« فهرست مطالب »

فصل اول

مقدمه :

1-1 مروری بر حساب دیفرانسیل و انتگرال :

قضایای زیر در به دست آوردن روشهای تخمین خطا ، دارای اهمیت بنیادی هستند . اثبات این قضایا ودیگر نتایج بدون مرجع دراین بخش را می توان درهرکتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال استاندارد یافت .

قضیه رول : فرض کنید $f\in c[a,b]$ و f بر (a,b) مشتق پذیر باشد .هرگاه $f(a)=f(b)=0$ دراین صورت عددی چون c در (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$.

قضیه مقدار میانگین : هرگاه $f\in c[a,b]$ و f بر (a,b) مشتق پذیر باشد ، دراین صورت عددی چون c در (a,b) موجود است به طوری که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها : هرگاه $f\in c[a,b]$ و g روی $[a,b]$ انتگرالپذیر باشد ونیز g در $[a,b]$ تغییر علامت ندهد ،آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

تعمیم قضیه رول : فرض کنید $f\in c^n[a,b]$ باشد ،هرگاه $f(x)$ در n+1 نقطه متمایز $x_0 , x_1 ,\ldots,x_n$ از $[a,b]$ صفر شود ، آنگاه نقطه ای مانند c در (a,b) وجود دارد بطوری که $f^{(n)}(c)=0$.

قضیه تیلور : فرض کنید $f\in c^{n+1}[a,b]$ باشد و هم چنین $x_0\in[a,b]$ ،آنگاه به ازای هر $x\in[a,b]$ عددی مانند t(x) بین x_0 و x وجود دارد به طوری که :

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

که در آن

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

و $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ f^{(n+1)}(t(x))$

دراینجا $P_n(x)$ چند جمله ای تیلور درجه n ام حول x_0 و $R_n(x)$ جمله باقیمانده (یا خطای برشی) وابسته به $P_n(x)$ نامیده می شود . سری نامتناهی که با حدگیری از $P_n(x)$ به ازای $n \to \infty$ ، به دست می آید سری تیلور f حول x_0 نامیده می شود . اغلب در حـالتی که $x_0=0$ باشد ، چندجمله ای تیلور ، چندجمله ای مک لورن نامیده می شود .

قضیه تیلور با باقیمانده انتگرال : اگر $f \in c^{n+1}[a,b]$ ، آنگاه برای هرنقطه x و c در [a,b] داریم :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ f^{(k)}(c)(x-c)^k + R_n(x)$$

که در آن $$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$$

قضیه تیلور دو متغیره : فرض کنید f(x,y) و همه مشتقات جزیی آن تا مرتبه (n+1) ام در سراسر یک ناحیه مستطیلی D حول نقطه (a,b) پیوشته باشند ، دراین صورت در سراسر ناحیه D داریم :

$$\begin{aligned} f(x,y) = &\ f(a,b) + [(x-a)\ f_x + (y-b)\ f_y]_{(a,b)} + \frac{1}{2!}[(x-a)^2\ f_{xx} + 2(x-a)(y-b)\ f_{xy} + (y-b)^2\ f_{yy}]_{(a,b)} \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^n .\ f(a,b) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^{n+1} \\ &.\ f(a+q(x-a), b+q(y-b)) \quad ; \quad 0 \le q \le 1 \end{aligned}$$

2-1 همگرایی

دنباله های همگرا : قبل از تعاریف کلی ابتدا فرض می کنیم که درصد یافتن ریشه یک معادله بغرنج یا مقدار عددی یک انتگرال معین پیچیده هستیم .درچنین حالتی یک برنامه کامپیوتری ممکن است یک دنباله از اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots$ را ایجاد کند که به جواب درست نزدیک شود . بنابراین می نویسیم $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$ اگر برای هر e مثبت یک عدد حقیقی r یافت شود به طوری که $|x_n - L| < e$ هرگاه که n>r (n یک عدد صحیح است).

مثال 1-1 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

زیرا $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < e$

هرگاه $n > e^{-1}$

مثال 2-1 : بعنوان مثال معادله $e = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ را در نظر بگیرید که بوسیله آن عدد غیر گـــویای e تعریف می شود. اگر دنباله $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ را محاسبه کنیم، برخی از جملات عبارتند از :

$$x_1 = 2.000000$$
$$x_{10} = 2.593742$$
$$x_{30} = 2.674319$$
$$x_{50} = 2.691588$$
$$x_{1000} = 2.716924$$

مثال فوق دنباله ایست که به کندی همگراست . زیرا حد آن عبارتست از :

$$e = 2.7182818...$$

و در هزارمین جمله هنوز خطا حدود 0.001358 است .بنابراین : $\frac{|x_{n+1} - e|}{|e_n - e|} \to 1$

مثال 1-3 : مثال دیگری از دنباله ای که کمی سریعتر به صفر همگرا می شود عبارتست از :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^2{}_n}{x_n^2 + x_{n-1}^2}$$

با انتخاب دو مقدار اولیه x_0=20.00 و x_1=15.00 داریم :

$x_2 = 14.64$ $\quad x_3 = 14.15$ $\quad x_{33} = 0.54$ $\quad x_{34} = 0.27$

درحالی که این مثال از مثال قبلی سریعتر همگرا می شود اما هنوز هم همگرایی کند است .

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to 0$$

مثال 1-4 : مثال بعدی دنباله ای است که سریعاً همگرا می شود .دنباله زیر را درنظر می گیریم :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

جملات این دنباله عبارتند از :

$$x_1 = 2.000000 \qquad x_3 = 1.416667$$

$$x_2 = 1.500000 \qquad x_4 = 1.414216$$

حد عبارتست از $\sqrt{2} = 1.414213562...$ و دنباله با سرعت زیادی به حد خود همگراست .

$$\frac{\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right|}{\left|x_n - \sqrt{2}\right|^2} \leq 0.36$$

چنین وضعیتی متناظر ، همگرایی مرتبه 2 است ومثال دوم همگرایی فوق خطی می باشد و مثال اول دارای خاصیت بدتر از همگرایی خطی است .

مرتبه های همگرایی :

تعریف 1-1 : فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد که به حد $\bar{x}$ میل کند . گوئیم نرخ همگرایی حداقل **خطی** است اگر عدد ثابت $c<1$ و عدد صحیح N وجود داشته باشد به طوری که :

$$\left|x_{n+1} - \bar{x}\right| \leq c\left|x_n - \bar{x}\right| \quad , \quad (n \geq N)$$

تعریف : می گوئیم که نرخ همگرایی حداقل **فوق خطی** است اگر یک دنباله l_n همگرا به صفر و یک عدد صحیح N وجود داشته باشند به طوری که :

$$\left|x_{n+1} - \bar{x}\right| \leq l_n\left|x_n - \bar{x}\right| \quad , \quad (n \geq N)$$

تعریف 1-3 : می گوییم نرخ یا سرعت همگرایی حداقل از **مرتبه** 2 است اگر یک ثابت c (نه لزوماً کمتر از یک) و یک عدد صحیح N وجود داشته باشند به طوری که :

$$\left|x_{n+1}-\bar{x}\right| \le c\left|x_n-\bar{x}\right|^2 \ , \quad (n \ge N)$$

حال بطورکلی می توان مرتبه همگرایی را بصورت زیر تعریف نمود

تعریف1-4 : می گوئیم سرعت یا نرخ همگرایی حداقل از مرتبه p است اگر اعداد مثبت و ثابت p,c وعدد صحیح N وجود داشته باشد بطوریکه

$$\left|x_{n+1}-\bar{x}\right| \le c\left|x_n-\bar{x}\right|^p \ , \quad (n \ge N)$$

3-1 مقایسه دو دنباله : فرض کنید $\{x_n\},\{a_n\}$ دو دنباله مختلف باشند می نویسیم :

$$x_n = O(a_n)$$

اگر اعداد ثابت c و n_0 وجود داشته باشند بطوریکه $|x_n| \le c|a_n|$ وقتی که $n \ge n_0$ دراین حالت گوئیم x_n «ای بزرگ» a_n است .

بعنوان مثال فرض کنید f(n) و g(n) توابعی نامنفی از n باشند می نویسیم : $f(n) = O(g(n))$

اگر اعداد ثابت مثبت c و n_0 وجود داشته باشند به طوری که به ازای همه مقادیر $n \ge n_0$ داشته باشیم $0 \le f(n) \le cg(n)$. نماد O بزرگ یک اکران بالا برای تابع f(n) با یک عامل ثابت را ارائه میدهد .یعنی برای تمام مقادیر n بزرگتر از مقدار اولیه مانند n_0 ، مقدار تابع f(n) بر روی C g(n) ویا کمتر از آن خواهد بود .

شکل زیر را ملاحظه کنید .

اگر برای همه مقادیر n داشته باشیم $g(n) \neq 0$ این بدین معناست که نسبت $\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right|$ توسط c محدود باقی می ماند

، هنگامی که $n \to \infty$.

معادله $x_n = o(a_n)$

به این معناست که $\lim_{n \to \infty}(\frac{x_n}{a_n}) = 0$ در اینجا می گوئیم که x_n «ای کوچک» a_n است .بعنوان مثال فرض کنید f(n)

و g(n) توابعی نامنفی از n باشند می نویسیم : $f(n) = O(g(n))$

اگر به ازای هر $e > 0$ یک n_0 وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq n_0$ ، $0 \leq f(x) \leq eg(n)$ در نماد o

کوچک داریم : $\lim_{n \to \infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$ به طور شهودی تابع f(n) وقتیکه n به بی نهایت میل می کند ، نسبت به g(n)

ناچیز است . شکل زیر را ملاحظه کنید .

دو نماد فوق مارا برای مقایسه دو دنباله توان مند می سازد .اغلب از آنها می توان برای هنگامی که هر دودنباله به

صفر همگرا می باشند ، استفاده کرد .اگر $x_n \to 0$ و $x_a \to 0$ و $x_n = O(a_n)$ آنگاه x_n حداقل ، به سرعت a_n به

صفر همگراست .

اگر $x_n = o(a_n)$ آنگاه x_n سریع تر از a_n به صفر همگراست .

برای مثال : داریم $$\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = O(\frac{1}{n})$$

این مثال دارای همگرایی خیلی کند است . اما از طرف دیگر مثال زیر دارای همگرایی خیلی تند است .

$$e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k = 0(\frac{1}{n!}) \qquad , \qquad (|x| \leq 1)$$

فصل دوم

1-2 حساب کامپیوتری

گرچه علم ریاضی مدام درحال گسترش و توسعه روزافزون میباشد ، معهذا مسائل زیادی در عرصه مختلف علوم وجود دارند که به کمک آنالیز ریاضی وراه حلهای متعارف قابل حل نیستند .بعنوان مثال حل دستگاههای خطی وغیرخطی که تعداد مجهولات بسیار زیاد باشند و عملاً در زندگی روزمره با آن سروکار داریم و بایستی حل نمائیم . عملاً به کمک نیروی انسانی صرف غیرقابل حل هستند وبدون استفاده از کامپیوتر مقدور نیست .معادلات فرازنده نیز از جمله مسائلی هستند که بایستی تقریب زده شوند .یا بعنوان مثال انتگرال گیری رادرنظر بگیریم . میدانیم که خیلی از انتگرالها هستند که فرمول های متعارف برای حل آنها وجود ندارند و تنها راه ، حل تقریبی آنها است . توسعه روز افزون علم کامپیوتر و دخالت مستقیم و بیش از حد آن در زندگی روزمره ودر همه شاخه های علوم و فنون ، کاربرد روشهای عددی را در حل مسائل را امکان پذیر ساخته است .چرا که بدون دخالت کامپیوتر بعلت حجم زیاد عملیات وزمان حل آن عملاً انسان بدون کامپیوتر قادر نیست و عمرش برای حل پاره ای مسائل کافی نمی باشد .درصورتیکه با وجود کامپیوتر این کار عملی است .

در روند محاسبات ما با کامپیوتر سر وکار داریم و میدانیم که کامپیوتر تنها چهار عمل اصلی جمع ، تفریق ،ضرب و تقسیم را انجام میدهد .و در این روند محاسباتی ، با اعداد حقیقی سروکار داریم .لذا بررسی اجمالی سیستم ها نمایش اعداد لازم و ضروریست و قبل از اینکه به سیستم های نمایش عدد دوتایی ، 8تایی ،16 تایی و غیره بپردازیم لازم است ابتدا در مورد سیستم دهدهی که ما به آن عادت داریم اشاره ای بکنیم . دستگاه یا سیستم اعداد دهدهی دارای مبنای 10 است وهر عدد را بعنوان مثال $(3678)_{10}$ را می توان بصورت زیر نشان داد .

$$(3678)_{10} = 3\times10^3 + 6\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$$

یعنی چند جمله ای از توانهای 10

یا $(0.6251)_{10}$ را به صورت چندجمله ای از 10^{-1} می توان نوشت :

$$(0.6251)_{10} = 6\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3} + 1\times10^{-4}$$

$$(4987.6251)_{10} = 4\times10^{3} + 9\times10^{2} + 8\times10^{1} + 7\times10^{0} + 6\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3} + 1\times10^{-4}$$

بنابراین عدد بصورت کلی تر در سیستم دهدهی $(N)_{10} = (d_n d_{n-1} d_{n-2} ... d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} d_{-3} ... d_{-m})$

رابصورت زیر بیان می کنیم .

$$(N)_{10} = d_n \times10^{n} + d_{n-1}\times10^{n-1} + ... + d_1\times10^{1} + d_0\times10^{0} + d_{-1}\times10^{-1} + ... + d_{-m}\times10^{-m}$$

همه d ها رقمهایی بین 0 تا، 9 هستند .

2-2 **مبنای دودویی** : یک مبنای بسیار مفید برای کار با کامپیوتر ، مبنای دودویی یا سیستم اعداد پایه 2 می باشد . تنها علامت اساسی این مبنا عبارتند از 1,0 . که بیت (Bit) نامیده میشوند. یکی از مزایای اصلی طرز نمایش دودویی آنست که به سهولت توسط بسیاری از دستگاههای فیزیکی که می توانند در دو حالت متفاوت از هم قرار گیرند نشان داده می شوند .بعنوان مثال روی یک نوار کاغذی و یا کارت ، 1 را می توان بوسیله یک سوراخ و 0 را با نبودن سوراخ مشخص کرد .روی نوار مغناطیسی یا سایر مواد مغناطیس شونده ، 1 را با نقطه مغناطیس شده و 0 را با نقطه مغناطیس نشده و یا مغناطیس شده با قطب مخالف ، مشخص کرد .دریک مدار الکتریکی 1 را می توان با یک پالس ولتاژ و 0 را با نبودن پالس یا پالس با علامت منفی مشخص نمود . مزیت دیگر طرز نمایش دودویی آنست که بعلت وجود تنها دو علامت قوانین بسیار کمی برای درنظرگرفتن همه ترکیبات ممکن در جمع وضرب وجود دارد .مثلاً جدول ضرب اساسی تنها مرکب از $0\times0=0$ ، $1\times0=0\times1=0$ ، $1\times1=1$ است .

یک عیب اساسی مبنای دودویی آنست که برای نشان دادن عددهایی با مقادیر نسبتاً متوسط ، تعداد بیتهای زیادی لازم می شود . بنابراین برای نمایش یک عدد دهدهی چهاررقمی ممکن است سیزده رقم مبنای دودویی لازم شود .درحالت کلی چون $\log_{10} 2 = 0.30103$ یا $2^{N} = 10^{0.30103N}$ به طوری که عدد دودویی N بیتی تقریباً مساوی عدد دهدهی 0.3N رقمی است . عدد N در این دستگاه را می توان بصورت زیر نوشت :

$$(N)_2 = (b_n b_{n-1} ... b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} ... b_{-m})_2$$

که درآن b_m تا b_n بیتهای دوتایی هستند صفر یا یک هستند . عدد متناظر با این عدد در دستگاه اعداد دهدهی بصورت زیر محاسبه می شود .

$$(N)_{10} = b_n \times 2^n + b_{n-1} \times 2^{n-1} + ... b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0 + b_{-1} \times 2^{-1} + ... + b_{-m} \times 2^{-m}$$

3-2 تبدیل اعداد در سیستم دوتایی به سیستم دهدهی

مثال 2-1 : عدد ذیل را از دستگاه دوتایی به دهدهی بصورت زیر تبدیل می نمائیم

$$(10111)_2 = 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$= 16 + 4 + 2 + 1 = (23)_{10} = ((((1\times 2 + 0)2 + 1)2 + 1)2 + 1)$$

الگوریتم مناسب برای تبدیل عدد N در سیستم دوتایی : $(N)_2 = b_m b_{m-1} ... b_1 b_0$

عبارتست از $a_m = b_m$

$$a_r = 2a_{r+1} + b_r \quad , \quad r = m-1, ..., 1, 0$$

سرانجام a_0 همان عدد متناظر در سیستم اعداد دهی است .

اگر مثال فوق را با این الگوریتم حل کنیم داریم

$$a_4 = 1$$
$$a_3 = 2\times 1 + 0 = 2$$
$$a_2 = 2\times 2 + 1 = 5$$
$$a_1 = 2\times 5 + 1 = 11$$
$$a_0 = 11\times 2 + 1 = 23$$

4-2 تبدیل اعداد در سیستم دهدهی به دودویی

روش مستقیم تبدیل عبارتست از کاهش بزرگترین توان صحیح ممکن 2 از عدد دهدهی وثبت آن در ستون مناسب و ادامه روند تا حصول باقیمانده صفر بعنوان مثال :

$$(28)_{10} = 2^4 + 2^3 + 2^2 = 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 = (11100)_2$$

اما روش دیگر تقسیم متوالی به 2 و ثبت باقیمانده ها بصورت b_1, b_0 ... والی آخر است بعنوان مثال :

$N_0=58$ N_k b_k

2	58
2	29
2	14
2	7
2	3
2	1
	0

b_0	0
b_1	1
b_2	0
b_3	1
b_4	1
b_5	1

$$\Rightarrow (58)_{10} = (111010)_2$$

فرض کنید در حالت کلی N یک عدد در دستگاه دهدهی باشد و برای تبدیل آن به سیستم دودویی که دارای بیتهای $b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0$ باشد بنابراین می توان نوشت :

$$(N)_{10} = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + ... + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 \qquad (2.1)$$

در رابطه (2.1) آخرین رقم دودویی یعنی b_0 صفر است اگر و فقط اگر N زوج باشد .همچنین b_1 نیز صفر است اگر و فقط اگر $\frac{N-b_0}{2}$ نیز زوج باشد والخ ، بنابراین داریم :

$$N_0 = N$$
$$N_{k+1} = \frac{N_k - b_k}{2} \quad , \quad k = 0,1,2,...$$
$$N_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر } N_k \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } N_k \text{ زوج باشد} \end{cases}$$ اگر

$$N_0 = 58$$
$$N_1 = \frac{N_0 - b_0}{2} = \frac{58-0}{2} = 29 \qquad \rightarrow b_0 = 0$$
$$N_2 = \frac{N_1 - b_1}{2} = \frac{29-1}{2} = 14 \qquad \rightarrow b_1 = 1$$
$$N_3 = \frac{N_2 - b_2}{2} = \frac{14-0}{2} = 7 \qquad \rightarrow b_2 = 0$$
$$N_4 = \frac{N_3 - b_3}{2} = \frac{7-1}{2} = 3 \qquad \rightarrow b_3 = 1$$
$$N_5 = \frac{N_4 - b_4}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad \rightarrow b_4 = 1$$
$$N_6 = \frac{N_5 - b_5}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \qquad \rightarrow b_5 = 1$$

5-2 تبدیل اعداد اعشاری دهدهی به اعداد در سیستم دودویی دارای ممیز

فرض می کنیم N عدد اعشاری باشد و $b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-m}$ عدد دودویی متناظر با آن باشد . بنابراین :

$$b_{-1} \times 2^{-1} + b_{-2} \times 2^{-2} + b_{-3} 2^{-3} + \ldots + b_{-m} 2^{-m} = N \;,\; (0 < N < 1) \qquad (2.2)$$

در رابطه (2.2) b ها فقط صفر یا یک هستند . به آسانی میتوان دریافت که b_{-1} برابر یک است اگر و فقط اگر $2N \geq 1$ باشد و اگر $2N < 1$ باشد برابر صفر است .والی آخر سرانجام داریم :

$$N_1 = N$$
$$b_{-k} = \begin{cases} 1 & if \quad 2N_k \geq 1 \\ 0 & if \quad 2N_k < 1 \end{cases}$$
$$N_{K+1} = 2N_k - b_{-k} \qquad , k = 1,2,\ldots$$
$$N_{k+1} = 0$$

مثال 2-2 : عدد اعشاری $(0.859375)_{10}$ را به مبنای دودویی تبدیل کنید :

K	b_k	N_{k+1}
0	0	0.859375×2
1	1	1.718750×2

2	1	1.437500×2
3	0	0.875000×2
4	1	1.750000×2
5	1	1.500000×2
6	1	1.00000

$$(0.859375)_{10}=(0.110111)_2$$

مثال2 -3 : عدد اعشاری $(0.7)_{10}$ را بر مبنای دودویی تبدیل کنید :

K	b_k	N_{k+1}
0		0.7×2
1	1	0.4×2
2	0	0.8×2
3	1	0.6×2
4	1	0.2×2
5	0	0.4×2
6	0	0.8×2
7	1	0.6×2
8	1	0.2×2
9	0	0.4

$(0.7)_{10}=(0.101100110\ldots)_2$

اگر بعنوان مثال با ماشین حسابی کارکنیم که هفت رقم اعشار را می تواند در حافظه جای دهد آنگاه داریم:

$(0.7)_{10} \approx (0.1011001)_2 = 0.6953125$

خطای راند گردن عبارتست از : $(0.7 - 0.6953125) = 0.0046875$

6-2 مبنای هشت تایی و 16 تایی

رقم های مورد استفاده در مبنای هشت (octal) عبارتند از 0,1,2,3,4,5,6,7 و در مبنای 16 یا (hexadecimal) عبارتند از: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

دستگاه دهدهی به همان طریق که به دوتایی تبدیل کردیم به سیستم 8 تایی و 16 تایی تبدیل می کنیم .تبدیل مبنای دودویی به 8 و 16 تایی خیلی آسان است . زیرا مبنای $16 = 2^4, 8 = 2^3$.ما می توانیم اعداد در مبنای دودویی را به سیستم 8 تایی تبدیل کنیم برای این کار لازم است اعداد در مبنای دودویی را به گروههای سه تایی در سمت راست و چپ ممیز تقسیم نمائیم و با اضافه نمودن صفرهای اضافی تا کامل کردن گروه سه تایی وجاگذاری هردسته سه تایی با اعداد متناظر در سیستم 8 تایی عمل می کنیم .

هم چنین برای تبدیل اعداد بر مبنای دودویی به 16 تایی مثل روش فوق از سمت راست ممیز دسته های 4 تایی از سمت چپ هم چنین دسته های چهارتایی تقسیم وهر دسته را با اعداد متناظر در سیستم 16 تایی قرار می دهیم .

مثال 2-4 : عدد زیر که برمبنای دودویی است را به 8 تایی و 16 تایی تبدیل کنید .

$(110101.11101)_2 = (110,101.111,010)_2$

$$\begin{aligned}
&= (1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3) + (1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0) \\
&+ (1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}) + (0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5} + 0\times 2^{-6}) \\
&= (1\times 4 + 1\times 2 + 0)2^3 + (1\times 4 + 0 + 1)2^0 + (4 + 2 + 1)2^{-3} \\
&+ (0 + 2 + 0)2^{-6} = 6\times 8^1 + 5\times 8^0 + 7\times 8^{-1} + 2\times 8^{-2} = (65.72)_8
\end{aligned}$$

$(110101.11101) = (0011,0101.1110,1000)_2$

$$
\begin{aligned}
&=(0\times 2^7+0\times 2^6+1\times 2^5+1\times 2^4)+(0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0)\\
&+(1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}+0\times 2^{-4})+(1\times 2^{-5}+0\times 2^{-6}+0\times 2^{-7}+0\times 2^{-8})\\
&=(0+0+2+1)2^4+(0+4+0+1)2^0+(8+4+2+0)2^{-4}+\\
&(8+0+0+0)2^{-8}=3\times 16^1+5\times 16^0+(D)16^{-1}+8\times 16^{-2}\\
&=(35.D8)_{16}
\end{aligned}
$$

7-2 نمایش اعداد در کامپیوتر

ما عادتاً با سیستم اعداد دهدهی سروکار داریم و کامپیوترهای دیجیتالی سیستم اعداد دهدهی را به سیستم اعدادی با مبنایی که قابل درک و پذیرش کامپیوتر است تبدیل و در حافظه نگه میدارند (فرض می کنیم مبنا b باشد) حافظه کامپیوتر دیجیتالی از سلولهای جداگانه ای که آنرا words می نامیم تشکیل شده است . هر word تعداد ارقام که بیت خوانده میشوند بهمراه علامت مثبت یا منفی درخود نگه می دارند تعداد ارقامی که دریک word کامپیوتر ذخیره می شوند را word length می نامند و در کامپیوترهای مختلف متفاوت هستند .اعداد به دو صورت در word کامپیوتر ذخیره می شوند .

1-ممیز ثابت (Fixed-point) **2-ممیز شناور (Floating-point)**

در نمایش ممیز ثابت تعداد ثابت n_1 محل اول برای اعداد صحیح و تعداد ثابت n_2 محل بعدی را برای قسمت اعشاری یا (binary) درنظر می گیرند بطوریکه اگر فرض کنیم که word length کامپیوتر t رقم باشد.

$$t=n_1+n_2$$

در این نمایش موقعیت ممیز ثابت است . تعداد محدودی ابزار آلات رقمی که اساساً شمارگرند از این نمایش اعداد استفاده می کنند .در اغلب کامپیوترها از نمایش اعداد در ممیز شناور استفاده می کنند که این نمایش به چهار پارامتر زیر استوار است :

1-مبنای b t-2 رقم word length و3-4 Range e (m,M) هر عدد ناصفر x عموماً بفرم زیر در کامپیوتر نمایش داده می شود :

$$x = s\,.(.d_1 d_2 \ldots d_t).b^{e} \qquad (2.3)$$

بطوریکه $s=\pm 1$ که برای نمایش علامت عدد است ، $0 \le d_i \le b-1 = g$

و عدد نمایی e که به نوع کامپیوتر وابسته است و دارای کمترین و بالاترین مقدار است $m \le e \le M$ و $(.d_1 d_2 \ldots d_t)$ را مانتیس می نامند و b را مبنا یا radix خوانده می شود .

رابطه (2.3) چنانچه همواره $d_1 \neq 0$ $(1 \le d_1 \le g)$ درنظر بگیریم شکل نرمال ممیز شناور نامیده می شود . $m \le e \le M$ را اندازه ممکن عدد x را مشخص می کند .

اما همه اعداد حقیقی x را نمی توان آنطور که واقعاً هستند بفرم ممیز شناور بیان کرد ،بنابراین بایستی به نزدیکترین عدد تقریب زده شوند ،پس فرض می کنیم fl(x) نمایش تقریبی ماشین محاسب باشد که به دو صورت ممکن chopping و rounding صورت می گیرد .

فرض می کنیم یک عدد حقیقی به فرم زیر داریم

$$x = s\,(.d_1 d_2 \ldots d_t d_{t+1} \ldots)\,b^{e} \qquad (2.4)$$

چنانچه فرض کنیم کامپیوتری دارای t رقم word length باشد با استفاده از عمل chopping داریم :

$$fl(x)_{chopping} = s\ (.d_1 d_2 \ldots d_t)\,b^{e} \qquad (2.5)$$

اما نمایش تقریبی آن بفرم rounding بصورت زیر است :

$$fl_{rounding}(x) = \begin{cases} s\,(.d_1 d_2 \ldots d_t)\,b^{e} & if\ \ 0 \le d_{t+1} < b/2 \quad (2.6) \\ s\left[(.d_1 d_2 \ldots d_t)_b + (0.00..01)_b\right] b^{e} & if\ \ b/2 \le d_{t+1} < b \quad (2.7) \end{cases}$$

کوچکترین وبزرگترین عدد قابل نمایش در کامپیوتر

کوچکترین عدد قابل نمایش برای کامپیوتر در مبنای b با ممیز شناور تا t رقم word length را با x_L نمایش میدهیم و عبارتست از :

$$x_L = \pm(0.100...0)b^{m} = b^{m-1} \qquad (2.8)$$

اعداد کوچکتر از عدد فوق موجب پاریز (under flow) و با صفر تقریب زده می شوند .

بزرگترین عدد قابل نمایش در کامپیوتر را با x_U نمایش می دهیم و عبارتست از :

$$x_U = \pm(0.gg..g)b^{M} \cong b^{M} \quad , \quad g = b-1 \qquad (2.9)$$

اعداد بزرگتر از x_U از جهت قدرمطلق در کامپیوتر موجب سرریز (over flow) و باعث توقف ناگهانی ماشین می شود .

8-2 منابع خطا

منابع خطا را می توان به سه دسته تقسیم نمود :

1-خطای مدلسازی(یا خط ذاتی) Inherent Error

خطایی است که در بیان و تعبیر مسائل موجود هستند .چرا که فرمولبندی مسائل علمی شامل داده های فیزیکی (طول ،جرم ،زمان و غیره) میباشند وبطور قطع در این داده ها خطاهای مشاهداتی وآزمایشگاهی وجود دارد که غیرقابل اجتناب هستند . هم چنین براثر مفروضات ساده شده در فرمول بندی ریاضی مسئله می توانند حادث شوند .بدون شک عمل محاسباتی ازاین خطاها تأثیر می پذیرند اما روند محاسباتی توانایی حذف آنرا ندارند . اما می توان تأثیر وانتشار این نوع خطارا زیر نظر داشت .

2-خطای برشی تقریب : Truncation Error

خطای ناشی از تبدیل یک مساله غیرقابل حل به مسئله تقریبی قابل حل می باشد ، مانند گسسته سازی یک مسئله برای مثال با متناهی سازی یک بسط نامتناهی که سرچشمه آن فن جانشانی سری تیلور محدود شده به جای یک تابع می باشد .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

که $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, ... چند جمله ایهای قطع شده از بسط برای تقریب e^x به خصوص حول نقطه x=0 می باشند .

تعریف 2-1 مرتبه خطای برشی :

گوئیم f(h) به وسیله $\bar{f}(h)$ باخطای برشی از مرتبه n تقریب زده می شود اگر برای مقادیر کوچک h>0 ثابت M>0 موجود باشد بطوری که $\left| f(h) - \bar{f}(h) \right| \le Mh^n$ وبا $O(h^n)$ نشان داده می شود یعنی :

$$f(h) = \bar{f}(h) + O(h^n) \qquad (2.10)$$

ملاحـــظه می کنید که چون h خیلی کوچک است هرقدر n بزرگتر باشد جمله خطا سریعتر به صفر میل می کند .

3-خطای روند کردن اعداد Round-off Error

اغلب محاسبات با استفاده از ماشین صورت می گیرند و چون دارای حافظه محدود هستند . اعداد به اجبار به صورت تقریبی درحافظه ذخیره می شوند ، یعنی خطای روند کردن غیرقابل اجتناب است .همچنین همه اعداد حقیقی مانند $p, e, \sqrt{2}, 1/3$ وغیره بصورت اعشاری و متناهی قابل نمایش نیستند پس اغلب اعداد x با عدد تقریبی $\bar{x}$ درنظر گرفته می شوند که این امر باعث ایجاد خطا می شوند .

9-2 تحلیل خطا

در استفاده از روشهای عددی آگاه بودن از این که اعداد همراه با خطای روند کردن می باشند اهمیت زیادی دارد ، چونکه دریک روش عددی به کمک ماشین محاسب هزاران ویا میلیونها عمل محاسباتی روی این اعداد تقریبی صورت می گیرد .پس امکان دارد دقت نتایج حاصله به اندازه ای کم شود که بطورکامل بی معنی شود .بنابراین جلوگیری از انباشتگی خطا یکی از مهارتهایی است که بایستی همیشه مدنظر قرار دهیم .

تعریف 2-2 خطای مطلق و نسبی

فرض کنید $\bar{x}$ یک تقریب برای x باشد خطای مطلق (e_x) وخطای نسبی (r_x) بصورت زیر تعریف می شوند

$$e_x = |x - \bar{x}| \quad , \quad r_x = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \qquad (2.11)$$

خطای مطلق بطور ساده اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تقریبی می باشد .ولی خطای نسبی سنجش بهتری برای خطا می باشد .اگر مقدار قدر مطلق e_x نسبت به قدر مطلق x کوچک باشد دراینصورت حد نسبت e_x/x نزدیک به حد نسبت $e_x / \bar{x}$ می باشد که در عمل بدلیل نامعلوم بودن x بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد .

کران خطاهای مطلق و نسبی

عملاً خطاهای (2.11) را نمی توان بطور دقیق مشخص کرد چون اغلب مقدار واقعی x در دسترس نمی باشد از آنجا که همواره بایستی بدانیم جواب تقریبی $\bar{x}$ با چه دقتی مقدار واقعی x را نشان می دهد .برای این منظور مایل هستیم **حداقل اندازه حداکثر خطای ممکن** را بدانیم. بطوریکه از این به بعد از کرانهای خطا به جای خطاها صحبت می کنیم .بنابراین اگر عدد x را با ممیز شناور نمایش دهیم ، خطای نسبی نمایش با استفاده از روشهای Chopping و Rounding بصورت زیر است :

$$\frac{|x - fl(x)_{chop}|}{|x|} = \frac{|(.d_1 d_2 \ldots d_t d_{t+1} \ldots) b^{e} - (.d_1 d_2 \ldots d_t) b^{e}|}{|(.d_1 d_2 \ldots d_t \ldots) b^{e}|}$$

$$= \frac{|(.d_{t+1} d_{t+2} \ldots) b^{e-t}|}{|(.d_1 d_2 \ldots) b^{e}|} = \left|\frac{.d_{t+1} d_{t+2} \ldots}{.d_1 d_2 \ldots}\right| b^{-t} \le \left|\frac{.ggg \ldots}{.10000}\right| b^{-t}$$

از آنجایی که $d_1 \neq 0$ حداقل مقدار مخرج کسر 0/1 است ودر مبنای b برابر b^{-1} می باشد . صورت کسر فوق نیز حداکثر مقدار ممکن آن یک است در نتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{|x - fl(x)_{chop}|}{|x|} \le \frac{1}{b^{-1}} \times b^{-t} = b^{1-t} \qquad (2.12)$$

به روش مشابه کرانی برای خطای نسبی وقتی که از روش Rounding در ممیز شناور استفاده نمائیم بدست آوریم :

$$\frac{|x - fl(x)_{round}|}{|x|} \le \frac{1}{2} b^{1-t} \qquad (2.13)$$

تعریف 2-3 : می گوئیم $x, \bar{x}$ را تا t رقم بامعنی درست در مبنای b تقریب می زند ، اگر t بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد که به ازای آن داریم : $\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \le \frac{1}{2} b^{1-t}$

مثال 2-5 : خطای مطلق و نسبی را در حالتهای زیر بیابیم و تعداد ارقام بامعنی درست در تقریبها را مشخص کنید

$\bar{y} = 0.000009, y = 0.000012 (b), \bar{x} = 3.14, x = 3.141592 (a).$

حل (a) : باتوجه به تعریف خطای مطلق و نسبی (9) داریم :

$$e_x = |x - \bar{x}| = 3.141592 - 3.140000 = 0.001592$$

$$r_x = \frac{|e_x|}{|x|} = 0.001592 / 3.141592 = 0.000507 \approx \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

بنابراین $\bar{x}$ عدد x را تا سه رقم بامعنی تقریب می زند .

حل (b) : نظیر فوق داریم : $|e_y| = |y - \bar{y}| = 0.000012 - 0.000009 = 0.000003$

$\bar{y}$ عدد y را بدون رقم بامعنی درست تقریب می زند $\qquad |r_y| = \frac{|ey|}{|y|} = \frac{0.000003}{0.000012} = 0.25 \Rightarrow |r_y| \le 10^{-0}/2$

با مقایسه e_y, e_x نتیجه می گیریم که خطای مطلق در تقریب y کمتر از x است اما با مقایسه r_y, r_x نتیجه می گیریم که خطای نسبی در y بسیار بزرگتر از x است .

10-2 انباشتگی و انتشار خطا

تا اینجا دریافتیم که اغلب اعدادی که در ماشین ذخیره می شوند همراه با خطا هستند .اکنون به بررسی انتشار خطا در محاسبات متوالی و در روشهای عددی می پردازیم . چونکه هر روش عددی ترکیبی از اعمال حسابی جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم می باشد بنابراین ابتدا انباشتگی خطا در چهار عمل اصلی حسابی را که متأثر از خطای روند می باشند بررسی کنیم . سپس تأثیراتی را که این خطاها بر روی محاسبه توابع دارند ، ارائه می دهیم .

فرض کنید $\bar{y}, \bar{x}$ تقریب اعداد y,x باشند و $w \in [+,-,\div,\times]$ یک عمل حسابی بین آنها باشد . می خواهیم کران خطای زیر را تعیین کنیم .

$$E = (xwy) - (\bar{x}w\bar{y}) \qquad (2.14)$$

زمانی که ماشین عمل W را انجام میدهد دقیق نمی باشد بلکه باخطای روند همراه است پس عمل ماشین متناظر را با W نمایش میدهیم و با اضافه وکم کردن $\bar{x}w\bar{y}$ به رابطه (2.14) داریم .

$$E = [(xwy) - (\bar{x}w\bar{y})] + [(\bar{x}w\bar{y}) - (\bar{x}w\bar{y})] \qquad (2.15)$$

ملاحظه می کنید درماشین دو نوع خطا برای هرعمل حسابی W ایجاد می شود ، خطای روند کردن که کران آن باتوجه به قطع کردن (Chopping) ، گرد کردن (Rounding) توسط روابط (2.12) و (2.13) قابل تعیین است و خطای انباشتگی که کران آن را برای چهار عمل اصلی بررسی می کنیم .

