده شده است و کافی است این موضوع را در جایی که ضابطه تابع تغییر کرده یعنی $x=0$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=1 \qquad f(0)=1$$

پیوستگی برقراراست.

حال مشتق پذیری را در نقطه $x=0$ بررسی می کنیم:

$$f'_+(0)=\left(x^2+x+1\right)'\Big|_{x=0}=(2x+1)\Big|_{x=0}=1$$
$$f'_-(0)=(\cos x)'\Big|_{x=0}=(-\sin x)\Big|_{x=0}=0$$

این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در فاصله داده شده دارای شرایط قضیه لاگرانژ نمی باشد.

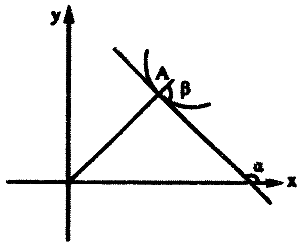
زاویه بین خط مماس بریک منحنی قطبی در یک نقطه و شعاع حامل آن نقطه:

فرض کنید بر منحنی $r = f(\theta)$ در نقطه A خط مماسی رسم کرده باشیم، زاویه بین این خط مماس و شعاع حامل نقطه A از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan\beta = \left.\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\right|_{\theta}$$

و همچنین زاویه خط مماس با جهت مثبت محور xها از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan\alpha = \left.\frac{r + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\tan\theta}{-r\tan\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)}\right|_{\theta}$$



مثال: بر منحنی قطبی $r = \frac{1}{\theta + \cos\theta}$ در نقطه ای متناظر با $\theta = 0$ خط مماس رسم کرده‌ایم. زاویه بین خط مماس مذکور و شعاع حامل نقطه مربوط را پیدا کنید.

حل:

$$\tan\alpha = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{\theta + \cos\theta}}{\frac{-(1-\sin\theta)}{(\theta+\cos\theta)^2}} = \frac{\theta + \cos\theta}{-1+\sin\theta} = \frac{0+\cos 0}{-1+\sin 0} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

قاعده مشتق‌گیری ضمنی

قاعده مشتق‌گیری ضمنی: چنانچه داشته باشیم: $F(x, y) = 0$ برای به‌دست آوردن مشتق y نسبت به x می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$\boxed{y' = \frac{-F'_x}{F'_y}}$$

توجه: باید دقت کرد که اگر نخواهیم از رابطه مذکور استفاده کنیم یا اصولاً هدف محاسبه مشتقات بالاتر y باشد، می‌توان از رابطه $F(x, y) = 0$ مشتق‌گیری معمولی کرد تا تکلیف y' مشخص شود. البته توجه داریم در حین انجام این کار، y تابع و x متغیر مستقل خواهد بود.

مثال: اگر $x^y = y^x$ باشد. آنگاه مطلوب است $\frac{dy}{dx}$:

حل: از طرفین لگاریتم در مبنای نپر می‌گیریم:

$$y\ln x = x\ln y$$

$$y'\ln x + y\frac{1}{x} = \ln y + x\frac{y'}{y}$$

$$y'\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x}\Rightarrow y'=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}=\frac{y}{x}\times\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $x^3+\ln x+x^2y+\cos y-2=0$ مطلوب است محاسبه y' در نقطه $(1,0)$:

حل: طبق رابطه بالا داریم:

$$y'=-\left.\frac{3x^2+\frac{1}{x}+2xy}{x^2-\sin y}\right|_{(1,0)}=-4$$

راه حل دوم: استفاده از مشتق‌گیری معمولی با در نظر گرفتن y به عنوان تابعی از x، داریم:

$$3x^2+\frac{1}{x}+2xy+x^2y'-y'\sin y=0\Big|_{(1,0)}\Rightarrow y'=-4$$

مثال: معادله‌ی منحنی‌ای پیدا کنید که از نقطه $(2,1)$ بگذرد و عمود بر منحنی در هر نقطه (x,y) دارای شیب $\frac{2xy}{y^2-x^2}$ باشد.

حل: می‌دانیم خط قائم عمود بر خط مماس است.

$$m_{\text{مماس}}=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

اگر معادله $F(x,y)=0$ فرض شود. طبق قاعده مشتق‌گیری ضمنی باید داشته باشیم:

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x^2-y^2}{2xy}\Rightarrow\begin{cases}F_x=y^2-x^2\to F=y^2x-\frac{x^3}{3}+h(y)\\F_y=2xy\to F=y^2x+g(x)\end{cases}\overset{\text{با احتمال جواب‌ها}}{\Longrightarrow}\quad F(x,y)=y^2x-\frac{x^3}{3}+k$$

یعنی داریم: $y^2x-\frac{x^3}{3}+k=0$ با قرار دادن نقطه $(2,1)$ در این رابطه داریم:

$$2-\frac{8}{3}+k=0\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

پس معادله به صورت $x^3-3xy^2=2$ خواهد بود.

قاعده مشتق‌گیری از توابع پارامتری

چنانچه داشته باشیم $\begin{cases}x=P(t)\\y=Q(t)\end{cases}$ می‌توان نشان داد:

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dP}{dt}}}$$

قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای

فرض کنید داشته باشیم:

$$y=h(u)\ ,\ u=m(t)\ ,\ t=f(x)$$

در چنین شرایطی طبیعی است، y قابل بیان بر حسب فقط یک متغیر x خواهد بود که:

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}}$$

مثال: اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \sqrt{3}$ باشد. مشتق عبارت $f(1+2\sin x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ را به‌دست آورید؟

حل: عبارت $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \sqrt{3}$ در حقیقت تعریف مشتق تابع در $x = 2$ می‌باشد:

$$f'(2) = \sqrt{3}$$

$$y = f(1+2\sin x) \Rightarrow y' = (2\cos x)f'(1+2\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)f'\left(1+2\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}f'(2) = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + 2t^2 - t + 2 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t = 1$:

حل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+4t-1}{2t+1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{3t^2+4t-1}{2t+1}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{3t^2+4t-1}{2t+1}\right\}.\frac{dt}{dx}$$

می‌دانیم $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

پس:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(6t+4)(2t+1)-2\left(3t^2+4t-1\right)}{(2t+1)^2} \times \frac{1}{2t+1}\Bigg|_{t=1} = \frac{2}{3}$$

توابع معکوس و بحثهای مربوطه:

همان‌طوری‌که می‌دانیم، اگر تابعی مانند $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و چنانچه اکیداً یک‌نوا باشد ($f'(x)>0$ یا $f'(x)<0$)، آنگاه در این فاصله معکوس‌پذیر است. یعنی می توان تابعی مانند $g(x)$ را به گونه ای یافت که داشته باشیم:

$$fog(x) = gof(x) = x$$

در این صورت $g(x)$ همان $f^{-1}(x)$ خواهد بود.

برای پیدا کردن ضابطه معکوس تابع $y = f(x)$ کافی است از این ضابطه x را برحسب y به‌دست آوریم، یعنی به رابطه ای مانند $x = g(y)$ برسیم. حال می توان ادعا کرد:

$$f^{-1}(x) = g(x)$$

توجه داشته باشید که:

الف) **نمودار** توابع $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه هم‌دیگرند، یعنی اگر نقطه (a,b) به نمودار $f(x)$ تعلق داشته باشد، نقطه (b,a) به نمودار $f^{-1}(x)$ تعلق دارد.

ب) اگر (a,b) متعلق به تابع $f(x)$ باشند، می دانیم $(b,a)\in f^{-1}(x)$ و داریم:

$$\boxed{\left(f^{-1}(x)\right)'_{(b)}=\frac{1}{f'(a)}}$$

مثال: تابع $f(x)=x-\frac{1}{x}$ با شرط $x>0$ مفروض است. معکوس این تابع محور yها را در چه عرضی قطع می کند؟

حل: نخست ضابطه معکوس این تابع را مشخص می کنیم:

$$y=x-\frac{1}{x}\rightarrow y=\frac{x^2-1}{x}\rightarrow x^2-xy-1=0\rightarrow x=\frac{+y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$$

اما با توجه به شرط $x>0$ داریم:

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

و معکوس تابع عبارت است از:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

حال نقطه موردنظر را با قرار دادن $x=0$ به‌دست می آوریم:

$$f^{-1}(0)=\frac{0+\sqrt{0+4}}{2}=1$$

مثال: تابع $f(x)=\int_1^{\frac{x}{2}}\sqrt{t^4+1}\,dt$ مفروض است. چنانچه در نقطه ای به طول 0 از نمودار معکوس این تابع، خط مماسی بر نمودار $f^{-1}(x)$ ترسیم شود، معادله خط مماس را بنویسید.

حل: می دانیم:

$$(0,a)\in f^{-1}\Rightarrow(a,0)\in f$$

بنابراین داریم:

$$f(a)=0\rightarrow\frac{x}{2}=1\Rightarrow x=2=a$$

از طرفی داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(2)}$$

لذا با استفاده از قضیه مشتق گیری از انتگرال داریم:

$$f'(x)=0+\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{x^4}{16}+1}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

می دانیم مشتق در نقطه تماس، شیب خط مماس است. لذا داریم:

$$m=\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'(2)}=\sqrt{2}$$

$$y-2=\sqrt{2}(x-0)\rightarrow y=\sqrt{2}\,x+2$$

نکته: با توجه به تعریف توابع هیپربولیک که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

می توان انتظار داشت، معکوس توابع هیپربولیک به صورت توابع لگاریتمی بیان می شود.

مثال: معکوس تابع $\sinh x$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{2}$$

$$2y=e^{x}-e^{-x} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } e^{x}} 2e^{x}y=e^{2x}-1 \Rightarrow e^{2x}-2ye^{x}-1=0 \xrightarrow{e^{x}=z} z^{2}-(2y)z-1=0$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $y<\sqrt{y^{2}+1}$ است. لذا قسمت منفی عبارت مورد قبول نمی‌باشد.

$$z=\frac{y\pm\sqrt{y^{2}+1}}{1} \Rightarrow x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^{2}+1}\right)$$

$$\rightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right) \Rightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\log_{3}\left(4^{x}+1\right)$، مطلوب است محاسبه معکوس این تابع.

حل:

$$f(x)=\log_{3}\left(4^{x}+1\right) \rightarrow 3^{y}=4^{x}+1 \rightarrow 4^{x}=3^{y}-1 \rightarrow x\log 4=\log\left(3^{y}-1\right) \rightarrow x=\frac{\log\left(3^{y}-1\right)}{\log 4}$$

$$x=\log_{4}\left(3^{y}-1\right) \rightarrow f^{-1}(x)=\log_{4}\left(3^{x}-1\right)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^{3}}}$، چنانچه معکوس تابع را $g(x)$ بنامیم. حاصل $\frac{g''(x)}{g^{2}(x)}$ را بیابید.

