سوالات هندسه۱و۲ و تحلیلی

۱.   دو زاویه‌ی A و B متمم هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

۱) ۲۷° ۲) ۳۶° ۳) ۶۳° ۴) ۷۲

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}=۹۰\\ \hat{A}=\frac{۴}{۹}\left(۱۸۰-\hat{B}\right)=۸۰-\frac{۴}{۹}\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow ۸۰-\frac{۴}{۹}\hat{B}+\hat{B}=۹۰\Rightarrow \frac{۵}{۹}\hat{B}=۱۰\Rightarrow B=۱۸\Rightarrow A=۷۲$$

۲.   در مثلثی $\hat{A}=۵۰$ و $\hat{B}=۶۰$ است. زاویه‌ی بین نیم ساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC چقدر است؟

۱) ۱۵   ۲) ۷۵   ۳) ۵   ۴) ۴۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اگر عمودمنصف، BC، نیم ساز AD را در Oقطع کند داریم:

$$DOH:\hat{O}=۹۰-\hat{D}_۱$$

$$\hat{D}_۱=\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}=۶۰+۲۵=۸۵$$

$$\hat{O}=۹۰-۸۵=۵$$

۳.   کدام گزینه غلط است؟

۱)دو زاویه مجانب مکمل یکدیگرند.   ۲) نیم سازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتدادند.

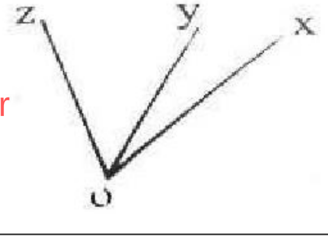
۳) در مثلث، دو زاویه‌ی مکمل وجود دارد.   ۴) دو زاویه‌ی مجاور متمم یکدیگرند.

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

دو زاویه مجاور دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع غیر مشترک آنها در دو طرف ضلع مشترک قرار داشته باشد. در شکل $y\hat{o}z\ ,\ x\hat{o}y$ مجاور یکدیگر هستند و زاویه بینشان ۹۰ نیست.

تشریح سایر گزینه‌ها : گزینه‌ی ۱ دو زاویه مجانب دو زاویه مجاور هستند که مکمل یکدیگرند.

گزینه‌ی ۳ در مثلث، اگر دو زاویه مکمل وجود داشته باشد، مجموع زوایای داخلی مثلث بیش از ۱۸۰ خواهد بود که غیرممکن است.



۴. اگر در مثلث متساوی الساقین ABC، طول نیم ساز داخلی زاویه‌ی B برابرطول قاعده‌ی BC باشد، زاویه‌ی A برابر است با:

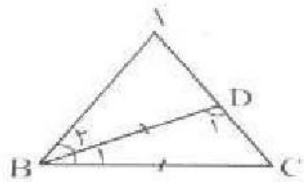
۱) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۰}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

BD نیمساز $\hat{B}$ $\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$

$BD = BC \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}_۱$

ABC متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$



$\hat{D}_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABD $\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{A} + \hat{B}_۲$

$$\hat{D}_۱ = \hat{C} = \hat{B} = \hat{A} + \hat{B}_۲ \Rightarrow \hat{B} = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{B} = ۲\hat{A}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} + ۲\hat{B} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} + ۲\left(۲\hat{A}\right) = ۱۸۰ \Rightarrow ۵\hat{A} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} = ۳۶ = \frac{\pi}{۵}$$

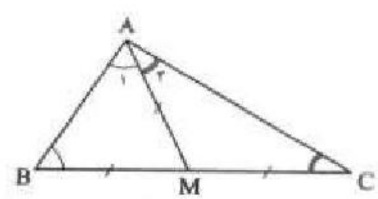
۵. در مثلث ABC ، ضلع $BC = ۱۰$ و میانه‌ی AM برابر ۵ است. این مثلث:

۱)در رأس A حاده است. ۲) در رأس A قائمه است.

۳) در رأس A منفرجه است. ۴) هر سه حالت می‌تواند باشد.

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : میانه‌ی AM ، ضلع BC را نصف می‌کند، پس با توجه به فرض داریم:

$$AM = BM = MC = ۵$$



پس هر یک از دو مثلث ABM و ACM متساوی الساقین است و لذا داریم:

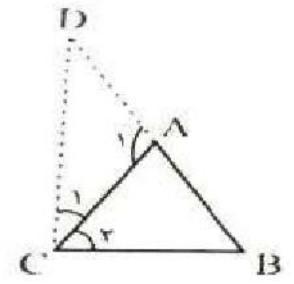
$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = B \text{ , } \hat{A}_۲ = C \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲\right)} + \underbrace{\left(\hat{B} + \hat{C}\right)} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰$$

۶. یک ساق مثلث متساوی الساقین را از طرف رأس مثلث به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل و قاعده‌ی مثلث چه نوع مثلثی را تشکیل می‌دهد؟

۱)قائم الزاویه ۲)قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین ۳) متساوی الساقین ۴) منفرجه الزاویه

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\Delta ABC = \hat{A} + 2\hat{C}_2 = 180$$
$$\Delta ACD : A_1 + 2\hat{C}_1 = 180$$
$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{A}_1 + 2\left(\hat{C}_1 + \hat{C}_2\right) = 360$$
$$\Rightarrow 180 + 2\hat{C} = 360 \quad \Rightarrow \hat{C} = 90$$



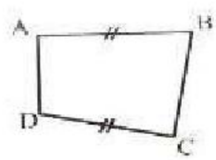
نکته: در هر مثلث که میانه‌ی وارد بر یک ضلع نصف همان ضلع باشد، مثلث مورد نظر قائم الزاویه است.

۷. کدام قضیه درست نیست؟

۱)متوازی الاضلاع که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است. ۲) ذوزنقه‌ای که دو قطرش برابر باشد، متساوی الساقین است.

۳) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد، مربع است. ۴) هر چهار ضلعی که دو ضلع‌اش برابرباشند، ذوزنقه است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : شکل نشان می‌دهد بیشمار چهار ضلعی وجود دارد که دو ضلعش برابرند ولی ذوزنقه نیستند.



۸. کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟

۱)لوزی که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد. ۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند.

۳) متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشند. ۴) ذوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشند.

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

گزینه‌ی ۱ نادرست است، زیرا اگریک قطرلوزی با ضلع آن برابر باشد، زوایای آن قائمه نیست.

گزینه‌ی ۲ نادرست است، متوازی الاضلاعی که دو قطر آن مساوی باشند، مستطیل است.

گزینه‌ی ۴ نادرست است، زیرا این ذوزنقه را قائم الزاویه می‌گویند.

۹. اگر مجموع زوایای خارجی n ضلعی منتظم را با A_n و تعداد اقطار آن را با D_n نمایش دهیم، کدام درست است؟

۱) $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰} > A_{۱۹۹}$

۲) $D_{۲۰۰} < D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$

۳) $D_{۲۰۰} < D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰} < A_{۱۹۹}$

۴) $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

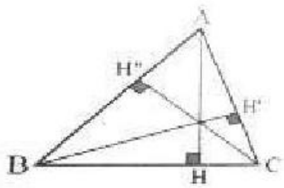
مجموع زوایای خارجی n ضلعی برابر با ۳۶۰ است. بنابراین داریم، $A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$ اما با توجه به رابطه‌ی ($= \frac{n(n-۳)}{۲}$ تعداد قطرهای n ضلعی) داریم : $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}$

۱۰. در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. در این صورت نسبت $\frac{AH}{BH'}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{AC}{BC}$ ۲) $\frac{AC^۲}{BC^۲}$ ۳) $\frac{BC}{AC}$ ۴) $\frac{BC^۲}{AC^۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{BH' \times AC}{۲} \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{AC}{BC}$$



۱۱. اگر طول اضلاع مثلثی ۲و۳و۳ سانتی‌متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی‌متر است؟

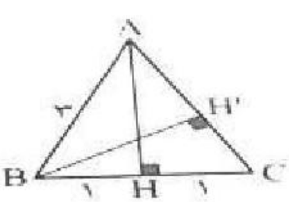
۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$BC = ۲ \Rightarrow BH = ۱ \Rightarrow AH = \sqrt{AB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۹-۱} = ۲\sqrt{۲}$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{BH' \times AC}{۲}$$

$$\Rightarrow BH' = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۲}{۳} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$



۱۲. هر یک از رأس‌های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع $\frac{۵}{۸}$ باشد، رأس مربع کوچک ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

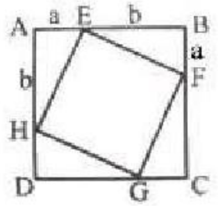
پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$S=AB^{۲}=(a+b)^{۲}$ مساحت مربع ABCD

$S'=EF^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$ مساحت مربع EFGH

$$\frac{S'}{S}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{(a+b)^{۲}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۸a^{۲}+۸b^{۲}=۵a^{۲}+۵b^{۲}+۱۰ab$$

$$\Rightarrow ۳\left(a^{۲}+b^{۲}\right)=۱۰ab\Rightarrow\frac{a^{۲}+b^{۲}}{ab}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{۱۰}{۳}$$



$$\frac{a}{b}=x\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۳+\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۳,\frac{۱}{۳}$$

۱۳. نقطه‌ی M درون مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $۶\sqrt{۳}$ قرار دارد. مجموع فاصله‌های این نقطه از سه ضلع چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶+\sqrt{۳}$ ۴) ۹

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

مجموع فاصله های هر نقطه واقع دردرون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر با ارتفاع مثلث است، و ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است پس:

$$\frac{\left(۶\sqrt{۳}\right)\left(\sqrt{۳}\right)}{۲}=۹$$

۱۴. در مثلث قائم الزاویه‌ای به طول اضلاع a و $a+۷$ و $a+۸$ طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $\frac{۶۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۳۰}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۲۰}{۱۳}$ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

بنا بر قضیه‌ی فیثاغورس $(a+۸)^۲=(a+۷)^۲+a^۲$

$$\Rightarrow a^۲+۱۶a+۶۴=a^۲+۱۴a+۴۹+a^۲$$

$$\Rightarrow a=-۳ \text{ غ‌ق‌ق و } a=۵ \text{ ق‌ق}$$

از طرفی $BH\times AC=AB\times BC \Rightarrow BH\times ۱۳=۵\times ۱۲ \Rightarrow BH=\frac{۶۰}{۱۳}$

۱۵. روی پاره خط $AB=a$ ، دو نقطه‌ی M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=۲$ ، در این صورت طول پاره خط MN چقدر است؟

۱) $\frac{a}{۶}$ ۲) $\frac{a}{۲}$ ۳) $\frac{a}{۳}$ ۴) $\frac{۲a}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۱}$ ترکیب نسبت در مخرج $\Rightarrow \frac{AM}{AM+MB}=\frac{۲}{۲+۱} \Rightarrow \frac{AM}{a}=\frac{۲}{۳}$

$$\Rightarrow AM=\frac{۲}{۳}a$$

$\frac{BN}{AN}=\frac{۲}{۱}$ ترکیب نسبت در صورت $\Rightarrow \frac{BN+AN}{AN}=\frac{۲+۱}{۱} \Rightarrow \frac{a}{AN}=۳$

$$\Rightarrow AN=\frac{a}{۳}$$

$$MN=AM-AN=\frac{۲}{۳}a-\frac{a}{۳}=\frac{a}{۳}$$

۱۶. در مثلث ABC ، E روی AB و بین A و B ، F روی AC و بین A و C می‌باشد، در کدام حالت دو مثلث ABC و AEF متشابه‌اند؟

۱) $AE=۳$, $FC=۴$, $EB=۵$, $AF=۲$ ‏ ۲) $AE=۶$, $FC=۶$, $EB=۱۰$, $AF=۴$

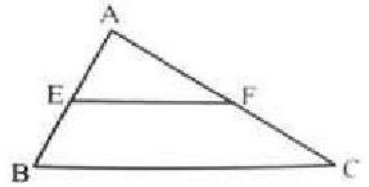
۳) $AE=۱۰$, $FC=۲$, $EB=۳$, $AF=۷$ ‏ ۴) $AE=۶$, $FC=۸$, $EB=۴$, $AF=۱۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