11-2 انباشتگی خطا در محاسبات

فرض می کنیم دو عدد مثبت $\bar{y}, \bar{x}$ تقریبی برای دو عدد y,x باشند وبه ترتیب خطای مطلق آنها e_y, e_x باشد حال به انباشتگی خطا در محاسبات در ذیل می پردازیم :

12-2 انباشتگی خطا در عمل جمع : بزرگترین مقدار ممکن یا تقریب بالا برای x وy عبارتست از $\bar{x}+e_x$ و $\bar{y}+e_y$ کوچکترین مقدار ممکن یا تقریب پائین برای x وy برابر است با $\bar{x}-e_x$ و $\bar{y}-e_y$ حال بیشتر مقدار ممکن حاصل جمع y,x برابر است با :

$$\bar{x}+e_x+\bar{y}+e_y=\bar{x}+\bar{y}+(e_x+e_y) \qquad (2.16)$$

کمترین مقدار حاصل جمع y,x برابراست با :

$$\bar{x}-e_x+\bar{y}-e_y=\bar{x}+\bar{y}-(e_x+e_y) \qquad (2.17)$$

از روابط (2.16) و (2.17) نتیجه میگیریم که خطای مطلق حاصل جمع دو عدد y,x برابر است با

خطای مطلق حاصل جمع $=e_x+e_y$

اما طبق تعریف داریم خطای نسبی در $\bar{y},\bar{x}$ وجمع دو عدد برابر است با :

$$r_{\bar{x}}=\frac{e_{\bar{x}}}{\bar{x}} \qquad r_{\bar{y}}=\frac{e_{\bar{y}}}{\bar{y}} \qquad , \qquad r_{\bar{x}+\bar{y}}=\frac{e_x+e_y}{\bar{x}+\bar{y}}$$

$$r_{\bar{x}+\bar{y}}=\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}\left(\frac{e_x}{\bar{x}}\right)+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}\left(\frac{e_y}{y}\right)=\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{x}}+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{y}}$$

با فرض $q=\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}$ داریم $\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}=1-q$ لذا داریم :

$$r_{\bar{x}+\bar{y}}=qr_{\bar{x}}+(1-q)r_{\bar{y}},0\le q\le 1$$

اگر $\bar{x}$ نسبت به $\bar{y}$ بسیار بزرگتر باشد نتیجه می گیریم که $q\to 1$ وآنگاه نتیجه می گیریم که $r_{\bar{x}+\bar{y}}\to r_{\bar{x}}$ اما اگر $\bar{x}$ نسبت به $\bar{y}$ بسیار کوچکتر باشد یعنی $q\to 0$ آنگاه نتیجه می گیریم که $r_{\bar{x}+\bar{y}}\to r_{\bar{y}}$ نتیجه می گیریم که خطای نسبی عمل جمع می تواند مقدار متوسط از خطای تک تک عاملهای جمع باشد .

13-2 انباشتگی خطا در عمل تفریق : با تئجه به فرضیات قبل وبا فرض اینکه $\bar{x}>\bar{y}$ باشد داریم :

حداکثر مقدار ممکن تفریق $\quad \bar{x}+e_x-(\bar{y}-e_y)=\bar{x}-\bar{y}+(e_x+e_y)$

حداقل مقدار ممکن تفریق $\quad \bar{x}-e_x-(\bar{y}+e_y)=\bar{x}-\bar{y}-(e_x+e_y)$

از روابط فوق نتیجه می گیریم که خطای مطلق حاصل از تفریق عبارتست از (e_x+e_y) اما خطای نسبی

تفریق دو عدد عبارتست از :

$$r_{\bar{x}-\bar{y}}=\frac{e_x+e_y}{\bar{x}-\bar{y}}=$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}}\left(\frac{e_x}{\bar{x}}\right)+\frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}\left(\frac{e_y}{\bar{y}}\right)=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}\left[\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{x}}+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{y}}\right]$$

این رابطه همان رابطه عمل جمع است که دارای مضرب $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}$ می باشد این مضرب بزرگتر از یک است و نشان می دهد که خطای نسبی در عمل تفریق نسبت به جمع با مضربی بزرگتر از یک تمایل به انباشتگی دارد ومضافاً اینکه اگر $\bar{y},\bar{x}$ دو عدد بسیار نزدیک به هم باشد مضرب رابطه فوق بیکران می شود واین خطر در عمل تفریق احتمال دارد . لذا نتیجه می گیریم که دو عدد نزدیک به هم را در محاسبات نبایستی از هم کم کنیم .

14-2 انباشتگی خطا در عمل ضرب

حداکثر مقدار ممکن حاصلضرب $\qquad (\bar{x}+e_x)(\bar{y}+e_y)=\bar{x}\bar{y}+(\bar{x}e_y+\bar{y}e_x)+e_xe_y$

حداقل مقدار ممکن حاصلضرب $\qquad (\bar{x}-e_x)(\bar{y}-e_y)=\bar{x}\bar{y}-(\bar{x}e_y+\bar{y}e_x)+e_xe_y$

با اغماض جمله e_xe_y از دو رابطه فوق نتیجه می گیریم که خطای مطلق درحاصلضرب عبارتست از :

$$(\bar{x}e_y+\bar{y}e_x)$$

خطای نسبی درعمل حاصلضرب برابر است با :

$$r_{\bar{x}\,\bar{y}}=\frac{\bar{x}e_y+\bar{y}e_x}{\bar{x}\,\bar{y}}=\frac{e_y}{\bar{y}}+\frac{e_x}{\bar{x}}=r_{\bar{y}}+r_{\bar{x}}$$

15-2 انباشتگی خطا در عمل تقسیم نسبت $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

حداکثر مقدار ممکن $\qquad (2.18) \qquad \frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}-e_y}$

حداقل مقدار ممکن $\qquad (2.19) \qquad \dfrac{\bar{x}-e_x}{\bar{y}+e_y}$

رابطه (2.18) را درنظر می گیریم :

$$\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}-e_y}\times\frac{\bar{y}+e_y}{\bar{y}+e_y}=\frac{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{x}e_y+\bar{y}e_x+e_xe_y}{\bar{y}^2-(e_y)^2}=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})$$

$$\frac{\bar{x}-e_x}{\bar{y}+e_y}\times\frac{\bar{y}-e_y}{\bar{y}-e_y}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}e_y-\bar{y}e_x+e_xe_y}{\bar{y}^2-(e_y)^2}=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}+\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})$$

رابطه (2.19). رادرنظر می گیریم از روابط فوق نتیجه می گیریم که خطای مطلق درعمل تقسیم برابراست با :

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})$$

وخطای نسبی در عمل تقسیم برابر است با : $\qquad r_{\bar{x}/\bar{y}}=\dfrac{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})}{\bar{x}/\bar{y}}=r_{\bar{x}}+r_{\bar{y}}$

می توان کران بالای انباشتگی خطای نسبی در چهار عمل فوق را بصورت زیر خلاصه کرد :

$$\left|r_{\bar{x}+\bar{y}}\right|\le\frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\left|r_{\bar{x}}\right|+\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\left|r_{\bar{y}}\right|+0.5\times10^{-t} \qquad (2.20)$$

$$\left|r_{\bar{x}-\bar{y}}\right|\le\frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\left|r_{\bar{x}}\right|+\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\left|r_{\bar{y}}\right|+0.5\times10^{-t} \qquad (2.21)$$

$$\left|r_{\overline{xy}}\right|\le\left|r_{\bar{x}}\right|+\left|r_{\bar{y}}\right|+0.5\times10^{-t} \qquad (2.22)$$

$$\left|r_{\bar{x}\div\bar{y}}\right|\le\left|r_{\bar{x}}\right|+\left|r_{\bar{y}}\right|+0.5\times10^{-t} \qquad (2.23)$$

t دقت ماشین حساب و مبنا سیستم دهدهی فرض شده است .

16-2 جلوگیری از رشد خطا

باتوجه به انباشتگی خطا در چهارعمل اصلی که در بالا بررسی کردیم نتیجه می شود که از ضرب اعداد تقریبی بزرگ پرهیز نماییم .لذا درضرب اعداد بایستی بطریقی عمل نمود که عاملهای ضرب به کران عدد یک محدود

شوند .دوم اینکه از انباشتگی خطا در عمل تفریق نتیجه می گیریم که تفریق دو عدد تقریباً بهم نزدیک بزرگترین منشأ ایجاد خطا در محاسبات می باشند .

مثال 2-6 : از بین ارقام بامعنی درست : محاسبه تابع زیر را درنظر میگیریم :

$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

با ماشین حساب 6 رقمی درپایه دهدهی نتایج با مقادیر مختلف x درجدول آورده شده است .

X	1	10	100	1000	10000	100000
f(x) جواب تقریبی	0.414210	1.54340	4.99000	15.8000	50.0000	100.000
f(x)جواب واقعی	0.414210	1.54347	4.98756	15.8074	49.9988	158.113

ملاحظه می کنید که هرقدر x بزرگتر می شود خطا بیشتر می شود چون $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1}$ به هم نزدیک تر میشوند و باعث از دست رفتن ارقام با معنی درست می شود .

دراین تابع خاص با عملیات جبری ساده می توان ارقام بامعنی درست را حفظ نمود .

$$\tilde{f}(x) = x\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

حال با ماشین حساب شش رقمی با ضابطه جدید در نقطه x=100 داریم :

f(100) =4.98756 یعنی جواب تا 6 رقم صحیح است

2-17 انباشتگی خطای نسبی در محاسبه توابع

اگر $\bar{x}$ یک تقریب برای x باشد .می خواهیم به این موضوع بپردازیم که $f(\bar{x})$ تا چه اندازه تقریب مناسبی برای f(x) می باشد .اکنون نشان می دهیم در محاسبه $f(\bar{x})$ نیز خطایی انجام می شود .با استفاده از بسط تیلور داریم :

$$f(x) = f(\bar{x} + e_x) = f(\bar{x}) + e_x f'(\bar{x}) + \frac{e_x^{\ 2}}{2!} f''(\bar{x}) + \ldots$$

اکنون باتوجه به کوچک بودن مقدار e_x از توانهای بالاتر از یک e_x صرف نظر می کنیم

$$f(x) \cong f(\bar{x}) + e_x f'(\bar{x}) \Rightarrow f(x) - f'(x) \approx e_x f'(\bar{x})$$

انباشتگی خطای نسبی عبارتست از :

$$\left|\frac{f(x) - f'(x)}{f(x)}\right| \le \left|\frac{f'(\bar{x})}{f(x)} e_x\right| = \left|\frac{f'(\bar{x})}{f(x)} x\right| |r_x| = k|r_x| \qquad (2.24)$$

k را عدد حالت می نامند ودقت نسبی ورودی یک مسئله را با دقت نسبی خروجی آن مرتبط می کند . اگر k عدد بزرگی باشد مسئله بدوضع نامیده می شود . $k = \left|\frac{f'(\bar{x})}{f(x)} x\right|$

مثال 2-7 : خطای نسبی تابع $f(x) = b^x$ را بیابید

با توجه به رابطه (2.24) داریم :

$$|r_f| \le \left\{\left|\frac{b^x \log b}{b^x}\right| |x|\right\} |r_x| \approx (|\log(b)||x|)|r_x|$$

اگر $k = \log b|x|$ عدد بزرگی باشد آنگاه خطای نسبی در b^x بسیار بزرگتر از خطای نسبی در x خواهد بود .

یعنی اگر $|r_x| \le 10^{-6}$ باشد و k=1000 آنگاه $|r_b x| < 10^{-3}$ که بیانگر افزایش خطا می باشد .

2-18 خطا در محاسبه توابع چند متغیره

فرض می کنیم $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ تابعی n متغیره و مشتق پذیر باشد .فرض می کنیم هریک از متغیرهای $x_1, x_2, ..., x_n$ دارای خطای مطلق Δx_k به ازای $k = 1,2,...,n$ باشند .بنابراین خطای مطلق تابع z عبارتست از

$$|\Delta z| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)|$$

چون عملاً سعی می شود که Δx_k بسیار کوچک باشند ، لذا ضرب آنها و توانهای بالای این مقادیر قابل چشم پوشی هستند .بنابراین می توانیم خطای مطلق تابع n متغیره z را بصورت زیر تقریب زد :

$$|\Delta z| \approx |df(x_1, x_2, ..., x_n)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| |\Delta x_k|$$

حال اگر فرض کنیم $e_{x_k} = \max_{1 \le k \le n} |\Delta x_k|$ باشد و e_z کران بالای خطای مطلق تابع n متغیره باشد داریم :

$$|e_z| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| e_{x_k} \qquad (2.29)$$

حال کران بالای خطای نسبی در z را می توان بصورت زیر بدست آورد .

یا

$$r_z = \frac{|e_z|}{|z|} = \sum_{k=1}^{n} \left|(\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big/ z\right| e_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| e_{x_k}$$

$$r_z = \sum_{k=1}^{n} \left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n))\, x_k\right| \left|r_{x_k}\right|\right\} \qquad (2.30)$$

در رابطه (2.30) عدد حالت عبارتست از :

$$r_z = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln\ f(x_1, x_2, \ldots, x_k))\, x_k\right|$$

کران بالای خطای نسبی تابع دومتغیره f(x,y) به آسانی از رابطه فوق می توان نتیجه گرفت :

$$\left|r_{f(x,y)}\right| \le \left|\frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f(x,y)}\, x\right| |r_x| + \left|\frac{f_y(\bar{x}, \bar{y})}{f(x,y)}\, y\right| |r_y| = k_1 |r_x| + k_2 |r_y|$$

$$k_1 = \left|\frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f(x,y)}\, x\right| \quad , \quad k_2 = \left|\frac{f_y(\bar{x}, \bar{y})}{f(x,y)}\, y\right|$$

k_2, k_1 را عدد شرطی تابع f(x,y) می نامند .

19-2 عکس فرمول کلی خطا در توابع چند متغیره

در مسائل کاربردی گاهی نیاز است که خطای متغیرهای یک تابع را بطریقی محاسبه نمود تا خطای کلی تابع از مقدار مشخص و معینی تجاوز نکند .یا به عبارت دیگر به ازای کران بالای خطای یک تابع بایستی کران بالای خطای مطلق هرمتغیر را محاسبه نمائیم .این کار با استفاده از قانون تأثیرات یکسان متغیرها عملی است .یعنی بایستی فرض کنیم که همه دیفرانسیل های جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k$ را به ازای k=1,2,…,n که در خطای مطلق تابع شرکت دارند دارای تأثیرات یکسان هستند .لذا داریم :

$$\left|\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| = \left|\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n}{\partial x_2} |\Delta x_2|\right| = \ldots = \left|\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|$$

بنابراین با استفاده از

$$|\Delta z| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_k}\right| |\Delta x_k| = n\left|\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1|$$

یا

$$= n\left|\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2|$$

تا

$$= n\left|\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|$$

لذا نتیجه می گیریم $k = 1,2,...,n$ و

$$|\Delta x_k| = \frac{|\Delta z|}{n\left|\dfrac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_k}\right|}$$

مثال 2-8 : حجم یک کره با قطر d را محاسبه کرده ایم .چنانچه قطر کره d=3.7000 باخطا 0.0500 cm و $p \approx 3.14$ با خطای 0.0016 رادیان .کران بالای خطای مطلق و نسبی در حجم کره را بیابید .

حل : حجم کره عبارتست از $v = \frac{pd^3}{6}$.کران بالای خطای مطلق در حجم کره :

$$|\Delta v| = \left|\frac{\partial v}{\partial p}\right| |\Delta p| + \left|\frac{\partial v}{\partial d}\right| |\Delta d|$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{6}d^3 = \frac{1}{6}(3.7000)^3 = 8.4400$$

$$\frac{\partial v}{\partial d} = \frac{1}{2}pd^2 = \frac{1}{2}(3.14)(3.7000)^2 = 21.5000$$

$$|\Delta v| = (8.4400)(0.0016) + (21.5000)(0.0500) = 1.0880 cm^3$$

$$v = 1/6pd^3 = 1/6(3.1400)(3.7000)^3 = 25.5100 cm^3$$

کران بالای حطای نسبی عبارتست از :

$$r_v = \frac{1.0880}{25.5100} = 0.0426 \approx \%4$$

مثال 2-9 : حجم استوانه ای با شعاع قاعده دو متر (r=2m) و ارتفاع سه متر (h=3m) با خطای مطلق $0.1\ m^3$ محاسبه شده است .میزان خطا در شعاع قاعده و ارتفاع را تعیین کنید . حل :

$$v = pr^2 h \qquad \Delta v = 0.1 m^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = r^2 h = (2)^2(3) = 12$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2prh = 2(3.140(2)(3) = 37.7$$
$$\frac{\partial v}{\partial h} = pr^2 = (3.14)(4) = 12.56$$

تعداد متغیرها n=3 می باشد ، لذا داریم :

$$|\Delta p| = \frac{|\Delta v|}{n\left|\frac{\Delta v}{\partial p}\right|} = \frac{0.1}{3\times 12} = 0.0027 < 0.003$$
$$|\Delta r| = \frac{|\Delta v|}{n\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|} = \frac{0.1}{3\times 37.7} = 0.00088 < 0.001$$
$$|\Delta h| = \frac{|\Delta v|}{n\left|\frac{\partial v}{\partial h}\right|} = \frac{0.1}{3\times 12.6} = 0.00264 < 0.003$$

20-2 پایداری روشهای عددی

ما علاقه مند هستیم روشهایی را انتخاب کنیم که برای طیف وسیعی از مسائل نتایج دقیق و قابل اعتمادی بدست بدهد .هرگاه بتوان معیاری را برای الگوریتم اعمال نمائیم مبنی بر اینکه تغییرات کوچکی در داده های ورودی منجر به تغییراتی کوچک در نتایج نهایی گردد .الگوریتمی که این خاصیت رابرآورده سازد ، **پایدار** نامیده میشود والگوریتمی که این معیار را برآورده نسازد ، **ناپایدار** خوانده می شود .

بطورکلی مسئله ناپایداری را می توان به **ذاتاً ناپایدار**[1] و**ناپایداری واداشته**[2]**یا** ایجاد شده دسته بندی نمائیم .

دسته اول زمانی بروز می کند که مسئله بدوضع باشد ودسته دوم زمانی رخ می دهد که انتخاب روش حل مسئله نادرست باشد . در زیر با ارائه مثالهایی این موضوع را پی می گیریم :

مثال 2-10 : ریشه های چند جمله ای زیر را که به مثال ویلکینسون[3]معروف است را درنظر می گیریم :

---
[1] Inherent
[2] Induced

$P_{20}(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-20)=x^{20}-210x^{19}+\ldots+20!$

این چندجمله ای دارای ریشه های 1و2و...و20 می باشد .حال اگر ضریب x^{19} که 210- می باشد را به – $(210+2^{-23})$ تغییر دهیم که یک تغییر بسیار کوچک می باشد .حال اگر جوابهای چندجمله ای جدید را بیابیم ، ریشه های از لحاظ کمی کوچک تر چند جمله ای اخیر با دقت قابل قبولی بدست می آیند درصورتیکه ریشه های از لحاظ کمی بزرگتر بامقدار قابل ملاحظه ای تغییر می یابند .بیشترین تغییر در ریشه های شانزدهم و هفدهم ایجاد می شود که بصورت مختلط $16.73000 \pm i2.81000$ می باشد .این تغییرات در ریشه ها به علت **ناپایداری ذاتی** یا بدوضعی چند جمله ای است.

مثال 2-11 : انتگرال معین زیر مفروض است . $n=1,2,...,10$ $\quad I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+6}dx$

برای حل این انتگرال از رابطه بازگشتی زیر استفاده می کنیم :

بطوریکه می دانیم : $I_0=\int_0^1 \frac{dx}{x+6}=\ln(\frac{7}{6})=0.15413$

$I_n=1/n-6I_{n-1}, n=1,2,...,10$

با استفاده از رابطه بازگشتی فوق جوابهای زیر را برای مقادیر مختلف n می یابیم

$I_1 \approx 0.07510$ $\quad I_2 \approx 0.04940$ $\quad I_3 \approx 0.03693$

$I_4 \approx 0.02842$ $\quad I_5 \approx 0.02948$ $\quad I_6 \approx -0.01021$

$I_7 \approx 0.20412$ $\quad I_8 \approx -1.09972$ $\quad I_9 \approx 6.70943$

$I_{10} \approx -40.15658$

جواب واقعی $I_{10} \approx 0.01449$ می باشد .این تغییر فاحش در جواب I_{10} بـعلت ناپایداری واداشته شده است.اما می دانیم که انتگرال فوق خوش وضع است و دارای جواب قابل قبول و دست یافتنی است ، اگر روش مناسب انتخاب کنیم .

---

[3] wilkinson

رابطه بازگشتی فوق را می توان بصورت زیر نیز نوشت

$$I_{n-1} = 1/6(\frac{1}{n} - I_n) \qquad n=10,9,8,\ldots,1$$

از آنجا که I_n با افزایش n کاهش می یابد می توان $I_{10}=0$ اختیار کرد و براین اساس جوابهای مختلف زیر برای مقادیر مختلف n می یابیم :

$I_9 \approx 0.01666$ $\qquad$ $I_8 \approx 0.01574$ $\qquad$ $I_7 \approx 0.01821$

$I_6 \approx 0.02077$ $\qquad$ $I_5 \approx 0.02432$ $\qquad$ $I_4 \approx 0.02928$

$I_3 \approx 0.03679$ $\qquad$ $I_2 \approx 0.04942$ $\qquad$ $I_1 \approx 0.07510$

$I_0 \approx 0.15415$

در صورتیکه می دانیم مقدار واقعی $I_0=0.15415$ است

برای بررسی بیشتر موضوع رشد خطای روند کردن وارتباط آن با پایداری الگوریتم ، فرض می کنیم که خطایی با قدرمطلق E_0 در مرحله ای از محاسبات وارد می شود ونیز قدرمطلق خطا ،پس از عملیات بعدی با E_n نشان داده می شود .در حالتی که اغلب موارد در عمل بروز می کنند ، بصورت زیر تعریف می کنیم :

تعریف 2-4 : هرگاه $E_n \approx CE_0$ باشد که در آن C ثابتی مستقل از n است ، رشد خطا را **خطی** می نامیم .اما هرگاه $E_n \approx C^n E_0$ به ازای C>1 باشد ، رشد خط **نمایی** نامیده می شود .

معمولاً رشد خطا ، غیرقابل اجتناب است و عموماً هنگامی که E_0 , C کوچک باشند ، نتایج قابل قبول هستند . از آنجایی که جمله C^n حتی به ازای مقادیر نسبتاً کوچک n ، بزرگ می باشد باید از رشد نمایی خطا اجتناب گردد .این موضوع ، صرف نظر از اندازه E_0 ، منجر به خطای ناپذیرفتنی می گردد .در نتیجه الگوریتمی که رشد خطی را ارائه می دهد **پایدار** می باشد .و در حالی که الگوریتمی با رشد نمایی خطا ، **ناپایدار** است .

مثال 2-12 : رابطه بازگشتی زیر به ازای $n=2,3,\ldots$ $P_n = \frac{10}{3} P_{n-1} - P_{n-2}$ جوابی به صورت $P_n = c_1(1/3)^n + c_2(3)^n$ به ازای تمام مقادیر c_1 و c_2 دارد .

هرگاه $p_0=1$ و $p_1=1/3$ انتخاب کنیم $c_1=1$ و $c_2=0$ بدست می آوریم بطوری که به ازای تمام مقادیر n ، $p_n = (1/3)^n$ خواهد بود .فرض کنید که از حساب گردکردن پنج رقمی برای محاسبه جملات دنباله داده شده به وسیله این معادله استفاده شده است .در این صورت $p_0=1.0000$ و $p_1=0.33333$ خواهد بود که نیاز به تغییر ثابتها از مقادیر قبلی به $c_1=1.000$ و $c_2 = -0.125\times10^{-5}$ دارد .دراینصورت دنباله $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ ایجاد شده بوسیله : $\hat{P}_n = 1.0000(1/3)^n - 0.12500\times10^{-5}(3)^n$ تعیین می شود و خطای گردکردن $P_n - \hat{p}_n = 0.12500\times10^{-5}(3)^n$ بطور نمایی برحسب n رشد می کند. خطاهای حاصله را در جدول زیر منعکس کرده ایم و نـــشان می دهد که با افزایش n خطای نسبی افزایش می یابد .یعنی رابطه بازگشتی فوق ناپایدار می باشد .

N	مقدار محاسبه شده $\hat{p}_n$	مقدار واقعی p_n	خطای نسبی
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	0.11111×10^{0}	0.11120×10^{0}	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	9×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-3}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-3}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^{0}
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^{1}

مثال 2-13 : رابطه بازگشتی زیر $n=2,3,\ldots$ و $p_n=2p_{n-1}-p_{n-2}$ دارای جواب $p_n=c_1+c_2n$ به ازای تمام مقادیر c_1 و c_2 می باشد .هرگاه $p_0=1$ و $p_1=1/3$ انتخاب کنیم دراینصورت ثابتها $c_1=1$ و $c_2=-2/3$ می باشند .بطوری که جواب بصورت زیر است : $p_n=1-2n/3$.

اگر با حساب گرد کردن پنج رقمی محاسبه کنیم در نتیجه $\hat{p}_0 = 1.0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$ درنتیجه $c_1=1.0000$ و $c_2=-0.66667$ به این ترتیب $\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$ خطای گردکردن عبارتست از : $\hat{p}_n - p_n = (0.66667 - 2/3)^n$ که بطور خطی برحسب n رشد می کند این موضوع و پایداری رابطه در جدول زیر نشان داده شده است .

N	مقدار محاسبه شده $\hat{p}_n$	مقدار واقعی p_n	خطای نسبی
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	-0.33330×10^{0}	-0.33333×10^{0}	3×10^{-5}
3	-0.10000×10^{1}	-0.10000×10^{1}	0
4	-0.16667×10^{1}	-0.16667×10^{1}	0
5	-0.23334×10^{1}	-0.23333×10^{1}	1×10^{-5}
6	-0.30000×10^{1}	-0.30000×10^{1}	0
7	-0.36667×10^{1}	-0.36667×10^{1}	0
8	-0.43334×10^{1}	-0.43333×10^{1}	1×10^{-5}

درپایان تأکید می کنیم که تأثیرات خطای گردکردن را می توان با استفاده از محاسبات با تعداد ارقام بیشتر مانند امکان اختیار دقت مضاعف ویا چند برابر که در بیشتر رایانه های رقمی در دسترس است ، کاهش داد .اما مضرات استفاده از حساب با دقت چندبرابر عبارت از این است که زمان محاسباتی بیشتری صرف می گـــــردد و دیگر اینکه خطای روند حذف نمی گردد .بلکه فقط تا انجام محاسبات بعدی به تعویق می افتد .

وسیله ای برای تخمین خطای گردکردن ، استفاده از حساب بازه ای است .بطوری که درپایان بازه ای را که شامل مقدار درست است ، به دست آورده ایم.البته بطور ایده آل این بازه بسیار کوچک است.وجوابهای نهایی می توانند با عدم قطعیت بسیار کمی داده شوند ولیکن هزینه حمل بازه ها بجای اعداد ماشینی ساده در طول محاسبات طولانی ممکن است روند را مشکل سازد .در نتیجه فقط وقتی که باید اعتماد زیادی در محاسبات منظور شود مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال 2-14 : مثال ویلکینسون را از زاویه عدد حالت بررسی می کنیم .بنابراین

$$P_{20(x)}=\prod_{k=1}^{20}(x-k)$$
$$g(x)=x^{20}$$

واضح است ریشه های چند جمله عبارتند از 20,...,2,1 با تغییر $p_{20}(x)$ به $p_{20}(x)+eg(x)$ چه تأثیری بر جواب $x=20$ می گذارد .

حل :فرض می کنیم r یک ریشه ساده $p_{20}(x)$ باشد بطوریکه $p'_{20}(r)\neq 0$ اگر تابع $p_{20}(x)$ را به $F=p_{20}(x)+eg(x)$ تغییر دهیم ریشه جدید چه خواهد بود ؟ فرض می کنیم ریشه جدید r+h باشد یک فرمول تقریبی برای h بدست می آوریم میزان متغیر h در معادله $F(r+h)=0$ صدق می کند یا

$$P_{20}(r+h)+eg(r+h)=0$$

چون $p(r,h),g(r,h)$ به c^2 تعلق دارند می توان قضیه تیلور برای بسط توابع را بکار گرفت :

$$[p(r)+hp'(r)+\frac{1}{2}h^2p''(z)]+e[g(r)+hg'(r)+\frac{1}{2}h^2g''(z)]=0$$

با استفاده از این حقیقت که $p(r)=0$ و حذف h^2 داریم

$$h=-e\,\frac{g(r)}{p'(r)+eg''(r)}\approx -e\,\frac{g(r)}{p'(r)}$$
$$\therefore\quad h=-e\,\frac{20^{20}}{19!}\approx -e\times 10^{9}$$

بنابراین با تغییر e در ضریب x^{20} از $p_{20}(x)$ ممکن است باعث تغییر ریشه 20 به اندازه $10^{q}e$ شود .بنابراین ریشه های این چندجمله ای در برابر تغییرات ضرائب بی نهایت کوچک حساس هستند .

تمرین های فصل دوم

1- چندجمله ای تیلور درجه چهار $p_4(x)$ را برای تابع $f(x)=xe^{x^2}$ حول نقطه $x_0=0$ بیابید و به ازای $0\le x\le 0.4$ کران بالایی برای $|f(x)-p_4(x)|$ بیابید .

2- با استفاده از جمله خطا در چند جمله ای تیلور خطای موجود در فرمول $\sin x\approx x$ که برای تقریباً $\sin 1^o$ بکار می رود بیابید .

3- $\cos 42^o$ را با یک چند جمله ای تیلور حول $p/4$ با دقت 10^{-6} تقریب بزنید.

4- هرگاه $f(x)=(1-x)^{-1}$ و $x_0=0$ باشد چندجمله ای تیلور $p_n(x)$ راجهت $f(x)$ حول x_0 بیابید.مقدار ضروری n را برای این که دقت تقریب 10^{-6} در بازه [0,0.5] باشد بیابید؟

5- چند جمله ای $p_2(x)=1-\frac{x^2}{2}$ برای تقریب $f(x)=\cos x$ در بازه [-1/2,1/2] استفاده کرده ایم کرانی برای خطای ماگزیمم بیابید.

6-هرگاه x را با $\bar{x}$ تقریب زده باشیم ، خطای مطلق وخطای نسبی را حساب کنید .

الف : $\bar{x}=22.7, x=p$ ب: $\bar{x}=2.718, x=e$

پ : $\bar{x}=1.414, x=\sqrt{2}$ ت: $\bar{x}=\sqrt{18}p\,(q/e)^9, x=9!$

7-محاسبات زیر را به روش (I) دقیق (II)حساب جدا کردن سه رقمی و(III) حساب گردکردن سه رقمی انجام دهید وخطای نسبی را در قسمتهای (II) و(III) حساب کنید .

الف : $4/5+1/3$ ب : $\frac{4}{3}.\frac{1}{3}$

پ : $(1/3-3/11)+3/20$ ت : $(1/3+3/11)-3/20$

8-عدد e را می توان بوسیله $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ تعریف نمود .خطای مطلق و خطای نسبی را در تقریبهای زیر از e حساب کنید .

الف : $\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!}$ ب: $\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}$

9-فرض کنید که $fl(x)$ تقریب گرد شده t رقمی x در مبنای b باشد .نشان دهید که $\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right|\leq 1/2b^{1-t}$

10-با استفاده از حسال جداکردن سه رقمی برای محاسبه مجموع $\sum_{i=1}^{10}1/i^2$ نخست بوسیله $1+1/4+...+1/100$ وسپس با $1/100+1/81+...+1/1$ استفاده کنید .کدام روش دقیق تر است.چرا ؟

11-فرض کنید که دنباله های $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\hat{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ازای هرمقدار صحیح $n\geq 1$ با $a_n=\frac{n+1}{n^2}$ و $\hat{a}_n=\frac{n+3}{n^3}$ مشخص شده اند .اگرچه $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ و $\lim_{n\to\infty}\hat{a}_n=0$ ولی دنباله $\{\hat{a}_n\}$ بسیار سریعتر از دنباله $\{a_n\}$ به این حد همگرا می شود وچرا ؟

12-فرض کنید d,c,b,a اعداد مثبت باشند .چنانچه محاسبات را با احتساب گرد کردن تا t رقم در مبنای دهدهی جمع کنیم y=a+b+c+d در چه صورتی کمترین خطا را ایجاد می کند .

فصل سوم

3- حل معادلات غیر خطی

در این فصل درصدد یافتن ریشه معادله یک متغیره به صورت $f(x)=0$ هستیم .این معادله می تواند به صورت صریح زیر باشد .

$$f(x)=P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

یعنی یک چندجمله ای درجه n از x ویا می تواند یک تابع فرازنده باشد .

تعریف 3-1: عدد a را جواب معادله $f(x)=0$ گویند هرگاه $f(a)=0$ چنین جوابی را ریشه یا صفر معادله $f(x)=0$ می نامند .

از لـــحاظ هندسی ریشه معادله $f(x)=0$ مقداریست برای x که نمودار y=f(x) محور x ها را درآن قطع می کند.

تعریف3 -2 : هرگاه بتوان $f(x)=0$ را به صورت زیر بیان کنیم :

$$f(x)=(x-a)^m g(x)=0$$

بطوریکه g(x) محدود و $g(a)\neq 0$باشد آنگاه a را m ریشه تکراری f(x) گوئیم .بنابراین اگر m=1 باشد ریشه f(x)=0 را ریشه ساده می نامیم .

به طور کلی اگر صحبت کنبم ریشه f(x)=0 را می توان با دو روش مستقیم یا روش تکراری بدست آورد. روشهای مستقیم یا بعبارت دیگر روشهای تحلیلی در همه حالات پاسخگوی حل $f(x)=0$ نمی باشند .لذا در این فصل به بررسی برخی روشهای تکراری که جواب تقریبی برای $f(x)=0$ را بدست می دهند می پردازیم

.روشهای تکراری مبتنی بر تقریبهای متوالی هستند و با یک یا چند تقریب اولیه شروع می شوند ودنباله ای از تکرارها $\{x_n\}$ که نهایتاً به ریشه واقعی a همگرا هستند ایجاد می کنند .

تعریف 3-3 : دنباله تکراری $\{x_n\}$ را همگرا به ریشه واقعی a می نامیم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - a| = 0$$

3-1- روش نصف کردن یا دو بخشی (Bisection Method)

این روش بر قضیه مقدار میانی استوار است .فرض کنید f تابعی پیوسته وبربازه [a,b] تعریف شده باشد به طوریکه علامتهای f(a) و f(b) با هم مخالف باشند .بنا بر قضیه مقدار میانی ، نقطه ای چون a ، در (a,b) وجود دارد به طوری که $f(a)=0$.در حالتی که f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند وبیش از یک ریشه در بازه (a,b) موجود باشد می توان با محدود کردن بازه مطمئن شد که تنها یک ریشه در بازه موجود باشد .برای آسانی کار فرض می کنیم که f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند ویک ریشه در [a,b] موجود باشد .با استفاده از روش نصف کردن مکرر زیر بازه های [a,b] و تعیین نیمه ای که شامل ریشه a است . برای شروع فرض می کنیم $a_0=a$ و $b_0=b$ باشد . فرض می کنیم $w_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ باشد اگر $f(w_1)=0$ باشد در این صورت $a = w_1$ می باشد واگر چنین نباشد $f(w_1)$ با $f(a_0)$ یا $f(b_0)$ هم علامت است اگر $f(w_1)$ و $f(a_0)$ هم علامت باشند در این صورت $a \in (w_1, b_0)$ آنگاه $a_1=w_1$ و $b_1=b_0$.اما اگر $f(w_1)$ و $f(a_0)$ مختلف العلامه باشند در این صورت $a \in (a_0, w_1)$ می باشد آنگاه $a_1=a_0$ و $w_1=b_1$.سپس این عمل را در بازه $[a_1,b_1]$ تکرار می کنیم بنابراین الگوریتم این روش عبارتست از :

برای یک بازه اولیه $[a_0,b_0]=[a,b]$ وبرای $n=0$

مرحله 1- محاسبه کن $w_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

2- اگر $f(w_{n+1})f(a_n)<0$ آنگاه $a_{n+1}=a_n\ ,\ b_{n+1}=w_{n+1}$

3-اگر $f(w_{n+1})f(b_n)<0$ آنگاه $b_{n+1}=b_n\ ,a_{n+1}=w_{n+1}$

4-اگر $|f(w_{n+1})|\le e$ یا $|w_{n+1}-w_n|\le e$ روند را متوقف کن در غیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله اول

2-3 همگرایی و تحلیل خطا در روش نصف کردن

قضیه 3-1 : اگر $[a_0,b_0],[a_1,b_1],...[a_n,b_n],...$ بازه ها را در روش نصف کردن نشان دهند ، آنگاه حدود $\lim_{n\to\infty} a_n$ و $\lim_{n\to\infty} b_n$ موجود هستند و برابرند وبیانگر یک ریشه f هستند اگر $a=\lim_{n\to\infty} x_n$ و $x_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}+a_{n-1})$ آنگاه : $|a-x_n|\le 2^{-n}(b_0-a_0)$

اثبات : فرض می کنیم $[a_0,b_0]$ و $[a_1,b_1]$ وغیره بازه هایی هستند که متوالیاً نصف می نمائیم در این جا اعداد به صورت زیر هستند .

$$a_0\le a_1\le a_2\le ...\le b_0 \qquad (3.1)$$

$$b_0\ge b_1\ge b_2\ge ...\ge a_0 \qquad (3.2)$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1}),n\ge 1 \qquad (3.3)$$

چون دنباله $\{a_n\}$ افزایشی واز بالا کراندار است همگراست به طریق مـــشابه $\{b_n\}$ نیز همگراست اگر کراراً معادله (3.3) را بکارگیریم داریم :

$$b_n-a_n=(1/2)^n(b_0-a_0) \qquad (3.4)$$

بنابر این
$$\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 2^{-(n)}(b_0-a_0)=0$$

اگر قرار دهیم
$$a=\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\ a_n$$

آنگاه با حدگرفتن از از نامساوی $f(a_n)\,f(b_n)\le 0$ نتیجه می شود $[\,f(a)]^2\le 0$ که از آن نتیجه می گیریم $f(a)=0$.