حل:

با مشتق‌گیری از تابع $f(x)$ داریم:

$$fog_{(x)}=f\left(g(x)\right)=x \rightarrow \text{مشتق‌گیری} \quad g'(x).f'\left(g(x)\right)=1$$

$$\rightarrow g'(x).\frac{1}{\sqrt{1+\left(g(x)\right)^{3}}}=1 \rightarrow g'(x)^{2}=1+\left(g(x)\right)^{3} \rightarrow \text{مشتق‌گیری}$$

$$2g'(x)g''(x)=3g^{2}(x)g'(x) \rightarrow g''(x)\Big/g^{2}(x)=\frac{3}{2}$$

فصل ششم

انتگرال‌گیری و بحث‌های وابسته

الف) تعریف انتگرال نامعین: فرض کنید $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد. یعنی $F'(x)=f(x)$، آنگاه داریم:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

ب) تعریف انتگرال معین (قضیه اساسی حساب): هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

چنانچه مشخص است، یکی از بحثهای اصلی در مسائل انتگرال، پیدا کردن تابع اولیه است. در ادامه چند روش برای یافتن تابع اولیه آورده شده است.

در قسمت پایین چند رابطه انتگرالی مهم به عنوان یادآوری مطرح شده است:

$$\int u^m\,du = \begin{cases} \ln|u| & m=-1 \\ \dfrac{u^{m+1}}{m+1} & m\neq -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a}+c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \sinh^{-1}u+c = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1}u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$$\int \frac{du}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{u-a}{u-b}\right|+c$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$1)\ I=\int\frac{x^3+x+1}{x^2+4}\,dx$$

با تقسیم چند جمله‌ای صورت بر مخرج داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x^2+4 \\ \cline{2-2} & x \\ \underline{x^3+4x} & \\ -3x+1 & \end{array}$$

$$I=\int\left(x-\frac{3x}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$2)\ \ I=\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx$$

با ایجاد مربع کامل در مخرج داریم:

$$I=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+4\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}+c$$

نکته ۱: انتگرال‌گیری از توابع زوج و فرد در یک فاصله متقارن.

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-a,+a]$ پیوسته باشد می‌توان نشان داد:

الف) اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد.

$$\boxed{\int_{-a}^{+a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx}$$

ب) اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد.

$$\boxed{\int_{-a}^{+a}f(x)dx=0}$$

نکته ۲: توجه شود که توابع $\boxed{f(x)=\log_*\left(ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right)}$ و $\boxed{f(x)=\log_*\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$ توابعی فرد می‌باشند.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right).\tan^6 x\,dx$$

مقدار انتگرال موردنظر صفر می‌باشد. چون بدیهی است تابع $\ln\frac{2-x}{2+x}$ فرد و تابع $\tan^6 x$ زوج می‌باشد. پس تابع حاصل‌ضرب آن دو، تابعی فرد است که طبق نکته بالا در یک فاصله متقارن مقدار انتگرال فوق، صفر خواهد بود.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل:

$$I=\int_{-1}^{+1}\cos x\,.\,\log_{10}\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)$$

حل: مشابه مساله قبل، مقدار این انتگرال نیز صفر می‌باشد. چون تابع $\cos x$، زوج و تابع $\log_{10}\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)$ تابعی فرد می‌باشد. بنابراین حاصل‌ضرب این دو تابع نیز فرد می‌باشد و طبق نکته قبل، مقدار انتگرال مساوی صفر می‌باشد.

مثال: مقدار a چقدر باشد، تا حاصل انتگرال زیر برابر صفر شود؟

$$\int_{-4}^{4} \ln\left(ax+\sqrt{4x^2+1}\right)\cos x\, dx$$

حل: بدیهی است تابع زیر انتگرال، باید به تابعی فرد تبدیل شود و می دانیم تابع $\cos x$ تابعی زوج است، لذا چنانچه کاری کنیم که تابع $\ln\left(ax+\sqrt{4x^2+1}\right)$ فرد شود تابع زیر انتگرال، تابعی فرد خواهد شد:

شرط این‌که تابعی فرد باشد این است که:

$$f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(x)=-f(-x)$$

در نتیجه داریم:

$$\ln\left(-ax+\sqrt{4x^2+1}\right)+\ln\left(ax+\sqrt{4x^2+1}\right)=0$$

$$\ln\left(-a^2x^2+4x^2+1\right)=0 \rightarrow -a^2x^2+4x^2+1=1 \Rightarrow \quad a^2x^2=4x^2 \Rightarrow a^2=4 \rightarrow a=\pm 2$$

البته بدیهی است با استفاده از نکته گفته شده مقدار a برابر ± 2 می‌باشد.

تکنیک‌های انتگرال گیری

الف) روش تغییر متغیر:

چنانچه در محاسبه انتگرال $I=\int f(x)dx$، بتوان با معرفی یک متغیر جدید مانند u، مسئله را به انتگرالی بر حسب تابع u تبدیل کرد، و سپس انتگرال مذکور را محاسبه نمود اصطلاحاً می گویند، انتگرال گیری به روش تغییر متغیر صورت گرفته است و با نوشتن جواب نهایی بر حسب x حاصل I به‌دست خواهد آمد. لذا به وضوح دیده می شود اعمال مناسب تغییر متغیر، در انتخاب مناسب متغیر جدید نهفته است.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int_0^{\infty} \frac{3x^2}{1+x^6}\, dx$$

حل: با تغییر متغیر $x^3=u$ داریم: $3x^2\, dx=du$ پس می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1} u\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x+1)}$$

حل: با تغییر متغیر $\ln x+1=u$ داریم:

$$\frac{dx}{x}=du \rightarrow dx=x\, du$$

$$I=\int \frac{x\, du}{xu}=\int \frac{du}{u}=\ln(u)=\ln(\ln(x)+1)\Big|_e^{e^2}=\ln\frac{3}{2}$$

مثال: مطلوب است حاصل انتگرال زیر:

$$I=\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}$$

حل: با تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ داریم:

$$x=u^2\Rightarrow dx=2udu$$

$$I=\int\frac{2udu}{u^2-u}=\int\frac{2du}{u-1}=2\ln|u-1|=2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}dx$$

حل: با تغییر متغیر $\cos^2 x=u$ داریم:

$$-\sin 2x \quad dx=du$$

$$I=\int\frac{-du}{\sqrt{4-u}}=2\sqrt{4-u}+c=2\sqrt{4-\cos^2 x}+c$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

حل: صورت و مخرج را در e^x ضرب می کنیم: $I=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

با تغییر متغیر $e^x=u$ داریم $e^x dx=du$:

$$I=\int\frac{e^x\ .\ dx}{e^x\ \left(e^{2x}+1\right)}=\int\frac{du}{u^2+1}=\tan^{-1}u+c=\tan^{-1}e^x+c$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int x^x\left(1+\ln x\right)dx$$

حل: با تغییر متغیر $u=x^x$ داریم $x\ln x=\ln u \Leftarrow$

$$\left(\ln x+\frac{x}{x}\right)\ dx=\frac{du}{u}$$

$$I=\int u\left(1+\ln x\right).\frac{du}{u\left(1+\ln x\right)}=\int du=u+c=x^x+c$$

مثال: چنانچه بدانیم $I=\int_1^2 f(x)\,dx=5$ مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$J=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$$

حل: با تغییر متغیر $T=\frac{1}{x^2}$ داریم: $dT=\frac{-2x}{x^4}dx=\frac{-2}{x^3}dx$

برای تغییر حدود انتگرال نیز داریم:

$$\begin{cases}x=1\rightarrow T=1\\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow T=2\end{cases}$$

$$j=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{x^3}f\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_2^1\frac{dT}{-2}\times f(T)=\int_1^2\frac{f(T)}{2}dT=\frac{5}{2}$$

مثال: مطلوب است حاصل انتگرال زیر:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\theta}{2+\tan^2\theta}.d\theta$$

حل: با تغییر متغیر $\tan\theta = u$ داریم:

$$\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta = du \Rightarrow \left(1+u^2\right)d\theta = du$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\theta}{2+\tan^2\theta}.d\theta = \int_0^1 \frac{1+u^2}{2+u^2}\times\frac{du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تذکر: برخی از انتگرال‌ها با روش **تغییر** متغیر مثلثاتی قابل حل‌اند. عموماً برای حل انتگرال‌هایی به فرم زیر از تغییر متغیرهای مناسب مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

تغییر متغیر مناسب	عبارت
$u = a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-u^2}$
$u = a\tan\theta$	$\sqrt{a^2+u^2}$
$u = a\sec\theta$	$\sqrt{u^2-a^2}$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I = \int\frac{du}{\sqrt{4+u^2}}$$

حل: با تغییر متغیر $u = 2\tan\theta$ داریم:

$$du = 2\sec^2\theta.d\theta$$

$$I = \int\frac{2\sec^2\theta.d\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}} = \int\frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4\left(1+\tan^2\theta\right)}} = \int\frac{\sec^2\theta}{|\sec\theta|}d\theta = \int\sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+u^2}}{2}+\frac{u}{2}\right|+c = \ln\left|\sqrt{4+u^2}+u\right|+c'$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

حل: با تغییر متغیر $x = 3\sin\theta$ داریم:

$$dx = 3\cos\theta.d\theta$$

$$I = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{9\sin^2\theta\,.\,3\cos\theta.d\theta}{|3\cos\theta|} = 9\int\sin^2\theta.d\theta = 9\int\frac{1-\cos2\theta}{2}.d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right)+c$$

$$= \frac{9}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)+c = \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x}{3}.\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)+c = \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+c$$

تذکر: اگر تابع زیر علامت انتگرال، به‌صورت $f(\sin x, \cos x)$ باشد از تغییر متغیر $\boxed{u=\tan\frac{x}{2}}$ استفاده می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$u=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow du=\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dx$$

و نیز داریم:

$$\boxed{\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}$ را بیابید.