یکی از حالتهای تشابه تناسب اضلاع است. $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

که این حالت فقط در مورد گزینه‌ی ۴ برقرار است.

$$AB=AE+EB=۱۰ , AC=AF+FC=۲۰ \Rightarrow \frac{۶}{۱۰}=\frac{۱۲}{۲۰}$$



۱۷. اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه ۲ و ۶ واحد است. عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند، فاصله‌ی M از نزدیک‌ترین رأس این مثلث چند واحد است؟

۱) ۷/۵ ‏ ۲) ۸ ‏ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ‏ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

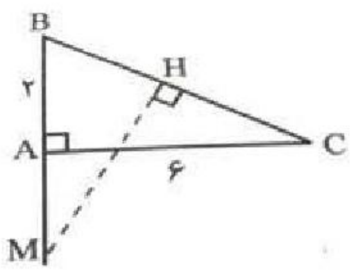
HM عمود منصف است.

$$\hat{A}=۹۰ \Rightarrow BC^۲=AB^۲+AC^۲=۳۶+۴=۴۰ \Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow BH=HC=\frac{BC}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\text{مشترک}}{\hat{B}}\\ \hat{H}=\hat{A}=۹۰\end{array}\right\} \Rightarrow BMH \quad ABC \Rightarrow \frac{BH}{AB}=\frac{BM}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}=\frac{۲+AM}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow ۲+AM=۱۰ \Rightarrow AM=۸$$



۱۸. مثلث ABC که در آن زاویه‌های $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $S=۲۰\sqrt{۳}$ (مساحت مثلث) با مثلث $A'B'C'$ که در آن $a'=\sqrt{۱۰}$ (ضلع بزرگتر) متشابه است. نسبت تشابه چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\hat{B}=۶۰\ ,\ \hat{A}=۳۰ \Rightarrow \hat{C}=۹۰$$

$$\sin ۳۰ = \frac{a}{c} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}c$$

$$\sin ۶۰ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}c$$

$$S=\frac{۱}{۲}a\times b=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}c\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}c=\frac{\sqrt{۳}}{۸}c^۲=۲۰\sqrt{۳} \Rightarrow c^۲=۱۶۰ \Rightarrow c=۴\sqrt{۱۰}$$

C وتر مثلث و بزرگترین ضلع آن است. بنابراین با بزرگترین ضلع مثلث $A'B'C'$ یعنی $a'=\sqrt{۱۰}$ متناسب است بنابراین نسبت تشابه $\frac{۴\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=۴$ است.

۱۹. در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$، $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=۲$ اگر AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های رأس A و A' باشند، نسبت $\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۳) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نسبت مساحت ها در دو مثلث متشابه، مجذور نسبت تشابه است. یعنی:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^۲ \text{ یا } \left(\frac{AC}{A'C'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=۴ \quad (I)$$

در هر مثلث میانه وارد بر یک ضلع مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند. در نتیجه داریم:

$$\text{میانه } AM \Rightarrow S_{ABM}=S_{AMC} \Rightarrow S_{ABC}=۲S_{AMB}$$

$$\text{میانه } A'M' \Rightarrow S_{A'B'M'}=S_{A'C'M'} \Rightarrow S_{A'B'C'}=۲S_{A'C'M'}$$

$$(I) \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=۴ \Rightarrow \frac{۲S_{AMB}}{۲S_{A'C'M'}}=۴ \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}=۴$$

۲۰. کدام دوشکل همواره متشابه نیستند؟

۱)دو مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین ۲) دو لوزی که یک زاویه‌ی برابر داشته باشند.

۳) دو شش ضلعی منتظم ۴) دو مستطیل

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

در مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین یک زاویه قائمه و دو زاویه‌ی دیگر 45 هستند. بنابراین دو مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین به حالت تساوی زوایا با هم متشابه‌اند. دو n ضلعی منتظم برای تمام مقادیر $n \geq 3$ با هم متشابه‌اند. همچنین دو لوزی با یک زاویه‌ی برابر، با هم متشابه‌اند. اما دو مستطیل با تناسب نظیر به نظیر اضلاع با هم متشابه‌اند.

۲۱. سطح کل یک مکعب $18\sqrt{3}$ سانتیمتر مربع است، قطر مکعب چند سانتیمتر است؟

۱) $3\sqrt[3]{2}$ ۲) $3\sqrt[4]{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$S = 6a^2 = 18\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt[4]{3^3}$$

قطر مکعب $= a\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^3} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[4]{3^5}$

قطر مکعب $= 3\sqrt[4]{3}$

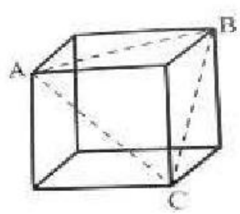
۲۲. سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ای گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک رأس مشترک باشند، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸ ۲) $12\sqrt{3}$ ۳) $18\sqrt{3}$ ۴) ۲۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : سطح مقطع مورد نظر مثلث ABC است. طول هر ضلع مثلث مساوی قطر یک وجه مکعب است.

قطر هر وجه $= a\sqrt{2}$، پس ضلع مثلث: $= 6\sqrt{2}$

مثلث متساوی الاضلاع $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)}{4} = 18\sqrt{3}$



۲۳. سطح کل مکعبی به ضلع k با سطح کل مکعب مستطیلی به اضلاع a و $۲a$ و $۲a$ برابر است. قطر مکعب چند برابر قطر مکعب مستطیل است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

سطح کل هر مکعب به طول k برابر است با $S=۶k^۲$ و سطح کل مکعب مستطیل با ابعاد داده شده در شکل زیر عبارت است از:

$$S=۲(۲a+a)\times ۲a+۲(۲a\times a)=۱۶a^۲$$

$$۶k^۲=۱۶a^۲ \rightarrow ۳k^۲=۸a^۲ \Rightarrow \sqrt{۳}k=۲\sqrt{۲}a$$

از طرفی قطر مکعب به ضلع k برابر است با : $d=\sqrt{۳}k$ و در مکعب مستطیل قطر برابر است با :

$$d'=\sqrt{(۲a)^۲+a^۲+(۲a)^۲}=\sqrt{۹a^۲}=۳a \Rightarrow \frac{d}{d'}=\frac{\sqrt{۳}k}{۳a}=\frac{۲\sqrt{۲}a}{۳a}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۲۴. مقطع یک صفحه با یک سطح منشوری مربع القاعده کدام چهار ضلعی نمی‌تواند باشد؟

۱)مستطیل ۲) مربع ۳) لوزی ۴) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : هر صفحه‌ای که منشور را قطع کند چون یال‌های جانبی دو به دو موازی‌اند، آنگاه در چهار ضلعی مقطع، یال‌های مقابل دو به دو موازی هستند. پس مقطع یک متوازی الاضلاع است و **ذوزنقه** نمی‌تواند باشد.

۲۵. اگر ارتفاع یک استوانه دو برابر و محیط قاعده نصف شود حجم چند برابر می‌شود؟

۱)۲ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : وقتی محیط قاعده را نصف کنیم، آنگاه شعاع نصف می‌شود:

$$R_۲=\frac{۱}{۲}R_۱ \quad , \quad h_۲=۲h_۱$$

الف) $V_۱=$ سطح قاعده × ارتفاع $=\pi R_۱^۲\times h_۱$

چون $h_۲=۲h_۱$ پس :

ب) $$V_۲=\pi R_۲^۲\times h_۲=\pi\left(\frac{۱}{۲}R_۱\right)^۲\times ۲h_۱=\frac{۱}{۲}\pi R_۱^۲h_۱$$

با مقایسه رابطه‌ی الف و ب نتیجه می‌شود که حجم جسم نصف شده است.

۲۶. حجم هرم منتظمی که قاعده‌ی آن مربع و تمام یال‌هایش به طول a است، برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ است. مقدار a برابر است با :

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\text{قطر قاعده} = a\sqrt{۲}$$

$$OA = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{یال} = SA = a$$

$$\text{ارتفاع} = h = SO = \sqrt{SA^{۲} - OA^{۲}} = \sqrt{a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} (\text{سطح قاعده}) \times \text{ارتفاع}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۶} = \frac{۱}{۳} a^{۲} \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a = ۱$$

۲۷. هرمی به حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر قاعده‌ی هرم می‌گذرد قطع می‌دهیم. حجم هرم ناقص برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۴}V$ ۲) $\frac{۷}{۸}V$ ۳) $\frac{۸}{۹}V$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}V$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^{۳}$$

در تست فوق چون ارتفاع هرم کوچک نصف هرم بزرگ می‌باشد.

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{\frac{۱}{۲}h}\right)^{۳} \Rightarrow \frac{V}{V'} = ۸$$

$$\text{حجم هرم ناقص} = V - \frac{۱}{۸}V = \frac{۷}{۸}V$$

۸ . در داخل یک مکعب به طول یال a مخروطی با بیش‌ترین حجم ممکن قرار می‌دهیم. حجم مخروط چند برابر حجم مکعب است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۹}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اگر قطر قاعده مخروط مساوی با ضلع مکعب و ارتفاع مخروط نیز مساوی ضلع مکعب باشد، آنگاه بیش‌ترین حجم را دارد.

$$R=\frac{a}{۲}\ ,\ h=a$$

$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}$ (سطح قاعده) × ارتفاع $=\frac{۱}{۳}\left(\pi\times\frac{a^۲}{۴}\right)a$

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۱۲}\pi a^۳$$

$$V'_{\text{مکعب}}=a^۳ \Rightarrow \frac{V}{V'}=\frac{\pi}{۱۲}$$

۲۹. اگر اندازه‌ی سطح کره‌ای به شعاع $۲R$ برابر ۹ باشد، اندازه‌ی سطح کره‌ای به شعاع R چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$S=۴\pi R^۲ \Rightarrow ۹=۴\pi(۲R)^۲$$

$$۹=۱۶\pi R^۲ \Rightarrow R=\frac{۳}{۴\sqrt{\pi}}$$

$$S=۴\pi\left(\frac{۳}{۴\sqrt{\pi}}\right)^۲=۴\pi\times\frac{۹}{۱۶\pi}=\frac{۹}{۴}$$

۳۰. عدد اندازه‌ی حجم یک کره ۳ برابر عدد اندازه‌ی مساحت کره است، مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی این کره کدام است؟

۱) ۳۶π ۲) ۴۹π ۳) ۶۴π ۴) ۸۱π

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : دایره‌ی عظیمه کره، دایره‌ای است که شعاع آن مساوی شعاع کره می‌باشد.

$$\text{حجم کره}=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\text{مساحت کره}=۴\pi R^۲$$

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳=۳\times۴\pi R^۲ \Rightarrow R=۹$$

$$S_{\text{دایره عظیمه}}=\pi R^۲=۸۱\pi$$

۳۱. کدامیک ازنقاط زیر از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟

۱)نقطه تلاقی سه میانه ۲)نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع

۳) نقطه‌ی تلاقی سه عمود منصف ۴) نقطه‌ی تلاقی سه نیم ساز

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

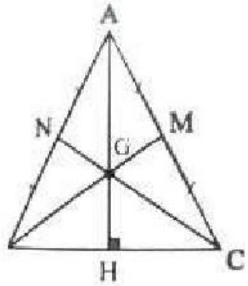
هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه‌ی مثلث از دو ضلع آن به یک فاصله است. از طرفی می‌دانیم نیم سازهای داخلی سه زاویه‌ی مثلث همرسند، لذا فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی نیم سازهای هر مثلث از سه ضلع مثلث برابرند.