اگر فرض کنیم روند نصف کردن در مرحله ای معین متوقف شود مانند $[a_{n-1},b_{n-1}]$ ریشه مطمئناً در این بازه قرار دارد .بهترین تخمین برای ریشه در این مرحله a_{n-1} یا b_{n-1} نیست بلکه نقطه وسط بازه است.

$$x_n=(a_{n-1}+b_{n-1})/2 \qquad (3.5)$$

لذا با استفاده از رابطه (3.4) داریم $x_n=(1/2)^n(b_0-a_0)$

بنابراین کران خطا به صورت زیر خواهد بود .

$$|a-x_n|\le(1/2)^n(b_0-a_0)=2^{-(n)}(b_0-a_0) \qquad (3.6)$$

نتیجه : اگر معیار دقت حل مسئله e باشد یعنی $|a-x_n|\le e$ تعداد حداقل مراحل تکراری که بایستی انجام پذیرد عبارتست از :

$$|a-x_n|\le 2^{-(n)}(b_0-a_0)\le e$$

$$(b_0-a_0)<2^n e\Rightarrow n\ge\frac{\log_{10}(b_0-a_0)-\log_{10}e}{\log_{10}2}$$

3-3 سرعت همگرایی روش نصف کردن

باتوجه به رابطه (3.5) داریم $x_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$ اگر فرض کنیم که روش همگرا به ریشه واقعی a است یعنی $\lim_{n\to\infty}|x_n|=a$ باشد داریم :

$$|e_n|=|a-x_n|\le 2^{-n}(b_0-a_0) \qquad (3.7)$$

به همین طریق داریم :

$$|e_{n+1}|=|a-x_{n+1}|\le 2^{-(n+1)}(b_0-a_0) \qquad (3.8)$$

با استفاده از (3.7) و (3.8) مرتبه همگرایی روش دوبخشی را می توانیم بیابیم .

یعنی دارای سرعت همگرا یی خطی است . $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \frac{1}{2}$

روش نصف کردن همواره همگراست واین مزیت روش نصف کردن می باشد .این روش یک روش Global است یعنی همگرایی آن منوط به تقریب اولیه دلخواه نیست یعنی نیازی نیست که تقریب اولیه چه مقدار به ریشه واقعی نزدیک باشد .(البته باید داشته باشیم $f(a)f(b)<0$) درمقابل این روش روشهای تکراری دیگر locally (موضعی) همگرا هستند یعنی بایستی شروع اولیه نزدیک ریشه واقعی انتخاب گردد.

عدم مزیت این روش علاوه بر کندبودن آن نمی توان برای ریشه هایی که مماس بر محور x می باشند به کار گرفت و همچنین نمی توان این روش را برای حل $f(x)=x^2$ بکاربرد .

مثال 3-1 – با استفاده از روش دوبخشی ، ریشه معادله $(2x+1)^2-4\cos px=0$ را که در فاصله [1/4,1/3] قرار دارد با معیار دقت 10^{-3}بیا بید.

$$f(x)=(2x+1)^2-4\cos px=0$$

$$f(1/4)=-0.5784 \qquad , \qquad f(1/3)=0.7777$$

$$n\geq\frac{\log(1/3-1/4)+3}{\log 2}=\frac{3-\log 12}{\log 2}\approx 5$$

n	a_n	b_n	w_{n+1}	$f(w_{n+1})$
0	1/4	1/3	-------	----------
1	1/4	1/3	0.2917	0.724
2	1/4	0.2917	0.2709	-0.2596
3	0.2709	0.2917	0.2813	-0.0954
4	0.2813	0.2917	0.2865	0.0724
5	0.2865	0.2917	0.2891	0.0287

$$|w_{n+1}-w_n|=|0.2891-0.2865|=0.0026$$

مثال 3-2 معادله $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ یک ریشه در [1,2] دارد .این ریشه را با معیار دقت 10^{-3} بیابید .

$$n\geq\frac{\log_{10}(b-a)-\log_{10}e}{\log_{10}2}=\frac{3}{\log 2}\approx 9.96$$

تعداد تکرارهای لازم بایستی حداقل برابر 10 باشد $n \geq 10$

حل : با استفاده از روش نصف کردن داریم : $f(2)=14,\ f(1)=-2$

n	a_n	b_n	w_{n+1}	$f(w_{n+1})$
0	1	2	--------------	----------
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
10	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072

تمرین ها :

1- ریشه مثبت $x^2-4x\sin x+(2\sin x)^2=0$ را با دقت دو رقم بامعنی صحیح بیابید .

2- فرمولی برای تعداد گامهایی که در الگوریتم تنصیف اختیار می شود ارائه دهید که شامل e, b_0, a_0 بوده و تضمین کند که ریشه با دقت نسبی کوچکتر یا مساوی e تعیین می شود .$a_0>0$

3- روش نصف کردن را با بازه [1.5,3.5] درنظر بگیرید .

الف : طول بازه در مرحله n ام این روش چقدر است ؟

ب : ماکزیمم فاصله ممکن بین ریشه a و نقطه وسط این بازه چقدر است ؟

4- در روش نصف کردن آیا $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-a|}{|x_n-a|}$ وجود دارد ؟ توضیح دهید .

5- با استفاده از روش نصف کردن جواب تقریبی با دقت 10^{-3} را برای معادله زیر در بازه [1/2,3/2] بیابید.

$$2+\cos(e^x-2)-e^x=0$$

6- با استفاده از روش نصف کردن ، تقریبی برای $\sqrt{3}$ با دقت 10^{-6} بیابید .

7- با روش نصف کردن ، تقریبی برای ریشه $x\cos x-2x^2+3x-1=0$ در بازه $[0.2,0.3]$ و $1.2 \le x \le 1.3$ با معیار دقت 10^{-5} بیابید .

4-3 روش وتری(Secant)

برای حل معادله f(x)=0 فرض می کنیم f(x) دربازه [a,b] دارای یک ریشه و پیوسته باشد ، اگر f(a)f(b)<0 باشد .چنانچه f(x) را باخط تقریب بزنیم یعنی

$$f(x) \approx a_0 x + a_1 = 0 \qquad (3.9)$$

$$x=-\frac{a_1}{a_0}, a_0 \neq 0$$

ضرایب a_1, a_0 نامعین هستند و بایستی محاسبه شوند لذا اگر فرض کنیم x_{n-1}, x_n دو تقریب متوالی برای ریشه $f(x)=0$ باشند باتوجه به این که در رابطه(3.9) بایستی صدق نماید داریم :

$$f(x_n) = a_0 x_n + a_1 \qquad (3.10)$$

$$f(x_{n-1}) = a_0 x_{n-1} + a_1 \qquad (3.11)$$

از حل رابطه (3.10)و(3.11) داریم

$$a_0 = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{x_n - x_{n-1}}$$

حال اگر a_1, a_0 را در رابطه $x=-\frac{a_1}{a_0}$ قرار دهیم می توان تقریبی برای مرحله بالاتر تکرار یعنی x_{n+1} بیابیم لذا داریم :

$$x_{n+1} = -\frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{x_n - x_{n-1}} \times \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = -\frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

با اضافه وکم کردن $x_n f(x_n)$ به صورت کسر فوق و ساده کردن آن داریم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).,n \ge 1$$

5-3 **الگوریتم روش وتری** : برای معیار دقت داده شده x_1, x_0, e تقریبهای اولیه از پیش معلوم عبارتست از :

1- برای n=1

2- محاسبه کن : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

3- اگر $|x_{n+1} - x_n| \le e$ است برو به مرحله 4 درغیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله 2.

4- روند را متوقف کن .

6-3 **نمایش هندسی روش وتری** : در این روش تابع f(x) راباوتری که از نقاط $(x_n,f(x_n))$ و $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ می گذرد تقریب می زنیم و محل تلاقی این وتر با محور x ها را تقریب بعدی برای ریشه معادله f(x)=0 می باشد .حال نقطه $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ را با هرکدام از دو نفطه فوق می توان درنظر گرفت و وتر بین دو نقطه را رسم نمود .اگر وتری را درنظر بگیریم که همواره $f(x_{n+1})f(x_n)<0$ باشد یا $(f(x_{n+1})f(x_{n-1})<0)$ روش حاصل را روش نابجایی یا Regula -Falsi مـــــی نامند که همواره همگراست .در غیر اینصورت روش را روش وتری می نامیم .

7-3 **الگوریتم روش نابجایی** :

برای تابع f(x) که در بازه [a,b] پیوسته و مختلف العلامه باشند $(f(a)f(b)<0)$ و برای مقدار اولیه های x_1,x_0 معلوم و معیار دقت e داده شده عبارتست از :

1-برای n=1

2- محاسبه کن $$w_{n+1} = \frac{a_n\, f(b_n) - b_n\, f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

3- اگر $f(a_n)f(w_{n+1})<0$ $b_{n+1}=w_{n+1}$ و $a_{n+1}=a_n$ درغیر اینصورت $b_{n+1}=b_n$ و $a_{n+1}=w_{n+1}$

4- اگر $|w_{n+1} - w_n| \le e$ یا $|f(w_{n+1})| \le e$ باشد برو به مرحله 5 در غیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله 2.

5- روند را متوقف کن.

8-3 تحلیل خطا و سرعت همگرایی روش وتری :

فرض می کنیم x_n تقریبی برای ریشه واقعی f(x)=0 باشد و a نیز ریشه واقعی f(x) باشد بنابراین

$$x_n - a = e_n$$

یا

$$x_n = a + e_n$$

ویا

$$x_{n+1} = a + e_{n+1}$$

با جایگزینی این موارد در روش وتری داریم :

$$a + e_{n+1} = a + e_n - \frac{a + e_n - a - e_{n-1}}{f(a + e_n) - f(a - e_{n-1})}\, f(a + e_n)$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n - e_{n-1}}{f(a + e_n) - f(a - e_{n-1})}\, f(a + e_n) \qquad (3.12)$$

رابطه (3.12) معادله خطای روش وتری است . حال اگر در رابطه (3.12) ، $f(a + e_n)$ و $f(a - e_{n-1})$ با استفاده از سری تیلور حول a بسط دهیم داریم .

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(e_n - e_{n-1})[\, f(a) + e_n\, f'(a) + \frac{1}{2} e^2{}_n\, f''(a) + ...]}{[\, f(a) + e_n\, f'(a) + \frac{1}{2} e^2{}_n\, f''(a) + ...] - [\, f(a) + e_{n-1}\, f'(a) + ...]}$$

اگر توانهای $e^3{}_n$ به بعد را نادیده بگیریم و چون $f(a) = 0$ است رابطه بالا بصورت زیر ساده می شود .

$$e_{n+1}=e_n-\frac{(e_n-e_{n-1})(e_n+\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(a)}{f'(a)})}{e_n-e_{n-1}+\frac{1}{2}(e^2{}_n-e^2{}_{n-1})\frac{f''(a)}{f'(a)}}$$

$$e_{n+1}=e_n-\frac{e_n+\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(a)}{f'(a)}}{1+\frac{1}{2}(e_n+e_{n-1})\frac{f''(a)}{f'(a)}}$$

$$e_{n+1}=e_n-(e_n+\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(a)}{f'(a)})\left[1+\frac{1}{2}(e_n+e_{n-1})\frac{f''(a)}{f'(a)}\right]^{-1} \qquad (3.13)$$

اگر فرض کنیم $\frac{1}{2}\left|(e_n+e_{n-1})\frac{f''(a)}{f'(a)}\right|<1$ باشد آنگاه داریم :

$$e_{n+1}=e_n-(e_n+\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(a)}{f'(a)})(1-\frac{1}{2}(e_n+e_{n-1})\frac{f''(a)}{f'(a)})$$

$$=-\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(a)}{f'(a)}+\frac{1}{2}(e^2{}_n+e_ne_{n-1})\frac{f''(a)}{f'(a)}+O(e^2{}_n)$$

$$e_{n+1}=\frac{1}{2}e_ne_{n-1}\frac{f''(a)}{f'(a)}+O(e^2{}_n)$$

$$e_{n+1}=Ce_ne_{n-1}.,C=\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} \qquad (3.14)$$

حال طبق تعریف سرعت همگرایی یک روش تکراری داریم که یک روش دارای سرعت همگرایی p است اگر

$p>0\in R$ و $e_{n+1}=Ae_n^p$ لذا داریم $e_n=Ae_{n-1}^p$ و یا $e_{n-1}=A^{-\frac{1}{p}}e^{1/p}{}_n$

این موارد را در رابطه (3.14)قرار می دهیم : $Ae^P{}_n=Ce_n.A^{-\frac{1}{p}}e^{\frac{1}{p}}{}_n$

$$Ae^P{}_n=C.A^{-\frac{1}{p}}e_n{}^{1+\frac{1}{p}}$$

$$e^P{}_n=CA^{-(1+\frac{1}{p})}e_n{}^{(1+\frac{1}{p})} \qquad (3.15)$$

توان e_n در دو طرف (3.15) را متحد قرار می دهیم . بنابراین داریم :

$$p=1+\frac{1}{p}\Rightarrow p^2-p-1=0$$

$$p=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

سرعت همگرایی روش وتری عبارت است از :

$$p=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=1.618$$

مثال 3-3 : با استفاده از روش وتری وروش نابجایی ریشه معادله زیر را تا 4 رقم اعشار صحیح با معنی بدست آورید

$$f(x)=\cos x-xe^{x}=0 \qquad x\in[0,1]$$

حل :

$f(0)=1$ و $f(1)=\cos 1-e=-2.17798$

$x_0=0$, $x_1=1$

روش وتری

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}f(x_n), n\geq 1$$

$$n=1 \quad , \quad x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f_1-f_0}f_1=1-\frac{1-0}{-2.17798-1}(-2.17798)=0.31466$$

$$n=2 \quad , \quad x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f_2-f_1}f_2=0.31466-\frac{0.31466-1}{0.51987+2.17798}(0.51987)=0.44673$$

به همین طریق عمل می کنیم تمامی محاسبات در جدول زیر آمده است .

n	X_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	0.31466	0.51987
2	0.44673	0.20354
3	0.53171	-0.42931×10^{-1}
4	0.51690	0.25928×10^{-2}
5	0.51775	0.30111×10^{-4}
6	0.51776	-0.2151×10^{-7}

حل باروش نابجایی :

$x_0=0$, $x_1=1$

$$f(x_0)=f(0)=1>0 \qquad f(x_1)=f(1)=-2.17798<0$$

n=1

$$x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f_1-f_0}f_1=0.31466$$

$$f(x_2)=f(0.31466)=0.51987>0$$

ریشه بین x_1,x_2 است

n=2
$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1} f_2 = 0.44673$$
$$f(x_3) = f(0.44673) = 0.20354 > 0$$

ریشه بین x_1 و x_3 لذا در مرحله بعدی وقتی n برابر 3 باشد به جای x_2 از x_1 استفاده می کنیم .

n=3
$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_1}{f_3 - f_1} f_3 = 0.44673 - \frac{0.44673 - 1}{0.20354 + 2.17798}(0.20354) = 0.49402$$
$$f(x_4) = 0.70802 \times 10^{-1} > 0$$

ریشه بین x_4 و x_1 است .لذا در مرحله بعد x_3 را با x_1 عوض می کنیم و این روند را ادامه می دهیم .

سرانجام محاسبات را در جدول زیر درج می نمائیم که نشان می دهد روش نابجایی دارای سرعت همگرایی کند تر از روش وتری است .

n	X_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	0.31466	0.51987
2	0.44673	0.20354
3	0.49402	0.70802×10^{-1}
4	0.50995	0.23608×10^{-1}
5	0.51520	0.77601×10^{-2}
6	0.51692	0.25389×10^{-2}
7	0.51748	0.82936×10^{-3}
8	0.51767	0.27079×10^{-3}

9-3 روش نیوتن رافسون

به طور کلی روش نیوتن سریعتر از روشهای تکراری دیگر نظیر نصف کردن یا وتری می باشد .زیرا همگرایی آن فوق خطی و از مرتبه دوم است به محض آنکه همگرایی مؤثر واقع گردد یعنی مقادیر دنباله روش نیوتن به اندازه کافی نزدیک به ریشه واقعی باشند همگرایی به قدری سریع می باشد که فقط چند جمله دیگر از دنباله ، مورد نیاز خواهد بود .اما متأسفانه این روش همیشه همگرایی را تضمین نمی کند . غالباً این روش را با سایر روشهای کندتر در یک پیوند ترکیبی به کار می گیرند تا از لحاظ عددی جامع همگرا گردد .(globaly)

فرض می کنیم تابع f(x) در بازه [a,b] پیوسته باشد .اگر این تابع دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد واگر فرض کنیم a ریشه واقعی و x_n جواب تقریبی برای f(x)=0 باشد دراینصورت f(x) را حول x_n با سری تیلور بسط می دهیم :

$$f(x)= f(x_n)+(x-x_n)\, f'(x_n)+\frac{1}{2}(x-x_n)^2\, f''(z_n)$$

به طوریکه z_n بین x_n و x قرار دارد .برای بدست آوردن الگوریتم از این رابطه ، f(x)=0 می گیریم وx را برحسب $f(x_n), f'(x_n)$ می یابیم

$$x= x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{1}{2}(x-x_n)^2\,\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.16)$$

چنانچه x_n نزدیک به x باشد می توان از جمله دوم صرف نظر نمود و x_{n+1} را این چنین تعریف می کنیم :

$$x_{n+1}= x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (3.17)$$

10-3 الگوریتم روش نیوتن رافسون برای e داده شده برای حل f(x)=0 :

1- برای n=0

2- محاسبه کن $x_{n+1}= x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

3- اگر $|x_{n+1}-x_n|\le e$ یا $|f(x_n)|\le e$ روند را متوقف کن درغیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله دوم .

11-3 نمایش هندسی روش نیوتن رافسون :

مطابق شکل فرض می کنیم درصدد یافتن ریشه a تابع y=f(x) هستیم با یک تقریب اولیه x_0 شروع می کنیم .ایده اساسی روش نیوتن استفاده از خط مماس برای تقریب f است در ابتدا یعنی خطی مماس که از نقطه $(x_0,f(x_0))$ رسم می شود ، فرمول این خط عبارتست از

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}= f'(x_0)\Rightarrow y= f(x_0)+ f'(x_0)(x-x_0)$$

این خط محور x ها را در یک نقطه y=0 قطع می کند

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

این رابطه را برای x حل می کنیم $x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

این نقطه بسیار نزدیکتر به جواب واقعی a است عین همین روند را ادامه می دهیم .

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

.

.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f''(x_0)>0$$

$$f(x_0)>0$$

$$f(x_0)\,f''(x_0)>0$$

12-3 خطای روش نیوتن :

قضیه 3-2 : برای $I\subseteq R$ ، $f\in C^2(I)$ مفروض است . هم چنین برای $a\in I$ $f(a)=0$ باشد .اگر $x_n\in I$

داده شده باشد تعریف می کنیم $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

آنگاه نقطه ای مانند z_n بین a و x_n وجود دارد به طوری که :

$$(a-x_{n+1})=-\frac{1}{2}(a-x_n)^2\,\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.18)$$

اثبات : ابتدا f(x) رابا سری تیلور حول $x=x_n$ بسط می دهیم

$$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)\,f'(x_n)+\frac{1}{2}(x-x_n)^2\,f''(z_n)$$

z_n بین x و a است . حالا قرار می دهیم $a=x$.

$$0=f(a)=f(x_n)+(a-x_n)\,f'(x_n)+\frac{1}{2}(a-x_n)^2\,f''(z_n)$$

طرفین رابطه را بر $f'(x_n)$ تقسیم می کنیم و مرتب می کنیم :

$$(x_n - a) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}(a - x_n)^2 \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - a = \frac{1}{2}(a - x_n)^2 \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - a = \frac{1}{2}(a - x_n)^2 \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2} e^2{}_n \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \qquad \because \; e_{n+1} = a - x_{n+1}$$

از قضیه فوق نتیجه می گیریم که خطا دریک مرحله مربع خطای مرحله قبل از آن است .زمانی که خطا به اندازه کافی کوچک باشد سریعاً شروع به کاهش می نماید .در حقیقت اگر فرض کنیم که روند همگرا باشد و $f'(a) \neq 0$ و همچنین $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ آنـــگاه می تـوانـیـم بـگـوئـیـم کـه $f'(x_n) \approx f'(a)$ و $f''(z_n) \approx f''(a)$ بـــنابراین

$$(a - x_{n+1}) \approx C(a - x_n)^2 \;, \; C = -\frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

این رابطه نشان می دهد که تقریب اولیه x_0 بایستی به ریشه واقعی نزدیک باشد تاهمگرایی حاصل شود .

مضافاً اینکه می توان با فرض اینکه روش همگرا باشد نتیجه گرفت که :

$$\lim \frac{a - x_{n+1}}{(a - x_n)^2} = -\frac{f''(a)}{2\, f'(a)}$$

مشروط بر اینکه f'', f' پیوسته باشند .

چرا در روش نیوتن ارقام اعشاری صحیح درهرمرحله دوبرابر میشود ؟

فــرض می کنیم x_n دنباله ای از مقادیری باشد که توسط روش نیوتن برای تابع هموار f ایجاد می شود .فرض می کنیم که این دنباله به ریشه واقعی a همگرا باشد .آنگاه از قضیه فوق نتیجه می گیریم که :

$$|a-x_{n+1}|=\frac{1}{2}(a-x_n)^2\left|\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}\right|$$

حال اگر از طرفین رابطه لگاریتم برمبنای 10 بگیریم داریم :

$$\log|a-x_{n+1}|=2\log_{10}|a-x_n|+\log_{10}\left(\frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|}\right)=2\log_{10}|a-x_n|+b_n$$

با نادیده گرفتن جمله b_n دربالا واز آنجا که خطا کوچکتر از یک می باشد می توان رابطه فوق را این چنین تعبیر نمود که تعداد ارقام درهرمرحله نسبت به مرحله قبل آن دو برابر میشود.

13-3 همگرایی روش نیوتن

قضیه 3-2 درباره خطای روش نیوتن درقبل گرچه ایده بااهمیتی راجع به تغییرات خطا درهرمرحله رابدست می دهد اما به تنهایی کـــــافی نیست که همگرایی را نشان و درعمل هرگونه دقت را بیان کند لذا قضیه زیر را درنظر می گیریم :

قضیه 3-3 : فرض کنید f تعریف شده و دوبار پیوسته و مشتق پذیر برای جمیع مقادیر x باشد وفرض کنید برای aای $f(a)=0$ باشد . هرگاه رابطه زیر برقرار باشد

$$M=\max_{x\in R}|f''(x)|/2\min_{x\in R}|f'(x)| \qquad (3.19)$$

وهم چنین فرض می کنیم که $M<\infty$ آنگاه برای هر x_0 اگر

$$M|a-x_0|<1 \qquad (3.20)$$

باشد روش تکرار نیوتن همگرا می شود ومضافاً اینکه

$$|a-x_n|\le M^{-1}(M|a-x_0|)^{2^n} \qquad (3.21)$$

اثبات : اثبات این قضیه بر اساس رابطه (3.18) از قضیه 3-2 استوار است .لذا داریم :

$$|a-x_{n+1}|=\frac{1}{2}(a-x_n)^2\frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$$

با استفاده از (3.19) داریم

$$|a-x_{n+1}| \le (a-x_n)^2 M$$

حال فرض می کنیم $e_n = |a-x_n|$ باشد آنگاه داریم

$$e_{n+1} \le e^2{}_n M$$

$$e_1 \le e^2{}_0 M$$

$$e_2 \le e^2{}_1 M \le (e^2{}_1 M)^2 M = e^4{}_0 M^3 = M^{-1}(e_0 M)^4 = M^{-1}(e_0 M)^{2^2}$$

$$e_3 \le e^2{}_2 M \le (e^2{}_1 M)^2 M = e^8{}_0 M^7 = M^{-1}(Me_0)^8 = M^{-1}(Me_0)^{2^3}$$

.

.

.

$$e_n \le M^{-1}(Me_0)^{2^n} \qquad (3.22)$$

این رابطه نشان می دهد که طرف راست وقتی که $n \to \infty$ به سمت صفر میل می کند اگر و فقط اگر $Me_0 = M|a-x_0| < 1$ باشد و این به معنای اثبات قضیه است .

مشاهداتی که از قضیه فوق می توانیم به ترتیب داشته باشیم عبارتند از اولاً :چه موقع روش همگراست و همگرایی خیلی سریع است؟ مادامیکه در رابطه (3.22) نما به صورت نمایی افزایش می یابد برای مثال اگر $Me_0 = 0.5$ باشد داریم :

$$e_5 \le M^{-1}(0.5)^{32} = M^{-1} \times 2.328... \times 10^{-10}$$

ثانیاً رابطه (3.22) زیاد عملی نیست که مورد استفاده قرار گیرد واز آن بتوان تخمینی برای x_0 یافت .

نکات قضیه به ما برای انتخاب x_0 کمکی نمی کند اما معین می کند که x_0 بایستی چگونه باشد که روش همگرا گردد .اما نهایتاً بیان می کند که x_0 بایستی بسیار نزدیک به ریشه واقعی انتخاب شود تا همگرا شود و همگرایی سریع باشد .

امایادآور می شویم که مفروضات قضیه آن است که f همه جا تعریف شده ودوبار پیوسته و مشتق پذیر باشد

.مضافاً اینکه فرض $M=\max_{x\in R}\left\{ |f''(x)| \Big/ 2\min_{x\in R}|f'(x)| \right\}$ نیز برقرار باشد .این موارد محدودیت زیادی است

اگر ممکن باشد ما درصدد برطرف نمودن این محدودیت هستیم . در زیر می خواهیم فرضیه پیوسته بودن مشتقات

مرتبه اول و دوم f را مدنظر قرار دهیم و به همان نتیجه برسیم .پس قضیه زیر را مد نظر قرار می دهیم :

قضیه 3-4 : فرض می کنیم $f\in C^2(I)$ و $a\in I\subset R$ یک ریشه f باشد و I یک بازه باز باشد . فرض می کنیم

$f'(a)\neq 0$ و x_n جوا ب تقریبی f به وسیله روش نیوتن باشد .آنگاه برای x_0 به اندازه کافی نزدیک به a داریم :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (3.23)$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a-x_{n+1}}{(a-x_n)^2} = -\frac{f''(a)}{2f'(a)} \qquad (3.24)$$

اثبات : از آنجا که $f'(a)\neq 0$ و f' پیوسته می باشد ما می توانیم یک بازه بسته در همسایگی a (حتماً یک بازه کوچک) بیابیم به طوری که $f'(x)\neq 0$ باشد .این بازه را J می نامیم .ناگفته نماند بدون نادیده گرفتن عمومیت مسئله می توان فرض نمود که $J\subset I$ وبرای هر $e>0$ $J=\{x|a-e\le x\le a+e\}$.به طوریکه $f'(x)\neq 0$ در بازه J باشد .

حال چون J یک بازه بسته است و f' دربازه J ناصفر می باشد و f'' در این بازه پیوسته است لذا نسبت زیر

$$M=\max_{x\in j}|f''(x)| \Big/ 2\min_{x\in j}|f'(x)|$$

محدود می باشد .

$x_0\in J$ را بعنوان تقریب اولیه انتخاب می کنیم بنابراین از روش نیوتن داریم.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

برای اینکه $x_1 \in J$ باشد بایستی x_0 خیلی به a نزدیک باشد .بنابه فرمول خطای نیوتن داریم :

$$a - x_1 = -\frac{1}{2}(a - x_0)^2 \frac{f''(z_0)}{f'(x_0)}$$

z_0 بین x_0, a می باشد ولذا $z_0 \in J$ است .لذا

$$|a - x_1| = \frac{1}{2}(a - x_0)^2 \frac{|f''(z_0)|}{|f'(x_0)|} \le (a - x_0)^2 \frac{\max_{x \in j} |f''(x)|}{2 \min_{x \in j} |f'(x)|} = (a - x_0)^2 M$$

اگر x_0 را طوری انتخاب کنیم که $M|a - x_0| < 1$ آنگاه داریم :

$$|a - x_1| \le (a - x_0)^2 M = |a - x_0|(|a - x_0|M) < |a - x_0|$$

این نشان می دهد که $x_1 \in J$ است چون که نسبت به x_0 به a نزدیک می باشد .به همین طریق x_2 نیز در بازه j وسرانجام دنباله x_n های ایجاد شده متعلق به j می شوند .بنابراین داریم :

$$|a - x_{n+1}| = \frac{1}{2}(a - x_n)^2 \frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|} \le (a - x_n)^2 M$$

بنابراین برای $e_n = |a - x_n|$ از قضیه 3-3 داریم $e_n \le M^{-1}(Me_0)^{2^n}$

بنابراین برای $Me_0 = M|a - x_0 < 1|$ نتیجه می گیریم که $\lim_{n \to \infty} e_n = 0$

یعنی $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ واین به معنای همگرایی است (رابطه (3.23)اثبات شد).

حال برای اثبات رابطه (3.24) در این قضیه داریم :

$$a - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(a - x_n)^2 \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

$$\frac{a - x_{n+1}}{(a - x_n)^2} = -\frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f(x_n)}$$

از آنجا که $\{x_n\}$ ایجاد شده متعلق به بازه J هستند لذا نتیجه می گیریم که $f''(a) \approx f''(z_n),\ f'(a) \approx f'(x_n)$ لذا

نتیجه می گیریم که :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a - x_{n+1}}{(a - x_n)^2} = -\frac{f''(a)}{2f'(a)}$$

14-3 چگونه مراحل تکرار روش نیوتن را متوقف کنیم ؟

درحقیقت روند تکرار روش نیوتن زمانی متوقف می گردد که خطا $a - x_n$ به اندازه کافی کوچک گردد اما درعمل دست یابی به a مقدور نیست وبهرحال چون $f'(a) \neq 0$. حال اگر C_n مقداری بین a و x_n فرض کنیم

داریم :
$$a - x_n = \frac{f(a) - f(x_n)}{f'(c_n)} = -f(x_n)/f'(c_n)$$

$$= -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\left(\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})}\cdot\frac{f'(x_{n-1})}{f'(c_n)}\right)$$

$$= (x_n - x_{n-1})\left(\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})}\cdot\frac{f'(x_{n-1})}{f'(c_n)}\right) = l_n(x_n - x_{n-1})$$

به طوری که ؛
$$l_n = \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})}\cdot\frac{f'(x_{n-1})}{f'(c_n)} \qquad (3.25)$$

اگر فرض کنیم روند همگرا باشد و $f'(a) \neq 0$ آنگاه می توان نتیجه گرفت که :

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim\left(\frac{f'(x_n)}{f(x_{n-1})}\cdot\frac{f'(x_{n-1})}{f'(c_n)}\right) = 1 \qquad (3.26)$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = 1$$

بنابراین می توان از محک $|x_n - x_{n-1}|$ که قابل محاسبه است برای پایان دادن به روند تکرار استفاده کرد.

اما در این باره نیز گرچه عملی است خالی از عدم اطمینان نیست .حالتهایی وجود دارد که $|x_n - x_{n-1}|$ بسیار کوچک است اما x_n به a خیلی نزدیک نیست .بعنوان مثال چنانچه $f'(x_n)$ بسیار بزرگتر از $f(x_n)$ باشد این

مسئله پیش خواهد آمد .در این صورت l_n در رابطه (3.25) دارای حد یک نیست بعنوان مثال اگر فرض کنیم

$l_n = 5$ باشد داریم : $e > 0$ معیار دقت است . $5|x_n - x_{n-1}| \le e$

دراین حالت می توان برای اطمینان بیشتر مقدار تابع در x_n را نیز در معیار پایان دادن تأثیر دهیم یعنی :

$$|f(x_n)| + |x_n - x_{n-1}| \le e/5$$

مثال 3-4 : ریشه مثبت معادله $f(x) = \cos x - x = 0$ را با استفاده از روش نیوتن رافسون تا 9رقم با معنی صحیح بیابید.

حل :

$$f(0) = 1,\ f(p/2) = -p/2$$

براساس قضیه مقدار میانی دارای حداقل یک ریشه در $[0, p/2]$ است .نمودار معادلات $y_1=x$ و $y_2=\cos x$ در شکل زیر نشان می دهد که در فاصله فوق فقط یک ریشه وجود دارد .

با انتخاب $x_0 = p/4$ می توان الگوریتم رافسون را برای مسئله فوق بصورت زیر نوشت .

$$f(x) = \cos x - x \Rightarrow f(x_n) = \cos x_n - x_n$$
$$f'(x) = -\sin x - 1 \Rightarrow f'(x_n) = -(\sin x_n + 1)$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1},\ n = 0,1,2,...$$

n=0 $\quad x_1 = x_0 + \dfrac{\cos x_0 - x_0}{\sin x_0 + 1} = p/4 + \dfrac{\cos p/4 - p/4}{\sin p/4 + 1} = 0.785398163$

n=1 $\quad x_2 = x_1 + \dfrac{\cos x_1 - x_1}{\sin x_1 + 1} = 0.739536134$

بقیه جوابها دا در جدول زیر آورده ایم :

N	x_n
0	0.785398163
1	0.739536134
2	0.739085178
3	0.739085133
4	0.739085133

مثال 3-5 : با استفاده از روش نیوتن رافسون ریشه معادله $x^4-3x^2+75x-10000=0$ را دربازه [-11,-10] تا پنج رقم اعشار بدست آورید .

$$f(x)=x^4-3x^2+75x-10000=0$$

f(-11)=3453 f(-10)=-1050

$$f'(x)=4x^3-6x+75$$

با استفاده از $x_0=-11$ داریم :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x^4{}_n-3x^2{}_n+75x_n-10000}{4x^3{}_n-6x_n+75},n\geq 0$$

n=0 $x_1=x_0-\frac{x^4{}_0-3x^2{}_0+75x_0-10000}{4x^3{}_0-6x_0+75}=-10.3338$

n=1 $x_2=-10.3268$

n	x_{n+1}
0	-10.3338
1	-10.3268
2	-10.2618
3	-10.2610

تمرین ها :

1- فرض کنید $f(x)=-x^3-\cos x$ و $x_0=-1$ از روش نیوتن برای یافتن x_2 استفاده کنید .آیا می توان از $x_0=0$ استفاده نمود ؟

2- فرض کنید ln(x-1)+cos(x-1)=0 در بازه [1/3,2] دارای یک ریشه باشد . با روشهای وتری نابجایی و نیوتن جواب آنرا با دقت 10^{-5} بیابید .

3- ثابت کنید شرط کافی برای همگرایی روش نیوتن رافسون برای حل f(x)=0 عبارتست از $|f''(x)\,f(x)|<[f'(x)]^2$.

4- معادله $x^2-10\cos x=0$ دارای جواب ± 1.3793646 است از روش نیوتن برای تقریب جوابها با دقتی در حدود 10^{-5} با مقادیر اولیه زیر استفاده کنید .

الف) $x_0=-100$ ب) $x_0=-25$ پ) $x_0=100$ ت) $x_0=25$

5- کوچکترین ریشه مثبت $\cos x=x^2$ را با معیار دقت 10^{-2} با روش دلخواه بیابید .

6- با استفاده از روش نیوتن رافسون الگوریتمی برای یافتن ریشه دوم عدد صحیح N بنویسید؟ سپس برای N=18 حل کنید .معیار دقت حل مسئله 10^{-4} می باشد .

7- برای $\frac{1}{N}$ و $N^{\frac{1}{3}}$ روش تکراری نیوتن رافسون بنویسید(N اعداد حقیقی مثبت هستند).

3-15 روش نقطه ثابت (یا تکرار ساده)

یک نقطه ثابت برای تابع داده شده g عددی چون a است که به ازای آن : $a=g(a)$

در این قسمت به یافتن جوابهای تقریبی برای معادله f(x)=0 ، با روش نقطه ثابت می پردازیم .برای اینکار می توان به طرق متعدد ، تابعی چون g(x) با نقطه ثابت a چنان بیابیم که بعنوان مثال g(x)=x-f(x) گردد .برعکس هرگاه تابعی چون g . نقطه ای ثابت در a داشته باشد دراین صورت تابع تعریف شده با :

f(x)=x-g(x) یک ریشه در a دارد .

قضیه 3-5 : فرض می کنیم $g\in C[a,b]$ وبه ازای همه مقادیر $x\in[a,b]$ ، $a\le g(x)\le b$ آنگاه

الف: g دارای حداقل یک نقطه ثابت $a\in[a.b]$ است .

ب: اگر مقداری مانند $g<1$ وجود داشته باشد به طوری که : (3.27) $\quad |g(x)-g(y)|\le g\,|x-y|$

به ازای جمیع مقادیر x,y دربازه [a,b] برقرار باشد آنگاه :

I - a منحصربفرد است .

II- روش تکراری $x_{n+1}=g(x_n)$ به ازای هرتقریب اولیه ای $x_0\in[a,b]$ به a همگراست .

III- و رابطه خطای روش عبارتست از (3.28) $\quad |a-x_n|\le\frac{g^n}{1-g}|x_1-x_0|$

اثبات : تابع h(x) را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$h(x)=g(x)-x$$

آنگاه $\quad h(b)=g(b)-b\le 0$

و $\quad h(a)=g(a)-a\ge 0$

بنابراین ،قضیه مقدار میانی نشان می دهد که h دارای یک ریشه a در بازه [a,b] است .لذا $h(a)=0$ نشان میدهد که $a=g(a)$ است واین بمعنای اثبات (الف) است .

برای اثبات منحصربفردبودن نقطه ثابت ، فرض می کنیم که رابطه (3.27) برقرار است و هم چنین نقطه ثابت دوم b در بازه [a,b] موجود باشد وآنگاه طبق تعریف داریم :

$$\begin{aligned} a&=g(a)\\ b&=g(b)\end{aligned} \qquad (3.29)$$

تفاضل دو رابطه فوق را درنظر میگیریم وبا استفاده از (3.27) داریم :

$$|a-b|=|g(a)-g(b)|\le g\,|a-b|$$
$$\Rightarrow |a-b|(1-g)\le 0$$

مادامی که $0 < g < 1$ باشد از رابطه فوق نتیجه می گیریم که $|a-b| \le 0$ لذا نتیجه می گیریم که $a = b$ است

واین بمعنای منحصربفرد بودن a است . حال بادر نظر گرفتن

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (3.30)$$

وبا استفاده از رابطه (3.29) داریم :

$$a = g(a) \qquad (3.31)$$

لذا داریم :

$$|a - x_{n+1}| = |g(a) - g(x_n)| \le g\,|a - x_n|$$

اگر $e_n = |a - x_n|$ فرض کنیم از رابطه فوق نتیجه می گیریم :

$$e_{n+1} \le g e_n, n \ge 0$$

از رابطه فوق می توان نتیجه گرفت که :

$$e_n \le g^n e_0 \qquad (3.32)$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n \le \lim_{n\to\infty} g^n e_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |a - x_n| = 0$$

واین بمعنای همگرایی روش نقطه ثابت است .