حل: با تغییر متغیر $x=\tan\theta$ داریم:

$$dx=\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta \;,\; \begin{cases} x=0 \Rightarrow \theta=0 \\ x=\infty \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\left(\tan^2\theta+1\right)+\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}+\tan\theta\times\frac{1}{\cos\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\sin\theta}$$

طبق تذکر گفته شده با تغییر متغیر $\tan\frac{\theta}{2}=u$ داریم:

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2u}{1+u^2} \quad , \quad \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta=du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)d\theta=du \begin{cases} \theta=0 \Rightarrow u=0 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$I=\int_0^1\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}=\int_0^1\frac{2du}{1+u^2+2u}=\int_0^1\frac{2du}{(u+1)^2}=\left.\frac{-2}{u+1}\right|_0^1=1$$

ب) روش جزء به جزء:

فرض کنید v,u دو تابع از x می باشند، اساس روش جزء به جزء بر مبنای رابطه زیر استوار است:

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

و در حالت معین داریم:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

1) $I=\int x.\operatorname{Arc}\tan x\,dx$

حل: با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{matrix}\operatorname{Arc}\ \tan x=u\\ x\ \ dx=dv\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{1+x^2}=du\\ \dfrac{1}{2}x^2=v\end{cases}$$

$$I=\frac{x^2}{2}.\operatorname{Arc}\tan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}.\operatorname{Arc}\tan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{Arc}\tan x-\frac{1}{2}\left(\int 1\,dx+\int\frac{-1.dx}{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{Arc}\tan x-\frac{1}{2}(x-\operatorname{Arc}\tan x)+c$$

2) $I=\int\sin^{-1}x\,dx$

حل: با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{matrix}\sin^{-1}x=u\\ dx=dv\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=du\\ x=v\end{cases}$$

$$I=x\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$$

3) $I=\int x^2.\ln x\,dx$

حل: با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{matrix}\ln x=u\\ x^2dx=dv\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{x}=du\\ \dfrac{1}{3}x^3=v\end{cases}$$

$$I=\frac{x^3\ln x}{3}-\int\frac{x^3}{3x}dx=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}+c$$

4) $\int\sec^{-1}\sqrt{x}\ dx$

حل: با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases}\sec^{-1}\sqrt{x}=u\\ dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad dx}{\sqrt{x}\quad\sqrt{x-1}}=du\\ x=v\end{cases}$$

$$I=x\sec^{-1}\sqrt{x}-\int\frac{dx}{2\sqrt{x-1}}=x\sec^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+c$$

5) $\int x \sec^2 x \, dx$

حل: با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} x = u \\ \sec^2 x \ dx = dV \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \tan x = v \end{cases}$$

$$I = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \ln|\cos x|$$

نکته: همان‌طوری‌که می‌دانیم، در برخی مسائل باید چندبار متوالی روش جزء به جزء را بکار برد تا به جواب رسید. در بعضی موارد، می‌توان این عمل را در جدولی خلاصه کرد:

ایده اصلی این روش در قالب دو نوع مسئله زیر قابل بیان است:

$$I = \int (\text{چند جمله ای از } x) . \begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \cos ax \\ \sin ax \end{Bmatrix} . dx$$

$$J = \int e^{ax} . \begin{Bmatrix} \cos bx \\ \sin bx \end{Bmatrix} . dx$$

مثال: حاصل انتگرال معین $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} \ dx$ را بیابید.

حل: با تغییر متغیر $\sqrt{x} = u$ داریم:

$$x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du \qquad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} \ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u . 2u \, du$$

و با روش جزء به جزء به‌دست می‌آید.

مشتق		انتگرال
$2u$	$+$	$\sin u$
2	$-$	$-\cos u$
0		$-\sin u$

$$I = \left(-2u\cos u + 2\sin u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

مثال:

1) $I = \int \left(x^2 + x - 1\right) . \cos x \, dx$

حل:

توجه شود که در این روش رسم جدول، فلش‌ها را از بالا ابتدا + و سپس منفی (یکی در میان) علامت‌گذاری می‌کنیم.

مشتق		انتگرال
x^2+x-1		$\cos x$
	$+$	
$2x+1$		$\sin x$
	$-$	
2		$-\cos x$
	$+$	
0		$-\sin x$

$$I=\left(x^2+x-1\right)\sin x+(2x+1)\cos x-2\sin x+c$$

2) $I=\int e^{-x}.\cos 3x\,dx$

حل: در این حالت ملاحظه می‌شود پس از چند بار مشتق و انتگرال‌گیری، عبارت اولیه دوباره ظاهر می‌شود که به‌صورت زیر حل می‌شود:

مشتق		انتگرال
e^{-x}		$\cos 3x$
	$+$	
$-e^{-x}$		$\frac{1}{3}\sin 3x$
	$-$	
e^{-x}	$+\ \int$	$\frac{-1}{9}\cos 3x$

$$I=e^{-x}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-e^{-x}\cdot\frac{1}{9}\cos 3x-\frac{1}{9}\underbrace{\int e^{-x}\cos 3x dx}_{I}\quad\Rightarrow\quad\left(1+\frac{1}{9}\right)I=e^{-x}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-e^{-x}\cdot\frac{1}{9}\cos 3x$$

$$I=\frac{9}{10}e^{-x}\left(\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\cos 3x}{9}\right)+c$$

مثال: فرض کنید بدانیم $f(a)=f(b)=0$ حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I=\int_a^b x.f''(x)dx$$

حل:

مشتق		انتگرال
x		$f''(x)$
	$+$	
1		$f'(x)$
	$-$	
0		$f(x)$

$$I=\int_a^b x.f''(x)dx=\left(x.f'(x)-f(x)\right)\Big|_a^b=\left(b.f'(b)-f(b)-\left(af'(a)-f(a)\right)\right)=bf'(b)-af'(a)$$

ج) روش تجزیه کسرها

اگر تابع زیر علامت انتگرال به صورت $\frac{p(x)}{Q(x)}$ و درجه صورت از مخرج کمتر باشد (در غیر این صورت، اول صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و آنگاه ادامه می‌دهیم). ابتدا $Q(x)$ را به عوامل درجه اول و درجه دوم غیر قابل تجزیه، تجزیه کرده و با توجه به حالات زیر، کسر موردنظر را به صورت مجموع چند کسر می‌نویسیم:

الف) اگر در تجزیه $Q(x)$ فقط عوامل درجه اول و بدون تکرار وجود داشته باشند، یعنی داشته باشیم:

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i)$$

(هیچ‌کدام از aها با هم برابر نمی‌باشند)

در این حالت داریم:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_i}{x-a_i}}$$

توجه کنید که با متحد قرار دادن دو طرف تساوی فوق ضرایب $A_2, A_1, \ldots$ را می‌توان تعیین نمود.

ب) اگر در تجزیه $Q(x)$ فقط عوامل درجه اول بوجود بیاید ولی بعضی از آنها تکراری باشند، یعنی داشته باشیم:

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i)(x-b)^k$$

در این حالت داریم:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_i}{x-a_i}+\frac{B_1}{(x-b)^k}+\frac{B_2}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)}}$$

ج) اگر در تجزیه $Q(x)$ فقط عوامل درجه دوم غیرقابل تجزیه و بدون تکرار وجود داشته باشند، یعنی داشته باشیم:

$$Q(x)=\left(x^2+a_1x+b_1\right)\left(x^2+a_2x+b_2\right)\ldots$$

در این حالت داریم:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+a_1x+b_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+a_2x+b_2}+\ldots}$$

د) اگر در تجزیه $Q(x)$ عوامل درجه دوم غیرقابل تجزیه تکراری نیز موجود باشد، یعنی داشته باشیم:

$$Q(x)=\left(x^2+a_1x+b_1\right)\left(x^2+a_2x+b_2\right)\ldots\left(x^2+mx+n\right)^k$$

در این حالت داریم:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+a_1x+b_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+a_2x+b_2}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+mx+n\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+mx+n\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+mx+n\right)}}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: کسرهای زیر را به صورت مجموع کسرهای جزئی نمایش دهید (محاسبه ضرایب نامعین موردنظر نمی باشد).

الف)

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

ب)

$$f(x)=\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

ج)

$$f(x)=\frac{2x^2-13}{x^2(x^2+x)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}$$

$$x^2(x^2+x)=x^3.(x+1)$$

د)

$$f(x)=\frac{x-3}{(x^2+1)^3(x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}+\frac{G}{x-1}+\frac{H}{(x-1)^2}$$

مثال: حاصل انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید:

$$I=\int\frac{x+3}{x^3+x}dx$$

حل: ابتدا کسر زیر انتگرال را تجزیه می کنیم:

$$\frac{x+3}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ C=1\\ A=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-3\\ A=3\\ C=1\end{cases}$$

$$I=\int\frac{3}{x}+\frac{-3x+1}{x^2+1}\,dx=\int\frac{3}{x}\,dx+\int\frac{dx}{1+x^2}-3\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$I=3\ln x+\tan^{-1}x-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)=3\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\tan^{-1}x+c$$

مثال:

$$I=\int\frac{dx}{x(1+x)^2}$$

حل: ابتدا کسر زیر انتگرال را تجزیه می کنیم:

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(1+x)^2}=\frac{A(1+x)^2+Bx(1+x)+Cx}{x(1+x)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+C+B)x+A}{x(1+x)^2}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}\right)\ dx=\ln|x|-\ln|1+x|+\frac{1}{1+x}+c$$

نکته: با روش تجزیه کسرها به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$\boxed{\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ \ln\ \left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C}$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}$ برابراست با:

حل:

$$\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+4Cx+Dx^2+4D}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases}A+C=0\\B+D=2\\A+4C=0\\B+4D=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=C=0\\B=+3\\D=-1\end{cases}$$

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{3}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\tan^{-1}x\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

انتگرال گیری به‌صورت معین از توابعی که در فاصله انتگرال‌گیری، طبیعت منحصر به فردی ندارند:

در این گونه مسائل، باید انتگرال معین را به مجموع چند انتگرال معین با فاصله کوتاه تر به گونه ای بشکنیم که در هر کدام از این فواصل، بتوان وضعیت تابع زیر علامت انتگرال را مشخص نمود. سپس ادامه حل مسئله ساده خواهد بود:

مثال: تابع $f(x)$ به‌صورت روبرو تعریف شده است. مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 1\\x+1 & x>1\end{cases}$$

$$I=\int_{-1}^{3}f(x)dx$$

حل:

$$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_{-1}^{1}-1dx+\int_1^3(x+1)dx$$

$$=-x\ \Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ \Big|_1^3=(-1+(-1))+\left(\frac{3^2}{2}+3-\left(\frac{1^2}{2}+1\right)\right)=-2+(7.5-1.5)=4$$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید:

$$I=\int_1^{n+1}\ln[x]\ dx$$

حل:

$$I=\int_1^2 \ln\ [x]\ dx+\int_2^3 \ln\ [x]\ dx+...+\int_n^{n+1} \ln\ [x]\ dx$$
$$=\int_1^2 \ln\ 1\ dx+\int_2^3 \ln\ 2\ dx+...+\int_n^{n+1} \ln\ n\ dx$$
$$=\ln\ 1+\ln\ 2+\ln\ 3+...+\ln\ n=\ln\ (1\times2\times3\times...\times n)=\ln\ (n!)$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\cos x]dx$$