۳۲. مساحت مثلث ABC که طول سه میانه‌ی آن ۵ و ۵ و ۸ است چقدر است؟

۱)۱۲ ۲) ۹ ۳) ۲۶ ۴) ۱۶

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

مثلثی که طول دو میانه‌ی آن با هم برابر باشد، متساوی الساقین است. (اثبات کنید). پس با توجه به شکل و طول سه میانه‌ی داده شده داریم:



$$\begin{cases} BG = CG = \frac{۲}{۳}BM = \frac{۲}{۳}(۵) = \frac{۱۰}{۳} \\ GH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}(۸) = \frac{۸}{۳} \end{cases}$$

در مثلث قائم الزاویه‌ی BGH قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$BH^۲ = BG^۲ - GH^۲ = \frac{۱۰۰}{۹} - \frac{۶۴}{۹} = \frac{۳۶}{۹} = ۴ \Rightarrow BH = ۲ \Rightarrow BC = ۲BH = ۴$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AH.BC = \frac{۱}{۲}(۸)(۴) = ۱۶$$

۳۳. نیم‌سازهای داخلی زوایای متوازی‌الاضلاع همواره از تقاطع با یکدیگر، کدامیک از اشکال زیر را می‌سازند؟

۱)مربع ۲) لوزی ۳) مستطیل ۴) ذوزنقه

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : چهار ضلعی حاصل از تقاطع نیم سازهای داخلی زوایای متوازی الاضلاع، همواره یک مستطیل است.

۳۴. سه پاره خط به طول‌های $۴x-۴$ و $x+۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$ ۲) $\frac{۵}{۳}<x<۳$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹}<x<۴$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

درهر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

$$۴x-۴<(x+۷)+۶x \Rightarrow x>-\frac{۱۱}{۳}$$

$$x+۷<(۴x-۴)+۶x \Rightarrow ۹x>۱۱ \Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹}$$

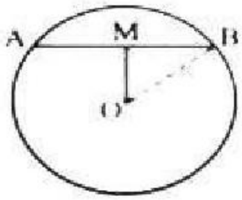
$$۶x<(۴x-۴)+(x+۷) \Rightarrow x<۳$$

از اشتراک جواب‌ها داریم: $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$

۳۵. از نقطه‌ی M به فاصله‌ی $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایره‌ی $C(O,R)$ می‌نیمم وتری در دایره رسم نموده‌ایم، طول این می‌نیمم وتر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}R$ ۲) $\sqrt{۲}R$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}R$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : کوتاه‌ترین وتری که از M داخل دایره در دایره رسم می‌شود، وتری است که از نقطه‌ی M بر MO عمود می‌شود، چون از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آنرا نصف می‌کند.

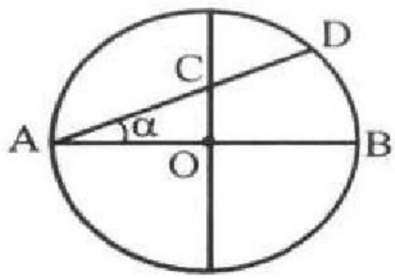


$MA=MB$

$$MOB: MB^۲=BO^۲-MO^۲=R^۲-\left(\frac{R}{۲}\right)^۲=\frac{۳}{۴}R^۲$$

$$MB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R \Rightarrow AB=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)R=R\sqrt{۳}$$

۳۶. در شکل مقابل دو قطر دایره عمود بر هم‌اند، نسبت $\frac{CD}{CA}$ کدام است؟



۱) $۲\sin^۲ \alpha$

۲) $۲\cos^۲ \alpha$

۳) $\cos ۲\alpha$

۴) $\sin ۲\alpha$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

چون دو قطر بر هم عمودند، پس $AC=CB$ و $\hat{A}=\hat{B}=\alpha$. چون زاویه C زاویه خارجی مثلث ACB می‌باشد، $\hat{C}=۲\alpha$ زاویه Dمحاطی روبروی قطر است، پس $\hat{D}=۹۰$

$$CDB : \cos ۲\alpha=\frac{CD}{CB}$$

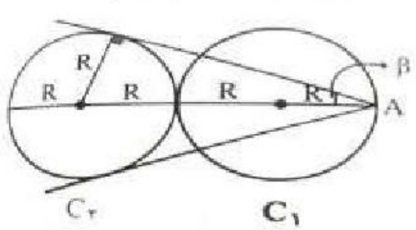
به جای CA , CB را قرار می‌دهیم. $\cos ۲\alpha=\frac{CD}{CA}$

۳۷. دو دایره‌ی مساوی $C_۱$ و $C_۲$ مماس خارج هستند. از نقاط روی دایره‌ی $C_۱$ دایره‌ی $C_۲$ با زاویه‌ی α دیده می‌شود. کوچک‌ترین مقدار α کدام است؟

۱) $۲\,\text{Arc}\tan\frac{۱}{۳}$ ۲) $۲\text{Arc}\sin\frac{۱}{۲}$ ۳) $۲\text{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$ ۴) $۲\text{Arc}\tan\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

هر چه نقطه دورتر از دایره باشد، آنگاه زاویه‌ی α کوچکتر خواهد بود. پس با توجه به شکل داریم:



$$\sin\beta=\frac{R}{۳R}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \beta=\text{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=۲\beta=۲\text{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$$

۳۸. در دو دایره‌ی مماس خارج به شعاع R و r طول مماس مشترک خارجی چه قدر است؟

۱) $۲\sqrt{rR}$ ۲) $R+r$ ۳) $\sqrt{R^۲+r^۲}$ ۴) $R^۲+r^۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

طول مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$

چون دو دایره مماس خارج‌اند $d=OO'=R+R'=R+r$

$$TT'=\left(\sqrt{(R+r)^۲-(R-r)^۲}\right)=\sqrt{۴Rr}=۲\sqrt{Rr}$$

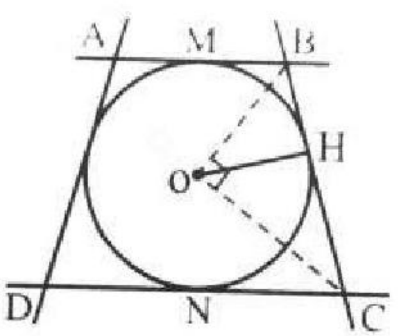
۳۹. ذوزنقه‌ی متساوی الساقین $(AD=BC)ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع R محیط است. کدام رابطه صحیح است؟

۱) $AB\times DC=۲R^۲$ ۲) $AB^۲+AC^۲=۴R^۲$

۳) $AB+CD=۴R$ ۴) $AB\times CD=۴R^۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نقطه O را به B و C وصل می‌کنیم. چون ذوزنقه متساوی الساقین است. پس:



$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰$$

$$\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۹۰ \Rightarrow \hat{O}=۹۰$$

(خط OB و OC نیمساز زاویه‌ی بین دو مماس هستند.)

در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه وتر است.

$$OH^۲=R^۲=HB\times HC=BM\times CN$$

$$R^۲=\left(\frac{AB}{۲}\right)\times\left(\frac{DC}{۲}\right) \Rightarrow AB\times DC=۴R^۲$$

۴۰. در مورد ذوزنقه‌ی متساوی الساقین کدام گزینه درست است؟

۱)نه محاطی است و نه محیطی

۲) فقط محیطی است.

۳) هم محاطی و هم محیطی است.

۴) فقط محاطی است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نکته ۱: اگر در یک چهار ضلعی دو زاویه مقابل مکمل باشند، آنگاه چهار ضلعی محاطی است و برعکس.

نکته ۲: اگر در یک چهار ضلعی مجموع دو ضلع مقابل مساوی با مجموع دو ضلع مقابل دیگر باشد، آنگاه چهار ضلعی محیطی است و برعکس.

در ذوزنقه متساوی الساقین زاویه‌های مقابل مکمل‌اند، زیرا:

چون ذوزنقه متساوی الساقین است $\hat{A}=\hat{B}, \hat{D}=\hat{C}$ و چون $AB \quad CD$ ، $\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰$

$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰$ پس ذوزنقه‌ی متساوی الساقین محاطی است ولی محیطی نمی‌تواند باشد. زیرا در حالت کلی:

$AB+DC \neq AD+BC$

۴۱. در یک هشت ضلعی منتظم اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. مساحت شکل جدید چندبرابر هشت ضلعی اولیه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

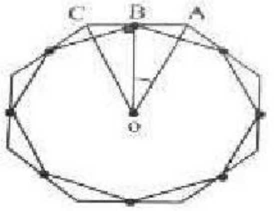
۲) $\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم که هر هشت ضلعی منتظم درون دایره‌ای محاط است. پس با توجه به شکل، نسبت مساحت هشت ضلعی‌های منتظم مورد نظر برابر است با مربع نسبت شعاع‌های دوایر محیطی آنها. پس اگر O مرکز دایره‌ی محیطی موردنظر باشد، آنگاه داریم:



$$A\hat{O}C=\frac{۳۶۰}{۸}=۴ \Rightarrow A\hat{O}B=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵ \quad \Rightarrow \frac{OB}{OA}=\cos ۲۲/۵$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت شکل جدید}}{}=\left(\frac{OB}{OA}\right)^{۲}=\cos^{۲} ۲۲/۵ \quad =\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

توجه: با استفاده از روابط زیر می‌توانید $\cos^{۲} ۲۲/۵$ را محاسبه کنید:

$$\begin{cases} \sin ۴۵^\circ = ۲\sin ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \sin^{۲} ۲۲/۵^\circ + \cos^{۲} ۲۲/۵^\circ = ۱ \end{cases}$$

۴۲. در مثلث ABV طول $BC=۴$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ ماکزیمم مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

نکته : بین چند ضلعی‌هایی که داخل یک دایره محاط می‌باشند، آن چند ضلعی بیشترین مساحت را دارد که منتظم باشد. این تست نشان می‌دهد که مثلث ABC داخل یک دایره محاط می‌باشد،یعنی رأس A روی کمان در خور زاویه ۶۰ تحت پاره خط BC می‌باشد، پس در صورتی مساحت ماکزیمم است که مثلث متساوی الاضلاع باشد:

$$S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$ مثلث متساوی الاضلاع

$$S=\frac{۱۶\times\sqrt{۳}}{۴}=۴\sqrt{۳}$$

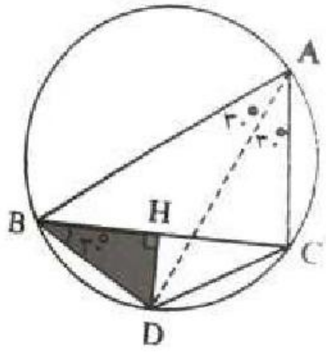
۴۳. دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه متحرک A سه رأس مثلث‌اند، اگر $BC=۶$ ، $\hat{A}=۶۰$ و نیمساز زاویه‌ی A همواره از نقطه‌ی ثابتی مانند D، بگذرد فاصله‌ی D از نقطه‌ی B چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

مکان هندسی نقطه‌ی A کمان در خور زاویه‌ی $\hat{A}=۶۰$ روبرو به پاره خط $BC=۶$ است. نیمساز زاویه‌ی A از نقطه‌ی ثابت D وسط کمان BC می‌گذرد.

مثلث BDC متساوی الساقین است لذا ارتفاع DH وتر BC را نصف می‌کند.



حال در مثلث قائم الزاویه‌ی BHD با توجه به این که $D\hat{B}H=۳۰$ است، داریم:

$$DH=\frac{BC}{۲}, BH=۳\Rightarrow BD^۲=BH^۲+DH^۲\Rightarrow BD^۲=۹+\frac{BD^۲}{۴}\Rightarrow BD^۲=۱۲\Rightarrow BD=۲\sqrt{۳}$$

۴۴. خط $y=2x+1$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1\,,\,y+k)$ منتقل کرده‌ایم، معادله‌ی شکل حاصل $y=2x-1$ است، k کدام است؟

۱) $k=-4$ ۲) $k=0$ ۳) $k=-2$ ۴) $k=2$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$T(x,y)=(x+1,y+k)\ \Rightarrow \begin{cases} x=X-1 \\ y=Y-k \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ Y-k=2(X-1)+1\ \Rightarrow\ Y=2X+k-1$$

$$\Rightarrow\ k-1=-1\ \Rightarrow\ k=0$$

۴۵. کدام گزینه درست نیست؟

۱)نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن با محورهای متقاطع یک دوران است.

۲) نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن با محورهای موازی یک دوران است.

۳) نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن محوری که محورهای آن بر هم عمود است، تقارن مرکزی است.

۴) نتیجه‌ی ترکیب سه تقارن مرکزی متمایز، تقارن مرکزی است.

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن با محورهای موازی، یک انتقال است.