برای اثبات قسمت آخر قضیه خطای e_0 رادر نظر می گیریم

$$e_0 = |a - x_0| = |a - g(x_0) + x_1 - x_0| \le |a - g(x_0)| + |x_1 - x_0| = |g(a) - g(x_0)| + |x_1 - x_0|$$

با استفاده از رابطه (3.27) داریم

$$|a - x_0| \le g\,|a - x_0| + |x_1 - x_0|$$

$$|a - x_0|(1-g) \le |x_1 - x_0|$$

$$|a - x_0| \le \frac{1}{1-g}|x_1 - x_0| \qquad (3.33)$$

با استفاده از رابطه (3.32) داریم : $e_n \le \frac{g^n}{1-g}|x_1 - x_0|$

قضیه 3-6 :فرض می کنیم $g\in C[a,b]$ وبه ازای همه مقادیر $x\in[a,b]$ $a\le g(x)\le b$ آنگاه اگر g در بازه [a,b] مشتق پذیر باشد و

$$\max_{x\in[a,b]}|g'(x)| = g < 1 \qquad (3.34)$$

باشد آنگاه :

الف: a منحصربفرد است و روش تکراری $x_{n+1} = g(x_n)$ همگراست .

ب: رابطه $\lim_{n\to\infty}\frac{a - x_{n+1}}{a - x_n} = g'(a)$ برقرار است .

اثبات : رابطه (3.34) رابطه (3.27) را نشان می دهد .لذا قسمت الف قضیه نظیر قضیه 3-5 اثبات می شود ، تنها بایستی قسمت ب را اثبات می کنیم .

با استفاده از رابطه (3.30) و(3.31) در قضیه 3-5 داریم : $a - x_{n+1} = g(a) - g(x_n) = g'(z_n)(a - x_n)$

لذا : $\frac{a - x_{n+1}}{a - x_n} = g'(z_n) \to g'(a)$

ازآنجا که x_n به a همگراست لذا $z_n \to a$ میل خواهد کرد .

3-16 الگوریتم نقطه ثابت

الگوریتم روش نقطه ثابت برای حل f(x)=0 وبا فرض اینکه می توان x=g(x) را بصورت منحصربفرد یافت و با تقریب اولیه داده شده x_0 و معیار دقت e داده شده عبارتست از :

1- برای n=0

2- محاسبه کن $x_{n+1} = g(x_n)$

3- اگر $|x_{n+1} - x_n| \le e$ برو به مرحله چهارم درغیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله دوم

4- روند را متوقف کن .

17-3 نمایش هندسی روش نقطه ثابت : $x=g(x)$

$y_1=x \,,\, y_2=g(x)$

دو منحنی y_2,y_1 را رسم می کنیم و محل تلاقی این دو منحنی ریشه مورد نظر می باشد.

مثال 3-6 : برای حل معادله زیر یک روش نقطه ثابت مناسب بنویسید:

$$f(x)=2\tan x-x-1=0$$

حل: اگر رابطه فوق را بصورت زیر درنظر بگیریم $x=2\tan x-1$

$$\therefore\ g(x)=2\tan-1 \Rightarrow |g'(x)|=2|\sec^2 x|>1$$

اما اگر : $2\tan x=1+x \Rightarrow \tan x=\dfrac{1+x}{2}$

یا : $x=\tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right) \Rightarrow g(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right)$

$$|g'(x)|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{1+\dfrac{(1+x)^2}{4}}\right|=\left|\frac{2}{4+(1+x)^2}\right|<1$$

مثال 3-7 : رابطه تکراری زیر مفروض است : $x_{n+1}=g(x_n)$

درصورتیکه $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$ باشد آنگاه می توان نتیجه گرفت که $0\le g(x)\le \frac{1}{4}$ برای $x\ge 0$ است.بنابراین

$g(x)\in[0,\frac{1}{2}]$ بر $x\in[0,\frac{1}{2}]$ است .از آنجا که g(x) پیوسته در بازه [0,1/2] است در این بازه یک نقطه ثابت

وجود دارد .چون g پیوسته و مشتق پذیر است در بازه [0,1/2] و $|g'(x)|=\left|-\frac{1}{2}e^{-x}\right|\le\frac{1}{2}<1$ برای جمیع

$x\in[0,\frac{1}{2}]$ یک نقطه منحصربفرد ثابت در [0,1/2] موجود است .لذا طبق قضیه 3-6 روش نقطه ثابت همگراست

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}e^{-x_n}, n\ge 0 \quad .$$

3-18 روش نقطه ثابت با همگرایی مراتب بالاتر

قضیه 3-7 : روش نقطه ثابت $x_{n+1}=g(x_n)$ مفروض است .بطوریکه g ، p مرتبه پیوسته و مشتق پذیر باشد و $a=g(a)$.اگر : $g'(a)=g''(a)=...=g^{(p-1)}(a)=0$ اما $g^{(p)}(a)\ne 0$ باشد آنگاه روش نقطه ثابت همگراست و دارای مرتبه همگرایی P به ازای x_0 به اندازه کافی نزدیک به a است .

اثبات : در حقیقت ازآنجا که $g'(a)=0<1$ می باشد خود بیانگر آنست که روش تکراری برای x_0 به حد کافی نزدیک به a همگرا می باشد .تنها نیاز داریم سرعت همگرایی بالا را اثبات نمائیم .با استفاده از سری تیلور داریم :

$$g(x_n)=g(a)+(x_n-a)g'(a)+\frac{1}{2}(x_n-a)^2g''(a)+...+\frac{(x_n-a)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}_{g(a)}+\frac{(x_n-a)^p}{p!}g^{(p)}_{(z_n)}$$

z_n بین x_n و a قرار دارد . با توجه به فرض مشتقات g(x) تا مرتبه (p-1) ام همه صفر هستند لذا نتیجه می گیریم : $g(x_n)-g(a)=\frac{(x_n-a)^p}{p!}g^{(p)}_{(z_n)}$ بنابراین : $\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^p}=\frac{1}{p!}g^{(p)}_{(z_n)}$

لذا نتیجه می گیریم که سرعت همگرایی روش مرتبه p ام است .

مثال 3-8 : دنباله های تابعی ذیل را درنظر بگیرید :

الف : $$x_{n+1}=\frac{x_n(x^2{}_n+3a)}{3x^2{}_n+a}, x\ge 0$$

ب: $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{x^2{}_n}$

می خواهیم درصورت وجود مقدار همگرایی ومرتبه آنرا تعیین کنیم .

حل الف : برای دنباله الف ، $g(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ می باشد وقتی که $n\to\infty$ درصورت وجود نقطه ثابت آن برابر a می باشد . $a=\frac{a(a^2+3a)}{3a^2+a}$ ونتیجه می گیریم $a=\sqrt{a}$ می باشد ، پس دنباله به $\sqrt{a}$ همگراست هم چنین چون $g'(\sqrt{a})=g''(\sqrt{a})=0$ است و $g'''(\sqrt{a})\neq 0$ می باشد دنباله الف همگرا به $a=\sqrt{a}$ از مرتبه سوم است .

حل ب : برای دنباله تابعی ب داریم $g(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{x^2}$ وقتی که $n\to\infty$ نقطه ثابت آن درصورت وجود برابر $a=\frac{2}{3}a+\frac{1}{a^2}$ می باشد در نتیجه $a=\sqrt[3]{3}$ هم چنین چون $g'(\sqrt[3]{3})=0$ و $g''(\sqrt[3]{3})\neq 0$ می باشد دنباله همگرا به $\sqrt[3]{3}$ است و از مرتبه دو می باشد .

ساده ترین راه برای ساختن یک مسئله نقطه ثابت برای f(x)=0 عبارتست از تفریق یک مضرب f(x) (که در ریشه آن حذف می شود) از x به این ترتیب داریم : $x_n=g(x_{n-1}), n\geq 1$

که در آن g به شکل $g(x)=x-f(x)\,f(x)$ می باشد .

در اینجا f تابعی مشتق پذیر است و می توان بعداً آنرا انتخاب کرد .برای اینکه بعنوان مثال روش تکراری بدست آمده از g ، همگرا و همگرایی آن مرتبه دوم باشد ، لازم است که $g'(a)=0$ باشد .چون :

$$g'(x)=1-f'(x)\,f(x)-f'(x)f(x)$$

در $x=a$ داریم : $g'(a)=1-f'(a)f(a)=0$ لذا $f(a)=\frac{1}{a}$

می باشد .یک انتخاب معقول این است که $f(x)=\frac{1}{f'(x)}$ انتخاب کنیم .در اینصورت روش طبیعی برای تولید

همگرایی مرتبه دوم عبارت است از : $x_n = g(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

که همان روش نیوتن رافسون است .

در بحث های پیش محدودیت $f'(a)\neq 0$ اعمال کردیم اما اگر $f'(a)$ همزمان با $f(x_n)$ به صفر میل کند مشکلاتی در روند بکارگیری روش نیوتن ایجاد می شود برای مرتفع ساختن این مشکلات تعریف زیر را درنظر می گیریم :

تعریف 3-4 : یک جواب a معادله $f(x)=0$ ریشه تکراری مرتبه m نامیده میشود هرگاه به ازای $x\neq a$ بتوانیم بنویسیم : $f(x)=(x-a)^m q(x)$ که در اینجا : $\lim_{x\to a} q(x)\neq 0$

قضیه 3-8 : $f\in C^1[a,b]$ یک ریشه ساده a در (a,b) دارد اگر و فقط اگر $f(a)=0$ اما $f'(a)\neq 0$

اثبات : هرگاه f یک ریشه ساده در a داشته باشد ، در اینصورت $f(a)=0$ است .و $f(x)=(x-a)q(x)$ خواهد بود که دراینجا برقرار است چون $f\in C^1[a.b]$ است .

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)=\lim [q(x)+(x-a)q'(x)]=\lim_{x\to a} q(x)\neq 0$$

برعکس هرگاه $f(a)=0$ ولی $f'(a)\neq 0$ باشد از بسط تیلور f حول a داریم :

$$f(x)= f(a)+ f'(z_x)(x-a)$$

که دراینجا z_n بین x و a قرار دارد چون $f\in C^1[a,b]$ است .

$$\lim_{x\to a} f'(z_n)= f'(\lim_{x\to a} z_n)= f'(a)\neq 0$$

بافرض اینکه $q=f'(z_n)$ است خواهیم داشت $f(x)=(x-a)q(x)$ که در اینجا $\lim_{x\to a} q(x)\neq 0$.بنابراین f یک ریشه ساده a دارد .

با توجه به مسائل فوق الذکر نتیجه می گیریم که چنانچه تابع f(x)=0 دارای ریشه تکراری باشد روش نیوتن رافسون از لحاظ همگرایی مشکل پیدا می کند .بعنوان مثال چنانچه فرض کنیم f(x)=0 دارای m ریشه تکراری a باشد یعنی : $f(x)=(x-a)^m q(x)$

تابع $u(x)$ رابصورت زیر را درنظر می گیریم : $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

بنابراین داریم :

$$u(x)=\frac{(x-a)^m q(x)}{m(x-a)^{m-1}q(x)+(x-a)^m q'(x)}$$
$$=(x-a)\frac{q(x)}{mq(x)+(x-a)q'(x)}$$

لذا نتیجه می گیریم که u(x) نیز یک ریشه a خواهد داشت وچون $q(a)\neq 0$ است بنابراین :

$$\frac{q(a)}{mq(a)+(a-a)q(a)}=\frac{1}{m}\neq 0$$

پس u(x) یک ریشه ساده از مرتبه تکراری یک دارد بنابراین می توان روش نیوتن را برای تابع u(x) بکاربرد

یعنی : $x_{n+1}=x_n-\dfrac{u(x_n)}{u'x_n}$

لذا داریم : $g(x)=x-\dfrac{u(x)}{u'(x)}=x-\dfrac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2-[f(x)][f''(x)]\}/[f'(x)]^2}$

ویا $g(x)=x-\dfrac{f(x)\,f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)\,f''(x)}$

با توجه به رابطه فوق $g'(a)=0$ میشود وبا توجه به قضیه 3-7 روش نیوتن رافسون برای حل $f(x)=(x-a)^m q(x)=0$ دارای مرتبه همگرایی دو می باشد .

تمرین ها نقطه ثابت

1- با استفاده از عملیات جبری نشان دهید که $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ به هریک از اشکال زیر دارای نقطه ثابت a می باشد .

$$(a) \quad g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}} \qquad (b) \quad g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(c) \quad g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (d) \quad g_4(x) = \left(\frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}\right)$$

2- اگر هریک از توابع g در تمرین اول را با انتخاب $x_0=1$ وبه ازای $n=0,1,2,3$ ؛ $x_{n+1} = g(x_n)$ درنظر بگیریم کدام تابع تقریب بهتری را از جواب بدست می دهد ؟

3- با استفاده از روش ثابت الگوریتم مناسبی برای معادله $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ در بازه $[1,2]$ بیابید و با استفاده از این الگوریتم با دقت 10^{-2} جواب تقریبی را محاسبه کنید درصورتیکه $x_0=1$ باشد .

4- برای هریک از معادلات ذیل یک روش تکراری مناسب که به جواب مثبت معادله همگرا شود بنویسید و آنگاه جواب تقریبی را با دقت 10^{-5} بیابید .

$$(a) \quad 3x^2 - e^x = 0 \qquad\qquad (b) \quad x - \cos x = 0$$

$$(c) \quad x^2 + 10\cos x = 0$$

5- روش نقطه ثابت $x_{n+1} = 1 + e^{-x_n}$ رادرنظر بگیرید .نشان دهید این روش همگراست اگر $x_0 \in [1,2]$ باشد .برای رسیدن به دقت 10^{-5} چند دور تکرار لازم است .

فصل چهارم

4- فصل درونیابی

در این فصل به مسئله تقریب یک تابع داده شده بوسیله یک رده از توابع ساده تر که عمداً چند جمله ایها هستند می پردازیم .دو هدف عمده در استفاده از درونیابی با چندجمله ای های درونیاب وجود دارد . هدف اول اینست که تابعی را بازسازی می کنیم بطور صریح داده نشده و تنها مقادیر تابع (ویا مشتقات مراتب معینی از تابع) در مجموعه ای از نقاط معلوم می باشد . نقاط را گره ها یا نقاط جدولی ویا شناسه ها نامیده میشوند .هدف دوم اینست که تابع f(x) را با چندجمله های درونیاب p(x) جایگزین نمائیم .بطوریکه عملیات عامی نظیر پیداکردن ریشه ها ، مشتق گیری و انتگرال گیری و غیره که برای تابع f(x) مدنظر می باشد بوسیله چندجمله ای p(x) عملی سازیم .

اهمیت چند جمله ای ها در اینست که توابع پیوسته رابطور یکنواخت تقریب می کنند برای هر تابع پیوسته و تعریف شده دریک بازه بسته و کراندار ، یک چندجمله ای وجود دارد که هرقدر بخواهیم به تابع مفروض نزدیک است . این نتیجه در قضیه ذیل بیان شده است .

قضیه 4-1 : **(قضیه تقریب وایرشتراس)** :

فرض کنید که f بر [a,b] پیوسته و تعریف شده باشد .به ازای هر $e > 0$ چندجمله ای مانند p(x) وجود دارد که بر [a,b] تعریف شده است ودارای این ویژگی است که به ازای هر $x \in [a,b]$ $|f(x) - p(x)| < e$

اثبات این قضیه را می توان درهرکتاب آنالیز حقیقی یافت .

تعریف 4-1 : یک چند جمله ای p(x) را چندجمله ای درونیاب نامیده می شود اگر مقادیر p(x) (ویا مقادیر مراتب معینی از مشتقات آن) بر مقادیر تابع f(x) و(یا مقادیر مراتب معینی از مشتقات تابع) .دریک نقطه ویا در تعدادی از نقاط جدولی منطبق باشد .

بعنوان مثال اگر چندجمله ای p(x) بسط سری تیلور تابع f(x) حول نقطه x_0 ، $x_0 \in [a,b]$ باشد در این صورت

$$p(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\, f''(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\, f^n(x_0) \qquad (4.1)$$

آنگاه p(x) ممکن است یک چندجمله ای درونیاب درجه n نامیده شود که در شرایط :

$$p^{(k)}{}_{(x_0)} = f^{(k)}{}_{(x_0)} \;,\; k = 0(1)n \qquad (4.2)$$

صدق می نماید .

جمله ی :

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\, f^{(n+1)}(z)\,,\; x_0 < z < x$$

که در رابطه (2.1) نـادیده گرفته شده است را باقیمانده ویا خطای قطع کردن نامیده میشود . تعداد جملات رابطه (2.1) ممکن است بوسیله دقت حل مسئله تعیین شوند .اگر خطای $e > 0$ معلوم باشد سری (2.1) در جمله $f^{(n)}{}_{(x_0)}$ قطع شود آنگاه :

$$\frac{1}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}\left|f^{(n+1)}(z)\right| \le e$$

یا

$$\frac{1}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} M_{n+1} \le e \qquad (4.3)$$

بطوریکه $M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$.برای یک e داده شده در (4.3) می توان n را تعیین نمود واگر n از پـــیش تعیین شود می توان e را تعیین کرد .هنگامی که n و e هردو داده شده باشند رابطه (4.3) کران بالایی روی $(x\text{-}x_0)$ بدست میدهد .

مثال 1-4 : برای تابع $f(x) = e^{-x}$ با استفاده از سری تیلور حول $x_0=0$ ، یک چند جمله ای p(x) را تقریب بزنید و :

الف: چنانچه p(x) از چهارجمله اول بدست آمده باشد وخطای تقریب بعد از راند کردن از 10^{-6} کمتر باشد آنگاه x را تعیین کنید .

ب : برای $0 \le x \le 1$ وبرای رسیدن به دقت 10^{-10} در تقریب تعداد جملاتی که لازم می باشد بیابید .

حل الف :
$$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f^{(r)}(x) = (-1)^r e^{-x}$$
$$f^{(r)}(0) = (-1)^r \quad , r = 0,1,...$$

بنابراین از رابطه (4.3) داریم : $x^4 M_4 < 24 \times 5 \times 10^{-7}$

$$M_4 = \max_{0 \le x \le 1} \left| f^{(4)}(x) \right| = \max_{0 \le x \le 1} \left| e^{-x} \right| = 1$$

لذا داریم $x < 0.06$ یا $x^4 < 120 \times 10^{-7}$

حل ب: از رابطه (4.3) داریم $\frac{1}{(n+1)!} < 5 \times 10^{-11}$ با حل رابطه فوق داریم : $n \ge 14$

استفاده از چند جمله ای تیلور در مورد تقریب توابع پیوسته عملی است اما کارایی وسیعی ندارند زیرا هرچند که چندجمله ای های تیلور هرقدر که ممکن باشد و به تابع داده شده در نقطه ای معین منطبق باشد ، ولی دقت آنها در مورد تقریب توابع در نزدیکی همان نقطه ایست که حول آن بسط داده شده اند . یک چندجمله ای درونیاب مناسب تقریبی نسبتاً دقیق را در تمام طول یک بازه بدست میدهند .عموماً چندجمله ایهای تیلور این کار را نمی کنند . مثال زیر ضعف چند جمله ایهای تیلور را در تقریب نشان میدهد .

مثال 4-2 : چند جمله ایهای تیلور را با درجات مختلف برای تقریب $f(3) = \frac{1}{3}$ درنظر می گیریم . تابع مورد نظر $f(x) = \frac{1}{x}$ است که چندجمله ای های تیلور حول $x_0=1$ بسط می دهیم .چون $f(x) = x^{-1},\ f'(x) = -x^{-2},\ f''(x) = (-1)^2 2x^{-3}$ وبطور کلی $f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\, x^{-k-1}$ است .بنابراین چند جمله ای درجه n تیلور عبارتست از :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k$$

حال اگر بخواهیم $f(3) = \frac{1}{3}$ را با استفاده از $p_n(3)$ و به ازای مقادیر صعودی n بدست آوریم درمی یابیم که تغییرات آنها فاحش هستند . مقادیر را در جدول زیر آورده ایم .

N	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	−1	3	−5	11	−21	43	-85

با توجه به جدول فوق درمی یابیم که چندجمله ایهای تیلور دارای این ویژگی هستند که تمام اطلاعات مورد استفاده در تقریب فقط در نقطه x_0 متمرکز شده اند . عموماً این مشکل استفاده از چندجمله ای های تیلور را محدود به مواردی می کند که تنها نیاز به تقریبهایی در نقاط نزدیک به x_0 است .برای مقاصد محاسباتی معمولاً بهتر است که از روشهایی استفاده شود که شامل اطلاعاتی از نقاط مختلف باشند .

درحالت کلی اگر (n+1) نقطه متمایز $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$ را داشته باشیم مسئله ما یافتن p(x) است که در شرایط درونیابی ذیل صدق می نماید :

$$(i) \quad p(x_i) = f(x_i) \quad , i = 0(1)n \qquad (4.4)$$

$$(ii) \quad p(x_i) = f(x_i) \qquad (4.5)$$

$$p^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)\,,\ k = 0,1,\ldots m_i \ ,\ \ i = 0(1)n$$

شرط (4.4) چند جمله ای درونیاب لاگرانژ را نتیجه میدهد و چنانچه شرط (4.5) را بکارگیریم و $m_i=1$ باشد چندجمله ای درونیاب «هرمیت» را داریم و چنانچه مشتقات مراتب بالاتر در رابطه (4.5) را مدنظر قرار دهیم چندجمله ای های درونیاب «بوسان» (Osculating Polynomial)که تعمیمی از چندجمله ایهای تیلور و چندجمله ایهای لاگرانژ است بدست خواهد داد .

2-4 درونیابی های لاگرانژ و نیوتن

فرض می کنیم تابع f(x) بر بازه [a,b] پیوسته باشد و همچنین فرض می کنیم که (n+1) نقطه مجزا $a \le x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$ دربازه [a,b] را درنظر می گیریم . فرض می کنیم مقادیر تابع f(x) درنقاط فوق معلوم باشند.ما درصددیافتن چندجمله ای :

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (4.5)$$

هستیم که در شرایط درونیابی $i=0(1)n$ $\quad p(x_i)=f(x_i)$ صدق می نماید .حال چندجمله ای $p(x)$ موجود

است اگر دترمینان «واندرمور» ذیل ناصفر باشد :

$$v(x_0,x_1,\dots x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x^2 & . & . & . & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & & & & x_1^{\,n} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & . & . & . & x_n^{\,n} \end{vmatrix}\neq 0$$

ما فرض می کنیم :

$$v(x_0,x_1,\dots x_{n-1},x)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & . & . & . & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & & & & x_1^{\,n} \\ . & & & & & & \\ . & x_{n-1} & x^2{}_{n-1} & . & . & . & x^n{}_{n-1} \\ 1 & x & x^{\,2} & . & . & . & x^{\,n} \end{vmatrix}\neq 0$$

با استفاده از خاصیت دترمینانها داریم :

$$v(x_0,x_1,\dots x_{n-1},x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})A$$

بطوریکه A یک ثابت است با مقایسه ضریب x^n داریم که :

$$A=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & . & . & . & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & & & & x_1^{n-1} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 1 & x_{n-1} & x^2{}_{n-1} & & & & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

بنابراین :

$$v(x_0,x_1,\dots,x_n)=v(x_0,x_1,\dots x_{n-1})\prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)$$

چنانچه بصورت بازگشتی استفاده کنیم داریم :

$$v(x_0,x_1,\dots,x_n)=\prod_{\substack{i,j=0\\ i>j}}^{n}(x_i-x_j)\neq 0$$

رابطه فوق مخالف صفر است چون که x_i ها مجزا هستند ، تا اینجا نشان دادیم که دترمینان واندرمور ناصفر است یعنی در رابطه (4.5) با استفاده از شرایط درونیابی می توان $a_0,\ldots,a_n$ را بدست آورد .یعنی p(x) وجود دارد . حال در ذیل بایستی ثابت کنیم که p(x) منحصربفرد است .فرض می کنیم که برای (n+1) نقطه متمایز فوق دو چند جمله ای نظیر p(x) و q(x) موجود باشد بطوریکه در شرایط :

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i)\ ,\ i=0(1)n \\ q(x_i) &= f(x_i)\ ,\ i=0(1)n \qquad (4.6) \end{aligned}$$

صدق می نماید . چند جمله ای زیر را درنظر می گیریم :

$$Q(x)=p(x)-q(x) \qquad (4.7)$$

چون p(x) و q(x) چندجمله ای های ماکزیمم درجه n می باشند آنگاه Q(x) نیز یک چند جمله ای درجه حداکثر n می باشد و در شرایط (4.6) صدق می نماید .

$$Q(x)=p(x_i)-q(x_i)\ \ ,\ \ i=0(1)n \qquad (4.8)$$

بنابراین Q(x) یک چند جمله ای است که درجه آن حداکثر n می باشد . لذا با توجه به رابطه (4.8) ، Q(x) دارای (n+1) ریشه $x_0,x_1,\ldots x_n$ است .اما ما می دانیم که Q(x) یک چند جمله ای حداکثر از درجه n است و بایستی دارای n ریشه باشد (چه بصورت حقیقی یا مختلط ویا تعدادی تکراری). لذا نتیجه می گیریم که متناقض می باشد و نتیجه می گیریم که : $Q(x)\equiv 0$

باشد .بنابراین p(x)=q(x) می باشد . واین بمعنای منحصربفرد بودن چندجمله ای های درونیاب است .

بنابراین چندجمله ای درونیاب که به دو طریق متفاوت بدست می آیند ممکن است در فرم متفاوت باشند اما مشابه همدیگر هستند . از لحاظ شکل ، چندجمله ای های درونیاب ، چندجمله ای لاگرانژ ویا نیوتن با تفاضل تقسیم شده نامیده میشوند .که در قسمتهای بعدی بدانها می پردازیم .

3-4 درون یابی لاگرانژ

فرض می کنیم تابع f(x) در فاصله [a,b] پیوسته باشد و همچنین فرض کنیم که (n+1) نقطه مجزا در این فاصله بصورت زیر داریم که الزاماً متساوی الفاصله نیستند: $a \le x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$

و مقادیر تابع f(x) در این نقاط معلوم می باشند .ما درصدد یافتن چندجمله ای درجه n ام ، $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ هستیم که در شرایط زیر صدق کند :

$$p(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 0(1)n$$

برای آسانی کار ، ابتدا حالت خطی آن را درنظر می گیریم .

درون یابی خطی : a_0, a_1 مقادیر ثابت هستند و درفاصله $[x_0, x_1]$ داریم :

$$P(x) = a_0 + a_1 x \qquad (4.9)$$
$$P(x_0) = f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 \qquad (4.10)$$
$$P(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 \qquad (4.11)$$

$$\begin{vmatrix} p(x) & 1 & x \\ f(x_0) & 1 & x_0 \\ f(x_1) & 1 & x_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ (حول سطر اول بسط می دهیم)

$$p(x)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x_0 - x) = 0$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$$

جملات اساسی لاگرانژ عبارتند از :

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \& \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$
$$P(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1)$$

جملات اساسی لاگرانژ دارای خاصیت ذیل هستند :

$$\left.\begin{matrix} L_0(x_0) = 1 \ \& \ L_0(x_1) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \ \& \ L_1(x_0) = 0 \end{matrix}\right\} \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \ne j \end{cases}$$

اکنون درصدد یافتن یک چند جمله ای درجه n هستیم که از تمامی نقاط فوق بگذرد ، این چند جمله ای تقریبی برای یافتن f(x) است و در نقاط فوق الذکر تابع f(x) و چند جمله ای p(x) برهم منطبق هستند ، یعنی :

$$f(x_i) = p(x_i) \;\; , \;\; i = 0,1,\dots,n$$

با تعمیم حالت خطی چند جمله ای اساسی لاگرانژ درحالت کلی را این چنین تعریف می کنیم :

$$\begin{aligned} L_i(x) &= C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \\ &= C_i \prod_{\substack{j=0 \\ \& j\neq i}}^{n} (x-x_j) \end{aligned}$$

$$C_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad , \quad i = 0,1,\dots,n$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

جملات اساسی لاگرانژ دارای خاصیت : $L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ \& j\neq i}}^{n} \frac{(x_i-x_j)}{(x_i-x_j)} = 1$ هستند .

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i) \quad , \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_i-x_j)}$$

4-4 خطای قطع کردن :

می دانیم که اگر $x=x_0$ یا $x=x_1$ باشد آنگاه :

$$\begin{aligned} E_1(f,x) &= f(x) - p(x) = 0 \\ E_1(f,x) &= 0 \end{aligned}$$

اما اگر $x \in [a,b]$ و x_1 و $x \neq x_0$ ، برای این x ما یک تابع g(t) را چنین تعریف می کنیم :

$$g(t) = f(t) - p(t) - [f(x) - p(x)]\frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)} \qquad (4.12)$$

به آسانی می توان دریافت که $g(t)=0$ در $(t=x\ , t=x_0\ ,t=x_1)$ است. از رابطه (4.12)دوبار نسبت به t مشتق می گیریم :

$$g'(t)= f'(t)-p'(t)-[f(x)-p(x)]\left\{\frac{t-x_1+t-x_0}{(x-x_0)(x-x_1)}\right\}$$
$$g''(t)= f''(t)-[f(x)-p(x)]\left\{\frac{2}{(x-x_0)(x-x_1)}\right\}$$

با استفاده از قضیه رول اگر g(t) در فاصله $[x_0,x_1]$ پیوسته و در (x_0,x_1) مشتق پذیر باشد واگر $g(x)=g(x_1)=g(x_0)=0$ پس حداقل یک نقطه مانند z_1 در فاصله (x_0,x_1) موجود است بطوریکه $g''(z)=0$

$$0= f''(z)-(f(x)-p(x))\frac{2}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

حال رابطه بالارا حل می کنیم :

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1)\, f''(z) \qquad \& \qquad \min(x_0,x_1,x)<z<\max(x_0,x_1,x)$$

اگر فرض کنیم

$$M_2=\max_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|$$

باشد ، داریم :

$$|E_1(f,x)|=\left|\frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1)\, f''(z)\right|$$
$$|E_1(f,x)|\le\frac{1}{2}\max_{x_0\le x\le x_1}|(x-x_0)(x-x_1)|.M_2$$

بنابراین عبارت $|(x-x_0)(x-x_1)|$ در نقطه $x=\frac{(x_0+x_1)}{2}$ ماکزیمم است .یعنی :

$$\begin{aligned}|E_1(f,x)| &\le \frac{1}{2}\left|\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_1\right)\right|.M_2\\ &\le \frac{1}{2}\left|\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)\right|.M_2\\ &\le \frac{1}{8}(x_1-x_0)^2 M_2 \qquad (4.13)\end{aligned}$$

اگر x ها متساوی الفاصله باشند : $|E_1(f,x)| \le \frac{h^2}{8}M_2$

بنابراین برای حالت کلی داریم :

$$E_n(f,x)=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z)\ ,\ \min\{x_0,x_1,...,x_n,x\}<z<\max\{x_0,x_1,...,x_n,x\}$$

$$|E_n(f,x)| \le \max\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|.M_{n+1}$$

$$x_0 \le x \le x_n$$

$$M_{n+1}=\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|\ ,\ x\in\{x_0,x_1,...,x_n\}$$

حال داریم :

$$|x-x_i| \le |x_n-x_0\ \ ,i=0(1)n|$$

$$|E_n(f,x)| \le \frac{|x_n-x_0|^{(n+1)}}{(n+1)!}M_{n+1} \qquad (4.14)$$

مثال 4-3 : با استفاده از فرمول لاگرانژ وبا استفاده از اینکه sin(0.1)=0.09983 و sin(0.2)=0.19867 یک مقدار برای sin(0.14) بیابید و خطا را محاسبه کنید .

راه حل اول :

$$p(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1)$$

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, f(x_1)$$

$$= \frac{x - 0.2}{0.1 - 0.2} \times (0.09983) + \frac{x - 0.1}{0.2 - 0.1}(0.19867)$$

$$p(0.14) = 0.139366$$

$$\left|E_1(f, x)\right| \le \frac{1}{8}(0.2 - 0.1)^2 . \left|f''(x)\right|,\ x \in [x_0, x_1]$$

$$\le \frac{1}{8}(0.1)^2 \times 1 = 0.0025$$

راه حل دوم :

$$\left|E_1(f, x)\right| \le \frac{1}{2}\left|(x - 0.1)(x - 0.2)\right| . \left|\sin''(z)\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\left|0.14 - 0.1\right|\left|0.14 - 0.2\right| \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(0.0024) = 0.0012$$

مثال 4-4 : برای داده های زیر یک چندجمله ای درونیاب را بیابید :

x	0	1	2	5
f(x)	2	3	12	147

$$p(x)=\sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, f(x_i)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x)}\ f(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\ f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\ f(x_2)$$
$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\ f(x_3)$$
$$p(x)=2\,.\,\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}+3\times\frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)}+12\frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)}+$$
$$147\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)}$$
$$p(x)=x^3+x^2-x+2$$

مثال 4-5: $\sin(x)$ را از داده های زیرین با فرمول لاگرانژ درونیابی شده ، به ازای چه مقادیر n می توانیم مطمئن شویم که خطای قطع کردن کمتر از (0.5×10^{-4}) است ؟

$$x_0=1$$
$$x_1=0.9$$
$$x_2=0.8$$
$$x_n=1-(0.1\times n)$$
$$E_n(f,x)=\frac{\left|x_n-x_0\right|^{(n+1)}}{(n+1)!}\times\left|f^{(n+1)}(z)\right| \ ,\ \min\{x_0,x_1,...,x_n,x\}<z<\max\{x_0,x_1,...,x_n,x\}$$

$$\left|E_n(f,x)\right|\le\frac{\left|x_n-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\times\left|f^{(n+1)}(z)\right|\le0.5\times10^{-4}$$

$$f(x)=\sin(x)\ \begin{cases}\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\left|\sin x\right|)=\left|\sin x\right| & \text{اگر n فرد باشد داریم :}\\[2ex] \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\left|\sin x\right|)=\left|\cos x\right| & \text{اگر n زوج باشد داریم :}\end{cases}$$

$$\left|E_n(f,x)\right|\le\frac{\left|1-(0.1\times n)-1\right|^{n+1}}{(n+1)!}\le0.5\times10^{-4}$$
$$\frac{(0.1\times n)^{n+1}}{(n+1)!}\le0.5\times10^{-4}\Rightarrow n=7$$

مثال 4-6 : تابع $f(x)=\ln(1+x)$ ، $x_0=1$ ، $x_1=1.1$ مفروضند . با استفاده از درون یابی خطی مقدار مناسب $f(1.04)$ را محاسبه وحد بالای خطا را بیابید :

$$f(x)=\ln\ (1+x)\ \ ,\ \ f(1)=\ln\ \ 2=0.301030\ \ ,\ \ f(1.1)=\ln\ \ (2.1)=0.322219$$

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\ f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\ f(x_1)$$
$$=\frac{x-1.1}{1.0-1.1}\times 0.301030+\frac{x-1}{1.1-1}\times 0.322219$$
$$p_1(1.04)=0.304506$$
$$E(f,x)=\frac{1}{2!}(x-x_0)(x-x_1)\ f''(C)\ ;\ x_0<c<x_1$$

ماکزیمم $(x-x_0)(x-x_1)$ در نقطه $x=(x_0+x_1)/2$ می باشد .

$$|E(f,x)|\le\frac{1}{2}\max_{1\le x\le 1.1}\ |(x-x_0)(x-x_1)|\ .\max_{1\le x\le 1.1}|\ f''(x)|$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$|E(f,x)|\le\frac{1}{8}(x_1-x_0)^2\ \max\left|\frac{-1}{(1+x)^2}\right|=\frac{1}{8}(0.1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{0.01}{32}=\frac{1}{3200}$$

مثال 4-7 : مقدار مناسب گام (h) را که برای ایجاد جدول مقادیر تابع $f(x)=(1+x)^6$ روی فاصله [0,1] لازم است بطریقی بیابید که حد بالای خطای درونیابی خطی (5×10^{-5}) باشد :

$$|E_1(f,x)|\le\frac{h^2}{8}M$$
$$`\ M=\max_{0<x\le 1}|\ f''(x)|=\max_{0\le x\le 1}\left|30(1+x)^4\right|=480$$

بیشترین مقدار h عبارتست از :

$$|E_1(f,x)|\le\frac{h^2}{8}\times 480\le 5\times10^{-5}$$
$$60h^2\le 0.00005\Rightarrow h\approx 0.00091$$

مثال 4-8 : چند جمله ای منحصربفرد p(x) بادرجه 2 یا کمتر را بیابید بطوریکه p(4)=64 و p(3)=27 و p(1)=1 باشد . با استفاده از فرمول لاگرانژ و نیوتن مقدار تابع در (x=1.5) را بیابید :

$$P_2(x)=\frac{(x-4)(x-3)}{(1-4)(1-3)}(1)+\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}\times 27+\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}\times 64=8x^2-19x+12$$

$$p_2(1.5)=1.5$$

5-4 تفاضلات تقسیم شده نیوتن

فرض می کنیم $x_0<x_1<x_2 \ldots <x_{n-1}<x_n$ ، $(n+1)$ نقطه متمایز باشند و نامتساوی الفاصله باشند و مقدار تابع $f(x)$ بـــــه ازای نقاط فوق معلوم باشند $f_0,f_1,\ldots,f_n$. دراین صورت مفهوم تفاضل تقسیم شده را در زیر تعریف می کنیم :

تفاضل تقسیم شده مرتبه اول عبارتست از : $f[x_i,x_{i+1}]=\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\quad,\quad i=0(1)n-1$

تفاضل تقسیم شده مرتبه دوم : $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\dfrac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}\quad i=0(1)n-2$

وتفاضل تقسیم شده مرتبه n ام : $f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+n}]=\dfrac{f[x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+n}]-f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i}\,,i=0$

نکته ای که بایستی اشاره کنیم اینست که تقدم و تأخر x_i ها در نماد تفاضل تقسیم شده تأثیری ندارد مانند :

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=f[x_1,x_0]$$

حال به بررسی چندجمله ای درونیاب تفاضل تقسیم شده نیوتن می پردازیم :

6-4 فرمول درونیاب تفاضل تقسیم شده نیوتن

فرض می کنیم مقادیر تابع $f(x)$ به ازای نقاط نامتساوی الفاصله $x_0,x_1,\ldots,x_n$ یعنی $f_0,f_1,\ldots,f_n$ باشند.