حل:

$$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\cos x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<2\cos x<1$$
$$0<x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow \frac{1}{2}<\cos x<1\Rightarrow 1<2\cos x<2$$

لذا داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\cos x]dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (0)dx=\frac{\pi}{3}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر با توجه به اینکه می‌دانیم $f(x)=\max\left\{1,x^2\right\}$:

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{2} f(x)\ dx$$

حل:

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود در فاصله $\left(-\frac{1}{2}\ ,1\right)$ ضابطه تابع برابر 1 و در فاصله $(1,2)$ ضابطه تابع برابر x^2 می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 1\ dx\ +\int_1^2\ x^2\ dx$$
$$I=(x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{7}{3}=\frac{23}{6}$$

مثال: در صورتی که $x\in[2,3]$ باشد، مطلوب است حل معادله زیر:

$$\int_0^x [t]^2\ dt=2(x-1)$$

حل: می توان نوشت:

$$\int_0^1 [t]^2\ dt+\int_1^2 [t]^2\ dt+\int_2^x [t]^2\ dt=2(x-1)$$
$$0+\int_1^2 1^2\ dt+\int_2^x 2^2\ dt=2(x-1)$$
$$0+(2-1)+2^2(x-2)=2(x-1)\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I = \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\, dx$$

حل: دقت شود که در انتگرال‌های معینی که قدر مطلق وجود دارد، نخست باید با تجزیه انتگرال قدرمطلق را حذف کنیم بنابراین:

$$0 \le x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le \sin x \le \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x \ge 0$$

$$\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos x \le \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x \le 0$$

$$\frac{\pi}{2} \le x < \pi \Rightarrow \cos x \le 0 \le \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x \le 0$$

پس لذا می‌توان نوشت:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} +(\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} -(\cos x - \sin x)\, dx$$

$$(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\sin x - \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 2\sqrt{2} - 2$$

یادآوری: تابع پله واحد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{U_c(t) = U(t-c) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t > c \end{cases}}$$

مثال: هرگاه u توصیف کننده تابع پله واحد باشد. حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید:

$$I = \int_0^t u(x-3)dx$$

حل: بدیهی است اگر $t < 3$ باشد، آنگاه $u = 0$ و اگر $t > 3$ باشد، آنگاه $u = 1$ است.

بنابراین داریم:

راه اول:

$$\int_0^t u(x-3)dx = \int_0^3 0\, dx + \int_3^t 1\, dx = t - 3$$

$$I = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ t-3 & t > 3 \end{cases} = (t-3)u(t-3)$$

یافتن کران‌هایی برای یک انتگرال:

فرض کنید، تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، و مقادیر می‌نیمم و ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ در فاصله $x \in [a,b]$ را به ترتیب m و M بنامیم، آنگاه می توان گفت:

$$\boxed{m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M}$$

مثال: اگر 2 , 5 به ترتیب، کمترین و بیشترین مقادیر تابع پیوسته $f(x)$ در فاصله $[1,5]$ باشند. حاصل $\int_1^5 f(x)dx$ در کدام فاصله قرار دارد؟

حل: طبق بحث‌های صورت گرفته داریم:

$$2(5-1) \le \int_1^5 f(x)dx \le 5(5-1)$$

$$8 \le \int_1^5 f(x)\, dx \le 20$$

در فاصله $[8,20]$ قرار دارد.

مثال: یک کران بالا و یک کران پایین برای انتگرال زیر بیابید.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

حل: با فرض $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$، طبیعی است که منظور یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیم مطلق این تابع در فاصله $[0\,,1]$ است، لذا اگر اول تابعی مانند $h = 2 + x - x^2$ فرض کنیم، برای یافتن اکسترمم‌های h در فاصله $[0\,,1]$ می‌نویسیم:

$$h = 2 + x - x^2 \rightarrow h' = 1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین در فاصله $x \in [0,1]$ داریم:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
h'		$+$		$-$	
h	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2

$$f_{min} = \frac{1}{\sqrt{\max h}}$$

$$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{\min h}}$$

$$f_{min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3}$$

$$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین طبق بحث گفته شده داریم:

$$\frac{2}{3} \le \frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}}{1-0} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: هرگاه $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ ، $f(4)-f(2)<A$، آنگاه مطلوب است محاسبه مقدار A.

حل: $f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<\max f'(x)$$

که در آن $\max f'(x)$ را باید در فاصله $x\in[2,4]$ در نظر گرفته شود:

$$f(x)=\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

بدیهی است، $\max\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ در فاصله $[2,4]$ برابر $\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<\frac{1}{5}\Rightarrow f(4)-f(2)<\frac{2}{5}\Rightarrow A=\frac{2}{5}$$

برخی از کاربردهای انتگرال معین:

الف) محاسبه مقدار متوسط تابع در یک فاصله:

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد،در این صورت مقدار متوسط این تابع در فاصله مذکور به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\bar{f}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$$

مثال: مقدار متوسط تابع با ضابطه $f(x)=3^x$ روی بازه $[-1\,,+1]$ چقدر است؟

حل:

$$\bar{f}=\frac{\int_{-1}^{+1}3^x\,dx}{1-(-1)}=\frac{\frac{1}{\ln 3}3^x\Big|_{-1}^{+1}}{2}=\frac{1}{2\ln 3}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\ln 3}$$

مثال: مقدار متوسط تابع زیر را حر فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ به‌دست آورید.

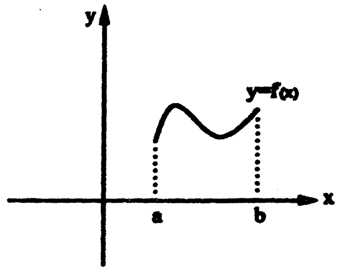
$$f(x)=\sin 2x\ .\ e^{\sin^2 x}$$

حل:

$$\bar{f}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ .\ e^{\sin^2 x}\ dx}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{e-1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2(e-1)}{\pi}$$

ب) مجموع های ریمانی و محاسبه برخی از حد مجموع‌ها:

به شکل زیر توجه کنید:

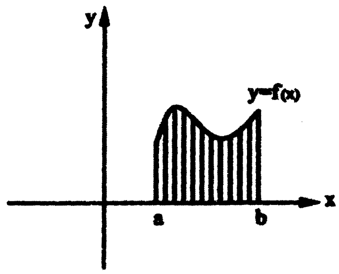


با توجه به کاربرد انتگرال معین که می تواند توصیف کننده سطح محصور به چند منحنی باشد، بدیهی است که داریم:

$$s=\int_a^b f(x)\,dx$$

اما چنانچه فاصله $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و تعداد این تقسیمات را به بی‌نهایت میل دهیم، می توان گفت:

$$\begin{cases}\dfrac{b-a}{n}=\Delta x\\ n\to\infty\\ \\ \Delta x\to 0\end{cases}$$



بنابراین داریم:

$$s=\begin{Bmatrix}\Delta x.\{f(a)+f(a+\Delta x)+\dots+f(b-\Delta x)\}\\ \Delta x.\{f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\dots+f(b)\}\end{Bmatrix}=\int_a^b f(x).dx$$

مثال: حد مجموع‌های زیر را حساب کنید.

$$1)\ \ I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin^2\frac{1}{n}+\sin^2\frac{2}{n}+\dots+\sin^2\frac{n}{n}\right\}$$

حل: با انتخاب $\Delta x=\frac{1}{n}$, $f(x)=\sin^2 x$, $a=0,b=1$ داریم:

$$I=\int_0^1\sin^2 x\,dx=\int_0^1\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left\{x-\frac{1}{2}\sin 2x\right\}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\right)$$

$$2)\ \ I=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$$

حل:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2^2}{n^2}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n^2}{n^2}}}\right\}$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right\}$$

با انتخاب $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $a=0$, $b=1$ داریم:

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sinh^{-1}x\Big|_0^1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

توجه: رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\boxed{\operatorname{Arc}\sinh x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

مثال: حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^4}{n^5}+\frac{2^4}{n^5}+\frac{3^4}{n^5}+\frac{4^4}{n^5}+\dots+\frac{n^4}{n^5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\dots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right)$$

لذا با فرض $b=1$, $a=0$, $f(x)=x^4$, $\Delta x=\frac{1}{n}$ عبارت فوق، تعریف انتگرال معین $\int_0^1 x^4\,dx$ بوده و داریم:

$$I=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}$$

محاسبه مساحت یک ناحیه در صفحه

برای محاسبه سطح محصور به دو منحنی $y=f(x)$, $y=g(x)$ در فاصله $a<x<b$ با این فرض که $f(x)\geq g(x)$ می‌توان نوشت:

$$\boxed{s=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx}$$

اگر چه یکی از موارد کاربرد انتگرال یگانه معین در محاسبه سطح است، لیکن محاسبه مساحت از طریق انتگرال‌های دوگانه بسیار ساده‌تر به نظر می‌رسد، که این مبحث در ریاضی۲ به تفضیل توضیح داده شده است.

حجم یک جسم دوار

برای محاسبه حجم حادث از دوران یک ناحیه R که حول خط L که موازی یکی از محورهای مختصات است در حالت زیر را بررسی می‌کنیم. لازم به ذکر است که در این مبحث فقط حالاتی را که خط L یکی از محورهای مختصات است بررسی می‌کنیم. حالت‌های دیگر از حوصله بحث ما خارج است.

الف) روش حلقه مستدیر:

اگر ناحیه $\mathbf{R}$ محصور بـه منحنـی‌هـای $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ و خطـوط $x=a$, $x=b$ باشـد و توابـع f_1 , f_2 در فاصـله $[a,b]$ پیوسته باشند و برای هر x متعلق به این فاصله $f_1(x)\geq f_2(x)$ باشد، آنگاه حجم حادث از دوران ناحیه $\mathbf{R}$ حول محور x ها برابراست با:

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)dx}$$

ب) روش پوسته استوانه‌ای

اگر ناحیه $\mathbf{R}$ محصور به منحنی‌های $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ و خطوط $x=a$, $x=b$ باشد و توابع f_1 , f_2 در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر x متعلق به این فاصله $f_1(x)\geq f_2(x)$ باشد، آنگاه حجم حادث از دوران ناحیه $\mathbf{R}$ حول محور yها برابراست با:

$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx}$$

علاوه بر دو روش فوق در محاسبه حجم حادث از دوران یک سطح، می‌توان از قضیه گلدن ـ پاپیوس که در ریاضی۲ مطـرح مـی‌گـردد استفاده نمود.