نتیجه‌ی دو تقارن محوری، با محورهای متقاطع، یک دوران به مرکز محل برخورد دو محور و زاویه‌ی دو برابر زاویه‌ی بین آن دو است.

$$OA_1=OA_2\ ,\ OA_2=OA_3\ \Rightarrow\ OA_1=OA_3$$

$$A_1\hat{O}A_3=2\alpha$$

فرض کنید O_1, O_2, O_3 سه مرکز تقارن است. اگر به طور متوالی، قرینه‌ی A_1 نسبت به این مراکز را به دست آوریم، به نقطه‌ی A_4 می‌رسیم حال می‌توان به طور مستقیم از A_1 به A_2 رسید. چون O_1, O_2, O_3 سه نقطه‌ی ثابت هستند، O_4 نیز یک نقطه ثابت است. این چهار نقطه اوساط چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ هستند بنابراین A_4 قرینه‌ی A_1 نسبت به مرکز O_4 است.

۴۶. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متجانس‌اند، اگر نسبت تجانس k باشد، نسبت مساحت این دو مثلث برابر است با :

۱) k^2 ۲) k ۳) $-k$ ۴) $|k|$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

تجانس، طول را k برابر و مساحت را k^2 برابر می‌کند.

۴۷. مجانس‌های یک شکل نسبت به یک مرکز و با دو نسبت مختلف K, K' خود نیز مجانس یکدیگرند نسبت تجانس این دو شکل کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{K}{K'}$ ۲) KK' ۳) $K+K'$ ۴) $2KK'$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

M'' مجانس M تحت مرکز O و نسبت Kاست. M' مجانس M تحت مرکز Oونسبت K' است. حال داریم.

$$\frac{OM''}{OM}=K\ ,\ \frac{OM'}{OM}=K' \ \Rightarrow\ \frac{\frac{OM''}{OM}}{\frac{OM'}{OM}}=\frac{K}{K'} \ \Rightarrow\ \frac{OM''}{OM'}=\frac{K}{K'}$$

M'' مجانس M' با مرکز O و نسبت $\frac{K}{K'}$ است.

۴۸. کدام گزینه غلط است؟

۱)هر خط که با یک خط از صفحه‌ای موازی باشد، با آن صفحه موازی است.

۲) اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با هر خط در آن صفحه موازی است.

۳) هر صفحه با دو خط متقاطع مشخص می‌شود.

۴) دو خط عمود بر یک صفحه، موازی‌اند.

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

گزینه‌های ۱و۳و۴ صورت قضایای کلی و یا نتایج آنها هستند که در متن کتاب درسی موجود است و در مورد گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم خط d با صفحه‌ی p موازی باشد، دراین صورت بی‌شمار خط در صفحه ی p موجودند که با خط d وضعیتی نامشخص دارند.

۴۹. مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی که دوسر آن‌ها بر دو صفحه‌ی موازی واقع‌اند کدام است؟

۱)صفحه‌ای عمود بر دو صفحه ۲) صفحه‌ای موازی دو صفحه

۳) خطی موازی دو صفحه ۴) خطی عمود بر دو صفحه

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : مکاه هندسی وسط پاره خط‌هایی که دو سر آنها بر دو صفحه‌ی موازی واقع‌اند، صفحه‌ای موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن‌هاست.

برای آن که خطی بر صفحه‌ای عمود باشد:

۱)کافی است بر دو خط متقاطع آن صفحه عمود باشد. ۲) بایدبر همه‌ی خطوط صفحه عمود باشد.

۳) کافی است بر دو خط متوازی صفحه عمود باشد. ۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : اگر خطی بر دو خط غیر موازی از صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط دیگر آن صفحه و در نتیجه بنا به تعریف بر آن صفحه عمود است.

۵۰. اگر صفحه‌ی p بر دو خط d و AB عمود باشد، آنگاه:

۱) d عمودمنصف AB است.　　۲) AB و d در یک صفحه قرار دارند.

۳) AB و d به هم عمودند.　　۴) AB موازی d است.

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

۵۱. کره‌ای در نقاط A , B بر وجوه یک فرجه مماس است، اندازه‌ی زاویه‌ی یال این فرجه با خط AB کدام است؟

۱) صفر درجه　　۲) ۳۰ درجه　　۳) ۶۰ درجه　　۴) ۹۰ درجه

پاسخ : گزینه‌ی «۴» :مطابق شکل زیر، دایره‌ی عظیمه‌ی گذرا از دو نقطه‌ی A و B از کره در صفحه‌ای عمودبر فصل مشترک P و Q قرار دارد، بنابراین خط δ یعنی فصل مشترک P و Q بر هر خط این صفحه از جمله وتر AB عمود است.

۵۲. نقاط $A=(۱,۲,۳)$, $B=(۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند. طول تصویر قائم پاره خط AB روی صفحه xoy چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶۱}$　　۲) ۵　　۴) $۵\sqrt{۲}$　　۴) ۶

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : کافی است تصویر قائم نقاط A و B را روی صفحه‌ی xoy به دست آورده و فاصله‌ی آن‌ها را از یکدیگر حساب کنیم.

$$\begin{cases} A=(۱,۲,۳)\Rightarrow A'(۱,۲,۰) \\ B=(۴,۶,-۳)\Rightarrow B'(۴,۶,۰) \end{cases}$$

تصویر قائم روی صفحه xoy

تصویر قائم روی صفحه‌ی xoy

$$\Rightarrow |A'B'|=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۶-۲)^۲}=۵$$

۵۳. اگر دو بردار $V_۱=(۲,۱,m+۱)$ و $V_۲=(-۱,۲k,۱)$ موازی باشند، آنگاه m و k برابر است با:

۱) $\begin{cases} m=-۳ \\ k=\frac{-۱}{۴} \end{cases}$　　۲) $\begin{cases} m=-۳ \\ k=\frac{۱}{۴} \end{cases}$　　۳) $\begin{cases} m=۳ \\ k=\frac{۱}{۴} \end{cases}$　　۴) $\begin{cases} m=۳ \\ k=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : زمانی دو بردار غیر صفر موازیند که مضرب یکدیگر باشند. یعنی داریم:

$$V_۱ \quad V_۲ \Rightarrow \frac{۲}{-۱}=\frac{۱}{۲k}=\frac{m+۱}{۱} \Rightarrow k=-\frac{۱}{۴} \;,\; m+۱=-۲ \Rightarrow m=-۳$$

۵۴. ضرب درونی بردارها در فضا کدام ویژگی را دارد؟

۱) بسته بودن　　۲) جابجایی　　۳) شرکت‌پذیری　　۴) عضو خنثی

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : ضرب درونی (داخلی) بردارها خاصیت جابجایی دارد. خاصیت بسته بودن ندارد چون ضرب داخلی دو بردار، عدد است و بردار نیست. خاصیت شرکت پذیری ندارد چون ضرب داخلی سه بردار تعریف نمی‌شود، چون ضرب دو تا از آن‌ها عدد می‌شوند و ضرب داخلی این عدد در بردار سوم معنی ندارد. عضو خنثی نیز ندارد، یعنی برداری وجود ندارد که در یک بردار دیگر ضرب داخلی شود و حاصل همان بردار شود.

۵۵. اگر اندازه‌ی دو بردار $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j} + 4\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = a\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ برابر باشند، کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار کدام است؟

۱) $\frac{16}{29}$ ۲) $\frac{24}{29}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ۴) $\frac{28}{29}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$|V_1| = |V_2| \Rightarrow \sqrt{4+(a+1)^2+16} = \sqrt{a^2+16+9}$$

$$\Rightarrow 20 + a^2 + 2a + 1 = a^2 + 25 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow V_1 = (2,3,4), V_2 = (2,4,3) \Rightarrow \cos\theta = \frac{V_1 . V_2}{|V_1||V_2|} = \frac{4+12+12}{\sqrt{4+9+16} \times \sqrt{4+16+9}} = \frac{28}{29}$$

۵۶. قرینه بردار $(1,-3,2)$ نسبت به امتداد بردار $(1,2,0)$ ، کدام بردار است؟

۱) $(-3,-1,-2)$ ۲) $(-1 \ -2 \ 2)$ ۳) $(0,5,-2)$ ۴) $(1,7,-2)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$a'' = 2\left(\frac{a.b}{b.b}\right)b - a = 2\left(\frac{1-6+0}{1+4+0}\right)(1,2,0) - (1,-3,2)$$

$$a'' = (-2,-4,0) - (1,-3,2) \Rightarrow a'' = (-3,-1,-2)$$

۵۷. کسینوس‌های هادی بردار $a = (\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ کدام‌اند؟

۱) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ۲) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{45}\right)$ ۳) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ۴) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : $|a| = \sqrt{3+1+12} = 4$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{1}{4}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c_a = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

۵۸. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد حاصل ضرب دو بردار صحیح است؟

۱)حاصل ضرب درونی دو بردار دارای خاصیت جابجایی است.

۲) حاصل ضرب بیرون دو بردار دارای خاصیت جابجایی است.

۳) اگر حاصل ضرب بیرونی دو بردار صفر باشد، همواره یکی از بردارها صفر است.

۴)اگر حاصل ضرب درونی دو بردار صفر باشد، همواره یکی از بردارها صفر است.

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : حاصل ضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی است.

۵۹. طول حاصل ضرب بیرونی دو بردار $\vec{V}_1(0,1,2)$ و $\vec{V}_2(-1,1,0)$ کدام است؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) $2\sqrt{3}$ ‏ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۱» :

$$\begin{cases} V_1=(0,1,2) \\ V_2=(-1,1,0) \end{cases} \Rightarrow V_1\times V_2=(-2,-2,1) \Rightarrow |V_1\times V_2|=\sqrt{4+4+1}=3$$

۶۰. مساحت متوازی الاضلاعی که سه رأسش نقاط $O(0,0,0)$ و $A(1,2,3)$ و $B(1,-2,1)$ باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{21}$ ‏ ۲) $2\sqrt{7}$ ‏ ۳) $2\sqrt{21}$ ‏ ۴) $3\sqrt{72}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : ابتدا دو بردار دلخواه اضلاع آن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} OA=(1,2,3) \\ OB=(1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow AB\times OB=(8,2,-4) \Rightarrow S=|OA\times OB|=\sqrt{64+4+16}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

۶۱. به ازای کدام مقدار m، بردار $a=(1,2,m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0,-1,2)$ و $(2,3,-1)$ نوشت؟

۱) $\frac{2}{3}$ ‏ ۲) $-\frac{2}{3}$ ‏ ۳) $\frac{3}{2}$ ‏ ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : لازم و کافی است که حاصلضرب مختلط سه بردار داده شده صفر باشد زیرا اگر یک بردار ترکیب خطی از دو بردار دیگر باشد، آن گاه هر سه بردار در یک صفحه قرار می‌گیرند.

$$a.(b\times c)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2m+3=0 \Rightarrow 2m=-3 \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

۶۲. اگر b , a دو بردار یکه باشند که با هم زاویه‌ی $\frac{\pi}{3}$ می‌سازند، طول بردار $3a-2b$ کدام است؟

۱) $\sqrt{13}$ ‏ ۲) $\sqrt{7}$ ‏ ۳) ۷ ‏ ۴) $\sqrt{10}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : چون b , a دو بردار یکه هستند، بنابراین $|a|=|b|=1$ است.

$$|3a-2b|^2=(3a-2b).(3a-2b)=9a.a-6a.b-6b.a+4b.b=9|a|^2-12a.b+4|b|^2$$

$$=9-12\times1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}+4=7 \Rightarrow |3a-2b|=\sqrt{7}$$

نکته‌ی درسی:

۱) $|a|^2=a.$

۲) $a.(b+c)=a.b+a.c$

۳) $a.b=b.a$

۶۳. اگر بردارهای $a=(-۲,۱,۱)$ و $d=(۱,-۲,۲)$ به ترتیب، ضلع و قطر یک متوازی الاضلاع باشند، مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) ۵۰ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

اگر بردار b ، ضلع دیگر متوازی الاضلاع باشد، برای بردار d ، می‌توان چهار حالت $d=\pm(a+b)$ و $d=\pm(a-b)$ را در نظر گرفت که در هر چهار حالت، جواب مسأله یکسان است. (چرا؟) با فرض $d=a+b$ داریم:

$$S=|a\times b|, d=a+b \Rightarrow b=d-a$$

$$\Rightarrow S=|a\times(d-a)|=|a\times d-o|=|a\times d|$$

$$a\times d=(-۲,۱,۱)\times(۱,-۲,۲)=(۴,۵,۳) \Rightarrow S=|a\times d|=\sqrt{۱۶+۲۵+۹}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