ما در صدد یافتن یک چندجمله ای درجه n ام ، $P_n(x)$ برای تقریب $f(x)$ هستیم که درشرایط زیر صدق کند :

$$P_n(x_i)=f(x_i)\qquad i=0(1)n \tag{4.15}$$
$$P_n(x)=a_0+(x-x_0)a_1+(x-x_0)(x-x_1)a_2+\ldots+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})a_n \tag{4.16}$$
$$if\quad x=x_0\ \Rightarrow\ P_n(x)=a_0=f(x_0)$$
$$P_n(x)-f(x_0)=(x-x_0)a_1+(x-x_0)(x-x_1)a_2+\ldots+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})a_n \tag{4.17}$$

حال اگر طرفین رابطه 3 را بر $x-x_0$ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{p_n(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a_1+(x-x_1)a_2+\ldots+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})a_n$$

$$if\ \ x=x_1\ \Rightarrow \frac{p_n(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=a_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1] \qquad (4.18)$$

اگر به همین ترتیب عمل کنیم درمی یابیم که :

$$a_0=f(x_0)$$

$$a_1=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$a_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{f_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

.

.

.

$$a_n=f[x_0,x_1,x_2\ldots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} \qquad (4.19)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (4.19) در (4.16) چندجمله ای درونیاب تفاضل تقسیم شده نیوتن بصورت زیر خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}P_n(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\ldots\\&+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]\end{aligned} \qquad (4.20)$$

یا : $$P_n(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}f[x_0,x_1,\ldots,x_i](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})$$

در جدول زیر تفاضلات تقسیم شده برای نقاط داده شده آورده شده است :

x	f(x)	تفاضل تقسیم شده مرتبه اول	ت .ت .مرتبه دوم	ت . ت . م . سوم
x_0	f_0	$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_1	f_1	$f[x_1,x_2]=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$		
x_2	f_2			$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

x_3	f_3		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	

مثال 4-9 : چندجمله ای درونیاب درجه $n \le 2$ را بیابید بطوریکه : $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(3)=55$

از روش تفاضل تقسیم شده نیوتن استفاده کنید .

حل : جدول تفاضل تقسیم شده عبارتست از :

x	f(x)	ت . ت . م.اول	ت . ت . م.دوم
0	1	$\frac{3-1}{1-0}=2$	$\frac{26-2}{3-0}=8$
1	3	$\frac{55-3}{3-1}=26$	
3	55		

$$p_2(x)=\ f[0]+(x-0)\ f[0,1]+(x-0)(x-1)\ f[0,1,3]$$
$$p_2(x)=1+2x+8x(x-1)=8x^2-6x+1$$

اگر مثال فوق را با روش لاگرانژ حل کنیم مسلماً همین چندجمله درجه دوم را بایستی بیابیم زیرا چندجمله ایهای درونیاب علیرغم تفاوت شکل آنها یکسان و متشابه هستند .

حل با لاگرانژ :

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$
$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=-\frac{1}{2}(x)(x-3)$$
$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(7-0)(3-1)}=\frac{1}{6}(x)(x-1)$$

چندجمله ای درونیاب لاگرانژ عبارتست از :

$$P_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{3}(1)-\frac{x(x-3)}{2}(3)+\frac{1}{6}x(x-1)(55)=8x^2-6x+1$$

مثال 4-10: برای داده های جدولی زیر با استفاده از روش تفاضل تقسیم شده نیوتن تقریبی برای $f(1.5)$ بیابید .

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
	0.7651977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

حل : ابتدا جدول تفاضلی تقسیم شده را تشکیل می دهیم :

	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	ت.ت.م دوم	ت.ت.م.سوم	ت.ت.م.چهارم
x_0	1	0.7651977	-0.4837057	-0.1087339	0.0658784	
x_1	1.3	0.6200860	-0.5489460	-0.0494433		0.0018251
x_2	1.6	0.4554023				
x_3	1.9	0.2818186	-0.5786120	0.0118183	0.0680685	
x_4	2.2	0.1103623	-0.5715210			

$$p_4(x)=0.7651977-0.4837057(x-1)-0.1087339(x-1)(x-1.3)+0.0658784(x-1)(x-1.3)(x-1.6)$$
$$+0.0018251(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)$$
$$f(1.5)\approx p_4(1.5)=0.5118200$$

توضیح اینکه تابعی که مقادیر آن در جدول فوق داده شده است تابع بسل نوع اول وبا مرتبه صفر یعنی $J_0(x)$

است که مقدار واقعی ان در 1.5 برابراست با : $J_0(1.5)=0.5118277$

لذا خطای مطلق تقریب عبارت است از : $|p_4(1.5)-f(1.5)|\approx 7.7\times10^{-6}$

در بخش بعدی قبل از پرداختن به روشهای متساوی الفاصله نیوتن ابتدا تفاضلات متناهی و عملگرهای آنرا بررسی می کنیم .

7-4 تفاضلهای متناهی :

مقادیر متساوی الفاصله $x_0,x_1,\ldots,x_n$ با گام h مفروض هستند ومقادیر $f(x)$ به ازای این نقاط معلوم می باشند.حال در زیر به تعریف نمادها(عملگرهای) زیر می پردازیم :

$$x_j = x_0 + jh \qquad j = 0(1)n$$

1)عملگر تفاضل پیشرو The Forward Difference Operator

$$\Delta f(x_j) = f(x_j + h) - f(x_j) = f_{j+1} - f_j \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

2)عملگر تفاضل پسرو The Backward Difference Operator

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_j - h) = f_j - f_{j-1} \quad , \quad j = n, n-1,\ldots,1$$

3) عملگر تفاضل مرکزی The Central Difference Operator

$$d\ \ f(x_j) = f(x_j + h/2) - f(x_j - h/2) = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}$$

4)عملگر میان گیری The Avraging Operator

$$mf(x_j) = \frac{1}{2}[\ f(x_j + h/2) + f(x_j - h/2)] = \frac{1}{2}[\ f_{j+\frac{1}{2}} + f_{j-\frac{1}{2}}]$$

5)عملگر انتقال The Shift Operator

$$Ef(x_j) = f(x_j + h)$$

6)عملگر انتقال معکوس $E^{-1}(\ f(x_j)) = f(x_j - h)$

با تکرار عملگرهای فوق تفاضلات مراتب بالاتر را خواهیم داشت اما ابتدا رابطه بین عملگرهای فوق را تعیین می کنیم و سپس تفاضلات مراتب بالاتر را به آسانی می توان نتیجه گرفت .

مثال 4-11 : رابطه بین عملگرها در زیر را ثابت کنید :

$(a)\quad \Delta f_j = \nabla f_{j+1} = d\ \ f_{j+\frac{1}{2}}$

$(b)\quad \Delta \equiv E - 1$

$(c)\quad \nabla \equiv 1 - E^{-1}$

$(d)\quad d \equiv E^{1/2} - E^{-1/2}$

$(e)\quad m \equiv \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$

حل (a)

$$\Delta\ f_j = \Delta f(x_i) = f(x_j+h) - f(x_j) = f_{j+1} - f_i$$
$$\nabla\ f_{j+1} = \nabla f(x_j+h) = f(x_j+h) - f(x_j) = f_{j+1} - f_j$$
$$d\ f_{j+\frac{1}{2}} = d\ f(x_i+h/2) = f(x_j+h) - f(x_j) = f_{j+1} - f_j$$
$$\Delta\ f_i \equiv \nabla f_{j+1} \equiv d\ f_{j+\frac{1}{2}}$$

لذا نتیجه می گیریم که : $\Delta\ f_j \equiv \nabla f_{j+1} \equiv d\ f_{j+1/2}$

$$\Delta f(x_j) = f(x_j+h) - f(x_j) = Ef(x_j) - f(x_i) \qquad (b)$$
$$= (E-1)\ f(x_j)$$
$$\therefore \Delta \equiv E-1$$
$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_j-h) = f(x_j) - E^{-1}\ f(x_j) \qquad (c)$$
$$= (1-E^{-1})\ f(x_j)$$
$$\because \nabla \equiv (1-E^{-1})$$
$$d\ f(x_j) = f(x_j+h/2) - f(x_j-h/2) = E^{1/2}\ f(x_j) - E^{-1/2}\ f(x_j) \qquad (d)$$
$$= (E^{1/2} - E^{-1/2})\ f(x_j)$$
$$\because d \equiv (E^{1/2} - E^{-1/2})$$

رابطه (e) نیز نظیر رابطه (d) می توان ثابت کرد .با استفاده از روابط فوق می توان تفاضلات مراتب بالاتر را یافت .

تفاضل پیشرو مرتبه n ام :

$$\Delta \equiv E-1 \Rightarrow \Delta^n = (E-1)^n = E^n(1-\frac{1}{E})^n = E^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}E^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k}$$
$$\Delta^n\ f(x_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} E^{n-k}\ f(x_j)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\ f_{j+n-k}$$

یعنی $\Delta^n f(x_j)$ را می توان بصورت یک ترکیب خطی $f_j, f_{j+1}, ..., f_{j+k}$ بیان نمود وضرائب ، همان ضرائب دوجمله ای با علامتهای متناوب می باشد :

تفاضل پسرو مرتبه n ام :

$$\nabla^n = (1-E^{-1})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} E^{-k}$$

$$\nabla^n f(x_j) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} E^{-k} f(x_j) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f_{j-k}$$

نشان می دهد که $\nabla^n f_j$ را می توان بصورت یک ترکیب خطی $f_j, f_{j-1}, \ldots, f_{j-k}$ بیان نمود .

تفاضل مرکز مرتبه n ام :

$$d^n = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^n = E^{\frac{n}{2}} (1-E^{-1})^n = E^{\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{-k} \right\}$$

$$d^n f(x_j) = E^{\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{-k} \right\} f(x_j)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{\frac{n}{2}-k} f(x_j)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{j+\frac{n}{2}-k}$$

نشان می دهد که $d^n f_j$ را می توان بعنوان یک ترکیب خطی از $f_{j-\frac{n}{2}}, \ldots, f_j, \ldots, f_{j+\frac{n}{2}}$ بیان نمود .

1)جدول تفاضل پیشرو

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \Delta f_0$			
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \Delta f_1$	$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	$f_4 - f_3 = \Delta f_3$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

جدول تفاضل پسرو

x	f(x)	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \nabla f_1$			
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \nabla f_2$	$\nabla f_2 - \nabla f_1 = \nabla^2 f_2$		
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \nabla f_3$	$\nabla^2 f_1$	$\nabla^3 f_3$	
x_4	f_4	$f_4 - f_3 = \nabla f_4$	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$

رابطه بین عملگرهای تفاضلی را می توان در جدول زیر خلاصه کرد :

	E	Δ	∇	d
E	E	$\Delta+1$	$(1-\nabla)^{-1}$	$1+d^2/2+d\sqrt{(1+d^2/4)}$
Δ	E-1	Δ	$(1-\nabla)^{-1}-1$	$d^2/2+d\sqrt{(1+d^2/4)}$
∇	$1-E^{-1}$	$1-(1+\Delta)^{-1}$	∇	$-d^2/2+d\sqrt{(1+d^2/4)}$
d	$E^{1/2}-E^{-1/2}$	$\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$	$\nabla(1-\nabla)^{-1/2}$	d
m	$\frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2})$	$(1+\Delta/2)(1+\Delta)^{1/2}$	$(1-\Delta/2)(1-\nabla)^{-1/2}$	$\sqrt{(1+d^2/4)}$

هم چنین می توان تفاضلات تقسیم شده نیوتن رابرحسب تفاضلات پیشرو وپسرو ومرکزی به شرح زیر بیان نمود وبا استفاده ازاین روابط از فرمول تفاضل تقسیم شده نیوتن فرمولهای تفاضل پیشرو وپسرو را نتیجه گرفت .البته با فرض اینکه نقاط متساوی الفاصله باشند .

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1}{h}\Delta f(x) - \frac{1}{h}\Delta f(x_0)}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

.

.

.

$$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f(x_0) \qquad (4.21)$$

هم چنین می توان نوشت :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\nabla f(x_1)}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1}{h}\nabla f(x_2) - \frac{1}{h}\nabla f_1}{2h}$$

$$= \frac{1}{2h^2}(\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)) = \frac{1}{2!\,h^2}\nabla^2 f(x_2)$$

.

.

.

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{n!\,h^n}\nabla^n f(x_n) \qquad (4.22)$$

هم چنین می توان روابط بین تفاضلات تقسیم شده با تفاضل مرکزی را به صورت زیر نوشت :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{d\ \ f(x_0 + h/2)}{h} = \frac{d\ \ f_{1/2}}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{d\ \ f(x_1 + h/2) - d\ \ f(x_0 + h/2)}{2h}$$

$$= \frac{d^2\ f(x_0 + h)}{2!\,h^2} = \frac{d^2\ f_1}{2!\,h^2}$$

.

.

.

$$f[x_0, x_1, ..., x_{2m}] = \frac{1}{(2m)!\,h^{2m}} d^{2m}\ f_m$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_{2m+1}] = \frac{1}{(2m+1)!\,h^{2m+1}} d^{2m+1}\ f_{m+1/2} \qquad (4.23)$$

حال می توان چندجمله ای های درونیاب که با استفاده ازتفاضلات متناهی بدست می آیند در ذیل بیاوریم:

8-4 چندجمله ایهای درونیاب مبتنی بر تفاضلات متناهی

درونیابی تفاضل پیشرو نیوتن –گریگوری(Gregory-Newton) :

با جایگزینی تفاضلات پیشرو رابطه (4.21) درفرمول تفاضل تقسیم شده نیوتن(4.20) داریم :

$$p(x)=f_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n}\Delta^n f_0 \qquad (4.24)$$

رابطه(4.24) فرمول درونیاب پیشرو نیوتن-گریگوری نامیده می شود .اگر در(4.24) قرار دهیم $\frac{x-x_0}{h}=u$ رابطه

زیر را خواهیم داشت :

$$P(x_0+uh)=f_0+u\Delta f_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{u}{i}\Delta^i f_0 \qquad (4.25)$$

خطای این روش عبارتست از :

$$E_n(f,x)=\frac{u(u-1)\ldots(u-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(z) \qquad (4.26)$$

الترناتیو دیگر برای ارائه رابطه (4.24) بشرح زیر می باشد.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0+\frac{x-x_0}{h}h)=f(x_0+uh)=E^u f(x_0) \\ &=(1+\Delta)^u f(x_0) \\ &= f_0+u\Delta f_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{u(u-1)(\ldots\ldots\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f_0+\ldots \end{aligned}$$

با نادیده گرفتن تفاضل پیشرو مرتبه (n+1) ومراتب بالاتر آن همان چندجمله ای درونیاب رابطه (4.24) را خواهیم داشت .

درونیابی تفاضل پسرو نیوتن-گریگوری

با توجه به جدول تفاضلی پسرو بدیهی است که درونیاب تفاضل تقسیم شده نیوتن بایستی برحسب جملات تفاضلی در انتهای جدول یعنی درنقطه x_n باشد بنابراین چندجمله ای درونیاب تفاضل تقسیم شده بصورت زیر خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} P(x) &= f_n+(x-x_n)\,f[x_0,x_{n-1}]+(x-x_n)(x-x_{n-1})\,f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}]+\ldots \\ &\quad +(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)\,f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0] \qquad (4.27) \end{aligned}$$

لذا روابط(4.22) را می توان بصورت زیر نیز بیان نمود :

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{\nabla f_n}{h}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2!h^2}\nabla^2 f_n$$

$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0] = \frac{1}{n!h^n}\nabla^n f_n \qquad (4.28)$$

با جایگزینی (4.28) در (4.27) داریم :

$$P_n(x) = f_n + \frac{(x-x_n)}{h}\nabla f_n + \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2!h^2}\nabla^2 f_n + ... + \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1)}{n!h^n}\nabla^n f_n \qquad (4.29)$$

یا با تغییر متغیر $\frac{x-x_n}{h} = u$ داریم :

$$p_n(x_n+uh) = f_n + u\nabla f_n + \frac{u(u+1)}{2}\nabla^2 f_n + ... + \frac{u(u+1)(u+2)...(u+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{-u}{i}\nabla^i f_n \qquad (4.30)$$

هم چنین می توان یک روش دیگر بعنوان آلترناتیو برای یافتن چند جمله ای درونیاب پسرو نیوتن(4.30) ارائه داد

. لذا داریم :

$$f(x) = f(x_n + \frac{x-x_n}{h}h) = f(x_n+uh) = E^u f_n$$

$$= (1-\nabla)^{-u} f_n = f_n + u\nabla f_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f_n + ... + \frac{u(u+1)...(u+n-1)}{n!}\nabla^n f_n + ...$$

بطوریکه $\frac{x-x_n}{h} = u$ می باشد .

حال اگر در رابطه فوق از تفاضلات $\nabla^{n+1} f_n$ ومراتب بالاتر آن صرف نظر کنیم ،چندجمله ای درونیاب پسرو نیوتن را خواهیم داشت :

$$P(x_n+uh) = f_n + u\nabla f_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f_n + ... + \frac{u(u+1)...(u+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{-u}{i}\nabla^i f_n$$

رابطه (4.30) راچندجمله ای درونیاب پسرو نیوتن-گریگوری نامیده میشود و خطای آن عبارتست از :

$$E_n(f,x)=\frac{u(u+1)\dots(u+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(z) \qquad (4.31)$$

خطای قطع کردن فرمولهای درونیاب پسرو وپیشرو نیوتن که در روابط(4.26) و(4.31) آمده است براساس قضیه زیر استوار هستند :

قضیه 4-2 : فرض کنید که $f\in C^n[a,b]$ باشد و $x_0,x_1,\dots,x_n$ نقاط متمایزی در [a,b] باشند .دراین صورت عددی مثل z در (a,b) وجود دارد بطوریکه :

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

اثبات : تابع زیر رادرنظر می گیریم :

$$g(x)=f(x)-p_n(x) \qquad (4.32)$$

چون به ازای هر $i=0(1)n$ و $f(x_i)=P_n(x_i)$ است نتیجه می گیریم که تابع g دارای (n+1) صفر متمایز در [a,b] می باشد .قضیه تعمیم یافته رول ایجاب می کند که عددی چون z در (a,b) وجود دارد بطوریکه $g^n(z)=0$ بنابراین مشتق مرتبه n ام g(x) در z را می یابیم :

$$g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-p^{(n)}_{(x)}(x)\big|_{x=z}$$

$$0=f^{(n)}(z)-p^{(n)}_n(z) \qquad (4.33)$$

چون $p_n(x)$ یک چند جمله ای درجه n ام است و ضریب x^n آن $f[x_0,x_1,\dots x_n]$ می باشد لذا داریم :

$$P^{(n)}_n=f[x_0,x_1,\dots,x_n].n! \qquad (4.34)$$

با جایگزینی (4.34) در(4.33) داریم :

$$f^{(n)}(z)=f[x_0,x_1,\dots,x_n]n!$$

لذا :

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

مثال 4-12: برای داده های جدولی زیر تفاضلات متناهی را بیابید .چند جمله ای درونیاب پیشرو و پسرو نیوتن را بیابید . در x=0.25 و x=0.35 ، f(x) را درونیابی کنید .

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

حل :جدول تفاضلی را تشکیل میدهیم :

x_i	f(x)	ت .م. اول	ت .م . دوم	ت. م . سوم	ت . م . چهارم
0.1	1.40	0.16	0.04		
0.2	1.56	0.20		0	
0.3	1.76		0.04		0
0.4	2.00	0.24		0	
0.5	2.28	0.28	0.04		

چندجمله ای درونیاب پیشرو عبارتست از :

$$P(x)=1.4+(x-0.1)\frac{0.16}{0.1}+\frac{(x-0.1)(x-0.2)}{2}.\frac{0.04}{0.01}=2x^2+x+1.28$$

چند جمله ای درونیاب پسرو نیوتن نیز بصورت زیر داریم :

$$P(x)=2.28+(x-0.5)\frac{0.28}{0.1}+\frac{(x-0.5)(x-0.4)}{2}.\frac{0.04}{0.01}=2x^2+x+1.28$$

هردوچند جمله ای یکسان و مشابه هستند .بنابراین چنانچه بخواهیم f(0.25) را بیابیم داریم :

$$f(0.25)=p(0.25)=1.655$$
$$f(0.35)=p(0.35)=1.875$$

مثال 4- 13: چنانچه داشته باشیم $x_j=x_0+jh,\ j=0(1)2$ برای فرمول درونیاب درجه دوم یک کران بالای خطای آنرا بیابید .

حل :

$$E_2(f,x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f'''(z)\ ,\ x_0<z<x_2$$
$$|E_2(f,x)|\le\frac{1}{6}\max|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\max|f'''(x)|$$

لذا اگر فرض کنیم : $M_3=\max\limits_{x_0\le x\le x_2}|f'''(x)|$ واگر :

$$\max|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\Rightarrow\frac{d}{dx}\{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\}=0$$

با انتخاب $\frac{x-x_0}{h}=t$ داریم :

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=(t-1)$$
$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=(t-2)$$

لذا داریم :

$$h^3\max\left|t(t-1)(t-2)\right|=\max\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\{t(t-1)(t-2)\}=0\Rightarrow(t-1)(t-2)+t(t-2)+t(t-1)=0$$
$$t^2-2t+\frac{2}{3}=0\Rightarrow t=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\max\{t(t-1)(t-2)\}_{t=1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

بنابراین داریم :

$$\left|E_2(f,x)\right|\le\frac{1}{6}.\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3\max\left|f'''(x)\right|=\frac{1}{27\sqrt{3}}h^3\max\left|f'''(x)\right|$$
$$x_0\le x\le x_2$$

مثال 4-14: معادله $f(x)=\sin x$ مفروض است . $f(0.2)=0.19867,\ f(1)=0.09983$ داده شده است .با استفاده از درونیابی خطی f(0.16) را محاسبه و خطا در f(0.16) را بیابید .

x	x(x)
0.1	0.09983
0.2	0.19867

$$P(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$
$$P(x)=\frac{0.16-0.2}{0.1-0.2}+\frac{0.16-0.1}{0.2-0.1}\times0.19867=0.159134$$

$$E(f,x)=\frac{(x_1-x_0)^2}{2}\max\left|f''(t)\right|\ ;\ x_0\le t\le x_1$$
$$E(f,x)=\frac{(0.2-0.1)^2}{2}\times0.19867=0.00099335$$

9-4 درونیابی هرمیت (Hermite Interpolation)

چند جمله ای درونیاب نه تنها تابع f(x) را درونیابی می کند بلکه مراتب معینی از مشتقات تابع را در مجموعه نقاط جدولی درونیابی می نماید . در اینجا ما چندجمله ای درونیاب هرمیت را که درشرایط زیر صدق نماید بررسی می کنیم :

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \qquad i = 0(1)n \qquad (4.35) \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (4.35) چندجمله ای p(x) بایسی در 2n+2 شرط صدق نماید لذاp(x) یک چند جمله ای حداکثر درجه (2n+1) می باشد .بنابراین چندجمله ای مورد نظر بایستی بفرم زیر باشد :

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} A_i(x)\, f(x_i)+\sum_{i=0}^{n} B_i(x)\, f'(x_i) \qquad (4.36)$$

بطوریکه $B_i(x), A_i(x)$ چندجمله ایهای درجه 2n+1 هستند و در شرایط زیر بایستی صدق نمایند :

$$(I)\quad A_i(x_j)=\begin{vmatrix} 0 & , & i\neq j \\ 1 & , & i=j \end{vmatrix}$$

$$(II)\quad A_i'(x_j)=0 \qquad for\ all\ i\ \&\ j$$

$$(III)\quad B_i(x_j)=0 \qquad for\ all\ i\ \&\ j$$

$$(IV)\quad B_i'(x_j)=\begin{vmatrix} 0 & , & i\neq j \\ 1 & , & i=j \end{vmatrix} \qquad (4.37)$$

با استفاده از جملات اساسی لاگرانژ $l_i(x)$ می توان نوشت :

$$A_i(x)=g_i(x) l^2{}_i(x)$$
$$B_i(x)=d_i(x) l^2{}_i(x) \qquad (4.38)$$

از آنجا که $l^2{}_i(x)$ یک چند جمله ای درجه 2n است . $d_i(x), g_i(x)$ بایستی چندجمله ای خطی باشند لذا فرض می کنیم :

$$g_i(x)=a_i x+b_i$$
$$d_i(x)=c_i x+d_i \qquad (4.39)$$

اگر از شرایط (4.37) استفاده کنیم می یابیم که :

$$a_i=-2l_i'(x_i)$$
$$b_i=1+2x_i l_i'(x_i)$$
$$c_i=1$$
$$d_i=-x_i \qquad (4.40)$$

با استفاده از رابطه های (4.40) در روابط (4.39) وبا استفاده از (4.38) رابطه (4.36) را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}[1-2(x-x_i)l_i'(x_i)]l^2{}_i(x)\, f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}(x-x_i)l^2{}_i(x)\, f'(x_i) \qquad (4.41)$$

این رابطه را چند جمله ای درونیاب هرمیت می نامند . خطای این روش را می توان بصورت زیر ثابت کرد :

$$E_{2n+1}(f,x)=\frac{w^2(x)}{(2n+2)!}\quad f^{(2n+1)}(z)\ ,\ \ x_0<z<x_n \qquad (4.42)$$

بطوریکه : $w(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

مثال 4-15 : برای $f'(x), f(x)$ داده های زیر را داریم مقادیر $f(0.5), f(-0.5)$ را با استفاده از چند جمله ای هرمیت تخمین بزنید .

x	f(x)	$f'(x)$
-1	1	-5
0	1	1
1	3	7

حل :

$$p(x)=\sum_{i=0}^{2}A_i(x)\,f(x_i)+\sum_{i=0}^{2}B_i(x)\,f'(x_i)$$

$$A_0(x)=[1-2(x-x_0)l_0'(x_0)]l^2{}_0(x)$$
$$A_1(x)=[1-2(x-x_1)l_1'(x_1)]l^2{}_1(x)$$
$$A_2(x)=[1-2(x-x_2)l_2'(x_2)]l^2{}_2(x)$$
$$B_0(x)=(x-x_0)l^2{}_0(x)$$
$$B_1(x)=(x-x_1)l^2{}_1(x)$$
$$B_2(x)=(x-x_2)l^2{}_2(x)$$
$$l_0(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x(x-1)}{2}\ ,\ \ l_0'(-1)=-\frac{3}{2}$$
$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=-(x^2-1)\ ,\ \ l_1'(0)=0$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{x(x+1)}{2}\ ,\ l_2'(1)=\frac{3}{2}$$
$$A_0(x)=[1+3(x+1)]\frac{x^2(x-1)^2}{4}=\frac{1}{4}(3x^5-2x^4-5x^3+4x^2)$$
$$A_1(x)=[1-2(x-0)(0)](x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$$
$$A_2(x)=[1-3(x-1)]\frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{1}{4}(-3x^5-2x^4+5x^3+4x^2)$$
$$B_0(x)=\frac{(x+1)x^2(x-1)^2}{4}=\frac{1}{4}(x^5-x^4-x^3+x^2)$$
$$B_1(x)=x(x^2-1)^2=x^5-2x^3+x$$
$$B_2(x)=\frac{(x-1)(x^2)(x+1)^2}{4}=\frac{1}{4}(x^5+x^4-x^3-x^2)$$

بنابراین داریم :

$$P(x)=2x^4-x^2+x+1$$

با جایگزینی $x=-0.5$, $x=0.5$ داریم :

$$f(0.5)\cong p(0.5)=3/8$$
$$f(0.5)\cong p(0.5)=11/8$$

در اصل داریم :

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{1}{4}(3x^5-2x^4-5x^3+4x^2)(1)+(x^4-2x^2+1)(1)\\&+\frac{1}{4}(-3x^5-2x^4+5x^3+4x^2)(3)\\&+\frac{1}{4}(x^5-x^4-x^3+x^2)(-5)+(x^5-2x^3+x)(1)\\&+\frac{1}{4}(x^5+x^4-x^3-x^2)(7)\\&=2x^4-x^2+x+1\end{aligned}$$

10-4 درونیابی اسپلاین مکعبی

برای رسیدن به نتایج دقیق تر در مسائل درونیابی ما ممکن است از چندجمله ایهای درجه بالاتر استفاده کنیم .استفاده از چندجمله ای ها درجه بالا نه تنها تعداد عملیات محاسباتی افزایش می یابد بلکه نتایج حاصله بعلت خطاهای راوند کردن مطمئن نباشد .برای نگه داشتن درجه چندجمله ایهای درونیاب درحد پائین و برای رسیدن به

دقت مورد نظر درمسائل تقریب از درونیابی قطعه قطعه ای (Piecewise) استفاده می شود .با افراز باز داده شده [a,b] به زیـــــر بازه های $[x_{i-1},x_i]$ برای $i=1(1)n$ وتقریب تابع بوسیله چندجمله ایهای درجه پائین درهرزیر بازه می توان دقت را افزایش داد واز سرشت نوسانی چندجمله ایهای درجه بالا جلوگیری نمود . ساده ترین نوع این درونیابی ، **درونیابی قطعه قطعه خطی** است که از اتصال مجموعه ای از نقاط داده شده مانند

$$\{(x_0, f_0),(x_1, f_1),...,(x_n, f_n)\}$$

بارشته ای از خطوط مستقیم به یکدیگر نظیر شکل زیر :

درونیابی درهرزیربازه $[x_{i-1},x_i]$ خطی است وبا مقدار تابع f(x) در (n+1) نقطه درونیابی منطبق می باشد درشکل فوق زیربازه ها یا خطوط واصل را المانهای محدود (finite elements) درفضای یک بعدی نامیده میشوند ونقاط درونیابی را گره های درونیابی (knots) می نامند . چندجمله ای درونیاب را چندجمله ای خطی قـــطعه قطعه ای می نامند.با استفاده از فرمول خطی لاگرانژ در بازه $[x_{i-1},x_i]$ وبرای x متعلق به این بازه درونیابی قطعه قطعه خطی زیر داریم :

$$P_{i,1}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\, f(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\, f(x_i) \quad , i=1(1)n \qquad (4.43)$$

چندجمله ای درونیاب عبارتست از

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} p_{i,1}(x) \qquad (4.44)$$

که با مقدار تابع f(x) در نقاط i=0(1)n و x_i منطبق می باشد ودر هرزیر بازه خطی است بنابراین می توان در بازه

$[x_{i-1},x_i]$ داریم :

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} N_i(x)\, f(x_i) \qquad (4.45)$$

بطوریکه :

$$N_i(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le x_{i-1}\\ (x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}) & , \quad x_{i-1}\le x\le x_i\\ (x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i) & , \quad x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0 & , \quad x\ge x_{i+1}\end{cases} \qquad (4.46)$$

تابع $N_i(x)$ را "shape function" می نامند و در شکل زیر نشان داده شده است .

خطای درونیابی قطعه قطعه خطی بفرم زیر است :

$$f(x)-p_{i,1}(x)=\frac{1}{2!}(x-x_{i-1})(x-x_i)\,f''(z_i) \quad , \quad x_{i-1}<z_i<x_i \qquad (4.47)$$

4-11 درونیابی مکعبی قطعه قطعه ای

(Piecewise Cubic Interpolation)

درهر زیربازه $[x_{i-1},x_i]$ برای i=1(1)n ما تابع f(x) را بوسیله یک چندجمله ای درجه سه $P_{i,3}(x)$ تقریب می زنیم

لذا درونیابی را درونیابی مکعبی قطعه قطعه ای می نامند . چند جمله ایهای درجه سوم درهر زیر بازه را می توان با

استفاده از شرایط زیر تعیین نمود :

$$\begin{aligned} p_{i,3}(x_{i-1}) &= f_{i-1} \quad , \quad p_{i,3}(x_i)=f_i\\ p'_{i,3}(x_{i-1}) &= f'_{i-1} \quad , \quad p'_{i,3}(x_i)=f'_i \end{aligned} \qquad (4.48)$$

از آنجا که در رابطه (4.48) از شرایطی نظیر شرایط هرمیت استفاده می کنیم لذا چند جمله ای حاصله را درونیابی مکعبی هرمیت قطعه قطعه ای (Piecewice Cubic Hemite interpolation) مـی نامند . با استفاده از رابطه (4.41) می توان چند جمله ای را بصورت زیر نوشت :

$$P_{i,3}(x) = A_{i-1}(x)\, f_{i-1} + A_i(x)\, f_i + B_{i-1}(x)\, f'(x_{i-1}) + B_i(x)\, f'(x_i) \qquad (4.49)$$

بطوریکه :

$$A_{i-1}(x) = \frac{(x-x_i)^2}{(x_{i-1}-x_i)^2}\left[1+\frac{2(x_{i-1}-x)}{x_{i-1}-x_i}\right]$$

$$A_i(x) = \frac{(x-x_{i-1})^2}{(x_{i-1}-x_i)^2}\left[1+\frac{2(x-x_i)}{x_{i-1}-x_i}\right]$$

$$B_{i-1}(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2}{(x_{i-1}-x_i)^2}$$

$$B_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})^2}{(x_{i-1}-x_i)^2} \qquad (4.50)$$

چندجمله ای درونیاب عبارتست از :

$$p_3(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,3}(x) \qquad (4.51)$$

که با $f'(x), f(x)$ در نقاط $x_i, i=0(1)n$ منطبق می باشد و در هرزیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ یک چند جمله ای درجه سوم است ،بنابراین می توانیم بفرم زیر بنویسیم :

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{n} N_i(x)\, f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} H_i(x)\, f'(x) \qquad (4.52)$$

بطوریکه :

$$N_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le x_{i-1} \\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2}{(x_i-x_{i-1})}\left[1+\dfrac{2(x-x_i)}{x_{i-1}-x_i}\right] & , \quad x_{i-1} < x \le x_i \\ \dfrac{(x-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}\left[1+\dfrac{2(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right] & , \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & , \quad x \ge x_{i+1} \end{cases} \qquad (4.53)$$

$$H_i(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le x_{i-1}\\ \dfrac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2} & , \quad x_{i-1}\le x\le x_i\\ \dfrac{(x-x_{i+1})^2(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2} & , \quad x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0 & , \quad x\ge x_{i+1}\end{cases} \qquad (4.54)$$

همچنین نأکید میشود که :

$$p_{i-1,3}(x_i)=p_{i,3}(x_i)=f_i \ , \ i=1(1)n$$
$$p'_{i-1,3}(x_i)=p'_{i,3}(x_i)=f'_i \ , \ i=1(1)n$$

لذا نتیجه میشود که $p_3(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر می باشد .خطای چندجمله ای درجه سوم درونیاب هرمیت قطعه قطعه ای عبارتست از :

$$f(x)-p_{i,3}(x)=\frac{1}{4!}(x-x_{i-1})^2(x-x_i)^2\ f^4(z_i) \ , \ x_{i-1}<z_i<x_i \qquad (4.55)$$

مثال 4-16 : مثال 4- 15 را بااستفاده از چندجمله ای مکعبی درونیاب هرمیت قطعه قطعه ای حل می کنیم .

حل : در اینجا $x_{i-1}=-1 \ , \ x_i=0 \ , \ x_{i+1}=1$

از آنجا که $x=-0.5\in[x_{i-1},x_i]$ است چندجمله ای درونیاب مکعبی هرمیت عبارتست از :

$$\begin{aligned}p_3(x)&=[1+2(x+1)]x^2(1)+[1-2(x-0)](x+1)^2(1)\\&\quad+(x+1)x^2(-5)+x(x+1)^2(1)\\&=-(4x^3+3x^2-x-1)\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(-0.5)\approx p_3(-0.5)\cong\frac{1}{4}$$

به همین طریق ازآنجا که $x=0.5\in[x_i,x_{i+1}]$ چند جمله ای درونیاب مکعبی هرمیت بفرم زیر است .

$$p_3(x)=[1+2(x-0)](x-1)^2(1)+[1-2(x-1)]x^2(3)+x(x-1)^2(1)+(x-1)x^2(7)=4x^3-3x^2+x+1$$

لذا داریم : $f(0.5)\approx p_3(0.5)=\dfrac{5}{4}$

4-12 درونیابی اسپلاین (Spline interpolation)

در چند جمله ای هرمیت قطعه قطعه ای نیازی به داشتن اطلاعات از پیش تعیین شده $f'(x_i)$ برای $i=0(1)n$ داریم .در مسائل عملی داشتن چنین معلوماتی مشکل است .اگر ما بخواهیم از $f_i = f(x_i)\,, i=0(1)n$ استفاده کنیم آنگاه بدون ارتباط با انتخاب معین اعدادی مانند $m_i = f'(x_i)$ برای $i=0(1)n$.چند جمله ای حاصل شده مکعبی قطعه قطعه ای $p_3(x)$ تابع $f(x)$ را در $x_0,x_1,\ldots,x_n$ درونیابی می کند و هم چنین $p_3(x)$ در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر می باشد .مشتق مرتبه دوم $p_3(x)$ وجود دارد .اما ممکن است در نقاط درونیابی پیوسته نباشد . اما امکان دارد که $m_n,\ldots,m_1,m_0$ را بطریقی یافت تا چندجمله ای مکعبی قطعه قطعه ای حاصله دوبارپیوسته و مشتق پذیر گردد . چنین چندجمله ای مکعبی را درونیابی اسپلاین مـــــکعبی (Cubic Spline Interpelation) می نامند . اما درحالت کلی می توان اسپلاین درجه n ام را به شرح زیر تعریف نمود .