مثال: سطح محصور بین منحنی‌های $y=x$, $y=\sqrt{x}$ چقدر است؟

حل: بدیهی است محل تقاطع دو منحنی داده شده به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید: $\sqrt{x}=x\Rightarrow x=0\,,\,1$

در نتیجه طبق رابطه ذکر شده، سطح موردنظر عبارت است از:

$$s=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y=\ln\sqrt{x}$ و محور x و خط $x=e$ چقدر است؟

حل: بدیهی است در نمودار $y=\ln\sqrt{x}$ بدون نیاز به رسم نمودار می‌توان به راحتی دریافت که این نمودار محور طول‌ها را در نقطه $x=1$ قطع می‌کند. پس داریم: $s=\int_1^e\ln\sqrt{x}\,dx$

با اعمال روش جزء به جزء به‌دست مـی‌آید:

$$\begin{cases}\ln\sqrt{x}=u\\ dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=du\\ x=v\end{cases}$$

$$\Rightarrow s=x\ln\sqrt{x}\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2x}dx=x\ln\sqrt{x}\Big|_1^e-\frac{1}{2}x\Big|_1^e=e\ln\sqrt{e}-\frac{1}{2}(e-1)$$

$$s=\frac{1}{2}$$

با توجه به آنکه می‌دانیم: $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$

مثال: حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی‌های $y^2 = 8x$, $y = x^2$ حول محور x را به‌دست آورید.

حل: برای یافتن محل تلاقی دو منحنی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{8x} \Rightarrow x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ 2$$

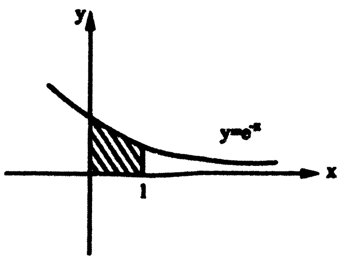
در نتیجه داریم:

$$v = \pi \int_0^2 \left(8x - x^4\right)dx = \pi\left(4x^2 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{48\pi}{5}$$

مثال: سطح محصور شده به منحنی $y = e^{-x}$ و محور xها و محور y ها و خط $x = 1$ را در نظر بگیرید، مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) حجم حاصل از دوران این سطح حول محور x ها.

ب) حجم حاصل از دوران این سطح حول محور y ها.



حل:

الف)

$$V = \pi\int_0^1\left(\left(e^{-x}\right)^2 - (0)^2\right)dx = \pi\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{\pi}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 = \frac{-\pi}{2}\left(e^{-2} - 1\right)$$

ب)

$$V = 2\pi\int_0^1 x\left(f(x) - g(x)\right)dx = 2\pi\int_0^1 x\left(e^{-x} - 0\right)dx = 2\pi\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(-2e^{-1} + 1\right)$$

در حل انتگرال قسمت (ب) از روش جزء به جزء استفاده شده است.

انتگرال‌های غیرعادی (ناسره)

انتگرال‌های معین در چند وضعیت طبیعت ناسره پیدا می‌کنند که در این حالت باید وضعیت آن انتگرال را مورد رسیدگی قرار دهیم، چرا که ممکن است حاصل آن انتگرال موجود باشد، (انتگرال ناسره مذکور هم‌گرا باشد) و ممکن است حاصل انتگرال موجود نباشد (انتگرال مذکور واگرا باشد).

در زیر دو وضعیت ناسره بودن یک انتگرال معین را بررسی می کنیم:

الف) انتگرال‌های معینی که تابع زیر علامت انتگرال در تمام فاصله انتگرال‌گیری، پیوسته است. ولی یک یا هر دو حد انتگرال‌گیری از جنس بی‌نهایت هستند.

به عنوان مثال فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a, +\infty)$، تابعی پیوسته باشد و $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد، در این صورت انتگرال مقابل:

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

طبیعت ناسره دارد و می توان نوشت:

$$I = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

در صورتی که حاصل فوق عددی مشخص و محدود باشد، می‌گویند I هم‌گراست و در غیر این صورت آن را **واگرا** می نامیم.

مثال: وضعیت انتگرال‌های زیر را مشخص کنید.

1) $I=\int_4^{+\infty}\frac{dx}{x^2-9}$

حل:

$$I=\frac{1}{2\times 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_4^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{4-3}{4+3}\right|=$$
$$\frac{1}{6}\left\{\ln(1)-\ln\frac{1}{7}\right\}=-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{7}=\frac{1}{6}\ln 7$$

2) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$

حل: با ایجاد مربع کامل در مخرج کسر داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\sqrt{\frac{4}{3}}\quad\left\{\tan^{-1}(+\infty)-\tan^{-1}(-\infty)\right\}$$
$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

مثال: مقدار c چند باشد تا انتگرال زیر هم‌گرا شود؟

$$I=\int_2^{+\infty}\left(\frac{c}{x+1}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx$$

حل:

$$I=\left(c\ \ln\ (x+1)-\frac{1}{2}\ \ln\ \left(x^2+4\right)\right)\Bigg|_2^{+\infty}=\ln\ \frac{(x+1)^C}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_2^{+\infty}$$

بدیهی است انتگرال مذکور زمانی هم‌گراست که حاصل حد زیر موجود باشد، علاوه بر آن این حد نباید مقدار صفر را نیز اختیار کند، لذا توان x باید در صورت و مخرج یکسان شود که نتیجه می شود:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^c}{\sqrt{x^2+4}}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{x^C}{\sqrt{x^2}}\Rightarrow C=1$$

- در رابطه با انتگرال‌های ناسره نوع الف، مسائلی که تا به حال حل شدند به گونه ای بودند که محاسبه تابع اولیه تابع زیر علامت انتگرال امکان پذیر بود. در صورتی که چنین امری ممکن نباشد، ممکن است بحث‌های زیر به ما کمک کند:

چند قضیه و چند تعریف

آزمون مقایسه: فرض کنید توابع $f(x)$, $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند (b , a می‌توانند بی‌نهایت باشند). چنانچه داشته باشیم:

$\forall x\in[a,b]\quad f(x)\geq g(x)\geq 0$

و تعریف کنیم:

$I=\int_a^b f(x)\,dx\ \ ,\ \ J=\int_a^b g(x)dx$

می توان ثابت کرد:

الف) در صورتی که I همگرا باشد، J نیز همگرا می‌باشد.

ب) در صورتی که J واگرا باشد، I نیز واگرا می‌باشد.

تعریف: فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم:

$$I=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad J=\int_a^b |f(x)|\, dx$$

می‌توان نشان داد:

الف) اگر J همگرا باشد، آنگاه I نیز الزاماً همگراست و اصطلاحاً می‌گویند I همگرایی مطلق دارد.

ب) اگر J واگرا باشد ولی I همگرا باشد، اصطلاحاً می‌گویند، I همگرایی مشروط دارد.

توجه: فرض کنید $a>0$ و p یک عدد ثابت باشد و انتگرال ناسره زیر را در نظر بگیرید:

$$\boxed{I=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}}$$

در این‌صورت I به ازاء $p\le 1$ واگرا است و I به ازاء $p<1$ همگرا است.

مثال: کدام گزینه در ارتباط با انتگرال مقابل صحیح است؟

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^4+e^x+1}dx$$

الف) همگرای مشروط است. ب) همگرای مطلق است. ج) واگراست. د) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

حل:

$$\forall x\ge 1 \rightarrow \left|\frac{\cos x}{x^4+e^x+1}\right|\le\frac{1}{x^4+e^x+1}\le\frac{1}{x^4}$$

اما می‌دانیم انتگرال ناسره زیر همگراست:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$$

بنابراین انتگرال:

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^4+e^x+1}\right|dx$$

نیز همگرا بوده و در نهایت نتیجه می‌گیریم، I همگراست و همگرایی مطلق دارد و گزینه (ب) صحیح است.

مثال: کدام گزینه در ارتباط با انتگرال زیر صحیح است؟

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{2x}(x+1)}{x^{\frac{6}{4}}}$$

الف) همگرا است. ب) واگرا است ج) نمی‌توان تشخیص داد. د) هیچکدام

حل:

$$\forall x>1 \Rightarrow \frac{e^{2x}(x+1)}{x^{\frac{6}{4}}}>\frac{x+1}{x^{\frac{6}{4}}}>\frac{x}{x^{\frac{6}{4}}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{4}}}$$

و با توجه به اینکه می‌دانیم $\int_{+1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ واگرا است. بنابراین طبق آزمون مقایسه انتگرال موردبحث نیز واگرا می‌باشد.

مثال: انتگرال $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}$:

الف) هم‌گرای مشروط   ب) هم‌گرای مطلق   ج) واگرا است.   د) قابل تشخیص نمی‌باشد.

حل: با توجه به اینکه می‌دانیم $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ داریم:

$$\forall_{x>0} \ , \ \left|\frac{\cos x}{\cosh x}\right| \le \frac{1}{\cosh x}$$

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\cosh x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx$$

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2du}{u^2+1} = 2\tan^{-1} u \Big|_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

لذا تابع J هم‌گرا بوده و طبق آزمون مقایسه $\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos x}{\cosh x}\right| dx$ هم‌گرا است. یعنی I هم‌گرایی مطلق دارد.

ب) انتگرال‌های معینی که تابع زیر انتگرال در تمام فاصله انتگرال‌گیری به جز در حد بالایی یا پایینی انتگرال، معین نمی باشد.

به عنوان مثال فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b)$ تابعی پیوسته باشد، اما در خود نقطه $x=b$ نامعین باشد، در این صورت انتگرال زیر طبیعت ناسره دارد:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

و برای مشخص شدن وضعیت آن باید به صورت زیر عمل کنیم:

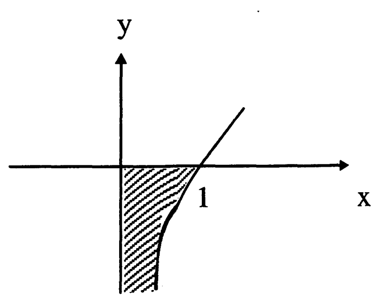
$$I = F(x)\big|_a^b = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I = \int_0^1 \ln x\, dx$$

حل: بدیهی است که انتگرال مذکور طبیعت ناسره دارد، چرا که تابع $\ln x$ در نقطه $x=0$ تعریف شده نمی‌باشد، ابتدا با روش جزء به جزء، انتگرال نامعین $\int \ln x\, dx$ را محاسبه می‌کنیم که برابراست با:

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x$$



بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x - x = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{H} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

$$I = (x\ln x - x)\big|_{0^+}^1 = (\ln 1 - 1) - 0 = -1$$

مثال: چنانچه بدانیم:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

مطلوب است محاسبه انتگرال های زیر:

الف) $A = \int_0^{\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx$

ب) $B = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

حل:

الف) از تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$x^3 = u \to 3x^2 dx = du$$

$$A = \int_{u=0}^{u=\infty} \frac{\sin u}{3u} du = \frac{\pi}{6}$$

ب) از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{matrix} \sin^2 x = u \\ \frac{dx}{x^2} = dv \end{matrix} \to \begin{cases} \sin 2x\, dx = du \\ -\frac{1}{x} = v \end{cases}$$

$$B = \frac{-1}{x}\sin^2 x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \sin 2x\, dx = 0 + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \sin 2x\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} \sin u\, du = \frac{\pi}{2}$$

نکته: اگر a و p یک عدد ثابت باشند، در این‌صورت می‌توان نشان داد انتگرال ناسره زیر:

$$I = \int_0^{a} \frac{dx}{x^p}$$

به ازاء $p \geq 1$ واگرا است.
به ازاء $p < 1$ هم‌گراست.