۶۴. معادله‌ی خط عمود بر دو محور y و z به کدام صورت است؟

۱) $\begin{cases}x=a\\x+y=b\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=۰\\y=z\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y=b\\z=a\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=a\\z+y=b\end{cases}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : بردار هادی خط‌هایی که بر هر دو محور y و z عمودند، به صورت $u=(a,۰,۰)$ است، پس در معادله‌ی این خط مقدار y و z ، به صورت عدد ثابت بیان می‌شوند، بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۶۵. دو خط $d:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۳}{۳}$ و $d':\begin{cases}x=۲t+۴\\y=t+۲\\z=۳t+۶\end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱)بر هم عمودند ۲) موازی‌اند ۳) برهم منطبق‌اند ۴) متقاطع‌اند

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه حل اول: از جای گذاری معادلات پارامتری خط d' در معادلات متقارن خط d داریم:

$$\frac{(۲t+۴)-۲}{۲}=\frac{(t+۲)-۱}{۱}=\frac{(۳t+۶)-۳}{۳} \Rightarrow \frac{۲t+۲}{۲}=\frac{t+۱}{۱}=\frac{۳t+۳}{۳}$$

دو خط بر هم منطبق‌اند $\Rightarrow t+۱=t+۱=t+۱ \Rightarrow ۱=۱=۱ \Rightarrow$

راه حل دوم، دو خط d و d' با هم موازی‌اند $(u_d=u_{d'})$. برای بررسی انطباق دو خط، نقطه‌ی دلخواهی مانند $A=(۴,۲,۶)$ ، را روی خط d' در نظر می‌گیریم. اگر مختصات این نقطه در معادلات خط d صدق کند دو خط بر هم منطبق‌اند، در غیر این صورت موازی متمایزند.

$$A=(۴,۲,۶), d:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۳}{۳} \Rightarrow \frac{۴-۲}{۲}=\frac{۲-۱}{۱}=\frac{۶-۳}{۳} \Rightarrow ۱=۱=۱ \Rightarrow$$

۶۶. فاصله‌ی دو خط موازی $(x+y=۱\ ,\ z=۱)$ و $(x+y=۳\ ,\ z=۳)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$L:\begin{cases}x+y=۱\\ z=۱\end{cases} \Rightarrow A=(۰,۱,۱)\in L, L':\begin{cases}x+y=۳\\ z=۳\end{cases} \Rightarrow B=(۰,۳,۳)\in L'$$

بردار $u=(۱,-۱,۰)$ با هر دو خط L',L موازی است، پس :

$$AB=(۰,۲,۲) \Rightarrow h=\frac{|AB\times u|}{|u|}=\frac{|(۲,۲,-۲)|}{|(۱,-۱,۰)|}=\frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۶}$$

۶۷. معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(۱,۱,۱)$ به موازات صفحه‌ی $x+۲y+۳z=۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $x+y+z=۳$ ۲) $x+۲y+۳z=-۶$

۳) $x+۲y+۳x-۶=۰$ ۴) $x-۲y+z=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$P:x+۲y+۳z=۰ \Rightarrow n_p=n_Q=(۱,۲,۳)\ ,\ A=(۱,۱,۱)\in Q$$

$$\Rightarrow Q:۱(x-۱)+۲(y-۱)+۳(z-۱)=۰ \Rightarrow x+۲y+۳z-۶=۰$$

۶۸. معادله‌ی صفحه‌ی شامل دو خط $\begin{cases}x=t\\ y=۲t+۱\\ z=t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=t\\ y=t+۱\\ z=۲t\end{cases}$ کدام است؟

۱) $x-y-۳z+۱=۰$ ۲) $x-۳y+z+۳=۰$

۳) $۳x-y-z+۱=۰$ ۴) $x-y-z+۱=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$L:\begin{cases}x=t\\ y=۲t+۱\\ z=t\end{cases} \Rightarrow u=(۱,۲,۱)\ ,\ L':\begin{cases}x=t\\ y=t+۱\\ z=۲t\end{cases} \Rightarrow u'=(۱,۱,۲)$$

دو خط L',L متقاطع‌اند، پس بردار نرمال صفحه‌ی شامل این دو خط را به صورت $n_p=u\times u'$ در نظر می‌گیریم.

$$n_P=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{vmatrix}=(۳,-۱,-۱)\quad ,\quad A=(۰,۱,۰)\in L \Rightarrow A\in P$$

$$\Rightarrow P:۳(x-۰)-۱(y-۱)-۱(z-۰) \Rightarrow P:۳x-y-z+۱=۰$$

۶۹. معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی $۲x+۳y+۴z+۵=۰$ و $x+y+z+۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{y-۳}{۲}=x-۲=z$

۲) $\frac{y+۳}{۲}=x-۲=-z$

۳) $\frac{-y-۳}{۲}=x-۲=z$

۴) $\frac{y+۳}{۲}=x-۲=z$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه حل اول :

$$\begin{cases} P:۲x+۳y+۴z+۵=۰ \Rightarrow n=(۲,۳,۴) \\ P':x+y+z+۱=۰ \Rightarrow n'=(۱,۱,۱) \end{cases}$$

بردار هادی فصل مشترک P و P'، $u=n\times n'=(-۱,۲,-۱)$ است که تنها با بردار هادی گزینه‌ی ۳ موازی است.

راه حل دوم:

$$\begin{cases} P:۲x+۳y+۴z=۵=۰ \\ P':x+y+z+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P:۲x+۲y+۴z+۵=۰ \\ P':-۲x-۲y-۲z-۲=۰ \end{cases} \quad y+۲z+۳=۰ \ (۱) \quad , \quad \begin{cases} P:۲x+۳y+۴z+۵=۰ \\ P':-۳x-۳y-۳z-۳=۰ \end{cases} \quad -x+z+۲=۰ \ (۲)$$

جمع دو معادله :

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} y+۲z+۳=۰ \Rightarrow \frac{-۳-y}{۲} \\ -x+z+۲=۰ \Rightarrow z=x-۲ \end{cases} \Rightarrow x-۲=\frac{-۳-y}{۲}=z$$

۷۰. صفحه‌ی $P:۲x+y-z+۲=۰$ و دو نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ و $B(۳,۱,۲)$ مفروضند. کدام گزینه‌ی زیر صحیح است؟

۱) A و B در یک طرف P قرار دارند.

۲) P از وسط AB می‌گذرد.

۳) A و B در دو طرف P قرار دارند.

۴) A روی P قرار دارد.

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$P:۲x+y-z+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} P(A)=۲+۲-۳+۲=۳ \\ P(B)=۶+۱-۲+۲=۷ \end{cases}$$

$\Rightarrow P(A).P(B)>۰$ B , A در یک طرف صفحه‌ی P قرار دارند.

۷۱. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۱,۱)$ از صفحه‌ی P به معادله‌ی $۲x+۳y+z-۱=۰$ برابر است با:

۱) $\frac{۵\sqrt{۱۴}}{۱۴}$

۲) $\frac{۱۴\sqrt{۵}}{۵}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$

۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} A=(۱,۱,۱) \\ P:۲x+۳y+z-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow D=\frac{|۲+۳+۱-۱|}{\sqrt{۴+۹+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۵\sqrt{۱۴}}{۱۴}$$

۷۲. صفحه‌ی شامل دو خط موازی $(x=2t+1, y=t-1, z=t)$ و $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

ابتدا دسته‌ی صفحه‌های شامل خط $L:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ را می‌نویسیم:

$$L:\begin{cases} x=2y=0 \\ z-y=2 \end{cases}$$
$$\overline{P: mx-(2m+1)y+z=2}$$

از طرفی، نقطه‌ی دلخواهی مانند $A=(1,-1,0)$ را روی خط $L':\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases}$ در نظر می‌گیریم، پس :

$$A\in L' \Rightarrow A\in P \Rightarrow m(1)-(2m+1)(-1)+0=2 \Rightarrow 3m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

$$P:\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}y+z=2 \xrightarrow{y=z=0} \frac{1}{3}x=2 \Rightarrow x=6$$

۷۳. اگر خط به معادلات $\frac{x-1}{2}=\frac{y-b}{a}=\frac{z}{1}$ بر صفحه‌ای به معادله‌ی $2x+y-3z=4$ واقع شود، دو تایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(1,-2)$ ۴) $(-1,-2)$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-b}{a}=\frac{z}{1}=t \Rightarrow L:(x=2t+1\ ,\ y=at+b\ ,\ z=t)$$

اگر خط L به تمامس در صفحه‌ی $P:2x+y-3z-4=0$ قرار داشته باشد، باید معادلات پارامتری خط L در معادله‌ی صفحه‌ی P صدق کند، پس:

$$L\subset P \Rightarrow 2(2t+1)+(at+b)-3(t)-4=0 \Rightarrow (a-1)t+(b-2)=0$$

برای آن که معادله‌ی اخیر به ازای همه‌ی مقادیر t برقرار باشد، لازم و کافی است که:

$$\begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ b-2=0 \Rightarrow b=2 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(-1,2)$$

۷۴. قرینه‌ی صفحه‌ی $x-y+z-۲=۰$ نسبت به صفحه‌ی xoy کدام است؟

۱) $-x+y+z-۲=۰$
۲) $x+y+z-۲=۰$
۳) $-x+y+z+۲=۰$
۴) $x+y+z+۲=۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : در قرینه یابی نسبت به صفحه xoy ، علامت z قرینه می‌شود، بنابراین:

$$P: x-y+z-۲=۰ \Rightarrow P': x-y-z-۲=۰ \text{ or } P'=-x+y+z+۲=۰$$

۷۵. کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط به معادلات $D:(x=۰\ ,\ y=۵)$ و $D':\left(z=۰, \frac{x}{۳}=\frac{y}{۳}\right)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

طول عمود مشترک دو خط متنافر $L:\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ z=z_۰ \end{cases}$ و $L'=\begin{cases} x=x_۰ \\ y=y_۰ \end{cases}$ برابر $h=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است، بنابراین:

$$L:\begin{cases} \frac{x}{۳}=\frac{y}{۴} \\ z=۰ \end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases} ۴x-۳y=۰ \\ z=۰ \end{cases} \ ,\ L':\begin{cases} x=۰ \\ y=۵ \end{cases} \Rightarrow h=\frac{|۴(۰)-۳(۵)+۰|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

۷۶. شعاع دایره‌ای که از دونقطه‌ی $(۱,۲)$ و $(۳,۰)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=۲x-۱$ باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $\sqrt{۱۳}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

چون دایره از دو نقطه‌ی $A=(۱,۲)$ و $B=(۳,۰)$ می‌گذرد، مرکز آن روی عمود منصف پاره خط AB قرار درا د.

$$\begin{cases} A=(۱,۲) \\ B=(۳,۰) \end{cases} \Rightarrow AB \quad M_{\text{وسط پاره خط}}=(۲,۱), m_{AB}=-۱ \quad m_{\text{عمودمنصف}}=۱$$

$$\Delta_{\text{عمود منصف AB}}: y-۱=۱(x-۲) \Rightarrow \Delta: y=x-۱$$

$$\begin{cases} y=x-۱ \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow \quad \text{مرکز دایره}: O'=(۰,-۱)$$

$$\text{شعاع دایره}=|O'B|=\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$$

۷۷. دایره‌ی $x^۲+y^۲+۴x+y+۱=۰$ از مبدأ مختصات به زاویه‌ی α و دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۴=۰$ از مبدأ مختصات به زاویه‌ی β دیده می‌شود. کدام رابطه‌ی بین α و β درست است؟

۱) $\alpha<\beta$ ۲) $\alpha>\beta$ ۳) $\alpha=\beta$ ۴) $\beta=۲\alpha$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : فرض کنیم از مبدأ مختصات، دو مماس $OT_۱$ و $OT'_۱$ بر دایره‌ی $C_۱=x^۲+y^۲-۲x-۴y+۴=۰$ رسم شده باشد، مطابق شکل داریم:

$$C_۱:x^۲+y^۲-۲x-۴y+۴=۰ \Rightarrow C_۱:(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$$

$$\Rightarrow \omega_۱(۱,۲) \Rightarrow O\omega_۱=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}\ ,\ R_۱=۱$$

$$\Rightarrow O\overset{\Delta}{\omega_۱}T_۱:\sin\frac{\beta}{۲}=\frac{R_۱}{O\omega_۱}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\sqrt{\frac{۱}{۵}}$$

با نظیر همین استدلال، داریم:

$$C_۲=x^۲+y^۲+۴x+y+۱=۰ \Rightarrow C_۲:(x+۲)^۲+\left(y+\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \omega_۲\left(-۲,\frac{-۱}{۲}\right) \Rightarrow O\omega_۲=\sqrt{(-۲)^۲+\left(\frac{-۱}{۲}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲},R_۲=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R_۲}{O\omega_۲}=\sqrt{\frac{۱۳}{۱۷}}$$

چون $\sin\frac{\alpha}{۲}>\sin\frac{\beta}{۲}$ ، پس $\frac{\alpha}{۲}>\frac{\beta}{۲}$ و در نتیجه $\alpha>\beta$.