تعریف 4-2 : یک تابع اسپلاین درجه n ام با نقاط گره ای $x_n,\ldots,x_1,x_0$ یک تابع نظیر$S(x)$ با مشخصات زیر است:

(1)- درهر زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$ ، $S(x)$ یک چند جمله ای درجه n ام است

(2)-$S(x)$ و مـــــــشتقات آن تا مرتبه (n-1) در بازه $[a,b]$ پیوسته هستند اما در زیر ما فقط به اسپلاین مکعبی می پردازیم :

برای اینکه مشتق مرتبه دوم $S(x)$ در $x=x_i$ پیوسته گردد ما از رابطه (4.52) دوبار نسبت به x مشتق می گیریم و در $x_i \pm e$, $1 \le i \le n, e>0$ داریم :

$$\begin{aligned} s''(x_i+e) &= N_i''(x_i+e)\, f(x_i) + H_i''(x_i+e)\, f'(x_i) \\ &\quad + N_{i+1}''(x_i+e)\, f(x_{i+1}) + H_{i+1}''(x_i+e)\, f'(x_{i+1}) \\ &= \frac{6(f_{i+1}-f_i)}{h^2{}_{i+1}} - \frac{4 f_i'}{h_{i+1}} - \frac{2 f_{i+1}'}{h_{i+1}} \end{aligned} \qquad (4.56)$$

$$\begin{aligned} s''(x_i-e) &= N_{i-1}''(x_i-e)\, f(x_{i-1}) + H_{i-1}''(x_i-e)\, f'(x_{i-1}) \\ &\quad + N_i''(x_i-e)\, f(x_i) + H_i''(x_i-e)\, f'(x_i) \\ &= \frac{6(f_{i-1}-f_i)}{h^2{}_i} - \frac{2 f_{i-1}'}{h_i} + \frac{4 f_i'}{h_i} \end{aligned} \qquad (4.57)$$

بطوریکه $h_i=x_i-x_{i-1}$. با متحد قرار دادن طرف راست روابط (4.56) و(4.57) داریم :

$$\frac{1}{h_i} f'_{i-1} + \left(\frac{2}{h_i} + \frac{2}{h_{i+1}}\right) f'_i + \frac{1}{h_{i+1}} f'_{i+i} = \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{h^2{}_i} + \frac{3(f_{i+1} - f_i)}{h^2{}_{i+1}}, \quad i = 1(1)n-1$$

در این رابطه (n-1) رابطه داریم اما تعداد مجهولات (n+1) هستند نظیر $f'_n, ..., f'_1, f'_0$ اما اگر f'''_n, f'''_0 از پیش داده شده باشد از روابط (4.56) و(4.57) به ازای i=0,n به ترتیب داریم ؛

$$\frac{2}{h_1} f'_0 + \frac{1}{h_1} f'_1 = \frac{3(f_1 - f_0)}{h^2{}_1} - \frac{1}{2} f'''_0 \qquad (4.59)$$

$$\frac{1}{h_n} f'_{n-1} + \frac{2}{h_n} f'_n = \frac{3(f_n - f_{n-1})}{h^2{}_n} + \frac{1}{2} f'''_n \qquad (4.60)$$

بـــــا حل رابطه های (4.58) و(4.59)و(4.60) مشتقات $f'_i, i = 0(1)n$ را می توان یافت بدینصورت که از روابط (4.59) و(4.60) f'_n, f'_0 را می توان تعیین نمود و $f'_{n-1}, ..., f'_2, f'_1$ را می توان از رابطه (4.58) بدست آورد .

چنانچه نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند یعنی $h=x_i-x_{i-1}$ برای i=1(1)n دراین صورت روابط (4.58) تا(4.60) به ترتیب زیر ساده میشوند :

$$f'_{i-1} + 4 f'_i + f'_{i+1} = \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad i = 1(1)n-1 \qquad (4.61)$$

$$2 f'_0 + f'_1 = \frac{3}{h}(f_1 - f_0) - \frac{h}{2} f'''_0 \qquad (4.62)$$

$$f'_{n-1} + 2 f'_n = \frac{3}{h}(f_n - f_{n-1}) + \frac{h}{2} f'''_n \qquad (4.63)$$

اثبات فرمول اسپلاین مکعبی از طریق دیگر

می توان اسپلاین مکعبی را به فرم دیگری ایجاد کرد از آنجا که S(x) یک چند جمله ای مکعبی و قطعه قطعه ای است لذا $s''(x)$ دربازه $x \in [x_{i-1}, x_i]$ یک تابع خطی است بنابراین می توان نوشت :

$$s''(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} s''(x_{i-1}) + \frac{(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} s''(x_i) \qquad (4.64)$$

چنانچه $s''(x_{i-1}) = M_{i-1}, s''(x_i) = M_i$ فرض کنیم و دوبار از رابطه (4.64) نسبت به x انتگرال بگیریم داریم :

$$S(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + C_1 x + C_2 \qquad (4.65)$$

c_2,c_1 ثابتهای انتگرال گیری هستند و با استفاده از شرایط درونیابی $s(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), s(x_i) = f(x_i)$ می توانند تعیین شوند .لذا پس از بدست آوردن یک دستگاه دو معادله دو مجهول ، مجهولات C_2,C_1 بصورت زیر می یابیم :

$$C_1 = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{6}(M_i - M_{i-1})h_i$$
$$C_2 = \frac{(x_i f_{i-1} - x_{i-1} f_i)}{h_i} - \frac{1}{6}(x_i M_{i-1} - x_{i-1} M_i)h_i \qquad (4.66)$$

(4.66) را در (4.65) قرار می دهیم ، داریم :

$$S(x) = (x_i - x)\left[\frac{(x_i - x)^2 - h^2{}_i}{6h_i}\right]M_{i-1} + (x - x_{i-1})\left(\frac{(x - x_{i-1})^2 - h^2{}_i}{6h_i}\right)M_i$$
$$+\frac{1}{h_i}(x_i - x)\, f_{i-1} + \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1})\, f_i \qquad (4.67)$$

برای $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1(1)n$

رابطه فوق اسپلاین مکعبی در بازه $[x_{i-1},x_i]$ است اما هنوز مجهولات M_i بایستی تعیین شوند لذا برای تعیین مجهولات M_i ها از شرط پیوستگی مشتق مرتبه اول در نقاط درونیابی x_i ها استفاده می کنیم .حال نیاز داریم مشتق مرتبه اول $S'(x)$ در $x = x_0 \pm e$ وقتیکه $e \to 0$ پیوسته باشد یعنی $S'(x_i - e) = S'(x_i + e)$ وقتیکه $e \to 0$ لذا داریم :

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{6}M_i + \frac{1}{h_i}(f_i - f_{i-1}) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{1}{h_{i+1}}(f_{i+1} - f_i)$$

که بصورت زیر ساده میشود :

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{1}{h_{i+1}}(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{h_i}(f_i - f_{i-1}) \quad , \quad i = 1(1)n-1 \qquad (4.68)$$

رابطه فوق یک دستگاه (n-1)(n-1) خطی است و مجهولات $M_n, M_{n-1}, ..., M_1, M_0$ می باشند دو معادله دیگر نیاز داریم تا بتوانیم بصورت منحصربفرد مجهولات را بیابیم لذا از یکی از شرایط زیر استفاده می کنیم :

1- $M_0 = M_n = 0$ ، اسپلاینی که در این شرایط صدق کند اسپلاین طبیعی می نامیم

2- $h_1 = h_{n+1},\ f_1 = f_{n+1}\ ,\ f_0 = f_n\ ,\ M_1 = M_{n+1},\ M_0 = M_n$ اسپلاینی که از این شرایط استفاده نماید اسپلاین متناوب (Periodic Spline) می نامند .

3- چنانچه از شرایط :

$$\begin{aligned} S'(a) &= f'(a) = f'_0 \\ S'(b) &= f'(b) = f'_n \end{aligned}$$

استفاده نمائیم داریم :

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f'_0\right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right) \qquad (4.69)$$

با همراه کردن دستگاه (4.68) با یکی از سه شرط فوق می توان مجهولات $M_n,\dots,M_1,M_0$ را بصورت منحصربفرد یافت آنگاه اسپلاین مکعبی رابطه (4.67) را می توان یافت .

حال اگر حالت خاص را درنظر بگیریم وفرض کنیم نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند یعنی $x_i = x_0 + ih\ ,\ i = 0(1)n$ باشد در این صورت $h_i = h_{i+1} = h$ دستگاه (4.67) و(4.68) و(4.69) به ترتیب به صورت زیر در می آیند :

$$\begin{aligned} S(x) = {} & \frac{1}{6h}(x_i - x)[(x_i - x)^2 - h^2]M_{i-1} + \frac{1}{6h}(x - x_{i-1})[(x - x_{i-1})^2 - h^2]M_i \\ & + \frac{1}{h}[(x_i - x)\, f_{i-1} + (x - x_{i-1})\, f_i] \quad , \quad i = 1(1)n \qquad (4.70) \end{aligned}$$

و

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(\, f_{i+1} - 2\, f_i + f_{i-1}) \ , \quad i = 1(1)n-1 \qquad (4.71)$$

$$(I) \qquad M_0 = M_n = 0$$

$$(II) \qquad M_0 = M_n \,,\, M_1 = M_{n+1} \,,\; f_0 = f_n \,,\; f_1 = f_{n+1}$$

$$(III)\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h} - f_0'\right) \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h}\left(f_n' - \dfrac{f_n - f_{n-1}}{h}\right) \end{cases} \qquad (4.72)$$

مثال 4-17 : تقریب اسپلاین مکعبی طبیعی برای تابع داده شده بصورت جدولی زیر بیابید .

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	2	3
f(x)	1	2	33	44

حل : از آنجا که داده های جدولی متساوی الفاصله با گام مساوی h=1 است از رابطه (4.71) داریم :

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6(\,f_{i-1} - 2\,f_i + \,f_{i-1}) \,,\;\; i = 1,2$$

بنابراین :

$$\begin{cases} M_0 + 4M_1 + M_2 = 6(\,f_2 - 2\,f_1 + \,f_0) \\ M_1 + 4M_2 + M_3 = 6(\,f_3 - 2\,f_2 + \,f_1) \end{cases}$$

چون اسپلاین طبیعی است داریم $M_0=M_3=0$ لذا دستگاه فوق به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 = 180 \\ M_1 + 4M_2 = 1080 \end{cases}$$

با حل این دستگاه $M_2=276$ و $M_1=-24$.

بنابراین اسپلاین مکعبی در بازه ها متفاوت بصورت زیر داریم .یعنی M_0 تا M_3 را در رابطه (4.70) برای i=1,2,3 قرار میدهیم

در بازه [0,1] داریم : $S(x) = -4x^3 + 5x + 1$

در بازه [0,1] داریم : $S(x) = 50x^3 - 162x^2 + 167x - 53$

در بازه [0,1] داریم : $S(x) = -64x^3 + 414x^2 - 985x + 715$

تمرینهای فصل چهارم

1- با فرض اینکه $f(2)=46$, $f(-1)=4$, $f(1)=4$, $f(3)=156$, $f(4)=484$ باشند برای محاسبه f(0) از دستور لاگرانژ استفاده کنید و چند جمله ای درونیاب را نیز بیابید .

2- برای پیداکردن چند جمله ای درونیاب $P_3(x)$ که ازنقاط $(0,3),(1,2),(2,7),(4,59)$ می گذرد .از دستور لاگرانژ استفاده کنید و از آنجا مقدار $P_3(3)$ را بیابید

3- چندجمله ای درونیاب $f(x)=x^2+\sin px$ که از نقاط $(0,0),(1,1),(2,4)$ می گذرد بیابید . خطای $f(\frac{1}{2})$ را بیابید . حداکثر خطا چیست ؟

4-داده های زیر مفروضند ، مقادیر $f(1.98), f(0.15)$ را محاسبه کنید .

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	1	1.2840	2.7183	9.4877	54.5982

5-برای داده های ذیل یک جدول تفاضلی تقسیم شده تشکیل دهید .سپس مقداری برای f(0.5) را بیابید .

x	0.1	0.3	0.4	0.7	0.9
f(x)	1.10517	1.34989	1.49187	2.01390	2.45985

6-جدول تفاضلی مربوط به $f(x)=\sin x$ برای $x=0^o(10^o)50^0$ را درنظربگیرید . $\sin(5^o)$ و $\sin(47^o)$ را درونیابی کنید .

7-جدول تفاضلی $f(x)=e^x$ را برای $x=0.1(0.05)0.4$ را بنویسید و آنگاه $e^{0.14}$ و $e^{0.315}$ را محاسبه کنید .

8-برای داده های زیر نشان دهید که یک جمله ای درجه سوم را می توان بعنوان تقریب داده ها بکار گرفت

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f(x)	1	1.096	1.048	0.952	0.904	1

9-برای داده های زیر اسپلاین مکعبی را تقریب بزنید درصورتیکه $M_0=M_3=0$ باشد آنگاه f(1.5) و $f'(2)$ را بیابید .

x	1	2	3	4
f(x)	1	5	11	8

10-فرض می کنیم $f_i = x^{-2}{}_i$, $f'_i = -2x^{-3}{}_i$, $x_i = \frac{i}{2}$ به ازای i=1(1)4 داده شده باشند .تقریب چند جمله ای هرمیت مکعبی قطعه قطعه ای را بیابید .

11-اگر $x_0,x_1,\dots,x_n$ ، (n+1) نقطه دوبدو متمایز باشند و Q(x) یک چند جمله ای از درجه $0 \le n \le n$ باشد آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) L_k(x) = Q(x)$$

12-اگر $f(x) = \sin px$ و $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ باشد. $p_n(x)$ چند جمله ای درونیاب f(x) در x_i ها باشد (i=0(1)n) برای $x \in [a,b]$ ثابت کنید :

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = f(x)$$

13-نشان دهید که چند جمله ای درونیاب داده های زیر ، درجه 3 است .

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	1	4	11	16	13	-4

14-اگر $f(x) = (x-x_0)\dots.(x-x_n)$ باشد نشان دهید که :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

فصل پنجم

5- تقریب Approximation

بطورکلی چند جمله ای ها ، توابع مثلثاتی ، نمایی وگویا از دسته توابعی هستند که عموماً برای تقریب توابع مورد استفاده قرار می گیرند .از بین این توابع ، چند جمله ایها بعلت کاربردشان بیشتر از بقیه مورد استفاده قرار می گیرند .وجود یـــک چند جمله ای p(x) که تابع پـیوسته f(x) را در یک بازه متناهی [a,b] تقریب می زند .از قضیه « وایر اشتراس» که در ابتدای فصل قبل بیان کردیم تضمین می گردد .

برای پیدا کردن تقریب یک تابع f(x) عبارت زیر را مدنظر قرار میدهیم

$$f(x) \approx p(x, e_0, e_1, ..., e_n) = e_0 f_0(x) + e_1 f_1(x) + ... + e_n f_n(x) \qquad (5.1)$$

$f_i(x)$ برای i=0(1)n توابعی هستند که بطریقی انتخاب شده اند که مستقل خطی هستند و C_i ها پارامترهای ثابتی هستند که بایستی تعیین شوند . $f_i(x)$ را توابع Coordinate نامیده می شوند و معمولاً بفرم $f_i(x) = x^i, i = 0(1)n$ برای تقریب با چندجمله ای انتخاب می شوند خطای تقریب بصورت زیر تعریف می شود

$$E(f, x) = \| f(x) - (C_o f_0(x) + C_1 f_1(x) + ... + C_n f_n(x) \| \qquad (5.2)$$

بطوریکه $\|.\|$ یک نرم تعریف شده است . مسئله تقریب عبارتست از تعیین C_i ها بطوریکه خطای تقریب درحد امکان کم وکمتر گردد با استفاده از نرم افزارهای مختلف تقریبهای مختلفی را می توان یافت .هنگامیکه نرم مورد نظر انتخاب شود .تابعی که (از بین دسته توابع برای تقریب) خطای تقریب را کمترین می سازد بعنوان بهترین تقریب (Best Approximation) نامیده می شود .

نرمهایی که معمولاً مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از :

داده های گسسته (Discrete Data) :

نرم : L_P :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} , \quad p \geq 1 \qquad (5.3)$$

بطوریکه $x=\{x_i\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی ویا مختلط هستند .

نرم اقلیدسی : Euclidian norm

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.4)$$

که حالت خاصی از (5.3) است برای p=2 هم چنین نرم مربع نیز نامیده میشود وبا $\|x\|_2$ نشان داده میشود .

نرم یکنواخت (uniform norm)

$$\|x\| = \max_{1 \le j \le n} |x_j| \qquad (5.5)$$

که حالت خاصی از (5.3) برای $p \to \infty$.

داده های پیوسته (Continuous Data) :

اگر تابع f(x) در بازه [a,b] پیوسته باشد و $|f(x)|^p$ در بازه [a,b] انتگرال پذیر باشد آنگاه :

$$\|f\| = \left(\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \ , \ \ p \ge 1 \qquad (5.6)$$

را نرم L_p نامیده می شود بطوریکه w(x)>0 ، تابع وزن نامیده میشود. برای p=2 نرم اقلیدسی یا نرم مربع خواهیم داشت :

$$\|f\| = \left(\int_a^b w(x)\, f^2(x)\; dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.7)$$

وبرای $p=\infty$ نرم یکنواخت را داریم

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)| \qquad (5.8)$$

هنگامی که از نرم اقلیدسی استفاده می کنیم ما با تقریب حداقل مربعات مواجه هستیم و زمانی که از نرم یکنواخت استفاده میشود ما با تقریب یکنواخت (uniform) سروکار داریم . در زیر به تقریب با استفاده از حداقل مربعات بصورت گسسته و پیوسته می پردازیم .

5-1- روش حداقل مربعات

روش حداقل مربعات از جمله موارد تقریبی است که بسیار مورد استفاده قرار می گیرد . این روش برای تقریب تابع f(x) که ممکن است بوسیله داده های جدولی باشد ویا بطور صریح در یک بازه معین داده شده باشد . در این روش ما به ترتیب از نرم اقلیدسی (5.4) و (5.7) استفاده می کنیم . از دیدگاه روش حداقل مربعات ، بهترین تقریب زمانی که ثابتهای C_i برای i=0(1)n بطریقی تعیین می شوند که در مجموع $w(x)E^2$ روی یک دامنه داده شده D بحد امکان کوچکتر گردد . برای تابعی که مقادیر آن در N+1 نقطه $x_n,\ldots,x_1,x_0$ داده شده باشد داریم :

$$I(C_0,C_1,\ldots,C_n)=\sum_{k=0}^{N} w(x_k)\left[f(x_k)-\sum_{i=0}^{n}C_i f_i(x_k)\right]^2=\min \qquad (5.9)$$

برای تابعی که در [a,b] پیوسته باشد وبطورصریح داده شده باشد داریم :

$$I(C_0,C_1,\ldots,C_n)=\int_a^b w(x)\left[f(x)-\sum_{i=0}^{n}C_i f_i(x)\right]^2 dx=\min \qquad (5.10)$$

$f_i(x)$ توابع Coordinate معمولاً بفرم زیر انتخاب می گردند : $f_i(x)=x^i \ , \ i=0(1)n \ ,$

و $w(x)=1$ شرط لازم برای آنکه (5.9) و(5.10) مینیمم گردند آن است که :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=0 \qquad , \qquad i=0(1)n \qquad (5.11)$$

این شرط یک دستگاه خطی (N+1) معادله و (N+1) مجهول $C_n,\ldots,C_1,C_0$ را ایجاد می نماید که معادلات نرمال خوانده میشوند ،معادلات نرمال برای (5.9) و (5.10) به ترتیب بصورت زیر خواهند بود :

$$\sum_{k=0}^{N} w(x_k)\left[f(x_k)-\sum_{i=0}^{n}C_i f_i(x_k)\right]f_j(x_k)=0 \ , \ j=0(1)n \qquad (5.12)$$

$$\int_a^b w(x)\left[f(x)-\sum_{i=0}^{n}C_i f_i(x)\right]f_j(x)\,dx=0 \ , \ j=0(1)n \qquad (5.13)$$

در زیر ابتدا ما روش حداقل مربعات گسسته را ساده ترین شکل آن بکار می گیریم ،ساده ترین تابعی که می توان ازیک سری نقاط بگذرانیم یک خط مستقیم است مانند :

$$g(x) = C_0 + C_1 x$$
$$I_K = y_k - g(x_k) = y_K - (C_0 + C_1 x_k) \quad , \quad k = 0(1)N$$
$$I = \sum_{k=0}^{N} d^2{}_k = \sum_{k=0}^{N} \left[(y_k - (C_0 + C_1 x_k) \right]^2$$

اگر بخواهبم I حداقل شود باید C_1,C_0 رابطریقی بیابیم که I مینیمم گردد .

پس باید :

$$\frac{\partial I}{\partial C_0} = -2\sum_{k=0}^{N} [y_k - (C_0 + C_1 x_k)] = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{k=0}^{N} (C_0 + C_1 x_k) = \sum_{k=0}^{N} y_k$$
$$\frac{\partial I}{\partial C_1} = -2\sum_{k=0}^{N} x_k [y_k - (C_0 + C_1 x_k)] = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{k=0}^{N} x_k (C_0 + C_1 x_k) = \sum_{k=0}^{N} x_k y_k$$

روابط فوق را با تقسیم بر 2- می توان با نمایش ماتریس زیر هم نشان داد :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$
$$A_{11} = N \;,\quad A_{12} = \sum_{k=0}^{N} x_k \quad , \quad Z_1 = \sum_{k=0}^{N} y_k$$
$$A_{21} = \sum_{k=0}^{N} x_k \quad , \quad A_{22} = \sum_{k=0}^{N} x^2{}_k \quad , \quad Z_2 = \sum_{k=0}^{N} x_k y_k$$

از حل دستگاه فوق داریم :

$$C_0 = \frac{A_{22} Z_1 - A_{12} Z_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \quad , \quad C_1 = \frac{A_{11} Z_2 - A_{21} Z_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}$$

مثال 5-1 : از رابطه زیر با کمک رابطه فوق یک خط عبور می دهیم

k	x_k	y_k	$x^2{}_k$	$x_k y_k$
1	0.1	0.61	0.01	0.061
2	0.4	0.92	0.16	0.368
3	0.5	0.99	0.25	0.495
4	0.7	1.52	0.49	1.064
5	0.7	1.47	0.49	1.029
6	0.9	2.03	0.81	1.827
	3.3	7.54	2.21	4.844

$$A_{11} = 6$$
$$A_{12} = \sum x_k = A_{21} = 3.3$$
$$A_{22} = \sum x^2{}_k = 2.21$$
$$Z_1 = \sum y_k = 7.54$$
$$Z_2 = \sum_{k=0} x_k y_k = 4.844$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \frac{2.21 \times 7.54 - 3.3 \times 4.844}{6 \times 2.22 - 3.3 \times 3.3} = 0.2862$$

$$C_1 = \frac{6 \times 4.844 - 3.3 \times 7.54}{6 \times 2.22 - 3.3 \times 3.3} = 1.7646$$

$$g(x) = 0.2862 + 1.7646x$$

روش حداقل مربعات در حالت کلی :

مسأله کلی تقریب سازی مجموعه ای از داده ها یعنی $\{(x_i, y_i) | i=1(1)M\}$ با یک چندجمله ای درجه n ام مانند :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad n < M$$

$$I = \sum_{i=1}^{M} I_i^2 = \sum_{i=1}^{M} [y_i - p_n(x_i)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{M} p_n(x_i) y_i + \sum_{i=1}^{M} (p_n(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{M} (\sum_{j=0}^{M} a_j x_i^j) y_i + \sum_{i=1}^{M} (\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=1}^{M} x_i^j y_i + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k (\sum_{i=1}^{M} x_i^{j+k})$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{M} x_i^j y_i + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{M} x_i^{j+k} \qquad j = 0(1)n$$

سرانجام معادله نرمال به صورت :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{M} x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{M} y_i x_i^j \qquad j = 0(1)n$$

یا بصورت زیر :

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^{M} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i^1 + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{M} x_i^n = \sum_{i=0}^{M} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{M} x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i^2 + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{M} x_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{M} y_i x_i^1 \\ a_0 \sum_{i=0}^{M} x_i^n + a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i^{n+1} + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{M} x_i^{2n} = \sum_{i=0}^{M} y_i x_i^n \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق می توان $a_n, \ldots a_1, a_0$ را یافت .

مثال 5-2 : حال اگر از نقاط مثال فوق یک چند جمله ای درجه دوم عبور دهید :

i	x_i	y_i	x^2_i	x^3_i	x^4_i	x_iy_i	$x^2_iy_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.001	0.0001	0.061	0.0061
2	0.4	0.92	0.16	0.064	0.0256	0.368	0.1472
3	0.5	0.99	0.25	0.125	0.0625	0.495	0.2475
4	0.7	1.52	0.49	0.343	0.2401	1.064	0.7448
5	0.7	1.47	0.49	0.343	0.2401	1.029	0.7203
6	0.9	2.03	0.81	0.729	0.6561	1.827	1.6443
	3.3	7.54	2.21	1.605	1.2245	4.844	3.5102

$$M=6 \qquad \sum x_i=3.3 \qquad \sum x_i^2=2.21 \qquad \sum x_i^3=1.605 \qquad \sum x_1^4=1.2245$$

$$\sum y_i=7.54 \qquad \sum x_i y_i=4.844 \qquad \sum x_i^2 y_i=3.5102$$

$$\begin{bmatrix} M & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_1^2 y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 & 2.21 \\ 3.3 & 2.21 & 1.605 \\ 1.21 & 1.605 & 1.2245 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \\ 3.502 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 & 2.21 \\ 0 & 0.395 & 0.3895 \\ 0 & 0 & 0.0264 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7.54 \\ 0.697 \\ 0.0457 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_2=1.7312 \\ a_1=0.0576 \\ a_0=0.5873 \end{cases}$$

توجه :

در حل معادلات فوق دستگاه حاصله اغلب نسبت به خطای گردکردن حساس هستند .این پدیده هنگامی رخ می دهد که دترمینان ماتریس ضرائب دستگاه معادلات عدد کوچکی باشد یا به عبارت دیگر دستگاه حاصله بد وضع می شوند .لذا بایستی دقت کرد وهمواره مشکلات حل دستگاه های حاصله را مدنظر قرار داد .

5-2- تقریب کمترین مربعات گسسته توسط ترکیب خطی توابع

به جای یک چند جمله ای می توان یک ترکیب خطی از توابع مشخص را از نقاط مورد نظر عبور داد .طبعاً عبور چند جمله ای حالت خاصی خواهد بود که درآن توابع مشخص عبارتند از توانهای مختلف x .نحوه بدست آوردن ضریب هرتابع در این ترکیب خطی مشابه حالتهای قبل قابل محاسبه می باشند . ترکیب خطی توابع مورد نظر عبارت خواهد بود از :

$$g(x) = a_0\, f_0(x) + a_1\, f_1(x) + \ldots + a_n\, f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, f_j(x) \qquad (5.14)$$

در رابطه (5.14) f_0 تا f_n توابع شناخته شده و a_0 تا a_n ضرایبی هستند که با انتخاب مناسب آنها باید مجموع مجذور انحراف تابع g(x) از نقاط مورد نظر به حداقل برسد و n+1 تعداد توابع شناخته شده ای که برای حل مساله بکار می روند ، می باشد .انحراف منحنی تابع g(x) از هریک از نقاط عبارتست از :

$$I_i = y_i - g(x_i) = y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j\, f_j(x_i) \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m \qquad (5.15)$$

مجموع مربعات این انحرافها برابراست با :

$$I = \sum_{i=1}^{m} (d_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j\, f_j(x_i) \right]^2 \qquad (5.16)$$

درنتیجه برای حداقل شدن I باید :

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \qquad j = 0,1,\ldots., n \qquad (16)$$

لذا ضرائب a_0 تا a_nاز رابطه زیر قابل محاسبه خواهند بود :

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} f_k(x_i)\, f_j(x_i) \right] a_k = \sum_{i=1}^{m} y_i\, f_k(x_i) \qquad j = 0,1,\ldots., n \qquad (5.18)$$

دستگاه فوق دارای n+1 معادله و n+1 مجهول است که با روش حذفی گاوس قابل حل می باشد شکل ماتریسی رابطه (5.18) که برای بخاطر سپردن مناسبتر می باشد عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, f_1(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, f_N(x_i) \\ \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_1(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_N(x_i) \\ . & . & & . \\ & . & & . \\ . & . & & . \\ \sum_{i=1}^{m} f_N(x_i)\, f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_N(x_i)\, f_1(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_N(x_i)\, f_N(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \\ a_1 \\ \\ \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, y_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, y_i \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{m} f_N(x_i)\, y_i \end{bmatrix}$$

مثال 5-3 : ضرائب a_0 تا a_2 را در تابع زیر بنحوی بدست آورید که منحنی تابع به بهترین شکل از نقاط مثالهای فوق عبورکند .

حل :

$$g(x) = a_1 x + a_2 \ln x + a_3 e^x$$

معادله نرمال دراین حالت عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, f_1(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, f_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_2(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{m} f_2(x_i)\, f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, f_2(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_2(x_i)\, f_2(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_0(x_i)\, y_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)\, y_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_2(x_i)\, y_i \end{bmatrix}$$

با استفاده از داده های جدولی مثال فوق داریم : $f_0(x) = x,\ f_1(x) = \ln(x),\ f_2(x) = e^x$

i	$f_0=x_i$	y_i	f_0f_0	f_0f_1	f_0f_2	f_1f_1	f_1f_2	f_2f_2	f_0y	f_1y	f_{2y}
1	0.1	0.61	0.01	-0.2303	0.1105	0.053019	-2.5448	1.2214	0.061	-1.4046	0.6742
2	0.4	0.92	0.16	-0.3665	0.5967	0.8396	-1.3669	2.2255	0.368	-0.8430	1.3725
3	0.5	0.96	0.25	-0.3466	0.8244	0.4805	-1.1428	2.7183	0.495	-0.6862	1.6322
4	0.7	1.52	0.49	-0.2497	1.4096	0.1272	-0.7182	4.0552	1.064	-0.5421	3.0609
5	0.7	1.47	0.49	-0.2497	1.4096	0.1272	-0.7182	4.0552	1.209	-0.5243	2.9602

6	0.9	2.03	0.81	-0.0948	2.2136	0.0111	-0.2591	6.0496	1.827	-0.2134	4.9930
	3.3	7.54	2.21	-1.5576	6.5644	1.6386	-6.7500	20.3252	4.884	-4.2141	14.693

با استفاده از حاصل جمع ستونهای مختلف از جدول فوق در معادله نرمال داریم :

$$\begin{bmatrix} 2.21 & -1.5376 & 6.5644 \\ -1.5376 & 1.6386 & -6.7500 \\ 6.5644 & -6.7500 & 20.3252 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.844 \\ -4.2141 \\ 14.693 \end{bmatrix}$$

با حل سیستم فوق ضرائب را بصورت زیر می یابیم

$$a_0 = 6.1872 \quad a_1 = -0.7123 \quad a_2 = -1.5119$$

3-5 تقریب با استفاده از ترکیب خطی از توابع :

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x)$$

$$I(a_0, a_1, ..., a_n) = \int_a^b (f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x))^2 \, dx$$

$$= \int_a^b f^2(x) dx - 2\int_a^b f(x) \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x) \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \qquad j = 0(1)n$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -2\int_a^b f(x) f_j dx + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f_k(x) f_j(x) dx = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b f_j(x) f_k(x) dx = \int_a^b f(x) f_j(x) dx \quad , \quad j = 0(1)n$$

حال اگر $f_0(x),...f_n(x)$ را بتوان با این خاصیت :

$$\int_a^b f_j(x) f_k(x) dx = 0 \quad j \neq k$$

دستگاه نرمال بصورت زیر :

$$a_j\int_a^b [f_j(x)]^2\,dx=\int_a^b f(x)f_j(x),\ j=0(1)n$$

$$a_j=\frac{\int_a^b f(x)f_j(x)\,dx}{\int_a^b [f_j(x)]^2\,dx}\quad ,\ j=0(1)n$$

مشروط بر اینکه $\int_a^b [f_j(x)]^2\,dx\neq 0$.

قضیه 5-1 : هرگاه $\{f_0,....f_n\}$ یک مجموعه متعامد ار توابع بربازه [a,b] باشد آنگاه تقریب کمترین مربعات به f بر[a,b] با استفاده از $f_0,....f_n$ عبارتست از :

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_k f_j(x)\quad ;\quad a_k=\frac{\int_a^b f(x)f_j(x)\,dx}{\int_a^b [f_j(x)]^2\,dx}=\frac{1}{a_j}\int_a^b f(x)f_j(x)\,dx$$

5-4 تقریب کمترین مربعات پیوسته :

فرض می کنیم $f\in c[a,b]$ ویک چند جمله ای درجه n ام مانند $P_n(x)$ مفروض باشد :

$$\|f(x)-p_n(x)\|_2=\left[\int_a^b [f(x)-p_n(x)]^2\,dx\right]^{1/2}=\min$$

$$I(a_0,a_1,...,a_n)=\int_a^b\left[f(x)-(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j)\right]^2 dx$$

مجذورات خطی

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\int_a^b f(x)\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\,dx+\int_a^b\left(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \qquad j = 0(1)n$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j\, f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = 0 \qquad j = 0(1)n$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = \int_a^b x^j\, f(x)\,dx \qquad j = 0(1)n$$

مثال 5 –4 : چندجمله ای تقریبی کمترین مربعات درجه دوم را برای $f(x) = \sin px$ در فاصله [0,1] پیدا کنید .

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\sum_{k=0}^{2} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = \int_a^b x^j \sin px\,dx \qquad j = 0(1)2$$

$$a_0\int_0^1 dx + a_1\int_0^1 x dx + a_2\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \sin px dx$$

$$a_0\int_0^1 x dx + a_1\int_0^1 x^2\,dx + a_2\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x\sin px dx$$

$$a_0\int_0^1 x^2\,dx + a_1\int_0^1 x^3\,dx + a_3\int_0^1 x^4\,dx = \int_0^1 x^2 \sin px dx$$

$$a_0 = -0.050465 \quad , \quad a_1 = 4.12251 \quad , \quad a_2 = -4.12251$$

تعریف 5-1 :

یک مجموعه از توابع $\{f_i(x)\}$ را درفاصله [a,b] نسبت به تابع وزن $w_{(x)}$ متعامد گویند هرگاه :

$$\int_a^b w(x) f_j(x) f_i(x)\, dx = 0 \quad , \quad j \neq i$$

تعریف 5-2 :

یک مجموعه از توابع $\{f_i(x)\}$ را روی یک مجموعه از نقاط $\{x_i\}$ نسبت به تابع وزن $w_{(x)}$ متعامد گویند هرگاه :

$$\sum_{i=0}^{N} w(x_i) f_j(x_i) f_k(x_i) = 0 \quad , \quad k \neq j$$

5-5 روند متعامد سازی گرام- اشمیت : Gram - Schmidt

چندجمله ای $f_i(x)$ درجه i مفروض است .برای این چند جمله ای ، چندجمله ای $f_i^*(x)$ از درجه i راکه متعامد در فاصله [a,b] نسبت به تابع وزن $w_{(x)}$ می باشد را می توان بصورت فرمول بازگشتی زیر بدست آورد :

$$f_i^*(x) = x^i - \sum_{r=0}^{i-1} a_{ir} f_r^*(x) \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

$$a_{ir} = \frac{\int_a^b w_{(x)} x^i f_r^*(x)dx}{\int_a^b w_{(x)} f_r^{*2}(x)dx} \quad ; \; f_0^*(x) = 1 \qquad (5.19)$$

مثال5-5 : با استفاده از روند متعامدسازی گرام –اشمیت سه جمله ای متعامد $P_2(x), P_1(x), P_0(x)$ را در بازه [0,1] نسبت به تابع وزن $w_{(x)}=1$ بیابید .آنگاه با استفاده از این چندجمله ایها وبا استفاده از روش حداقل مربعات برای $f(x) = x^{1/2}$ $on[0,1]$ دربازه [0,1] یک چند جمله ای درجه دوم تقریب بزنید .

$P_0(x) = 1 = f_0^*(x)$ دلخواه

$$f_1^*(x) = x - a_{10} f_0^*(x)$$

$$a_{10} = \frac{\int_0^1 x f_0^*(x)\,dx}{\int_0^1 f_0^{*2}(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 dx} = \frac{1/2}{1} = 1/2$$

$$\therefore f_1^*(x) = (x - 1/2) = p_1(x) \qquad (5.20)$$

$$f_2^*(x) = x^2 - a_{20} f_0^*(x) - a_{21} f_1^*(x)$$

$$a_{20} = \frac{\int_0^1 x^2 f_0^*(x)\,dx}{\int_0^1 f_0^{*2}(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{1} = 1/3$$

$$a_{21} = \frac{\int_0^1 x^2 f_1^*(x)\,dx}{\int_0^1 f_1^{*2}(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x^2 (x - 1/2)\,dx}{\int_0^1 (x - 1/2)^2\,dx} = \frac{1/4\, x^4 - 1/6\, x^3]_0^1}{1/3\, x^3 - 1/2\, x^2 + 1/4\, x]_0^1} = \frac{1/12}{1/12} = 1$$

$$\therefore f_2^*(x) = x^2 - 1/3 - (x - 1/2) = x^2 - x + 1/2 - 1/3 = x^2 - x + 1/6 = p_2(x)$$

$$I(c_0, c_1, c_2) = \int_0^1 \left[x^{1/2} - (c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x)) \right]^2 dx = \min$$

$$= \int_0^1 \left[x - 2x^{1/2}(c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) \quad + (c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) = c_2 p_2(x))^2 \right] dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_0} = -2\int_0^1 x^{1/2} p_0(x)\,dx + 2\int_0^1 p_0(x)(c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) = 0$$

$$\int_0^1 p_0(x)(c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x))\,dx = \int_0^1 x^{1/2} p_0(x)\,dx \qquad (5.21)$$

$$c_0 \int_0^1 p_0^2(x)\,dx = \int_0^1 x^{1/2} p_0(x)\,dx$$

$$c_0\int_0^1 dx=\int_0^1 x^{1/2}dx \quad\Rightarrow\quad c_0=\frac{\frac{2}{3}x^{3/2}]_0^1}{x]_0^1}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_1}=-2\int_0^1 p_1(x)x^{1/2}dx+2\int_0^1 p_1(x)(c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x))dx=0$$

$$\therefore\int_0^1 c_1p_1^{\,2}(x)dx=\int_0^1 p_1(x)x^{1/2}dx$$

$$c_1=\frac{\int_0^1(x-\frac{1}{2})x^{1/2}dx}{\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx}=\frac{\int_0^1(x^{3/2}-\frac{1}{2}x^{1/2})dx}{\int_0^1(x^2-x+\frac{1}{4})dx}=\frac{\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{3}x^{3/2}]_0^1}{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x]_0^1}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_2}=0\Rightarrow\int_0^1 c_2p_2^2(x)dx=\int_0^1 p_2(x)x^{1/2}$$

$$\therefore c_2=\frac{\int_0^1(x^2-x+\frac{1}{6})x^{1/2}dx}{\int_0^1(x^2-x+\frac{1}{6})^2dx}=\frac{\int_0^1(x^{5/2}-x^{3/2}+\frac{1}{6}x^{1/2})dx}{\int_0^1(x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36})dx}$$

$$=\frac{\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{1}{9}x^{3/2}]_0^1}{\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{9}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{36}x]_0^1}=\frac{\frac{2}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}}$$

$$=\frac{\frac{90-126+35}{7\times5\times9}}{\frac{36-5\times18+80-30+5}{5\times36}}=-\frac{4}{7}$$

$$y_{(x)}=\frac{2}{3}p_0(x)+\frac{4}{5}p_1(x)-\frac{4}{7}p_2(x)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}(x-\frac{1}{2})-\frac{4}{7}(x^2-x+\frac{1}{6})$$
$$=\frac{1}{35}(6+48x-20x^2)$$

تمرینهای فصل :

1-برای مقادیر تابع داده شده در جدول زیر ترکیبی از توابع نمایی به فرم $f=ae^{-3t}+be^{-2t}$ با استفاده از روش حداقل مربعات تقریب بزنید

t	0.1	0.2	0.3	0.4
f(t)	0.76	0.58	0.44	0.35

2-یکنفر دونده یک مسیر مشخص را در پنج روزمتوالی دوید وهربار زمان لازم برای پیمودن را یادداشت کرده است که به شرح زیر است :

روزهاX	1	2	3	4	5
زمانy	15.30	15.10	15.00	14.50	14.00

با استفاده از روش حداقل مربعات تقریبی به فرم $a+{}^{b}\!/_{x}+{}^{c}\!/_{x^2}$ را برای داده های فوق تقریب بزنید .