مثال: در مورد انتگرال زیر کدام‌یک از گزینه‌ها صحیح است؟

$$I = \int_0^{1} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

الف) واگرا است. ب) هم‌گرا است. ج) مطلقاً هم‌گراست. د) نمی‌توان تشخیص داد.

حل: داریم:

$$\forall x \in (0,1) \quad , \quad \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

از طرفی چون $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ هم‌گراست، لذا طبق آزمون مقایسه I مطلقاً هم‌گرا خواهد بود.

مثال: p را طوری تعیین کنید که انتگرال زیر هم‌گرا گردد.

$$I = \int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

حل: با تغییر متغیر $\ln x = u$ داریم:

$$\frac{1}{x} dx = du \Rightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{dU}{U^p}$$

این انتگرال به ازاء $p < 1$ هم‌گراست.

ج) انتگرال‌های معینی که تابع زیر علامت انتگرال در یک یا چند نقطه داخل فاصله انتگرال‌گیری نامعین است.

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در تمام فاصله $[a,b]$ به‌جز نقطه $x=c$ تابعی پیوسته باشد، در این صورت انتگرال زیر طبیعت ناسره دارد:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

و برای مشخص شدن جواب این انتگرال باید بنویسیم:

$$I=\int_a^{c^-} f(x)dx+\int_{c^+}^b f(x)dx$$

می‌گویند **I** هم‌گراست اگر تنها اگر، هر دو انتگرال سمت راست هم‌گرا باشند.

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_{-1}^{7}\frac{1}{x-1}dx$ کدام گزینه است؟

الف) $\ln\frac{6}{7}$ ب) $\ln\frac{7}{6}$ ج) واگراست. د) هیچ‌کدام

حل:

$$I=\int_{-1}^{1^-}\frac{1}{x-1}dx+\int_{1^+}^{7}\frac{1}{x-1}dx$$

اما در محاسبه $\int_{-1}^{1^-}\frac{dx}{x-1}$ داریم:

$$\int_{-1}^{1^-}\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{-1}^{1}=\ln|-\varepsilon|-\ln|-2|=\ln\varepsilon-\ln 2=-\infty$$

پس چون یکی از انتگرال‌های حاصل **I** واگرا است پس در کل، I واگرا است. بنابراین گزینه (ج) صحیح است.

چند مسئله دیگر از قاعده مشتق گیری از انتگرال:

هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x,t)dt$$

می توان ثابت کرد:

$$\boxed{\frac{df}{dx}=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial h(x,t)dt}{\partial x}+\beta'(x)h(x,\beta(x))-\alpha'(x)h(x,\alpha(x))}$$

مثال: هرگاه داشته باشیم $f(t)=\int_0^t\frac{\sin tx}{x}dx$ مطلوب است محاسبه $\frac{df}{dt}$.

حل:

$$\frac{df}{dt}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin tx}{x}\right)dx+1\,.\,\frac{\sin t^2}{t}-0$$

$$=\int_0^t\frac{1}{x}.\,x\,.\cos tx.dx+\frac{\sin t^2}{t}=\frac{1}{t}\sin tx\Big|_0^t+\frac{\sin t^2}{t}=\frac{2\sin t^2}{t}$$

مثال: با توجه به معادله انتگرالی $f(x)=\exp\left\{-\int_0^x f(t)\,dt\right\}$ مطلوب است محاسبه $f(4)$.

حل: از طرفین معادله لگاریتم نپرین می‌گیریم.

$$\ln f(x)=-\int_0^x f(t)\cdot dt$$

$$\frac{f'}{f}=-0-f(x)+0\;\rightarrow\;f'(x)=f(x)\cdot(-f(x))\;\rightarrow\;\frac{df(x)}{dx}=-(f(x))^2$$

$$\frac{1}{f(x)}=x+c$$

از معادله انتگرالی داده شده داریم: $f(0)=\exp\left\{-\int_0^0 f(x)\,dt\right\}=1$

با اعمال شرایط $\Rightarrow c=1 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}=x+1 \to f(4)=\dfrac{1}{5}$

مثال: فرض کنید داشته باشیم: $I(\beta)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\beta x\,dx$ مطلوب است محاسبه $I'(2)$:

الف) $I(2)$ ب) $-I(2)$ ج) $2I(2)$ د) هیچ‌کدام

حل:

$$\frac{dI}{d\beta}=I'(\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos\beta x)dx+0-0$$

با اعمال روش جزء به جزء داریم:

$$I'(\beta)=\int_0^{\infty}-e^{-x^2}.x.\sin\beta x dx$$

$$\begin{cases}\sin\beta x=u\\ -xe^{-x^2}dx=dv\end{cases}\to\left|\begin{array}{l}\beta\cos\beta x=du\\ \dfrac{1}{2}e^{-x^2}=v\end{array}\right.$$

$$I'(\beta)=\frac{1}{2}e^{-x^2}.\sin\beta x\,\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\;e^{-x^2}\cdot\beta\cos\beta x\,dx$$

$$\begin{cases}I'(\beta)=\int_0^{\infty}-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}.\beta\cos\beta x\,dx\\ I(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}.\cos\beta x.dx\end{cases}\to I'(\beta)=-\frac{1}{2}\times\beta I(\beta)$$

$$I'(2)=-\frac{1}{2}\times2\times I(2)=-I(2)$$

مثال: نقطه به طول $x=1$ برای تابع $f(x)=x-\int_x^1\dfrac{2\cos\pi t\,dt}{1+t^2}$:

الف) ماکزیمم نسبی ب) مینیمم نسبی ج) عطف است. د) غیربحرانی

حل:

$$f'(x)=1+\frac{2\cos\pi x}{1+x^2}$$

بدیهی است داریم: $f'(1)=0$ پس لذا $x=1$ برای تابع موردنظر یک نقطه بحرانی است.

$$f''(x)=\frac{-2\pi\sin\pi x\,.\left(1+x^2\right)-2x\left(2\cos\pi x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

لذا، طبق آزمون مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطه $x=1$ دارای مینیمم نسبی است. $f''(1)=1>0$

مثال: مطلوب است محاسبه حد مقابل:

$$I=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^3+1}\int_x^{-1}e^{-t}\cos\pi t\,dt$$

$$I=\lim_{x\to-1}\frac{\int_x^{-1}e^{-t}\cos\pi t\,.\,dt}{x^3+1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

با اعمال هوپیتال و قاعده مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to-1}\frac{-e^{-x}\cos\pi x}{3x^2}=\frac{e}{3}$$

فصل هفتم

دنباله و سری

دنباله:

یک دنباله مانند $\{a_n\}$ که در آن a_n را جمله عمومی دنباله گویند، رشته‌ای از اعداد است که با قرار دادن مقایر طبیعی به جای n در جمله عمومی دنباله حاصل می شود.

چند تعریف:

الف) دنباله $\{a_n\}$ را همگرا گویند، هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ موجود باشد و در غیر این صورت دنباله را واگرا می‌گویند.

ب) دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گویند، هرگاه بتوان عدد ثابتی مانند M پیدا کرد که:

$$\forall n \in N \qquad |a_n| \le M$$

ج) دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی می گویند هرگاه:

$\forall n \in N, a_{n+1} > a_n$ یا $a'_n > 0$

د) دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً نزولی می‌گویند هرگاه:

$\forall n \in N, a_{n+1} < a_n$ یا $a'_n < 0$

مثال: وضعیت همگرایی یا واگرایی دنباله های زیر را تعیین کنید:

1) $\left\{(-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+2n}\right\}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+2n} = 0 \to$ دنباله همگرا به عدد صفر است

2) $\left\{\sqrt[n]{2^{2n}+3^n}\right\}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n}+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} = 4$

از آنجا که وقتی $n \to \infty$ شود، $4^n >> 3^n$ پس دنباله مذکور همگرا به عدد ۴ است.

3) $\left\{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}\right\}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{n^2+3} = \infty$ واگراست

$$4)\ a_n = \begin{cases} a_n = \dfrac{e^{-n}}{n} & \text{زوج } n \\ a_n = n\sin\dfrac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n.\dfrac{1}{n} = 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بنابراین دنباله مذکور واگراست، زیرا در $n \to \infty$ حد یکتا ندارد.

$$5)\ a_n = \left\{ \left[\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2+\frac{1}{2}} = 1^+ \Rightarrow a_n = [1^+] = 1 & \text{زوج باشد. } n \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+\frac{1}{2}} = 1^- \Rightarrow a_n = [1^-] = 0 & \text{فرد باشد. } n \end{cases}$$

لذا دنبال مذکور واگراست.

نکته: زمانی که $n \to \infty$ میل می‌کند $\boxed{\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}}$ می‌باشد.

مثال: در دنباله $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$، وضعیت همگرایی و یکنوایی را تعیین کنید.

می‌دانیم زمانی که $n \to \infty$ می‌رود $n^n > n!$ پس داریم:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \rightarrow$ پس دنباله مذکور همگرا به صفر است

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\, n!.\, n^n}{(n+1)\,(n+1)^n .\, n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

به ازای هر $\forall_n \in N$ عبارت فوق کوچکتر از واحد است. پس دنباله اکیداً نزولی است.

مثال: وضعیت یکنوایی دنباله زیر را تعیین کنید.

$$a_n = \left\{\frac{n}{n^2+25}\right\}$$

$$a'_n = \frac{25-n^2}{\left(n^2+25\right)^2}$$

پس به ازای $n < 5$ اکیداً صعودی به ازای $n > 5$ اکیداً نزولی است. پس دنباله فوق طبیعت یکنوا ندارد.

مثال: وضعیت یکنوایی و همگرائی سری‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\left\{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right\}$

ابهام دارد.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\times\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$$

دنباله **همگرا** به عدد صفر است.

$$a'_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}>0$$

دنباله مذکور هموراه صعودی است.