۷۸. معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن به طول ۱ـ و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+۴$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲+۳x-۲y=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۱$

۳) $x^۲+y^۲-۲x+y=۱$ ۴) $x^۲+y^۲+۲x-y=۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : مختصات مرکز دایره را به صورت $\omega(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم، چون دایره بر دو خط به معادلات $y-x=۰$ و $y-x-۴=۰$ مماس است، پس فاصله‌ی مرکز آن از این دو خط با هم برابر است.

$$\frac{|\beta-\alpha|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|\beta-\alpha-۴|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}} \Rightarrow |\beta-\alpha|=|\beta-\alpha-۴| \xrightarrow{\alpha=-۱} |\beta+۱|=|\beta-۳| \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\beta+۱=+(\beta-۳) & \text{غیرقابل قبول}\\ \beta+۱=-(\beta-۳) \Rightarrow \beta=۱\end{cases}$$

و شعاع دایره، برابر با فاصله‌ی مرکز، از خط مماس بر دایره است، داریم:

$$\begin{cases}\omega(-۱,۱)\\ x-y=۰\end{cases} \Rightarrow R=\frac{|-۱-۱|}{\sqrt{۱+(-۱)^۲}}=\sqrt{۲}$$

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$$

۷۹. معادله‌ی دایره‌ی مماس داخلی با دایره‌ی $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\left(۱+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}\right)^۲$ که مرکزش $(۲\alpha,۲\beta)$ است، کدام است؟

۱) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۱۶}$
۲) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۹}$
۳) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۴}$
۴) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

شرط مماس داخل بودن: $|OO'|=|R-R'|$

$$\begin{cases} O=(\alpha,\beta) \\ O'=(۲\alpha,۲\beta) \end{cases} \Rightarrow |OO'|=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}$$

چون دو دایره مماس داخل‌اند، داریم: $|OO'|=R-R'$ بنابراین:

$$|OO'|=R-R'=۱+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}-R' \Rightarrow \sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}=۱+\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}-R' \Rightarrow R'=۱$$

۸۰. معادله‌ی خط راستی که نقاط تقاطع دوایر $\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲+y^۲=۱$ و $\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+y^۲=۱$ را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $x=۰$
۲) $y=۰$
۳) $x=y$
۴) $x=-y$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+y^۲-۱-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲-y^۲+۱=۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{۴}-۱-\left(-x+\frac{۱}{۴}\right)+۱=۰ \Rightarrow ۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

۸۱. معادله‌ی بیضی ای که مرکز آن $C(-۲,۳)$ محور کانونی آن موازی محور xها، طول قطر بزرگ آن ۱۰ و فاصله‌ی کانونی آن ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$
۲) $\frac{(x-۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$
۳) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱$
۴) $\frac{(x+۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{matrix} ۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵ \\ ۲c=۸ \Rightarrow =۴ \end{matrix} \Rightarrow b=\sqrt{a^۲-c^۲}=۳$$

بیضی افقی است $\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$

۸۲. نقطه‌ی $M(x,y)$ روی بیضی به معادله‌ی $9y^2+4x^2-8x=8$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو کانون این بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر $2a$ است.

$$9y^2+4x^2-8x=8 \Rightarrow 9y^2+4\left(x^2-2x+1\right)-4=8 \Rightarrow 9y^2+4(x-1)^2=12$$

$$\Rightarrow \frac{9y^2}{12}+\frac{(x-1)^2}{3}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{12}{9}}+\frac{(x-1)^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3} \Rightarrow 2a=2\sqrt{3}$$

۸۳. خروج از مرکز بیضی $(2x+y)^2+(2x-y)^2=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : پرانتزها را به توان رسانده وساده می‌کنیم.

$$(x+2y)^2+(x-2y)^2=2$$

$$2x^2+8y^2+4xy-4xy=2 \Rightarrow x^2+4y^2=1 \Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸۴. تمام دایره‌های به مرکز $M(x,y)$ واقع بر سهمی $3y=x^2-2x-2$ گذرنده بر کانون آن بر کدام خط ثابت همواره مماس‌اند؟

۱) $y=\frac{5}{4}$ ۲) $y=\frac{3}{4}$ ۳) $y=-\frac{1}{4}$ ۴) $y=-\frac{7}{4}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : طبق تعریف سهمی، هر نقطه روی سهمی از یک نقطه به نام کانون و از یک خط به نام هادی به یک فاصله است.
پس اگر به مرکز هر نقطه روی سهمی دایره‌ای به شعاع فاصله‌اش تاکنون رسم کنیم، این دایره بر خط هادی سهمی مماس است.

$$3y=x^2-2x-2 \Rightarrow x^2-2x-3y-2=0 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$y'_x=2x-2=0 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{x=1} 1-2-3y-2=0 \Rightarrow y=-1$$

لذا مختصات رأس $(1,-1)$ می‌باشد و چون سهمی قائم است. معادله‌ی خط هادی به صورت $y=\beta-a$ است پس داریم:

$$y=-1-\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}$$

۸۵. معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله $y=ax^۲+۲ax+a$ کدام است؟

۱) $y=-\frac{۱}{۲a}$ ۲) $y=-\frac{۱}{۴a}$ ۳) $y=-\frac{۱}{a}$ ۴) $y=-\frac{۱}{۳a}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : $y=ax^۲+۲ax+a$

$$y=a\left(x^۲+۲x+۱\right) \Rightarrow y=a(x+۱)^۲ \Rightarrow (x+۱)^۲=\frac{۱}{a}(y)$$

لذا $S=(-۱,۰)$ و $a'=\frac{۱}{۴a}$ پارامتر سهمی است و چون سهمی قائم است، لذا معادله‌ی خط هادی به فرم $y=\beta-a'$ می‌باشد، پس :

$$\underbrace{y=۰-\frac{۱}{۴a}}_{\text{معادله‌ی خط هادی سهمی}} \Rightarrow y=\frac{-۱}{۴a}$$

(در این جا پارامتر سهمی را a' گرفتیم تا با a در صورت تست اشتباه نشود).

۸۶. معادله‌ی خط هادی سهمی $y^۲-۲y-x=۰$ کدام است؟

۱) $x=-\frac{۳}{۴}$ ۲) $x=\frac{۳}{۴}$ ۳) $x=\frac{۵}{۴}$ ۴) $x=-\frac{۵}{۴}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$y^۲-۲y-x=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\ ,\ y^۲-۲y=x \Rightarrow (y-۱)^۲=x+۱ \Rightarrow S=(-۱,۱)$$

سهمی افقی است. لذا داریم:

$$\underbrace{x=\alpha-a=-۱-\frac{۱}{۴}=-\frac{۵}{۴}}_{\text{معادله خط هادی}}$$

۸۷. از نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ دو مماس عمود بر هم بر سهمی $y^۲-۴x=۰$ رسم شده است. α کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$y^۲=۴x \Rightarrow \begin{cases} O(۰,۰) & \text{رأس سهمی} \\ a=۱ \ \text{پارامتر سهمی} & \text{سهمی افقی است} \quad \text{خط هادی } x=-۱ \end{cases}$$

$\longrightarrow$

می‌دانیم که از هر نقطه روی خط هادی سهمی می‌توان دو مماس عمود بر آن سهمی رسم کرد، پس باید $\alpha=-۱$ باشد.

۸۸. فاصله‌ی کانون‌های هذلولی $۹x^۲ - ۴y^۲ = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۶}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$۹x^۲ - ۴y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۹}} - \frac{y^۲}{\frac{۱}{۴}} = ۱$$

هذلوبی افقی است و $a^۲ = \frac{۱}{۹}$ و $b^۲ = \frac{۱}{۴}$ ، پس:

$$c = \sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۶} \Rightarrow FF' = ۲c = \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

۸۹. معادله‌ی هذلولی‌ای که مرکز آن به مختصات $(-۱,۰)$ و محور کانونی آن موازی محور yها و در آن $a = ۲$ و $b = ۳$ باشد، کدام است؟

۱) $۴y^۲ - ۹x^۲ - ۸y = ۴۰$ ۲) $۹y^۲ - ۴x^۲ - ۸x = ۴۰$

۳) $۹x^۲ - ۴y^۲ - ۸x = ۴۰$ ۴) $۴x^۲ + ۹y^۲ - ۸x = ۴۰$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

هذلولی قائم است.

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} - \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{y^۲}{۴} - \frac{(x+۱)^۲}{۹} = ۱ \Rightarrow ۹y^۲ - ۴x^۲ - ۸x = ۴۰$$

۹۰. مختصات محل برخوردمجانب‌های هذلولی به معادله‌ی $\frac{(x-۲)^۲}{۹} - \frac{(y+۲)^۲}{۱۶} = ۱$ کدام است؟

۱) $(۲,-۲)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

مختصات محل برخورد مجانب‌های هذلولی مرکز هذلوبی است، یعنی $O' = (۲,-۲)$

۹۱. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های هذلولی $x^۲-y^۲-۲y-۴x=۰$ کدام است؟

۱) $(۲,-۱)$ ۲) $(-۲,۱)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(-۲,-۱)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها مرکز هذلولی. در نتیجه از مشتق‌های جزیی برای تعیین مختصات مرکز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{matrix} F'_{(x)}=۲x-۴=۰ \Rightarrow x=۲ \\ F'_{(y)}=-۲y-۲=۰ \Rightarrow y=-۱ \end{matrix} \Rightarrow O'=(۲,-۱)$$

۹۲. فاصله‌ی یک کانون از مجانب هذلولی $x^۲-۳y^۲=۱۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : نکته : در هر هذلولی فاصله‌ی کانون تا مجانب برابر b است، پس :

$$\frac{x^۲}{۱۲}-\frac{y^۲}{۴}=۱ \Rightarrow b^۲=۴ \Rightarrow b=۲$$

۹۳. فاصله‌ی کانون هذلولی $\frac{(x-۱)^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ از مجانب این منحنی، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : راه حل اول :

$$\frac{(x-۱)^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱ \Rightarrow$$ مرکز هذلولی، هذلولی افقی است

$$\omega(۱,۰)\,,\begin{cases} a^۲=۹ \\ b^۲=۱۶ \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۵$$

هذلولی افقی است. $\Rightarrow F,F'(x_\omega \pm c, y_\omega) \Rightarrow$ یکی از کانون‌ها : $F(۱+۵.۰)=(۶,۰)$

$$\frac{(x-۱)^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱ \Rightarrow$$ مجانب‌ها

$$\frac{(x-۱)^۲}{۹}=\frac{y^۲}{۱۶} \Rightarrow \frac{(x-۱)}{۳}=\frac{\pm y}{۴} \Rightarrow$$ یکی از مجانب‌ها $۴x+۳y-۴=۰$

فاصله‌ی نقطه‌ی $F(۶,۰)$ را از خط $۴x+۳y-۴=۰$ به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۴\times۶+۳\times۰-۴|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

راه حل دوم : در هر هذلولی، فاصله‌ی هر کانون از هر مجانب برابر bاست.

$$b^۲=۱۶ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow d=b=۴$$

$$x^۲+y^۲-۲xy-x=۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۱)=۰$$

۹۴. اگر A و B دو ماتریس و ماتریس $A^T.B^T=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$A^tB^t=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن BA از طرفین رابطه‌ی فوق، ترانهاده می‌گیریم.

$$\left(A^tB^t\right)^t=\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\right)^t$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

۹۵. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $(-۱,۲)$ با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $(۳,۰)$ ۲) $(-۳,۰)$ ۳) $(۰,-۳)$ ۴) $(۰,۳)$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱-۲ \\ -۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

۹۶. مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $a+b+c$ ۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$|A|=\begin{vmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

سطر سوم را با سطر دوم جمع می‌کنیم و سپس فاکتورگیری می‌کنیم.