3-برای تابع $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ با استفاده از روش حداقل مربعات یک چند جمله ای درجه دوم تقریب بزنید بطوریکه $-1\le x\le 1$ باشد .

4-با استفاده از روش حداقل مربعات منحنی $y={}^{C_0}\!/_{x}+C_1\sqrt{x}$ را برای داده های جدول زیر برازش کنید .

t	0.1	0.2	0.4	0.5	1	2
f(t)	21	11	7	6	5	6

5-یک چندجمله ای بفرم ax^2+bx+c بر اساس حداقل مربعات برای تابع 2^x در نقاط $x_i=0,1,2,3,4$ تقریب بزنید .

6-مقدار تابع f(x) در چهار نقطه زیر معلوم است :

x	0	0.5	1	2
f(x)	1	3.52	3.73	-1.27

مقادیر a وb را وعدد طبیعی n را بطریقی بیابید که حاصل جمع زیر مینیمم گردد .

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\,f(x_i)-a\sin(nx_i)-b\right]^2$$

فصل ششم

6- انتگرال گیری عددی

6-1 مقدمه :

مسئله اصلی انتگرال گیری عددی عبارتست از یافتن یک مقدار تقریب برای انتگرال زیر :

$$I=\int_a^b w(x)\,f(x)\,dx \qquad (6.1)$$

بطوریکه در فاصله [a,b] ، w(x)>0 تابع وزن است . فرض می کنیم که w(x) و w(x)f(x) انتگرال پذیر است .حدود انتگرال ممکن است معین یا نیمه معین یا بینهایت باشد .انتگرال رابطه (6.1) توسط یک ترکیب خطی از مقادیر تابع f(x) بصورت زیر تقریب زده می شود :

$$I=\int_a^b w(x)\,f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} l_k\, f_k \qquad (6.2)$$

بطوریکه k=0(1)n و x_k گره ها نامیده می شوند ودر بین حدود انتگرال گیری [a,b] قرار دارند و l_k را وزنهای دستورانتگرال گیری می گویند . خطای تقریب عبارتست از :

$$R_n=\int_a^b w(x)\,f(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n} l_k\, f_k \qquad (6.3)$$

حال به تعریف مرتبه روش انتگرال گیری می پردازیم .

تعریف 6-1 : یک روش انتگرال گیری نظیر (6.2) را دارای دقت مرتبه p ام نامند هرگاه این روش برای همه چندجمله ایهای درجه کمتر یا مساوی p نتیجه دقیق بدست بدهد .

در رابطه (6-2) تعداد مجهولات 2n+2 می باشد .(n+1 گره x_k و n+1 وزن انتگرال گیری l_k).

روش فـــوق را می توان برای چندجمله ای درجه کوچکتر ومساوی 2n+1 دقیق گردانید .لذا روش بصورت رابطه (6.2)می تواند حداکثر دارای مرتبه دقت 2n+1 باشد . اگر تعدادی از گره ها ازقبل مشخص باشند مرتبه روش

کاهش خواهد یافت .اگر n+1 گره از قبل داده شده باشد آنگاه ما بایستی تنها n+1 وزن انتگرال گیری را بیابیم

.بنابراین روش حاصله حداکثر دارای دقت n ام خواهد بود .

2-6 روشهای مبتنی بر درونیابی

درصورتیکه n+1 گره x_k داده شده باشند ومتناظر با آنها مقادیر تابع f_k داده شده باشند ، با استفاده از فرمول درونیاب لاگرانژ چندجمله ای برای داده های (x_k,f_k) به ازای k=0(1)n بصورت زیر داده می شود :

$$f(x) \cong p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f_k + \frac{p(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) \qquad x_0 < z < x_n \tag{6.4}$$

و $l_k(x)$ چند جمله ای اساسی لاگرانژ است .

$$l_k(x) = \frac{p(x)}{(x-x_k)(p'(x_k))}$$
$$p(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

با جایگذاری تابع f(x) در رابطه (6.1) با فرمول درونیابی رابطه (6.4) و انتگرال گیری از a تا b خواهیم داشت :

$$I = \int_a^b w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \left[\int_a^b w(x) l_k(x)\, dx \right] f_k + \int_a^b w(x) \frac{p(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)\, dx = \sum_{k=0}^{n} l_k\, f_k + R_n \tag{6.5}$$

بطوریکه :
$$l_k = \int_a^b w(x) l_k(x)\, dx$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b w(x) p(x)\, f^{(n+1)}(z)\, dx \tag{6.6}$$

اگر تابع $p(x)$ در فاصله [a,b] تغییر علامت ندهد و $f^{(n+1)}(x)$ در این فاصله پیوسته باشد ، آنگاه با استفاده از قضیه مقدار میانگین حساب دیفرانسیل و انتگرال ، ما می توانیم خطای تقریب رابطه (6.6) را بفرم زیر بیابیم :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(h)}{(n+1)!} \int_a^b w(x) p(x)\, dx \qquad h \in (a,b) \tag{6.7}$$

اگر در فاصله [a,b] ، $p(x)$ تغییر علامت دهد ، آنگاه رابطه (6.6) را می توان بصورت زیر نوشت :

$$|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b w(x)|p(x)||f^{n+1}(z)|dx \le \frac{M_{n+!}}{(n+1)!}\int_a^b w(x)|p(x)|dx \qquad (6.8)$$

بطوریکه :

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1} \qquad x \in [a,b] \qquad (6.9)$$

همچنین جمله خطای تقریب را می توان به طریق زیر نیز بدست آورد .از آنجا که روش برای چندجمله ای کوچکتر یا مساوی n دقیق می باشد .لذا وقتیکه $f(x)=x^i$ برای $i=0(1)n$ داریم $R_n=0$ ووقتیکه $f(x)=x^{n+1}$ باشد ، $R_n \neq 0$ است .

بنابراین جمله خطارا می توان به فرم زیر نوشت :

$$R_n = \frac{C}{(n+1)!} f^{(n+1)}(h) \qquad (6.10)$$

بطوریکه ثابت خطای C عبارتست از :

$$C = \int_a^b w(x)x^{n+1}dx - \sum_{k=0}^{n} l_k x_k^{(n+1)} \qquad (6.11)$$

اگر C برای $f(x)=x^{n+1}$ صفر شود ، آنگاه چندجمله ای یک درجه بالاتر را درنظر می گیریم .حال با صرف نظر کردن جمله خطا روش بصورت زیر را می یابیم .

$$\int_a^b w(x)\, f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} l_k\, f_k \qquad (6.12)$$

3-6 - روشهای نیوتن کاتس

وقتیکه $w(x)=1$ باشد و گره های x_k با گام مساوی $h=\frac{b-a}{n}$ با $x_n=b$ و $x_0=a$ مدنظر باشند آنگاه روش (6.12) را روش انتگرال گیری نیوتن کاتس می نامند .وزنهای l_k را عدد کاتس نامند با تغییر متغیر $\frac{x-x_0}{h}=s$ داریم :

$$l_k(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} s(s-1)(s-2)....(s-k-1)....(s-n)$$

$$l_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} h\int_0^n s(s-1)....(s-k+1)(s-k-1)....(s-n)ds \qquad (6.13)$$

$$R_n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n s(s-1)....(s-n)\, f^{(n+1)}(z)ds \qquad (6.14)$$

حال با انتخاب مقادیر متفاوت n می توان خانواده ای از روشهای نیوتن کاتس رابدست آورد .

روش ذوزنقه ای : برای n=1 داریم $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h=(b-a)$ لذا داریم :

$$l_0 = -h\int_0^1 (s-1)\,ds = \frac{h}{2}$$
$$l_1 = h\int_0^1 s\,ds = \frac{h}{2}$$

پس روش زیر را خواهیم داشت :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[\, f(a) + f(b)\right] \qquad (6.15)$$

که به روش ذوزنقه ای معروف است . تعبیر هندسی این روش این است که روش فوق بیان کننده مساحت ذوزنقه ای است با عرض b-a وقاعده های f(b),f(a) که مساحت زیر منحنی y=f(x) و محور x ها از x=a تا x=b را با آن تقریب می زنیم .شکل آن بصورت زیر است :

خطا در روش ذوزنقه ای عبارت است از :

$$R_1 = \frac{h^3}{2}\int_0^1 s(s-1)\, f''(z)\,ds$$

ازآنجا که s(s-1) در فاصله [0,1] تغییر علامت نمی دهد داریم :

$$R_1 = \frac{h^3}{2}\, f''(h)\int_0^1 s(s-1)\,ds \qquad h \in (0,1)$$
$$= -\frac{h^3}{12}\, f''(h) = \frac{-(b-a)^3}{12}\, f''(h) \qquad (6.16)$$

ازآنجا که روش ذوزنقه ای برای چندجمله ای کوچکتر یا مساوی n=1 دقیق است وبنابراین دارای دقت مرتبه اول است .الترناتیو دیگری برای یافتن خطا بصورت زیر می باشد .

$$C = \int_a^b x^2\,dx - \tfrac{1}{2}(b-a)[a^2+b^2] = -\tfrac{1}{6}(b-a)^3$$

با استفاده از رابطه (6.10) داریم :

$$R_1 = \frac{-(b-a)^3}{12}\ f''(h)$$
$$= \frac{-(b-a)}{12} h^2\ f''(h)$$

که با رابطه (6.16) یکسان می باشد .

روش ســــــیمپسون : برای n=2 داریم $h=\frac{b-a}{2}$, $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$ بنابراین با استفاده از رابطه (6.13) داریم :

$$l_0 = \frac{h}{2}\int_0^2 (s-1)(s-2)\,ds = \frac{h}{3}$$

$$l_1 = -h\int_0^2 s(s-2)\,ds = \frac{4h}{3}$$

$$l_2 = \frac{h}{2}\int_0^2 s(s-1)\,ds = \frac{h}{3}$$

حال روش زیر را داریم :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad (6.17)$$

این روش را روش سیمپسون می نامند . جمله خطای این روش عبارتست از :

$$R_2 = \frac{h^4}{3!}\int_0^2 s(s-1)(s-2)\ f^{(3)}(z)\,ds$$

چون s(s-1)(s-2) در فاصله [0,2] تغییر علامت میدهد ما از رابطه (6.10) استفاده می کنیم .لذا از آنجا که این روش برای چند جمله ای درجه کوچکتر یا مساوی 2 دقیق است داریم :

$$C = \int_a^b x^3\,dx - \frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right] = 0$$

چون c=0 است ونشان می دهد که این روش برای چندجمله ای درجه 3 نیز دقیق است .بنابراین جمله خطا بصورت زیر بیان می شود :

$$R_2 = \frac{C}{4!} f^{(4)}(h) \qquad h \in (0,2)$$

$$C = \int_a^b x^4\, dx - \frac{b-a}{6}\left[a^4 + 4\left(\frac{b+a}{2}\right)^4 + b^4\right] = -\frac{(b-a)^5}{120} \qquad (6.18)$$

بنابراین جمله خطای روش سیمپسون عبارتست از :

$$R_2 = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(h) \qquad (6.19)$$

$$R_2 = \frac{-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90} f^{(4)}(h) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(h) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(h) \qquad (6.20)$$

روش 3/8 سیمپسون : وقتیکه n=3 باشد روشی را که می یابیم به روش 3/8 سیمپسون معروف است .در جدول

زیر وزنهای l_k برای $n \le 6$ به ازای w(x)=1 برای روشهای نیوتن کاتس بصورت زیر آورده شده است .

وزنهای روش های انتگرال گیری نیوتن – کاتس

	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
1	$1/2$	$1/2$					
2	$1/3$	$4/3$	$1/3$				
3	$3/8$	$9/8$	$9/8$	$3/8$			
4	$14/45$	$64/45$	$24/45$	$64/45$	$14/45$		
5	$95/288$	$375/288$	$250/288$	$250/288$	$375/288$	$95/288$	
6	$41/140$	$216/140$	$27/140$	$272/140$	$27/140$	$216/140$	$41/140$

معمولاً برای مقادیر بزرگ n از لحاظ نظری بایستی تقریب بهتری به یابم .اما برای مقادیر بزرگ $n(n \ne 9, n \ge 8)$ برخی از وزنها انتگرال گیری منفی میشوند . این باعث کاهش ارقام صحیح بامعنی در نتایج می گردد .بدین علت روشهای مراتب بالاتر نیوتن کاتس معمولاً استفاده نمی شوند .

همه روشهای فوق الذکر شامل نقاط ابتدا و انتهای انتگرال گیری هستند (یعنی $x_n=b$ و $x_0=a$) این چنین روشهایی را روشهای بسته می نامند .روشهایی که شامل ابتدا و انتهای فاصله نباشد روشهای باز نامیده می شود . با

جایگزینی چندجمله ای لاگرانژ در رابطه (6.1) برای (n-1) نقطه (x_k,f_k) به ازای $k=1(1)n-1$ و انتگرال گرفتن در این حدود برخی از روشهای باز را برای $w(x)=1$ بهمراه خطای آنها بصورت زیر می یابیم .

گره های انتگرال گیری را در این حالت نیز مساوی انتخاب می کنیم : $h=\frac{b-a}{n}\ ,\ x_0=a\ ,\ x_n=b$

1- روش نقطه میانی : $(n=2)$ $$\int_a^b f(x)\,dx=2hf(x_0+h)+\frac{h^3}{3}f''(z_1) \quad (6.21)$$

2- روش دو نقطه ای : $$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{3h}{2}[f(x_0+h)+f(x_0+2h)]+\frac{3}{4}h^3 f''(z_2)\ ,\ (n=3) \quad (6.22)$$

3- روش سه نقطه ای : $$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{4h}{3}[2f(x_0+h)-f(x_0+2h)+2f(x_0+3h)]\ ,\ (n=4)$$

$$+\frac{14h^5}{45}f^{(4)}(z_3) \quad (6.23) \quad , \quad a<z_1,z_2,z_3<b$$

مثال 6-1 - تقریبی برای انتگرال $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ با استفاده از (الف) روش ذوزنقه ای (ب) روش سیمپسون بیابید .

کران بالای خطا را محاسبه کنید .

حل : ما می دانیم که جواب دقیق انتگرال فوق تا شش رقم اعشار عبارتست از $I=\ln 2=0.693147$

با استفاده از روش ذوزنقه ای :
$$I\cong\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=0.75$$
$$R_1=0.75-0.693147=0.056853$$

کران بالای خطا برای روش ذوذنقه ای عبارتست از :
$$|R_1|\le\frac{1}{12}\max\left|\frac{2}{(1+x)^3}\right|\le\frac{1}{6}$$

با استفاده از روش سیمپسون داریم :
$$I\cong\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[1+\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right]=\frac{25}{36}=0.694444$$

$$R_2=0.694444-0.693147=0.001297$$

کران بالای خطا در روش سیمپسون

$$|R_2| \le \frac{1}{2880} \max \left| \frac{24}{(1+x)^5} \right| = 0.008333$$

با مشاهده نتیجه می گیریم که خطای واقعی از کران بالای خطا درهر دو روش کوچکتر است .

4-6 روشهای مرکب :

همـــانطور که مرتبه روشهای انتگرال گیری افزایش می یابد ،مرتبه مشتق در جمله خطا متناظر با آن افزایش می یابد .برای اینکه یک روش دارای نتیجه بامعنی باشد این است که مشتقات مراتب بالا در فاصله مورد نظر پیوسته باقی بمانند .روشهای نیوتن مراتب بالاتر ، برخی اوقات نتایج معکوس بدست می دهند . یک الترناتیو جهت بدست آوردن نتایج دقیق این است که از روشهای مراتب پایین نیوتن کاتس استفاده کنیم وفاصله انتگرال گیری را به فواصل ریزتر افراز کنیم و روشهای مرکب انتگرال گیری ایجاد کنیم .

روش مرکب ذوزنقه ای :

فاصله [a,b] را به N زیرفاصله افراز می کنیم ،با گام $h = \frac{b-a}{N}$ ما زیر فاصله های

$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{N-1}, x_N)$ رادرنظر می گیریم بطوریکه $x_0 = a$, $x_N = b$, $x_i = x_0 + ih$ برای $i = 1(1)N-1$

بنابراین می توان نوشت :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx \qquad (6.24)$$

هرکدام از انتگرالهای طرف راست رابا روش ذوزنقه ای محاسبه می کنیم :

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}\{(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \ldots + (f_{N-1} + f_N)\} \\ &= \frac{h}{2}\{f_0 + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}) + f_N\} \qquad (6.25) \end{aligned}$$

خطا در این روش $R_1 = -\frac{h^3}{12}\{f''(z_1) + f''(z_2) + \ldots + f''(z_N)\} \qquad a < z_1, z_2, \ldots, z_N < b$

اگر $f''(x)$ برای هر x درفاصله [a,b] ثابت باشد یا اگر :

$$f''(h) = \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \qquad a \le h \le b$$

آنگاه داریم

$$R_1 = \frac{-h}{12}(Nf''(h)) = \frac{-h^3}{12}\left(\frac{(b-a)}{h}\right) f''(h) = \frac{-(b-a)h^2}{12}\; f''(h)$$

$$R_1 = \frac{-(b-a)^3}{12N^3}(Nf''(h)) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2}\; f''(h) \qquad (6.26)$$

فاکتور N در مخرج رابطه فوق نشان می دهد که برای مقادیر بزرگ N خطا به اندازه کافی کوچک می شود .تعداد زیرفاصله برای این روش می تواند فرد یا زوج باشد .

روش مرکب سیمپسون :

برای استفاده از روش سیمپسون ما نیاز داریم که سه گره داشته باشیم .ما فاصله [a,b] را به تعداد زوج افراز می کنیم تابتوانیم تعداد گره های فرد داشته باشیم .اگر فاصله [a,b] را به 2N زیرفاصله با گام مساوی افراز کنیم

گام متساوی الفاصله h عبارتست از : $h = \frac{b-a}{2N}$

آنگاه ما 2N+1 گره انتگرال گیری زیر را خواهیم داشت .

$$x_0 = a \qquad x_{2N} = b \qquad x_i = x_0 + ih \qquad i = 1,2,\ldots,2N-1$$

بنابراین داریم :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2N-2}}^{x_{2N}} f(x)dx \qquad (6.27)$$

هرکدام از انتگرالهای طرف راست رابطه فوق را با فرمول سیمپسون محاسبه می کنیم .

$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \ldots + \frac{h}{3}(f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N})$$
$$+ \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(z_1) + \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(z_2) + \ldots + \frac{-h}{90} f^{(4)}(z_N)$$

$$I = \frac{h}{3}\{f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + f_{2N}\} \qquad (6.28)$$

این روش را روش مرکب سیمپسون می نامیم . جمله خطا برای این روش عبارتست از :

$$R_2=\frac{-h^5}{90}\left\{f^{(4)}(z_1)+f^{(4)}(z_2)+\ldots+f^{(4)}(z_N)\right\} \qquad (6.29)$$

بطوری که برای : $a<z_i<b \quad , \quad i=1(1)N$

با استفاده از : $f^{(4)}(h)=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}x\right| \quad h\in(a,b)$

می توان رابطه (4.29) رابصورت زیر نوشت :

$$R_2=\frac{-h^5}{90}(Nf^{(4)}(h))$$

$$=\frac{-h^5}{90}\left\{\frac{b-a}{2h}f^{(4)}(h)\right\}=\frac{-(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(h)$$

$$R_2=\frac{-\left(\frac{b-a}{2N}\right)}{90}(Nf^{(4)}(h))=\frac{-(b-a)^5}{180N^4}f^{(4)}(h) \qquad (6.30)$$

مثال 6-2 : انتگرال زیر را با روشهای (الف)ذوزنقه ای مرکب و سیمپسون مرکب با 2و4و8 زیر فاصله متساوی حل کنید .

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

وقتیکه N=2 باشد و h=1/2 گره ها 0,1/2,1 را خواهیم داشت .

$$I_T=\frac{h}{2}\{f_0+2f_1+f_2\}=\frac{1}{4}[f(0)+2f(1/2)+f(1)]=1/4\left[1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right]=\frac{17}{24}=0.708333$$

$$I_s=\frac{h}{3}[f(0)+4f(1/2)+f(1)]=\frac{1}{6}(1+\frac{8}{3}+\frac{1}{2})=\frac{25}{36}=0.694444$$

هرگاه N=4 باشد داریم $h=\frac{1}{4}$ بنابراین گره ها عبارتند از $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$ ما چهار زیرفاصله برای روش ذوزنقه داریم ودو زیر فاصله برای استفاده روش سیمپسون داریم :

$$I_T=\frac{1}{8}\left\{f(0)+2(f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4}))+f(1)\right\}=0.697024$$

$$I_s=\frac{1}{12}\left\{f(0)+4\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\right]+2f(\frac{1}{2})+f(1)\right\}=0.693234$$

هرگاه N=8 باشد ، آنگاه $h=\frac{1}{8}$ ونه گره زیر را داریم

$$0,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8},1$$

ما هشت زیرفاصله برای روش ذوزنقه داریم و چهار زیر فاصله برای روش سیمپسون

$$I_T=\frac{1}{16}\left\{ f(0)+2\sum_{i=1}^{7}(\frac{i}{8})+ f(1)\right\}=0.694122$$
$$I_S=\frac{1}{24}\left\{ f(0)+\sum_{i=1}^{4} f(\frac{2i-1}{8})+2\sum_{i=1}^{3} f(\frac{2i}{8})+ f(1)\right\}=0.693155$$

5-6 روش انتگرال گیری رامبرگ :

چنانچه روند برون یابی ریچاردسون را در مورد روشهای انتگرال گیری فوق الذکر بکار ببریم ،روشهایی با دقت مراتب بالاتر نسبت به روشهای قبلی می یابیم . این روند را انتگرال گیری رامبرگ می نامند . برای نیل به این روش ابتدا خطای روشهای انتگرال گیری را بصورت سری توانی ازگام انتگرال گیری بسط می دهیم و جملات ابتدایی سری را می توان حذف کرد . قبل از پرداختن به چگونگی روش رامبرگ ابتدا ثابت می کنیم که خطای روش ذوزنقه و سیمپسون را می توان بصورت سری توانی زوجی از گام انتگرال گیری بیان کرد . خطای روش ذوزنقه ای مرکب رادرنظر می گیریم :

$$R_n=\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx-h\left[\frac{1}{2} f_0+\sum_{i=1}^{n-1} f_i+\frac{1}{2} f_n\right] \qquad (6.31)$$

فرض می کنیم F(x) تابع اولیه f(x) و چنانچه عملگر انتقال را $E^n(f_0)= f(x_0+nh)$ بکار ببریم داریم :

$$
\begin{aligned}
R_n &= [F(x)]_{x_0}^{x_n} - h\left[(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}) - \tfrac{1}{2} f_0 + \tfrac{1}{2} f_n\right] \\
&= F(x_n) - F(x_0) - h\left[(f_0 + Ef_0 + \ldots + E^{n-1} f_0) + \tfrac{1}{2}(E^n - 1) f_0\right] \\
&= \left\{(E^n - 1)\tfrac{1}{D} f_0 - h\left[(1 + E + E^2 + \ldots + E^{n-1}) f_0 + \frac{1}{2}(E^n - 1) f_0\right]\right\} \\
&= \left\{(E^n - 1)\tfrac{1}{D} - h\left[\left(\frac{E^n - 1}{E - 1}\right) + \frac{1}{2}(E^n - 1)\right]\right\} f(x_0) \\
&= \left\{(E^n - 1)\left[\tfrac{1}{D} - \frac{h}{E - 1} - \frac{h}{2}\right]\right\} f(x_0) \\
&= \left\{(E^n - 1)\left[\tfrac{1}{D} - \frac{h}{e^{hD} - 1} - \tfrac{h}{2}\right]\right\} f(x_0) \qquad \because E \equiv e^{hD}
\end{aligned}
$$

حال بایستی نشان دهیم که $\left(\frac{1}{D} - \frac{h}{e^{hD} - 1} - \frac{h}{2}\right)$ تابع زوجی از h می باشد .لذا فرض می کنیم :

$$
\begin{aligned}
f(h) &= \frac{1}{D} - \frac{h}{e^{hD} - 1} - \frac{h}{2} \\
f(-h) &= \frac{1}{D} + \frac{h}{e^{-hD} - 1} + \frac{h}{2} = \frac{1}{D} + \frac{he^{hD}}{1 - e^{hD}} + \frac{h}{2} \\
&= \frac{1}{D} + \frac{he^{hD} + h - e^{hD} - h}{1 - e^{hD}} - h + \tfrac{h}{2} \\
&= \frac{1}{D} + \frac{h}{1 - e^{hD}} - \frac{1}{2} h \\
&= \frac{1}{D} - \frac{h}{e^{hD} - 1} - \frac{h}{2} = f(h)
\end{aligned}
$$

بنابراین $R_n(h) = R_n(-h)$ یعنی خطای روش ذوزنقه ای تابع زوجی از h یعنی گام انتگرال گیری است .حال به توضیح الگوریتم روش رامبرگ می پردازیم .

روش رامبرگ بر اساس ذوزنقه :

اگر انتگرال را با روش ذوزنقه ای حل کنیم داریم :

$$
I = \int_a^b f(x)\,dx = I_T(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots \qquad (6.32)
$$

حال انتگرال را با گام h/2 حل می کنیم داریم

$$I = I_T(\frac{h}{2}) + c_1\frac{h^2}{4} + c_2\frac{h^4}{16} + c_3\frac{h^6}{64} + \dots \qquad (6.33)$$

واگر مجدداً گام را نصف کنیم داریم

$$I = I_T(\frac{h}{4}) + c_1\frac{h^2}{16} + c_2\frac{h^4}{64} + c_3\frac{h^6}{256} + \dots \qquad (6.34)$$

والی آخر .اگر C_1 را از روابط فوق حذف کنیم و سپس C_2 را والی آخر روش زیر را خواهیم داشت که به روند رامبرگ بر اساس روش ذوزنقه معروف است می یابیم :

$$I_T^{(m)}(h) = \frac{4^m I_T^{(m-1)}(h/2) - I_T^{(m-1)}(h)}{4^m - 1} \qquad m = 1,2,\dots \quad , I_T^{(0)} = I_T^{(1)} \qquad (6.35)$$

روش رامبرگ بر اساس سیمپسون :

چنانچه انتگرال را با روش سیمپسون مرکب با گامهای $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}$ والی آخر حل کنیم داریم :

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_s^{(h)} + c_1h^4 + c_2h^6 + c_3h^8 + \dots \qquad (6.36)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_s(h/2) + c_1\, h^4/16 + c_2\, h^6/64 + c_3\, h^8/256 + \dots \qquad (6.37)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_s(h/4) + c_1\, h^4/256 + c_2\, h^6/4^6 + c_3\, h^8/4^8 + \dots \qquad (6.38)$$

والی آخر .حال اگر ابتدا C_1 را در روابط بالا حذف کنیم وسپس C_2 وبر همین منوال پیش برویم می توان روش زیر را یافت :

$$I_s^{(m)}(h) = \frac{4^{m+1} I_s^{(m-1)}(\frac{h}{2}) - I_s^{(m-1)}(h)}{4^{m+1} - 1} \qquad , m = 1,2,\dots \qquad (6.39)$$

مثال 6-3 : انتگرال $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 10}$ را با استفاده از روش ذوزنقه و سیمپسون با سه و پنج ونه گره حل کنید . جوابهای حاصله را با استفاده از روش رامبرگ دقیق تر سازید .

حل : برای اینکه سه گره داشته باشیم بایستی فاصله [a,b] را $h=\dfrac{b-a}{n}\Rightarrow h=\dfrac{1-0}{2}=\dfrac{1}{2}$ به دو زیر فاصله

مساوی افراز کنیم بنابراین $x_0=0, x_1=1/2, x_2=1$ $f(x)=\dfrac{1}{x^3+10}$ به ازای x_2, x_1, x_0 به ترتیب برابر است با

$1/11, 8/81, 1/10$ حال اگر انتگرال فوق راباروش ذوزنقه حل کنیم داریم :

$$I_T(1/2)=\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)]=1/4\left[1/10+16/81+1/11\right]=0.09710999$$

اگر انتگرال را به روش سیمپسون حل کنیم داریم :

$$I_s(1/2)=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]=1/6\left[1/10+32/81+1/11\right]=0.09766180$$

مسئله فوق را حالا به 5 گره انتگرال گیری گیری حل می کنیم بنابراین گام انتگرال گیری را بایستی h=1/4 باشد

یعنی فاصله [0,1] به 4 زیرفاصله بایستی افراز کنیم .لذا مقدار تابع f(x) در نقاط گره ای به ترتیب برابر است با :

$$f(x_0)=f(0)=1/10 \quad , \quad f(x_1)=f(1/4)=64/641$$
$$f(x_2)=f(1/2)=8/81 \quad , \quad f(x_3)=f(3/4)=64/667 \quad , \quad f(x_4)=f(1)=1/11$$
$$I_T(1/4)=h/2[f_0+2\{f_1+f_2+f_3\}+f_4]=1/8\left[1/10+2(64/641+8/81+64/667)+1/11\right]=0.09750400$$
$$I_s(1/4)=h/3[f_0+4(f_1+f_3)+2f_2+f_4]=1/12\left[1/10+4(64/641+64/667)+16/81+1/11\right]=0.09763533$$

حال اگر مسئله را با 9 گره بخواهیم حل کنیم h=1/8 و گره های انتگرال گیری عبارتند از :

$$x_0=0 \quad , \quad x_1=1/8 \quad , \quad x_2=1/4 \quad , \quad x_3=3/8 \quad , \quad x_4=1/2 \quad , \quad x_5=5/8 \quad ,$$
$$x_6=3/4 \quad , \quad x_7=7/8 \quad , \quad x_8=1$$

مقادیر تابع به ازای نقاط فوق عبارتند از $f(x_i)=\dfrac{1}{(i/8)^3+10}$ برای i=0(1)8

لذا داریم :

$$I_T=(1/8)=0.09760126$$
$$I_s=(1/8)=0.09763368$$

حال اگر از روش رامبرگ براساس ذوزنقه استفاده کنیم یعنی از روش (35-6)استفاده نمائیم داریم :

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$1/2$	0.09710999		
		0.09763534	
$1/4$	0.09750400		0.09763357
		0.09763368	
$1/6$`	0.09760126		

اگر از روش رابطه (39-6) یعنی از روش رامبرگ براساس سیمپسون استفاده کنیم داریم :

h	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$1/2$	0.09766180		
		0.09763357	
$1/4$	0.09763533		0.09763357
		0.09763357	
$1/8$`	0.09763368		

مثال 6-4 : مطلوبست محاسبه انتگرال زیر با استفاده از روش رامبرگ وتاگام $h = 1/16$ ، $\int_0^{0.5} \frac{x}{\sin x} dx$

با استفاده از روش ذوزنقه ای داریم :

$$f(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$n=1 \ , \ h=1/2 \ , \ x_0 = 0 \ , \ x_1 = 1/2 \Rightarrow I_T(1/2) = 0.510729$$

$$n=2 \ , \ h=1/4 \ , \ x_0 = 0 \ , \ x_1 = 1/4 \ , x_2 = 1/2 \Rightarrow I_T(1/4) = 0.507988$$

$$n=4 \ , \ h=1/8 \ , \ x_i = i/8 \ , \ i=0(1)4 \Rightarrow I_T(1/8) = 0.507298$$

$$n=8 \ , \ h=1/16 \ , \ x_i = i/16 \ , \ i=0(1)8 \Rightarrow I_T(1/16) = 0.507126$$

با استفاده از روش رامبرگ داریم :

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$1/2$	0.0510729			
		0.507074		
$1/4$	0.507988		0.507067	
		0.507068		0.507069
$1/8$`	0.507298		0.507069	
		0.507069		
$1/16$`	0.507126			

همین مثال را می توان با روش رامبرگ براساس سیمپسون نیز حل کرد .

6-6 روشهای مبتنی بر ضرائب نامعین :

در این بخش اگر در روش انتگرال گیری $I=\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx=\sum_{k=0}^{n} l_k\, f(x_k)$ گره ها x_k ووزنهای l_k به ازای $k=0,1,\ldots,n$ بخواهیم تعیین کنیم بایستی روش را برای چندجمله ای درجه $2n+1$ دقیق محاسبه کنیم . روشهایی که بر این اساس بدست خواهند آمد روشهای انتگرال گیری گاوسی می نامند .از آنجا که بازه متناهی [a,b] را می توانیم با استفاده از تبدیل زیر به بازه [-1,1] تبدیل نمائیم

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$$

لذا ما انتگرال را بصورت زیر درنظر می گیریم :

$$I=\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx=\sum_{k=0}^{n} l_k\, f(x_k) \qquad (6.40)$$

روش های گاوس لژاندر :

برای $w(x)=1$ رابطه (6-40) را بصورت زیر خواهیم داشت :

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\, dx=\sum_{k=0}^{n} l_k\, f(x_k) \qquad (6.41)$$

در این حالت x_k ها و l_k ها مجهول هستند وبایستی تعیین شوند .

بعنوان مثال اگر $n=2$ باشد روش (6-41) رابفرم زیر خواهیم داشت :

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\, dx= l_0\, f(x_0)+l_1\, f(x_1)+l_2\, f(x_2) \qquad (6.42)$$

در رابطه (6-42) شش مجهول داریم که بایستی تعیین نمائیم .بنابراین رابطه فوق بایستی برای چند جمله ای تا درجه پنجم دقیق باشد یعنی برای $f(x)=x^i$, $i=0(1)5$ داریم :

$$l_0+l_1+l_2=2$$
$$l_0x_0+l_1x_1+l_2x_2=0$$
$$l_0x_0^2+l_1x_1^2+l_2x_2^2=2/3$$
$$l_0x_0^3+l_1x_1^3+l_2x_2^3=0$$
$$l_0x_0^4+l_1x_1^4+l_2x_2^4=2/5$$
$$l_0x_0^5+l_1x_1^5+l_2x_2^5=0$$

با حل سیستم فوق داریم :

$$x_0=-\sqrt{3/5} \qquad x_1=0 \qquad x_2=\sqrt{3/5}$$
$$l_0=5/9 \qquad l_1=8/9 \qquad l_2=5/9$$

بنابراین روش (6-42)بصورت زیر داریم :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{1}{9}\left[5\,f(-\sqrt{3/5})+8\,f(0)+5\,f(\sqrt{3/5})\right] \qquad (6.43)$$

لذا خطای این روش را می توانیم بصورت زیر بیابیم :

$$R_s=\frac{C}{6\,!}\,f_{(h)}^{(6)} \quad , \quad -1<h<1 \qquad (6.44)$$

بطوریکه C ضریب ثابت خطا عبارتست از :

$$C=\int_{-1}^{1} x^6\,dx-(l_0x_0^6+l_1x_1^6+l_2x_2^6)=\frac{2}{7}-\frac{6}{25}=\frac{8}{175}$$

بنابراین می دانیم که گره ها انتگرال گیری x_k ریشه های چندجمله ای لژاندر می باشند یعنی :

$$p_{n+1}(x)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)\,!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)^{n+1}\right] \quad , \quad ,n=0,1,... \qquad (6.45)$$

حال در جدول زیر ریشه های چند جمله ای لژاندر برای n=1(1)5 برای روش (6-41) بصورت زیر داریم :

n	x_k	l_k
1	$\pm$0.5773502692 0.00000000	1 0.8888888889
2	$\pm$0.7745966692 $\pm$0.3399810436	$\pm$0.5555555556 0.6521451549
3	$\pm$0.8611363116 0.0000000000	0.3478548481 0.5688888889
4	$\pm$0.5384693101 $\pm$0.9061798459	0.4786286705 0.2369268851

5	± 0.2386191861	0.4679139346
	± 0.6612093865	0.3607615730
	± 0.93246995142	0.1713244924

مثال 6-5 : با استفاده از روش گاوس – لژاندر انتگرال زیر را محاسبه کنید :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

حل : ابتدا بازه [0,1] را به [-1,1] تبدیل می کـــنیم.