ب) $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$

می‌دانیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

دنباله **همگرا** به عدد ln2 است.

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}$$

$$2n+2>n\;\Rightarrow\;\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{n}\;\Rightarrow\;\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}<0\;\Rightarrow\;a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}<0\;\Rightarrow\;a_{n+1}<a_n$$

پس دنباله مذکور نزولی می‌باشد.

مثال: دنباله $\left\{\frac{n}{n^2+30}\right\}$ مفروض است.

اولاً) مشخص کنید این دنباله از جمله چندم به بعد نزولی می‌شود.

ثانیاً) یک کران بالا و یک کران پایین برای این دنباله پیدا کند.

الف) $a_n = \frac{n}{n^2+30} \Rightarrow a'_n = \frac{(n^2+30)-(2n)(n)}{(n^2+30)^2} = \frac{30-n^2}{(n^2+30)^2}$

$a'_n = 0 \Rightarrow 30-n^2 = 0 \Rightarrow n = \sqrt{30}$

n	1	$\sqrt{30}$	$+\infty$
a'_n	$+$	0	$-$
a_n	$\nearrow$		$\searrow$

کران پایین : $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{31} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ کران پایین $= 0$

کران بالا: $5 < \sqrt{30} < 6 \Rightarrow \begin{cases} a_5 = \frac{5}{55} = \frac{1}{11} \\ a_6 = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow$ کران بالا $= \frac{1}{11}$

می‌توان ملاحظه کرد دنباله مذکور از جمله پنجم به بعد نزولی می‌شود.

مثال: **اولاً**) دنباله $\{n^2 - 10n + 16\}$ چند جمله منفی دارد؟

ثانیاً) کوچکترین جمله دنباله $\{n^2 - 20n + 200\}$ را بیابید؟

الف) $a_n = n^2 - 10n + 16 = (n-8)(n-2)$

برای اینکه دنباله مذکور جمله منفی داشته باشد باید:

$(n-8)(n-2) < 0 \Rightarrow 2 < n < 8 \Rightarrow n = 3,4,5,6,7$

پس دنباله مورد نظر دارای پنج جمله منفی است.

ب) $a_n = n^2 - 20n + 200 = (n-10)^2 + 100 \Rightarrow \min(a_n) = 100$

مثال: در دنباله $\left\{\frac{4n+1}{2n-5}\right\}$ برای چه مقادیر n داریم: $1.99 < \frac{4n+1}{2n-5} < 2.01$

$1.99 < \frac{4n+1}{2n-5} < 2.01 \Rightarrow 1.99 - 2 < \frac{4n+1}{2n-5} - 2 < 2.01 - 2 \Rightarrow -0.01 < \frac{4n+1-4n+10}{2n-5} < 0.01$

$\Rightarrow \left|\frac{11}{2n-5}\right| < 0.01 \Rightarrow \frac{11}{2n-5} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2n-5 > 1100 \Rightarrow n > 552.5 \Rightarrow n \geq 553$

سری‌های نامتناهی

سری نامتناهی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ را در نظر بگیرید:

می گویند این سری همگراست، اگر مجموع بینهایت جمله فوق در حد به سمت عدد مشخص و محدود نزدیک شود، و در غیر این صورت آنرا واگرا می نامیم.

(اگر چه آزمونهایی وجود دارد که از طریق آنها می توان تشخیص داد یک سری نامتناهی همگرا یا واگرا است، اما به ندرت اتفاق می افتد بتوانیم مقدار همگرایی یک سری همگرا را بدست آوریم).

در زیر به برخی از انواع سری اشاره شده است:

الف) سریهای هندسی: سری هندسی سری است که از مجموع جملات یک تصاعد هندسی بدست می‌آید، سری هندسی زیر را در نظر بگیرید:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\ldots+$$

می توان نشان داد چنانچه $|q|\geq 1$ باشد، سری مذکور واگراست و چنانچه $|q|<1$ باشد، سری مذکور همگراست و مقدار همگرایی آن برابر مقدار زیر است:

$$\boxed{I=\frac{a}{1-q}}$$

مثال: مقدار همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$$1)\ I=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)$$

ملاحظه می‌شود که سری مذکور از دو سری هندسی تشکیل یافته است:

$$I=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{-1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)$$

$$I=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{9}{4}$$

$$2)\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

قاعده ادغام:

به راحتی می توان نشان داد:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_m}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقدار همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$:

طبق قاعده ادغام داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{-1}{k+1}+\left(\frac{1}{1}\right)=1$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقدار همگرایی سری زیر:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n+1]{e}-\sqrt[n]{e}\right)$$

مطابق قاعده ادغام داریم $\rightarrow I=\sqrt[n+1]{e}\Big|_{n=\infty}-\sqrt[n]{e}\Big|_{n=1}=e^{\frac{1}{n+1}}\Big|_{n=\infty}-e^{\frac{1}{n}}\Big|_{n=1}$

$$e^{\frac{1}{\infty}}-e^{1}=e^{0}-e=1-e$$

مثال: حاصل سری‌های زیر را بدست آورید.

$$1)\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n+1)}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1$$

$$2)\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}.\frac{n+2}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big(\log n-\log(n+1)\big)+\big(\log(n+2)-\log(n+1)\big)\Big]$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big(\log n-\log(n+1)+\log(n+2)-\log(n+1)\big)\Big]=\log 1-\lim_{n\to\infty}\log(n+1)+\lim_{n\to\infty}\log(n+2)-\log 2$$

$$I=-\log 2-\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{n+2}=-\log 2-\log 1=-\log 2=\log\frac{1}{2}$$

برخی مواقع با استفاده از ایده روش تجزیه کسرها ممکن است بتوان مقدار همگرایی یک سری همگرا را تعیین کرد:

مثال: مطلوب است محاسبه مقدار همگرایی سری زیر:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)}$$

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1}{(n+3)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

چند قضیـه و آزمون در بحث تعیین همگرایی یا واگرایی سریهای عددی:

قضیه: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید، شرط لازم و نه کافی برای همگرایی این است که:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مثال: سریهای زیر را از حیث داشتن شرط لازم برای همگرایی چک کنید.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

سری مذکور شرط لازم برای همگرایی را دارد. اما به طور قطع نمی توانیم بگوییم همگراست یا واگرا.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n.\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = -1$

در عبارت بالا $\frac{1}{n} = x$ فرض کرده، پس زمانی که $n \to \infty$ می‌توان نتیجه گرفت $x \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} n \ . \ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم } \xrightarrow{H} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = -1$$

بنابراین این سری واگراست.

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^n\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1+\frac{-1}{n+4}\right)^n\right\}^n = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

سری شرط لازم برای همگرایی را دارد.

مثال: می‌دانیم حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + 4a_n - 5\right)$ برابر e شده است. با توجه به آنکه همه a_nها مثبت می‌باشند، حاصل حد زیر کدام است؟

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+1}{3a_n+2}$$

وقتی حاصل سری فوق برابر با عدد e می‌شود، سری مذکور همگراست و شرط لازم برای همگرایی را دارد پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + 4a_n - 5\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - 1)(a_n + 5) = 0$$

چون همه a_nها مثبت هستند لذا باید $\lim_{n\to\infty} (a_n - 1) = 0$ و یا بعبارتی:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+1}{3a_n+2} = \frac{2}{5}$$

آزمونهایی برای تعیین وضعیت همگرایی یا واگرایی سری‌هایی با جملات مثبت (یا منفی):

الف) آزمون p

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $a_n \geq 0$ را در نظر بگیرید: چنانچه بتوان عدد p را پیدا کرد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . n^p$ موجود و مخالف صفر باشد، آنگاه می توان گفت:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n . n^p$:
- اگر $p > 1$ باشد، سری مورد نظر همگراست.
- اگر $p \leq 1$ باشد، سری مورد نظر واگراست.

مثال: موقعیت سریهای زیر را تعیین کنید.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+3} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2+3} . n^2\right) = \frac{1}{4} \qquad p=2$ 	$P>1$ پس سری همگراست

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+3n+4} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+3n+4} . n^1\right) = 2 \qquad p=1$ 	$P=1$ پس سری واگراست

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} . n^{\frac{1}{2}}\right) = 1 \qquad p=\frac{1}{2}$ 	$P<1$ پس سری واگراست

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^3} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\sqrt{n}}{1+n^3} . n^{\frac{3}{2}}\right) = 1 \qquad p=\frac{3}{2}$ 	$P>1$ پس سری همگراست

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\tan^{-1} n}{n^2} . n^2\right) = \frac{\pi}{2} \qquad p=2$ 	$P>1$ پس سری همگراست

6) $\sum (n^3+1)\sin^6\frac{1}{n} : \lim\limits_{n\to\infty} (n^3+1)\sin^6\frac{1}{n} . n^3 = \lim (n^3+1)\left(\frac{1}{n}\right)^6 \times n^3 = 1 \neq 0$

$P=3$ پس سری همگرا است.

ب) آزمون دالامبر:

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $a_n \geq 0$ را در نظر بگیرید، برای تعیین وضعیت این سری، حد زیر را محاسبه می کنیم:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$:
- $L>1$ سری واگراست
- $L<1$ سری همگراست
- $L=1$ این آزمون بی نتیجه می ماند

مثال: وضعیت سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} : \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\;!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n\;!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)\;!}{n\;!\;(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=1^n=1^\infty \text{ مبهم}$$

رفع ابهام $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$ بنابراین سری مذکور همگراست.

توجه: می‌دانیم

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{-1}$$

مثال: وضعیت سری زیر را تعیین کنید.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$$

با استفاده از آزمون دالامبر داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{(n+1)}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$$

پس سری مزبور همگراست.

نکته: دقت کنید در مورد چند جمله‌ای‌ها از دالامبر استفاده نکنید. زیرا همیشه مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=1$ می‌شود.

ج) آزمون کوشی: سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ با فرض $a_n>0$ را در نظر بگیرید، برای تعیین وضعیت این سری، حد زیر را بدست می آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L\begin{cases}L>1 & \text{سری واگرا}\\ L<1 & \text{سری همگرا}\\ L=1 & \text{آزمون بی نتیجه است}\end{cases}$$

L هایی که از قضیه دالامبر بدست می‌آید، همان L هایی است که از قضیه کوشی بدست می آید، در نتیجه در صورتی که هر یک جواب ندهد از دیگری نمی‌توان استفاده کرد.

به عبارت دیگر همواره داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

مثال: وضعیت سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \dfrac{n}{e}$ پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n} = \frac{1}{e} < 1$$

پس طبق آزمون کوشی سری همگراست.