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}=۳(a+b+c)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a & b & c \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

چون دو سطر دترمینان برابر است حاصل آن صفر می‌شود.

۹۷. به ازای کدام مقادیر a و b ، اگر ۲ واحد به درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر اضافه شود، آنگاه ۳ واحد به مقدار دترمینان آن افزوده می‌شود؟ $\begin{bmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}$

۱) a هر چه باشد، $b=-\frac{1}{2}$

۲) a هر چه باشد، $b=\frac{1}{2}$

۳) b هر چه باشد، $a=-\frac{1}{2}$

۴) b هر چه باشد، $a=\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : اگر در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ به درایه‌ی a_{ij} به اندازه‌ی k واحد اضافه شود، آنگاه به دترمینان آن، k برابر همسازه‌ی آن (یعنی kA_{ij}) اضافه می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c+2 \\ a & b & c+1 \end{vmatrix}=|A|+3 \Rightarrow |A|+2A_{23}=|A|+3$$

$$\Rightarrow 2A_{23}=3 \Rightarrow 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a+3 & b \\ a & b \end{vmatrix}=3 \Rightarrow -2(ab+3b-ab)=3 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

پس a هر مقداری می‌تواند باشد و $b=-\frac{1}{2}$.

۹۸. حاصل $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱)صفر

۲) $2a_1a_2a_3a_4a_5$

۳) $-2a_1a_2a_3a_4a_5$

۴) $-a_1a_2a_3a_4a_5$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}=(-)(-)\begin{vmatrix} a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5$$

جای سطر اول و پنجم و همچنین جای سطر دوم و چهارم را عوض می‌کنیم.

بنابراین حاصل جمع دو دترمینان مساوی $2a_1a_2a_3a_4a_5$ می‌باشد.

۹۹. حاصل $\begin{vmatrix} b-c & \cdot & \cdot \\ c & c-a & \cdot \\ b & a & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & \cdot & \cdot \\ c & b-c & \cdot \\ b & a & b-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & \cdot & \cdot \\ c & b-c & \cdot \\ b & a & c-a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳$

۲) ۰

۳) $\frac{(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳}{۳}$

۴) $a^۳+b^۳+c^۳$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : هرسه دترمینان پائین مثلثی می‌باشند و حاصل هر کدام برابر است با حاصل ضرب اعداد قطر اصلی .

$$=(b-c)(c-a)(a-b)+(a-c)(b-c)(b-a)+(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=yzx+(-z)(y)(-x)+xyz=۳xyz$$

اگر $a-b=x$ و $b-c=y$ و $c-a=z$ فرض کنیم، داریم:

اما چون $x+y+z=۰$ می‌باشد، بنابراین $x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$

پس جواب : $۳xyz=(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳$ و گزینه‌ی ۱ درست است.

۱۰۰. اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$ دترمینان A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۳}$

۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) ۱

۴) ۳۳

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : طبق نکات ماتریس وارون داریم:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|} \Rightarrow |A|=\frac{۱}{|A^{-۱}|}$$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-۱}|=۱۲+۲۱=۳۳ \Rightarrow |A|=\frac{۱}{۳۳}$$

۱۰۱. اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & m & ۳ \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & m \end{bmatrix}$ برابر باشد، m کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) $۲,-۳$

۴) $-۲,۳$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & m & ۳ \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & m \end{vmatrix}\right)^{-۱} \quad (*)$$

برای محاسبه دترمینان ۳×۳ ، دو برابر ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم:

$$\begin{vmatrix} ۲+۲(-۱) & ۰ & -۱ \\ ۱+۲(۰) & ۱ & ۰ \\ -۲+۲(۳) & m & ۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & m & ۳ \end{vmatrix} = (-۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & m \end{vmatrix} = ۴-m$$

$$\xrightarrow{(*)} (۴-m)=\frac{۱}{m-۲} \Rightarrow (۴-m)(m-۲)=۱ \Rightarrow -(m-۳)^۲=۰ \Rightarrow m=۳$$

۱۰۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، معکوس ماتریس I-A به صورت $\left[\begin{array}{c|cc} ۱ & & \\ & B & \\ ۰ & & \\ \hline ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$ است. ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ ۱ & ۷ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

روش اول :

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۴ \\ ۰ & ۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-۱}=\frac{۱}{|I-A|}(I-A)^{*}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

روش دوم :

به طورکلی، اگر $A_{n\times n}$ ماتریسی مثلثی بوده که درایه‌های قطر اصلی آن صفر باشد آن‌گاه همواره $A^{n}=O$ ؛ بنابراین داریم:

$$A^{۳}=O \Rightarrow I-A^{۳}=I \Rightarrow (I-A)\left(I+A+A^{۲}\right)=I \Rightarrow (I-A)^{-۱}=I+A+A^{۲}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

۱۰۳. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد، m کدام است؟

۱) $-۱ , -۲$ ۲) $۱ , -۲$ ۳) $-۱ , ۲$ ۴) $۱ , ۲$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط نداشتن جواب}} \begin{vmatrix} ۲ & m \\ m-۱ & ۱ \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow ۲-m^{۲}+m=۰$$

$$m^{۲}-m-۲=۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۱ \end{cases}$$

۱۰۴. به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات خطی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۸ & ۷ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \\ a \end{bmatrix}$ ، جواب منحصر به فرد دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$\begin{matrix}(۱)\\(۲)\\(۳)\end{matrix}\begin{cases} ۴x+۳y=-۱ \\ ۸x+۷y=۳ \\ -۵x+۴y=a \end{cases} \xrightarrow{\text{باید جواب ۱و۲و۳ صدق کند}} \begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\begin{cases} ۴x+۳y=-۱ \\ ۸x+۷y=۳ \end{cases}$$

$$۴x=-۱۶ \rightarrow x=-۴ \rightarrow y=۵$$

در رابطه (۳) $\rightarrow (-۵)\times(-۴)+۴\times۵=a \rightarrow a=۴۰$

۱۰۵. در روش گاس ـ جردن ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ & ۵ & -۳ \end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \end{bmatrix}$ درآمده است، $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ & ۵ & -۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_۲-۲R_۱ \\ R_۳+R_۱ \end{matrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۰ & -۳ & ۹ & -۱۲ \\ ۰ & ۶ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{R_۲}{-۳} \\ \frac{R_۳}{۲} \end{matrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰۳ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_۱-۲R_۲ \\ R_۳-۳R_۲ \end{matrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ & -۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_۳}{۱۰}}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_۱-۳R_۳ \\ R_۲+۳R_۳ \end{matrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \\ c=-۱ \end{cases} \Rightarrow a+b+c=۲$$

۱۰۶. ماتریس $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right]$ ، ماتریس ضرایب با ستون مقادیر ثابت یک دستگاه سه معادله، سه مجهول است که در روش حذفی گاوس به صورت $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & b & 3 & 7 \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right]$ درآمده است، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۳۰- ۲) ۲۵- ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ -2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -2R_2+R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=-7 \\ d=-21 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=-30$$

۱۰۷. مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 3x_1-3x_2-4x_3=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$ در کدام یک از معادله‌های زیر صدق می‌کند؟

۱) $3x_1+2x_2-5x_3=0$ ۲) $x_1-4x_2+5x_3=0$

۳) $2x_1+3x_2+6x_3=0$ ۴) $5x_1-7x_2-8x_3=0$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

فصل مشترک دو صفحه‌ی دستگاه داده شده، خطی است موازی با بردار هادی $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2i-2j+3k$ و معادله‌ی خط آن به صورت $x_1=2t\ ,\ x_2=-2t\ ,\ x_3=3t$ است که در بین گزینه‌های داده شده تنها در معادله‌ی $5x_1-7x_2-8x_3=0$ صدق می‌کند.

۱۰۸. دو زاویه A وb متمم اند.اندازه زاویه A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه ی مکمل زاویه ی B است.زاویه A چند درجه است؟

۲۷(۱ ۳۶(۲ ۶۳(۳ ۷۲(۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : طبق فرض سؤال AوB دو زاویه ی متمم اند.پس:

$$\hat{A}+\hat{B}=90$$

همچنین طبق فرض سؤال،اندازه زاویه A، $\frac{4}{9}$ مکمل زاویه B است.پس:

$$\hat{A}=\frac{4}{9}\left(180^\circ-\hat{B}\right) \Rightarrow 9\hat{A}=4\left(180^\circ-\hat{B}\right)$$

$$\begin{cases} \hat{A}+\hat{B}=90^\circ \\ 9\hat{A}+4\hat{B}=720^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{A}=72^\circ \quad ,\hat{B}=18^\circ$$

۱۰۹. زاویه های مثلثی متناسب با اعداد 2,5,8 است.اندازه ی کوچکترین زاویه ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

زوایای این مثلث را $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ در نظر می گیریم،چون این زوایا طبق فرض سؤال با اعداد 2,5,8 متناسب اند.پس $\frac{\hat{A}}{8}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{2}$ با فرض اینکه $\frac{\hat{A}}{8}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{2}=K$، $\begin{cases}\hat{A}=8k\\ \hat{B}=5k\\ \hat{C}=2k\end{cases}$ همچنین می دانیم که مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.پس:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 8K+5K+2K=180^\circ$$

$$\Rightarrow 15K=180^\circ \Rightarrow K=12^\circ$$

کوچکترین زاویه ی خارجی،متناظر با بزرگترین زاویه ی داخلی است و داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=8K=96^\circ \ (\text{بزرگترین زاویه داخلی})\\ \hat{B}=5K=60^\circ\\ \hat{C}=2K=24^\circ\end{cases}$$

$\Rightarrow$ کوچکترین زاویه خارجی $=180^\circ-96^\circ=84^\circ$

۱۱۰. مثلثی به اضلاع $b, a, 3$ با مثلثی به طول اضلاع 5,4,3 متشابه است.دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) 7/2 ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) 13/5

پاسخ : گزینه‌ی «۲» : در دو مثلث متشابه،اضلاع دو به دو متناسبند.با توجه به این که دو مثلث قابل انطباق نیستند،ضلع با اندازه ۳ در مثلث اولی با ضلع به اندازه ی ۳ در مثلث دوم متناسب نیست.در نتیجه دو حالت داریم:

$$\begin{cases}\frac{3}{4}=\frac{a}{3}=\frac{b}{5}\Rightarrow a=\frac{9}{4}, b=\frac{15}{4}\Rightarrow \text{محیط}=3+\frac{9}{4}+\frac{15}{4}=9\\ \frac{3}{5}=\frac{a}{3}=\frac{b}{4}\Rightarrow a=\frac{9}{5}, b=\frac{12}{5}\Rightarrow \text{محیط}=3+\frac{9}{5}+\frac{12}{5}=\frac{36}{5}\end{cases}$$

بنابراین بیشترین محیط برابر ۹ است.دقت کنید که در هر حالت جای a و b می تواند عوض شود که تأثیری در محیط مثلث ندارد.