مثال: وضعیت سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

با استفاده از آزمون کوشی مشخص می‌شود که سری مذکور همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

مثال: وضعیت سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

طبق آزمون کوشی سری مزبور واگراست.

مثال: وضعیت سری‌های زیر را مشخص کنید.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

سری مزبور طبق آزمون کوشی همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2} = \frac{1}{2}$$

مقدار حد $A = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}$ به طریق زیر مشخص می‌شود:

$$A = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \to \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\ln n = \frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم} \to \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{2\times\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow A = 1$$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(3-4i)^n}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|3-4i|}{\frac{n}{e}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\frac{n}{e}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5e}{n}=0$$

سری مزبور طبق آزمون کوشی همگراست.

مثال: وضعیت سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+8i)^n}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(6+8i)^n}{4^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|6+8i|}{4}=\frac{10}{4}>1$$

پس سری مزبور طبق آزمون کوشی واگراست.

مثال: وضعیت سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}=\frac{1}{4}<1$$

پس سری مزبور طبق آزمون کوشی همگراست.

د) آزمون انتگرال: سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ با فرض $a_n\geq 0$ را در نظر بگیرید، چنانچه a_nها طبیعت نزولی داشته باشند:

$$\forall n\in N\begin{cases}a_{n+1}<a_n\\ \text{یا}\\ a'_n\leq 0\end{cases}$$

آنگاه وضعیت همگرایی یا واگرایی سری موردنظر، مانند وضعیت همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر است:

$$\int_1^{+\infty}a(x)dx$$

نکته: هر سه سری زیر به ازاء $p>1$ همگرا و به ازاء $p\leq 1$ واگرا هستند:

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}}$$

مثال: وضعیت همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ را تعیین کنید.

تابع $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ به ازاء هر $x \geq 1$ مثبت و پیوسته است و به وضوح ملاحظه می‌شود که با افزایش x , $f(x)$ رفتار نزولی دارد. در نتیجه می‌توان از آزمون انتگرال استفاده کرد.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

با تغییر متغیر $e^{-\sqrt{x}} = u$ داریم:

$$\frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = du$$

$$I = -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} = -2\left(e^{-\infty} - e^{-1}\right) = \frac{2}{e}$$

لذا چون انتگرال ناسره I همگرا شده، پس سری t نیز همگراست.

سری‌های متناوب

سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = +a_0 - a_1 + a_2 ....$ را در نظر بگیرید، (با فرض $a_n \geq 0$) به این سری اصطلاحاً یک سری متناوب گفته می‌شود و طبق قضیه لایپنیتز ثابت می شود، این سری متناوب همگراست اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) a_nها طبیعت نزولی داشته باشند (لااقل از یک n خاص به بعد) $\quad a_{n+1} < a_n$ یا $a_n' < 0$

یک تعریف و یک قضیه: دو سری زیر را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ J &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \end{aligned}\right\} \quad (\text{با شرط } a_n \geq 0)$$

الف) اگر I همگرا باشد، J نیز الزاماً همگراست و اصطلاحاً می گویند سری متناوب J همگرایی مطلق دارد.

ب) اگر I واگرا باشد اما J همگرا باشد، اصطلاحاً می گویند سری متناوب J همگرایی مشروط دارد.

مثال: سری مقابل چه وضعیتی دارد ؟

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^3}$$

الف) همگرایی مطلق   ب) همگرای مشروط   ج) واگرا   د) نمی توان اظهارنظر کرد.

از آنجایی که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ همگراست، سری مذکور نیز همگراست و همگرایی مطلق دارد. بنابراین گزینه (الف) صحیح است.

مثال: سری مقابل چه وضعیتی دارد؟ $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

الف) واگرا ب) همگرای مشروط ج) همگرایی مطلق د) هیچکدام

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ واگراست، پس I نمی تواند همگرایی مطلق داشته باشد، حال سراغ قضیه لایپنیتز می رویم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0\\ a'_n=\frac{n^2+1-2n^2}{\left(n^2+1\right)^2}=\frac{1-n^2}{\left(n^2+1\right)^2}\le 0\end{cases}$$

لذا طبق قضیه لایپنیتز سری متناوب I همگراست و البته همگرایی مشروط دارد.

سری‌های تابع و بحث فاصله همگرایی و شعاع همگرایی:

سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_{(n,x)}$ را در نظر بگیرید، چنانچه ملاحظه می شود، با بسط این سیگما، مجموعی حاصل می شود که هر کدام از جملات آن تابعی از x است، در رابطه با اینگونه سریها بحث فاصله همگرایی مطرح است، یعنی می‌خواهیم ببینیم این سری به ازاء چه مقادیری از x همگراست، برای این منظور شرط همگرا بودن را مطابق یکی از آزمونهای دالامبر یا کوشی تعمیم یافته به صورت زیر می نویسیم:

الف) شرط همگرایی طبق آزمون دالامبر:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{(n+1\,,\,x)}}{a_{(n\,,\,x)}}\right|<1}$$

ب) شرط همگرایی طبق آزمون کوشی:

$$\boxed{\left|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{(n,x)}}\right|<1}$$

و سپس x هایی را تعریف می کنیم که به ارضا این شرط می‌انجامند.

نکته: نصف طول فاصله همگرایی را شعاع همگرایی می نامیم.

مثال: فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سریهای زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n^2}.\ x^n$$

شرط همگرایی:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n^2}.\ x^n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n}\cdot x\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4+8}{2n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{2n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^n=e^4$$

فاصله همگرایی $e^4|x|<1\Rightarrow -\frac{1}{e^4}<x<\frac{1}{e^4}$

شعاع همگرایی $R=\frac{1}{e^4}$

مثال: فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^n\ (2n-1)^n}{n^2+1}$$

شرط همگرایی : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(3-4i)^n\ (2x-1)^n}{n^2+1}\right|}<1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|3-4i||2x-1|}{\sqrt[n]{n^2+1}}<1$

$$\frac{\sqrt{9+16}\times|2x-1|}{1}<1\Rightarrow|2x-1|<\frac{1}{5}\to-\frac{1}{5}<2x-1<\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{4}{5}<2x<\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}<x<\frac{3}{5}$$

توجه: با فرض $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$ داریم:

$A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=\sqrt[n]{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n}}=\infty$ مبهم

$$\ln A=\ln n^{\frac{2}{n}}=\frac{2}{n}\ln n=\frac{\ln n}{\frac{n}{2}}\xrightarrow{H}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0\Rightarrow A=1$$

فاصله همگرایی $\frac{2}{5}<x<\frac{3}{5}$

شعاع همگرایی $R=\frac{1}{10}$

مثال: فرض کنید Z برابراست با: $Z=x+iy$

ناحیه همگرایی این سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nz^2}$ را بدست آورید:

الف) $|z|<1$ ب) $|x|<|y|$ ج) $|x|>|y|$ د) هیچکدام

شرط همگرایی طبق آزمون کوشی

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{e^{-nz^2}}\right|<1\ \to\ \left|e^{-z^2}\right|<1$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $\left|e^{-2ixy}\right|=1$

$$\left|e^{-(x+iy)^2}\right|<1\to\left|e^{-x^2+y^2-2ixy}\right|<1\to\left|e^{y^2-x^2}\right|\ \left|e^{-2ixy}\right|<1$$

$$\to e^{y^2-x^2}<1=e^0\to y^2-x^2<0\to|y|<|x|$$

بنابراین گزینه (ج) صحیح است.

بسط تیلور و بسط مک لورن

بسط تیلور: بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه x_0، به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+....$$
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

که در آن ضرایب این سری عبارتند از:

$$a_0=f(x_0)\qquad a_1=\frac{f'(x_0)}{1\,!}\qquad a_2=\frac{f''(x_0)}{2\,!}\cdots\qquad a_n=\frac{f^n(x_0)}{n\,!}$$

نکته: بسط تیلور حول نقطه $x_0=0$ را بسط مک لورن تابع می گویند.

مثال: تابع $f(x)=e^{x^2+x}$ مفروض است، ضریب عبارت $(x-1)^2$ در بسط تیلور این تابع را حول نقطه $x=1$ بدست آورید.

$$f(x)=e^{x^2+x}$$
$$f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$$
$$f''(x)=2e^{x^2+x}+(2x+1)^2\ e^{x^2+x}$$

پس داریم:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$$
$$a_2=\frac{f''(1)}{2!}=\frac{2e^2+3^2e^2}{2}=\frac{11}{2}e^2$$

نکته: بسط مک لورن چند تابع مهم را در زیر مشاهده می کنید:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad \begin{aligned} e^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\ \cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\ \sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

$$|x|<1:\quad \begin{aligned} \frac{1}{1-x}&=1+x+x^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ \frac{1}{1+x}&=1-x+x^2-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ x^n\end{aligned}$$

دو نکته مهم:

۱ـ با استفاده از سریهای فوق این امکان وجود دارد که بسط توابع دیگر را به سادگی بنویسیم، بدون آنکه لازم باشد ضرایب بسط را از طریق مشتق گیری از تابع پیدا کنیم.

۲ـ با استفاده از این بسط ها می توان مقدار همگرایی برخی سریها را نیز تعیین کرد.

مثال: ضریب x^3 در بسط مک لوران این تابع $f(x)=(x^2+3x-1)e^{-x}$ را بیابید.

با توجه به بسط تابع نمایی داریم:

$$f(x)=(x^2+3x-1)\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+....\right)$$

پس $\rightarrow a_3=-1+\frac{3}{2!}-1\times\frac{(-1)^3}{3!}=\frac{2}{3}$

مثال: ضریب x^5 x^6 , x^7 را در بسط مک لوران تابع $f(x)=(x^3+1)\ln(x^2+1)$ را پیدا کنید (با شرط $|x|<1$)

از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم؛ اگر مقدار x به x^2 تبدیل شود داریم:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$x\rightarrow x^2 \qquad \ln(1+x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}|x^2|<1\\ |x|<1\end{matrix}$$ با شرط

بنابراین داریم:

$$f(x)=(x^3+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}\right)$$

x^5 ضریب $=1\times(-1)^0=1$

x^6 ضریب $=1\times\frac{(-1)^2}{3}=\frac{1}{3}$

x^7 ضریب $=1\times(-1)^1\frac{1}{1+1}=\frac{-1}{2}$

مثال: همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)\ !}+\frac{3}{n\ !}\right)=\left(1+1+\frac{1}{2\ !}+\frac{1}{3\ !}+...\right)+3\left(1+\frac{1}{2\ !}+\frac{1}{3\ !}+....\right)$$

از آنجایی‌که $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \qquad e^1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$

در نتیجه $\rightarrow I=e+3(e-1)=4e-3$