۱۱۱. اضلاع مکعب مستطیلی با اعداد ۱و۲و۲ متناسب اند.اگر حجم مکعب مستطیل ۸ باشد،طول قطر آن چقدر است؟

۱) $4\sqrt[3]{2}$ ۲) $۹\sqrt[3]{2}$ ۳) $3\sqrt[3]{2}$ ۴) $۹\sqrt[3]{4}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اضلاع مکعب مستطیل را a وb وc در نظر می گیریم.طبق فرض $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{1}$، پس اگر در نظر بگیریم $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{1}=k$،داریم:

$$a=2k, b=2k, c=k$$

حجم مکعب مستطیل $: V=abc \rightarrow 8=(2k)(2k)(2k)$

$$\Rightarrow 8k^3 \Rightarrow k^3=2 \Rightarrow k=\sqrt[3]{2}$$

از طرفی $: d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{k^2+k^2+k^2}=\sqrt{9k^2}=3k=3\sqrt[3]{2}$

۱۱۲. کره ای در مکعبی به یال a محاط شده،حجم کره چقدر است؟

۱) $\frac{4\pi a^3}{3}$ ۲) $\frac{\pi a^3}{8}$ ۳) $\frac{\pi a^3}{6}$ ۴) $\frac{32\pi a^3}{8}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : اگر کره ای درون یک مکعب محاط شود،طول قطر کره،برابر با طول یال مکعب است،پس:

$$2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \to \frac{a}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8} = \frac{\pi a^3}{8}$$

۱۱۳. بزرگترین مکعب ممکن داخل یک کره به قطر ۶ واحد جای گرفته است،سطح کل این مکعب کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳» : می دانیم اگر بزرگترین مکعب ممکن در داخل یک کره قرار بگیرد (مکعب در کره محاط باشد)،آنگاه طول قطر کره،با طول قطر مکعب برابر است. همچنین،می دانیم که طول قطر مکعبی به طول یال a برابر با $\sqrt{3}a$ است.

با توجه به توضیحات بالا اگر طول یال مکعب مورد نظر را a در نظر بگیریم از آنجا که طول قطر کره ی محیط بر آن برابر ۶ است،داریم:

$$\sqrt{3}a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

از طرفی می دانیم که سطح کل مکعبی به طول یال a برابر با $6a^2$ است،داریم:

سطح کل مکعب: $6a^2 \to 6\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 = 6\left(\frac{36}{3}\right) = 72$

۱۱۴. هر زاویه یک ۱۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟

۱) $150°$ ۲) $155°$ ۳) $160°$ ۴) $165°$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

هر زاویه n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n-2)\times 180°}{n}$$
$$a = 18 \Rightarrow \frac{(n-2)\times 180°}{n} = \frac{(18-2)\times 180°}{18} = 160°$$

۱۱۵. تعداد قطرهای یک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ واحد بیشتر است،تعداد قطرهای این چند ضلعی کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر با $\frac{n(n-3)}{2}$ است،پس طبق فرض مسأله داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 42 \Rightarrow n(n-3) = 2(n+42)$$
$$\Rightarrow n^2 - 3n = 2n + 84 \Rightarrow n^2 - 5n - 84 = 0$$
$$\Rightarrow (n-12)(n+7) = 0$$

$$\begin{cases} n = 12 \Rightarrow \text{تعداد قطرها} = \dfrac{12\times(12-3)}{2} = 54 \\ n = -7 \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۱۱۶. عدد مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ چند برابر عدد ارتفاع آن است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{h} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{2}a \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

۱۱۷. سه پاره خط به طول های $4x-4$ و $x+7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند،مقدار x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{11}{9} < x < 3$ ۲) $\frac{5}{3} < x < 3$ ۳) $2 < x < 3$ ۴) $\frac{11}{9} < x < 4$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

شرط وجود مثلث را اجرا می کنیم و از آن جا که این شرط باید به صورت هم زمان برقرار باشند،پس باید اشتراک بگیریم.

$$(1)\ \ 4x-4 < (x+7)+6x \Rightarrow x > -\frac{11}{3}$$

$$(2)\ \ x+7 < (4x-4)+6x \Rightarrow 9x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{9}$$

$$(3)\ \ 6x < (4x-4)+(x+7) \Rightarrow x < 3$$

از اشتراک (1) و (2) و(3) نتیجه می گیریم که: $\frac{11}{9} < x < 3$

۱۱۸. اگر مقدار مساحت مثلث سرپینسکی در مرحله صفر ام برابر ۱۶ باشد،تفاضل مقدار مساحت باقی مانده ی مثلث سرپینسکی در مرحله چهارم از مرحله سوم چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{27}{16}$ ۴) $\frac{81}{64}$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

مساحت مثلث در مرحله صفر ام $S_0 = 16$

$$S_3 - S_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 S_0 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 S_0 = \frac{27}{64} \times 16 - \frac{81}{256} \times 16 = \frac{27}{4} - \frac{81}{16} = \frac{27}{16}$$

۱۱۹. در مثلثی $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ ،با فرض $b = a\sqrt{3}$ چند مثلث می توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴)نشدنی

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

هر وقت در مثلثی دو ضلع و سینوس زاویه ی مقابل به یکی از دو ضلع معلوم باشند،سینوس زاویه ی مقابل به ضلع دیگر نیز از قضیه سینوس ها به دست می آید:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \to \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{3}{2} = \frac{1}{5} > 1 \Rightarrow$$

که این مقدار غیر قابل قبول است،پس مثلثی وجود ندارد.

۱۲۰. وقتی محیط یک دایره از ۲۰ سانتی متر به ۳۰ سانتی متر افزایش می یابد،افزایش شعاع آن بر حسب سانتی چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2\pi}$ ۲) $2/5$ ۳) $\frac{5}{\pi}$ ۴) ۵

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

شعاع ددایره را در وضعیت اول R_1 و در وضعیت دوم R_2 در نظر می گیریم.داریم:

$$2\pi R_1 = 20 \Rightarrow R_1 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$$

$$2\pi R_2 = 30 \Rightarrow R_2 = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$$

$$\Delta R = R_2 - R_1 = \frac{15}{\pi} - \frac{10}{\pi} = \frac{5}{\pi}$$

۱۲۱. مکان هندسی نقاطی از فضا که از سه نقطه ی غیر واقع بر یک امتداد به یک فاصله اندکدام است؟

۱)یک نقطه ۲)یک خط ۳)دو خط ۴)یک صفحه

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

برای تبدیل مسأله ی بالا به یک سوال آشنا،با حفظ شرایط سوال،می توانیم سه نقطه ی غیر واقع بر یک امتداد (غیر واقع بر یک استقامت) را سه رأس یک مثلث فرض کنیم.و این گونه تفسیر کنیم که مکان هندسی نقاطی از فضا که از سه رأس یک مثث به یک فاصله اند،فصل مشترک سه صفحه ی عمود منصف اضلاع مثلث است.این فصل مشترک در واقع یک خط است که در محل هم رسی عمود منصف های مثلث بر صفحه ی مثلث عمود می شود.

۱۲۲. اگر فاصله ی خط $y = ax + b$ تا مبدأ مختصات k باشد،فاصله ی تبدیل یافته ی خط فوق تحت تبدیل $T(x, y) = (ax + b, ay + b)$ تا مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{k+b}{\sqrt{a}}$ ۲) k ۳) $k + b$ ۴) $\frac{k}{\sqrt{a}}$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} ax + b = \acute{x} \Rightarrow x = \dfrac{\acute{x} - b}{a} \\ ay + b = \acute{y} \Rightarrow y = \dfrac{\acute{y} - b}{a} \end{cases} \rightarrow \frac{\acute{y} - b}{a} = \left(\frac{\acute{x} - b}{a}\right) a + b \rightarrow \acute{y} = a\acute{x} + b$$

معادله ی تصویر با خط اولیه یکسان است پس فاصله ی آن تا مبدأ نیز برابر k است.

۱۲۳. تبدیل یافته ی نقطه ی $A(5,6)$ تحت ترکیب سه انتقال به ترتیب با بردارهای $\vec{a} = (1, -4)$ و $\vec{b} = (2,3)$ و $\vec{c} = (-3,1)$ کدام است؟

۱) $(11,14)$ ۲) $(6,2)$ ۳) $(2,7)$ ۴) $(5,6)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

بردار انتقال این سه انتقال عبارت است از جمع تک تک بردارهای انتقال.

$$\vec{V} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \big(1 + 2 + (-3)\big), (-4) + 3 + 1 = (0,0)$$

$$\Rightarrow T(x, y) = (x + 0, y + 0) \Rightarrow T(5,6) = (5,6)$$

۱۲۴. خط $y-2x+1=0$ را تحت بردار $\vec{T}$ انتقال داده ایم و معادله ی آن تغییر نکرده است.بردار $\vec{T}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(2,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(-2,1)$

پاسخ : گزینه‌ی «۱» : اگر بردار انتقال،موازی خط مفروض باشد،خط تبدیل یافته با خط اولیه یکسان است.در بین گزینه ها فقط شیب بردار $(1,2)$ برابر شیب خط اولیه یعنی عدد ۲ است.

۱۲۵. با کدام بردار انتقال می توان دو خط $d: 2x-y+1=0$ و $\acute{d}: x+y-1=0$ را بر هم نگاشت؟

۱) $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ ۲) $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ۴)هیچ کدام

پاسخ : گزینه‌ی «۴» : هیچ انتقالی نمی تواند دو خط متقاطع را بر هم بنگارد.زیرا انتقال شیب خط را حفظ می کند.

۱۲۶. خط $d: y+x=1$ را انتقال داده ایم و معادله ی آن به صورت $\acute{d}: y+x=3$ درآمده است.کدام گزینه نمی تواند به عنوان بردار انتقال این دو خط انتخاب شود؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(4,-2)$ ۴)$(3,0)$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$T(x,y)=(x+a,y+b) \Rightarrow \begin{cases} x+a=\acute{x} \Rightarrow x=\acute{x}-a \\ y+b=\acute{y} \Rightarrow y=\acute{y}-b \end{cases}$$

جایگذاری در معادله خط قدیم $\rightarrow d: \acute{y}-b+\acute{x}-a=1 \Rightarrow \acute{y}+\acute{x}=1+a+b$

مقایسه با خط قدیم(1) $\rightarrow 1+a+b=3 \Rightarrow a+b=2$

با جایگذاری گزینه های ۱و۲و۳و۴ در رابطه ی (۱) می بینیم که گزینه ی ۴ در رابطه ی مزبور صدق نمی کند.

۱۲۷. اگر دو نقطه ی $A=(a+1,b-1)$ و $B=(2a+3,b+2)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط $y=x$ باشند،آن گاه مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱)۱۱ ۲)۱ ۳)-11 ۴)-1

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

در بازتاب نسبت به خط $y=x$، طول و عرض نقطه جا به جا میشوند:

$$T(x,y)=(x,y)$$
$$T(A)=B \Rightarrow T(a+1,b-1)=(b+2,2a+3) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a+1=b+2 \\ b-1=2a+3 \end{cases} \Rightarrow a=-5 \quad , \quad b=-6 \quad \Rightarrow a+b=-11$$

۱۲۸. بازتاب خط $y=2x-1$ نسبت به خط $y=-x$ کدام است؟

۱) $x=2y-1$ ۲) $-x=2y-1$ ۳) $x=2y+1$ ۴) $y=2x-1$

پاسخ : گزینه‌ی «۳»

$$T(x,y)=(-y,-x) \Rightarrow \begin{cases} -y=\acute{x} \Rightarrow y=-\acute{x} \\ -x=\acute{y} \Rightarrow x=-\acute{y} \end{cases}$$

جایگذاری در معادله خط قدیم $\rightarrow -\acute{x}=2(-\acute{y})-1 \Rightarrow \acute{x}=2\acute{y}+1$

۱۲۹.   اگر بازتاب خط $3x + 2y = a$ نسبت به خط $y = -x$ از نقطه ی $(1, -1)$ عبور کند، آن گاه a کدام است؟

۱)صفر   ۲)۱   ۳)۱-   ۴)۵

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$T(x, y) = (-y, -x) \Rightarrow \begin{cases} -y = x' & \Rightarrow y = -\acute{x} \\ -x = \acute{y} & \Rightarrow x = -\acute{y} \end{cases}$$

جایگذاری در معادله ی قدیم $\rightarrow \ 3(-\acute{y}) + 2(-\acute{x}) = a \ \rightarrow -3\acute{y} - 2\acute{x} = a$

جایگذاری نقطه $\rightarrow \ -3 \times (-1) - 2 \times 1 = a \ \Rightarrow a = 1$

۱۳۰.   نقطه ی $M = (2,0)$ را حول مبدأ مختصات به اندازه ی $\frac{\pi}{3}$ دوران می دهیم. مختصات نقطه ی تبدیل یافته چیست؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه‌ی «۴»

$$R_\theta . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$