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$$
$$x=\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\Rightarrow dx=\tfrac{1}{2}dt$$
$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\int_{-1}^1 \frac{dt}{t+3}$$

با استفاده از روش گاوس لژاندر سه نقطه ای (n=2) داریم :

$$I=\tfrac{1}{9}\left[8\left(\frac{1}{0+3`}\right)+5\left(\frac{1}{3+\sqrt{3/5}}\right)+5\left(\frac{1}{3-\sqrt{3/5}}\right)\right]=\frac{131}{189}=0.675774$$

درصورتیکه جواب واقعی انتگرال فوق عبارتست از I=0.675774

مثال 6-6 : در روش زیر c,b,a را بطریقی بیابید که حتی الامکان برای چندجمله ایهای درجه بالا دقیق باشد و خطای روش را بیابید ؟

$$\int_0^h f(x)dx=h\{af(0)+bf(h/3)+cf(h)\}$$

حل : f(x) را تا چندجمله ای درجه دوم درنظر می گیریم داریم

$$f(x)=1 \quad ; \quad h=h(a+b+c) \quad or \quad a+b+c=1 \qquad (1)$$
$$f(x)=x \quad ; \quad \frac{h^2}{2}=h(\frac{bh}{3}+ch) \quad or \quad \frac{1}{3}b+c=\frac{1}{2} \qquad (2)$$
$$f(x)=x^2 \quad ; \quad \frac{h^3}{3}=h(\frac{bh^2}{9}+ch^2) \quad or \quad \frac{1}{9}b+c=\frac{1}{3} \qquad (3)$$

دستگاه سه معادله و سه مجهول بالا را حل می کنیم :

$$a=0 \quad , \quad b=\frac{3}{4} \quad , \quad c=\frac{1}{4}$$

برای محاسبه خطا موضعی یا قطع کردن داریم :

$$R_2=\frac{c}{3!}f'''(h) \quad , \quad 0<z<h$$

$$c=\int_0^h x^3\,dx-h\left[\frac{bh^3}{27}+ch^3\right]=\frac{-h^4}{36}$$

$$\therefore R_2=\frac{-h^4}{216}f'''(z)=0(h^4)$$

تمرین های فصل :

1-مطلوبست محاسبه $\int_0^{p/2}\frac{\cos x\ln(\sin x)}{\sin^2 x+1}$ تا دو رقم اعشار صحیح .

2-مطلوبست محاسبه $\int_0^{0.8}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)dx$ تا 5 رقم اعشار صحیح .

3-A مساحت سطحی است محصور به منحنی $y^2+x^2=\cos x$ و بوسیله انتگرال زیر تعریف شده است :

$$A=4\int_0^a(\cos x-x^2)^{1/2}\,dx$$

بطوریکه a ریشه مثبت معادله $\cos x=x^2$ است .

الف : a را تا سه رقم اعشار صحیح محاسبه کنید .

ب : با استفاده از روش رامبرگ A را محاسبه کنید بطوریکه خطای مطلق محاسبه کمتر از 0.05 باشد .

4-مقادیر c,b,a را بطریقی بیابید که خطای قطع کردن فرمول زیر حداقل مقدار ممکن شود .

$$\int_{-h}^{h}f(x)\,dx=h[af(h)+bf(0)+af(h)]+h^2c(f'(-h))-f'(h))$$

5-در فرمول زیر ضرائب را تعیین کنید .

$$\int_0^{2h^{-1/2}}xf(x)\,dx=(2h)^{1/2}[A_0\,f(0)+A_1\,f(h)+A_2\,f(2h)]+R$$

پس R را نیز بیابید در صورتیکه $f'''(x)$ ثابت باشد .

فصل هفتم

7- فصل مشتق گیری عددی

روشهای متعددی برای یافتن مشتق تابع f(x) وجود دارد .زمانی که f(x) تابعی بغرنج ویا بصورت داده های جدولی تعریف شده باشد از روشهای عددی برای یافتن مشتق استفاده می کنیم .در این فصل ما به روشهایی می پردازیم که مشتق $f^{(r)}(x), r>1$ تابع f(x) را تقریب می زنند .در فصل درونیابی اشاره کردیم که یکی از دلایل استفاده از چندجمله ایهای جبری برای تقریب مجموعه ای از داده ها ، این است که برای هرتابع تعریف شده و پیوسته در یک بازه بسته ، چندجمله ای وجود دارد که درهرنقطه بازه به میزان دلخواه به تابع مزبور نزدیک است . مشتقات چندجمله ایها به آسانی بدست می آیند .بنابراین جای تعجب نیست که در بیشتر روندهای تقریب مشتقات ، از چندجمله ایهایی که تابع را تقریب می زنند بجای خود تابع استفاده شوند . اما ابتدا با تعریف مشتق شروع می کنیم مشتق تابع f(x) در نقطه x_0 عبارتست از :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (7.1)$$

رابطه (7.1) برای تابع خطی f(x)=ax+b دقیق است . یعنی مقدار واقعی $f'(x)$ را به ازای هرمقدار مخالف صفر h نتیجه مـــــیدهد .اجازه دهید خطای این فرمول را بررسی کنیم . نقطه شروع ، قضیه تیلور است که بصورت زیر می باشد .

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(z) \qquad (7.2)$$

در این جا z نقطه ای دربین x و x+h است .برای اینکه رابطه (7.2) معتبر باشد f', f باید در بازه بسته بین x و x+h پیوسته باشند و f'' باید روی بازه باز متناظر وجود داشته باشد . از رابطه (7.2) می توان نتیجه گرفت :

$$f'(x) = \frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)] - \frac{h}{2} f''(z) \qquad (7.3)$$

رابـــطه (7.3) از (7.1)مفید تراست .زیرا بر روی رده بزرگی از توابع فوق الذکر صادق است .جمله خطا در رابطه (7.3) دارای دو قسمت است .توانی از h وشامل مشتقی از مرتبه بالاتر f است .جمله h درخطا باعث می شود ، وقتی که h به صفر میل می کند تمام عبارت به صفر همگرا گردد . سرعت این همگرایی به توان h بستگی دارد . قسمت دوم بیانگر رده توابعی است که برآورد خطا برای آنها قابل اجرا است . جمله $-\frac{h}{2}f''(z)$ در رابطه (7.3) خطای برشی نامیده می شود . غالباً دقت چنین فرمولهای مشتق گیری عددی به آسانی با توان h موجود در جمله خطا سنجیده می شود .

هرچه توان h بالاتر باشد ، چونکه h یک عدد کوچک است دقیق می باشد . بنابراین رابطه (7-2) دارای دقت 0(h) است .اما یک فرمول دقیق تر را می توان برای مشتق مرتبه اول بصورت زیر یافت :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(z_1) \qquad (7.4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(z_2) \qquad (7.5)$$

با کم کردن رابطه (7-5) از (7-4) و مرتب کردن آن داریم :

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h^2}{12}[f'''(z_1) + f'''(z_2)] \qquad (7.6)$$

در صورتیکه f''' وجود داشته باشد این نتیجه بهتری است زیرا جمله خطا شامل h^2 است . با فرض اینکه تابع f''' بر [x-h,x+h] پیوسته باشد وبا فرض اینکه M و m بیشترین و کمترین مقادیر f''' در این بازه باشد آنگاه $f'''(z_1)$, $f'''(z_2)$, $C = \frac{1}{2}[f'''z_1 + f'''(z_2)]$ جملگی در بازه [m,M] قرار می گیرند . چون f''' پیوسته است ، مقدار C را در نقطه ای مانند z در [x-h,x+h] اختیار می کند .ازاین رو :

$$f'''(z) = \frac{1}{2}[f'''(z_1) + f'''(z_2)]$$

اگر این عبارت را در معادله (7-6) قرار دهیم ، داریم ؛

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h^2}{6} f'''(z) \qquad (7.7)$$

فرمول مهم دیگری برای مشتقات مرتبه دوم با گسترش معادلات (7.4) و(7.5) با یک جمله بیشتر و سپس جمع آن معادلات بدست می آید وبا مرتب کردن آن خواهیم داشت :

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}_{(z)} \qquad (7.8)$$

به ازای $z \in (x-h, x+h)$ که فرمول مناسبی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم است .

بطور کلی روشهای مشتق گیری عددی را می توان به سه طریق زیر بدست آورد

1- روشهایی که مبتنی بر درونیابی هستند .

2- روشهایی که مبتنی بر عملگرهای تفاضلات متناهی هستند .

3- روشهایی که مبتنی بر تعیین ضرائب نامعین هستند .

1-7 روشهای مبتنی بر درونیابی

فرض می کنیم که $n+1$,$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ نقطه متمایز در بازه [a,b] باشند و مقادیر تابع f(x) در این نقاط داده شده باشند .فرض می کنیم $f \in C^{n+1}[a,b]$ باشد . طریقه عمومی در این روشها ، بدست آوردن چندجمله ای درونیاب $p_n(x)$ است وسپس r مرتبه $(r \le n)$ از چند جمله ای مشتق می گیریم تا $p_n^{(r)}(x)$ را بیابیم . مقدار $p_n^{(r)}(x_k)$ تقریبی برای مشتق $f^{(r)}_{(x)}$ در نقطه x_k می باشد . علیرغم اینکه $p_n(x)$ و f(x) دارای مقادیر یکسان در نقاط گره ای می باشند اما ممکن است تفاوت مشتقات در این نقاط قابل ملاحظه باشند . شکل-1 مشتق مرتبه اول در x_k است .

وضعیت درنقاط غیر گره ای ممکن است بدتر باشند . با افزایش مرتبه مشتق بیشتر از این بدتر خواهد شد . کمیت:

$$E^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - p_n^{(r)}(x) \qquad (7.9)$$

را خطای تقریب در r امین مرتبه مشتق درهرنقطه x نامیده میشود .

نقاط گره ای نامتساوی الفاصله :

اگر نقاط $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ نامتساوی الفاصله باشند آنگاه با استفاده از روش لاگرانژ می توان چندجمله ای درونیاب زیر را داشته باشیم :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f_k \qquad (7.10)$$

$l_k(x)$ چندجمله ایهای اساسی لاگرانژ هستند که عبارتند از :

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{(x_k - x_j)}$$

$$l_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)\, w'(x_k)}$$

$$f_k = f(x_k) \quad , \quad w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

خطای تقریب در هرنقطه x عبارتست از :

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(z_x) \quad , \quad x_0 < z_x < x_n \qquad (7.11)$$

با مشتق گیری از رابطه (10-7) و (11-7) نسبت به x داریم :

$$p_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k'(x)\, f_k \qquad (7.12)$$

$$E_n'(x) = \frac{w'(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(z_x) + \frac{w(x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(z_x)\right) \qquad (7.13)$$

از آنجا که درجمله طرف راست رابطه (13-7) تابع $z(x)$ نامعلوم است .ما نمی توانیم مستقیماً مقدار $E_n'(x)$ را محاسبه کنیم .بهرحال درنقطه x_k , $w(x_k) = 0$ است لذا داریم :

$$E_n'(x_k) = \frac{w'(x_k)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(z_x) \quad , \quad x_0 < z_x < x_n \qquad (7.14)$$

مشروط بر اینکه $\frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(z_x)\right)$ محدود باقی بماند . به ازای هر r $(1 \le r \le n)$ درهر نقطه x از رابطه (7-10) خواهیم داشت :

$$f^{(r)}(x) \approx p_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(r)}(x)\, f_k \qquad (7.15)$$

جمله خطای تقریب با استفاده از رابطه زیر می توان یافت :

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^j}{dx^j}\left(f^{(n+1)}_{(z_x)}\right) = \frac{j!}{(n+j+1)!}\, f^{(n+j+1)}(h_j) \ , \ j = 1,2,... \qquad (7.16)$$

بطوریکه $\min(x_0, x_1, ..., x_n, x) < h_j < \max(x_0, x_1, ..., x_n, x)$

فرمول مشتق گیری (7-15) یک فرمول (n+1) نقطه ای است که برای تقریب $f^{(r)}(x)$ بکار می بریم .چنانچه از فرمول خطی لاگرانژ استفاده شود داریم :

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, f_1 \qquad (7.17)$$

$$p_1'(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad (7.18)$$

رابطه (7-18) به ازای $x \in [x_0, x_1]$ همواره ثابت است خطای این رابطه عبارتست از :

$$E_1'(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{2}\, f''(z) \qquad (7.19)$$

$$E_1'(x_1) = \frac{x_1 - x_0}{2}\, f''(z) \quad , \quad x_0 < z < x_1 \qquad (7.20)$$

هم چنین مشابه فوق از فرمول درجه دوم لاگرانژ می توان استفاده کرد ، نظیر :

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad\Rightarrow\quad l_0'(x)=\frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad\Rightarrow\quad l_1'(x)=\frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad\Rightarrow\quad l_2'(x)=\frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$
$$p_2(x)=l_0(x)\,f_0+l_1(x)\,f_1+l_2(x)\,f_2 \qquad (7.21)$$
$$p_2'(x)=l_0'(x)\,f_0+l_1'(x)\,f_1+l_2'(x)\,f_2 \qquad (7.22)$$

با استفاده از روابط فوق داریم :

$$f'(x_0)\approx p_2'(x_0)=\frac{2x_0-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,f_0+\frac{x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,f_1+\frac{x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,f_2 \qquad (7.23)$$

$$E_2'(x_0)=\frac{1}{6}(x_0-x_1)(x_0-x_2)\,f'''(z) \quad , \quad x_0<z<x_2 \qquad (7.24)$$

مشتق مرتبه دوم چندجمله $p_2(x)$ عبارتست از :

$$f''(x_0)\cong p_2''(x_0)=2\left[\frac{f_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] \qquad (7.25)$$

رابطه فوق به ازای جمیع مقادیر x در بازه $[x_0,x_2]$ ثابت است . خطای آن در نقطه x_0 را می توان بصورت زیر داشت :

$$E_2''(x_0)=\frac{1}{3}(2x_0-x_1-x_2)\,f'''(z)+\frac{1}{24}(x_0-x_1)(x_0-x_2)\times\left[f^{(4)}(h_1)+f^{(4)}(h_2)\right]$$
$$z,h_1,h_2\in(x_0,x_2) \qquad (7.26)$$

نظیر این خطا برای نقطه x_2,x_1 می توان یافت .

نقاط گره ای متساوی الفاصله :

چنانچه $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ متساوی الفاصله با گام h باشند در این صورت

$$x_k=x_0+kh,\; k=0(1)n$$
$$f_k=f(x_k)$$

با استفاده از فرمول خطی درونیاب داریم :

$$f'(x_0) \approx p_1'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{7.27}$$

با خطای
$$E_1'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f_1 - f_0}{h} = -\frac{h}{2} f''(z), \; x_0 < z < x_1$$

این جمله خطا با خطا در رابطه (19-7) یکسان می باشد .

چنانچه مجدداً از فرمول درونیابی درجه دوم استفاده شود داریم :

$$f'(x_0) = p_2'(x_0) = \frac{-3 f_0 + 4 f_1 - f_2}{2h} \tag{7.28}$$

$$E_2'(x_0) = f'(x_0) - \frac{-3 f_0 + 4 f_1 - f_2}{2h} \tag{7.29}$$

با استفاده از بسط سری تیلور حول x_0 داریم :

$$E_2'(x_0) = -\frac{h^2}{3} f'''(z), \; x_0 < z < x_2 \tag{7.30}$$

حال مشتق مرتبه دوم f در نقطه x_o را بصورت زیر خواهیم داشت :

$$f''(x_0) \cong p_2''(x_0) = \frac{f_0 - 2 f_1 + f_2}{h^2} \tag{7.31}$$

با خطای
$$E_2''(x_0) = f''(x_0) - \frac{f_0 - 2 f_1 + f_2}{h^2} = hf'''(z) + 0(h^2), \; x_0 < z < x_2$$

حال در موقعیتی هستیم که می توان مرتبه دقت روشهای عددی مشتق گیری را تعریف کنیم

تعریف 1-7 : یک روش مشتق گیری را دارای دقت مرتبه p ام می نامیم هرگاه :

$$\left| f^{(r)}(x) - p^{(r)}(x) \right| \le Ch^p$$

بطوریکه C یک ثابت مستقل از h است .با توجه به تعریف فوق روشهای (27-7) و(31-7) دارای دقت مرتبه اول هستند اما روش (28-7) دارای دقت مرتبه دوم می باشند .

می توان با استفاده از درونیابی چندجمله ای های درجه بالاتر را بکارگرفت و روشهای عددیی که از نقاط بیشتری استفاده می نمایند ساخت . اما محاسبه توابع بیشتری باید صورت گیرد واین مشکل ساز خواهد شد .

مثال 7-1: مقادیر تابع f(x)=ln x در زیر داده شده است . تقریبی برای $f'(2), f''(2)$ با استفاده از درونیابی خطی و سهمی بیابید . یک کران بالا برای خطای قطع کردن را بدست آورید ؟

x_k	2	2.2	2.6
$f(x_k)$	0.69315	0.78846	0.95551

حل : با استفاده از فرمول : $f'(x_0)=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$ داریم :

$$f'(2.0)=\frac{0.78846-0.69315}{2.2-2}=0.47655$$

با استفاده از روش (23-7) داریم :

$$f'(2.0)=\frac{4-2.2-2.6}{(2-2.2)(2-2.6)}(0.69315)+\frac{2-2.6}{(2.2-2)(2.2-2.6)}(0.78846)+\frac{2-2.2}{(2.6-2)(2.6-2.2)}(0.95551)$$
$$=0.49619$$

میدانیم که مقدار دقیق مشتق $f'(2.0)=0.5$ است .

حال مشتق مرتبه دوم f را با استفاده از روش (25-7) داریم :

$$f''(2.0)=2\left[\frac{0.69315}{(2-2.2)(2-2.6)}+\frac{0.78846}{(2.2-2)(2.2-2.6)}+\frac{0.95551}{(2.6-2)(2.6-2.2)}\right]=-0.19642$$

اما میدانیم که مقدار دقیق مشتق $f''(2.0)=-0.25$

خطای مربوط به روشهای فوق عبارتند از :

$$E_1'(x_0)=\frac{x_0-x_1}{2}f''(z)\ ,\ \ x_0<z<x_1$$
$$E_2'(x_0)=\frac{1}{6}(x_0-x_1)(x_0-x_2)f'''(z)\ ,\ \ x_0<z<x_2$$
$$E_2''(x_0)=\frac{1}{3}(2x_0-x_1-x_2)f'''(z)+\frac{1}{24}(x_0-x_1)(x_1-x_2)\left[f^{(4)}(h_1)+f^{(4)}(h_2)\right],\ x_0<z,h_1,h_2<x_2$$

برای f(x) داریم :

$$f(x) = \ln(x)$$

$$M_1 = \max|f'(x)| = \max\left|\frac{1}{x}\right| = 0.5$$

$$x_0 < x < x_1 \quad 2 < x \le 2.2$$

$$M_2 = \max|f''(x)| = \max\left|-\frac{1}{x^2}\right| = 0.25$$

$$x_0 < x < x_1 \quad 2 < x \le 2.2$$

$$M_3 = \max|f'''(x)| = \max\left|\frac{2}{x^3}\right| = 0.25$$

$$x_0 < x < x_2 \quad 2 < x \le 2.6$$

$$M_4 = \max|f^{(4)}(x)| = \max\left|-\frac{6}{x^4}\right| = 0.375$$

$$x_0 < x < x_2 \quad 2 < x \le 2.6$$

بنابراین کران بالای خطا عبارتند از :

$$|E_1'(2.0)| \le \left|\frac{2-2.2}{2}\right|(0.25) = 0.025$$

$$|E_2'(2.0)| \le \frac{1}{6}|(2-2.2)(2-2.6)|(0.25) = 0.005$$

$$|E_2''(2.0)| \le \frac{1}{3}|(4-2.2-2.6)|(0.25) + \frac{1}{24}|(2-2.2)(2.2-2.6)|(0.75)$$
$$= 0.06917$$

7-2 روشهای مشتق گیری مبتنی بر تفاضلات متناهی

رابطه زیر را مدنظر قرار میدهیم :

$$\begin{aligned} Ef(x) = f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots \\ &= (1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots)\, f(x) \\ &= e^{hD} f(x) \end{aligned} \qquad (7.32)$$

بطوریکه $D = \frac{d}{dx}$ اپراتور مشتق گیری است .

بطور سمبلیک می توان از رابطه (32-7) نتیجه گرفت که : $e^{hD} \equiv E$

یا :

$$hD = \ln E$$

$$hD = \begin{cases} \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \ldots \\ -\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \ldots \\ 2\sinh^{-1}\left(\frac{d}{2}\right) = d - \frac{1^2}{2^2.3!}d^3 + \ldots \end{cases} \qquad (7.33)$$

بنابراین می توان نوشت $\quad hf'(x_k) = hDf(x_k)$

$$hf'(x_k) = \begin{cases} \Delta f_k - \frac{1}{2}\Delta^2 f_k + \frac{1}{3}\Delta^3 f_k - \ldots \\ \nabla f_k + \frac{1}{2}\nabla^2 f_k + \frac{1}{3}\nabla^3 f_k + \ldots \\ d f_k - \frac{1^2}{2^2.3!}d^3 f_k + \ldots \end{cases} \qquad (7.34)$$

از آنجا که $m = \sqrt{\{1+\frac{d^2}{4}\}}$ می توان نوشت :

$$hD = \frac{m}{\sqrt{\{1+\frac{d^2}{4}\}}}(2\sinh^{-1}(\frac{d}{2}))$$
$$= m\left(d - \frac{1^2}{3!}d^3 + \frac{1^2.2^2}{5!}d^5 - \ldots\right)$$

لذا داریم

$$hf'(x_k) = mdf_k - \frac{1^2}{3!}md^3 f_k + \frac{1^2.2^2}{5!}md^5 f_k - \ldots \qquad (7.35)$$

حال رابطه ای که مراتب بالاتر مشتق را می توان یافت از رابطه زیر می توان استفاده نمود :

$$h^r D^r = \begin{cases} \Delta^r - \frac{1}{2}r\Delta^{r+1} + \frac{r(3r+5)}{24}\Delta^{r+2} - \ldots \\ \nabla^r + \frac{1}{2}r\nabla^{r+1} + \frac{r(3r+5)}{24}\nabla^{r+2} + \ldots \\ md^r - \frac{r+3}{24}md^{r+2} + \frac{5r^2+52r+135}{5760}md^{r+4} - \ldots & \text{اگر r فرد باشد} \\ md^r - \frac{r}{24}d^{r+2} + \frac{r(5r+22)}{5760}d^{r+4}\ldots & \text{اگر r زوج باشد} \end{cases} \qquad (7.36)$$

در عمل از رابطه فوق می توان روشهای مشتق گیری مرتبه اول r=1 ومرتبه دوم r=2 در نقطه $x=x_k$ بصورت زیر یافت :

$$hf'(x_k)=\begin{cases}\Delta f_k-\frac{1}{2}\Delta^2 f_k+\frac{1}{3}\Delta^3 f_k-\dots\\ \nabla f_k+\frac{1}{2}\nabla^2 f_k+\frac{1}{3}\nabla^3 f_k-\dots\\ md f_k-\frac{1}{6}md^3\ f_k+\frac{1}{30}md^5 f_k-\dots\end{cases}\qquad(7.37)$$

$$h^2 f''(x_k)=\begin{cases}\Delta^2 f_k-\Delta^3 f_k+\frac{11}{12}\Delta^4 f_k-\dots\\ \nabla^2 f_k+\nabla^3 f_k+\frac{11}{12}\nabla^4 f_k+\dots\\ d^2 f_k-\frac{1}{12}d^4 f_k+\frac{1}{90}d^6 f_k-\dots\end{cases}\qquad(7.38)$$

چنانچه تنها از جملات اول (7.37) استفاده نمائیم روشهای زیر را داریم :

$$f'(x_k)=\begin{cases}\frac{f_{k+1}-f_k}{h}-\frac{1}{2}h\ f''(z_1) & (7.39-a)\\ \frac{f_k-f_{k-1}}{h}+\frac{1}{2}h\ f''(z_2) & (7.39-b)\\ \frac{f_{k+1}-f_{k-1}}{2h}+\frac{h^2}{6}\ f'''(z_3) & (7.39-c)\end{cases}$$

روشهای$(7-39-a)$ و$(7-39-b)$ دارای دقت مرتبه اول و روش$(7-39-c)$ دارای دقت مرتبه دوم است .

همچنین اگر از رابطه (7-38) تنها جملات اول را بعنوان تقریب بکار ببریم روشهای زیر را خواهیم داشت :

$$f''(x_k)=\begin{cases}\frac{f_{k+2}-2f_{k+1}+f_k}{h^2}-hf'''(z_1) & (7.40-a)\\ \frac{f_k-2f_{k-1}+f_{k-2}}{h^2}+h\ f'''(z_2) & (7.40-b)\\ \frac{f_{k-1}-2f_k+f_{k+1}}{h^2}-\frac{h^2}{12}\ f^{(4)}(z_3) & (7.40-c)\end{cases}$$

روشهای$(7-40-a)$ و$(7-40-b)$ دارای دقت مرتبه اول و روش $(7-40-c)$ دارای دقت مرتبه دوم است .

3-7 - روشهای مبتنی بر ضرائب نامعین

در این روش $f^{(r)}(x)$ بصورت یک ترکیب خطی از مقادیر تابع f(x) در یک مجموعه از نقاط جدولی بدلخواه انتخاب شده بیان می شود . فرض می کنیم که نقاط جدولی متساوی الفاصله باگام h باشند .لذا برای نقاط جدولی مرتب شده بصورت متقارن داریم :

$$h^r f^{(r)}(x_k) = \sum_{l=-p}^{p} a_l \ f_{k+l} \qquad (7.41)$$

یا برای نقاط جدولی نامتقارن داریم :

$$h^r f^{(r)}(x_k) = \sum_{l=\pm v}^{p} a_l \ f_{k+l} \qquad (7.42)$$

خطای قطع کردن موضعی به ترتیب بصورت زیر تعریف می شوند :

$$E^{(r)}(x_k) = \frac{1}{h^r}\left(h^r f^{(r)}(x_k) - \sum_{l=-p}^{p} a_l \ f_{k+l} \right) \qquad (7.43)$$

$$E^{(r)}(x_k) = \frac{1}{h^r}\left(h^r f^{(r)}(x_k) - \sum_{l=\pm v}^{p} a_l \ f_{k+l} \right) \qquad (7.44)$$

ضرائـــب a_l ها در روابط (7-41) و(7-42) بر اساس نیاز به دقت معین روشها تعیین می شوند .ما طرف راست روابط (7-41)و(7-42) را با استفاده از سری تیلور حول x_k بسط می دهیم و ضرائب مراتب مختلف مشتقات را از طرفین متحدهم قرار میدهیم وتعداد معادلات مورد نیاز جهت تعیین ضرائب را می یابیم .اولین جملات غیرصفر در (7-43) و(7-44) خطای تقریب را بدست میدهند .

بطور ویژه چنانچه در رابطه (7-41) $r=2$, $p=2$ انتخاب شوند داریم :

$$
\begin{aligned}
h^2 f''(x_k) &= a_{-2} f_{k-2} + a_{-1} f_{k-1} + a_0 f_k + a_1 f_{k+1} + a_2 f_{k+2} \\
&= (a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2) f(x_k) + h(-2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2) f'(x_k) \\
&+ \frac{h^2}{2}(4a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 4a_2) f''(x_k) + \frac{h^3}{6}(-8a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 8a_2) f'''(x_k) \\
&+ \frac{h^4}{24}(16a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 16a_2) f^{(4)}(x_k) + \frac{h^5}{120}(-32a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 32a_2) f^{(5)} f(x_k) \\
&+ \frac{h^6}{720}(64a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 64a_2) f^{(6)}(z) + \ldots \qquad (7.45)
\end{aligned}
$$

با مقایسه ضرائب $f^{(i)}(x_k), i = 0(1)4$ در طرفین داریم :

$$
\begin{aligned}
&a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\
&-2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2 = 0 \\
&4a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 4a_2 = 2 \\
&-8a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 8a_2 = 0 \\
&16a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 16a_2 = 0
\end{aligned}
$$

با حل سیستم فوق داریم :

$$
a_{-2} = a_2 = -\frac{1}{12} \quad , \quad a_{-1} = a_1 = \frac{16}{12} \quad , \quad a_0 = -\frac{30}{12}
$$

بنابراین روش بصورت زیر خواهیم داشت :

$$
f''(x_k) = \frac{1}{12h^2}\left[- f_{k-2} + 16 f_{k-1} - 30 f_k + 16 f_{k+1} - f_{k+2}\right] \qquad (7.46)
$$

اولین جمله ناصفر در (7-45) خطای برشی تقریب فوق را بدست میدهد .

$$
E = -\frac{h^4}{90} f^{(6)}(z) \quad , \quad x_{k-2} < z < x_{k+2}
$$

بنابراین روش (7-46) دارای دقت مرتبه چهارم است .

7-4 انتخاب طول گام بهینه :

بطورکلی در روشهای عددی مشتق گیری ، خطای تقریب یا خطای برشی بصورت ch^p می باشند .هرگاه طول گام $h \to 0$ خطای برشی به صفر می گراید .اما روشی که مشتق مرتبه r ام یعنی $f^{(r)}(x)$ را تقریب می زند شامل جمله h^r در مخرج عبارت است وهرگاه h مدام کم و کمتر گردد ، خطای برشی کاهش می یابد اما خطای راوند

کردن افزایش قابل ملاحظه ای می کند ، زیرا تقسیم به مقدار بسیار کوچک صورت می گیرد . ممکن است پس از مقدار بحرانی h خطای راوندکردن چنان غلبه کند که جوابهای حاصله مطمئن نباشند .وقتیکه مقادیر تابع بصورت نقاط جدولی داده شده باشند خود این مقادیر ممکن است دقیق محاسبه نشده باشند .این مقادیر شامل خطای راوندکردن می باشند .یعنی $f(x_k),\ f(x_k) = f_k + e_k$ مقدار واقعی f(x) , f_k مقدار تقریبی جدول داده هاست .برای بررسی تأثیر خطای روندکردن در روشهای عددی مشتق گیری. ما روش زیر را درنظر می گیریم :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(z) \quad , \quad x_0 < z < x_1 \qquad (7.47)$$

هرگاه خطای راوندکردن درمحاسبه $f(x_0), f(x_1)$ را به ترتیب e_0, e_1 فرض می کنیم .از رابطه (7-47) نتیجه می گیریم که :

$$f'(x_0) = \frac{(f_1 + e_1) - (f_0 + e_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(z) = \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{e_1 - e_0}{h} - \frac{h}{2} f''(z)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + RE + TE$$

بطوریکه RE , TE به ترتیب خطای راوندکردن وبرشی هستند .اگر فرض کنیم $e = \max(|e_0|, |e_1|)$ و $M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)|$ باشد آنگاه داریم : $|RE| \le \frac{2e}{h} \quad , \quad |TE| \le \frac{h}{2} M_2$

گام h را گام بهینه (Optimal) می نامند هرگاه درهرکدام از روابط زیر صدق نماید

$$\begin{aligned} &(a)\ \ |RE| = |TE| \\ &(b)\ \ |RE| + |TE| = \min imum \end{aligned} \qquad (7.48)$$

اگر ما از رابطه(7-48) استفاده کنیم داریم :

$$\frac{2e}{h} = \frac{h}{2} M_2$$

$$h_{opt} = 2\sqrt{\frac{e}{M_2}}$$

$$|RE| = |TE| = \sqrt{eM_2}$$

اما اگر از رابطه $(7-48-b)$ استفاده کنیم داریم :

$$\frac{2e}{h}+\frac{h}{2}M_2=\min imum$$
$$\frac{-2e}{h^2}+\frac{1}{2}M_2=0$$
$$h_{opt}=2\sqrt{\frac{e}{M_2}}$$

حال مینیمم کل خطا عبارتست از : $2(eM_2)^{1/2}$

بعنوان مثال اگر مرتبه خطای راوند کردن فرض کنیم 10^{-k} باشد و $M_2\approx 0(1)$ ، آنگاه دقت روش تقریباً دارای مرتبه $10^{-k/2}$ می باشد .از آنجا که خطای برشی یا موضعی یک روش عددی مشتق گیری متناسب با توانهایی از h است اما خطای راوندکردن روش متناسب با معکوس توانهایی از h .

مثال7-2 : طول گام بهینه را برای روش مشتق گیری ذیل بیابید :

$$f'(x_0)=\frac{-3\,f(x_0)+4\,f(x_1)-f(x_2)}{2h}+\frac{h^2}{3}\,f'''(z)\quad,\quad x_0<z<x_2$$

هرگاه از خاصیت |RE|=|TE| استفاده شود آنگاه تقریبی برای $f'(2.0)$ از داده های جدولی زیر برای f(x)=ln(x) بیابید درصورتیکه خطای روند کردن محاسبات 5×10^{-6} باشد .

x	2.0	2.01	2.02	2.06	2.12
f(x)	0.69315	0.69813	0.70310	0.72271	0.75142

حل : اگر e_2,e_1,e_0 خطاهای راوندکردن برای محاسبه مقادیر تابع f_2,f_1,f_0 باشند داریم :

$$f'(x_0)=\frac{-3\,f_0+4\,f_1-f_2}{2h}+\frac{-3e_0+4e_1-e_2}{2h}+\frac{h^2}{3}\,f'''(z)$$
$$=\frac{-3\,f_0+4\,f_1-f_2}{2h}+RE+TE$$

هرگاه فرض کنیم $e=\max(|e_0|,|e_1|,|e_2|)$ باشد و $\underset{x_0\le x\le x_2}{M_3=\max|f'''(x)|}$ آنگاه داریم :

$$|RE|\le\frac{8e}{2h}\quad,\quad |TE|\le\frac{h^2}{3}M_3$$

اگر از رابطه |RE|=|TE| استفاده کنیم درمی یابیم

$$\frac{8e}{2h}=\frac{h^2}{3}M_3$$
$$h^3=\frac{12e}{M_3}$$
$$h_{opt}=\left(\frac{12e}{M_3}\right)^{1/3}$$

بنابراین : $|RE|=|TE|=\dfrac{4e^{2/3}M_3^{1/3}}{(12)^{1/3}}$

اما اگر از خاصیت |RE|+|TE|=min استفاده کنیم درمی یابیم :

$$\frac{4e}{h}+\frac{M_3h^2}{3}=\min$$

با مشتق گیری نسبت به h داریم $\dfrac{-4e}{h^2}+\dfrac{2M_3h}{3}=0$

$$h_{opt}=\left(\frac{6e}{M_3}\right)^{1/3}$$

حداقل خطای کل عبارتست از : $6^{2/3}e^{2/3}M_3^{1/3}$

حل قسمت دوم مثال : داریم

$$f(x)=\ln x$$
$$M_3=\max_{2\le x\le 2.12}|f'''(x)|=\frac{1}{4}$$

با استفاده از |RE|=|TE| وبا استفاده از $e=5\times10^{-6}$ داریم :

$$h_{opt}=\left(\frac{12\times5\times10^{-6}}{1/4}\right)^{1/3}\approx 0.06$$

با انتخاب h=0.06 از جدول داده شده داریم :

$$f'(2.0)=\frac{-3(0.69315)+4(0.69813)-0.70310}{0.12}=0.49975$$

حال اگر طول گام h را کمتر از طول گام بهینه انتخاب کنیم یعنی h=0.01 داریم

$$f'(2.0)=\frac{-3(0.69715)+4(0.69813)-0.70310}{0.02}=0.49850$$

ما می دانیم $f'(x)=\frac{1}{x}$ و درنقطه x=2.0 داریم $f'(2.0)=0.5$ از این جا نتیجه می گیریم که با وجود انتخاب $h<h_{opt}$ نتایج بدست آمده نه تنها بهبود می یابد بلکه خراب تر هم می شود .

5-7 - روشهای برون یابی (Extrapolation Methods)

برای دست یابی به روشهای دارای دقت بالا نیاز داریم که از نقاط زیادی از جدول داده ها استفاده نمائیم .استفاده از این نقاط زیاد باعث افزایش محاسبه تابع می گردد ، در نتیجه امکان افزایش خطای راوند کردن بیشتر می شود ونتایج حاصله بد و بدتر می گردد .بهرحال امکان اینکه نتایج دقیق تری را بیابیم وجود دارد .برای این کار می توان از یک روش معین با گامهای متفاوت این امر را عملی ساخت .فرض می کنیم g(h) تقریبی برای مقدار تابع g باشد وبا استفاده از یک روش دارای دقت مرتبه p ام با طول گام h حاصل شده است .وهم چنین فرض می کنیم g(qh) تقریبی برای تابع g باشد که با استفاده از روش مرتبه p ام وبا طول گام qh حاصل شده باشد .لذا داریم :

$$g(h)=g+ch^{p}+o(h^{p+1})$$
$$g(qh)=g+cq^{p}h^{p}+o(h^{p+1})$$

با خذف c از دو رابطه فوق داریم :

$$g=\frac{q^{p}g(h)-g(qh)}{q^{p}-1}+o(h^{p+1})$$

بنابراین داریم :

$$g^{(1)}(h)=\frac{q^{p}g(h)-g(qh)}{q^{p}-1}=g+0(h^{p+1}) \qquad (7.49)$$

این روش دارای دقت (P+1) است .این مهارت که با درهم آمیختن مقادیر محاسبه شده توسط یک روش معین با دو طول گام متفاوت حاصل میشود و برای کسب دقت مراتب بالاتر صورت می گیرد را روش برون یابی یا روش درونیابی ریچاردسون نامیده میشود .

هرگاه خطای برشی یا موضعی یک روش ، بصورت سری توانی از h باشد آنگاه با تکرار پیاپی روند برونیابی ، می توان روشهایی با مرتبه دقت دلخواه دست یافت .کاربرد این روش زمانی آسان میشود که طول گامهای بکارگرفته شده یک دنباله هندسی را تشکیل دهند .برای آسانی کار عموماً $q=\frac{1}{2}$ انتخاب می کنیم .برای واضح تر نمودن روند فوق مثال زیر رادرنظر می گیریم ، روش زیر را درنظر میگیریم :

$$f'(x_0)=\frac{f_1-f_{-1}}{2h} \qquad (7.50)$$

بطوریـــــکه $f_{-1}=f(x_0-h),\ f_1=(x_0+h)$ ، خطای موضعی یا برشی مرتبط با روش فوق بصورت زیر بدست می آید .

$$E'(x_0)=c_1h^2+c_2h^4+c_3h^6+\dots \qquad (7.51)$$

c_3, c_2, c_1 و ... مقادیر ثابتی هستند مستقل از طول گام h .

فرض می کنیم $g(x)=f'(x_0)$ مقداری باشد که بایستی بدست بیاوریم وفرض می کنیم $g(h/2^r)$ مقدار تقریبی g(x) باشد وبا استفاده از روش (7-50) حاصل شده است وبا طول گامهای $h/2^r,\ r=0,1,2,\dots$ لذا داریم :

$$\begin{aligned}
g(h)&=g(x)+c_1h^2+c_2h^4+c_3h^6+\dots\\
g(\frac{h}{2})&=g(x)+\frac{c_1h^2}{4}+\frac{c_2h^4}{16}+\frac{c_3h^6}{64}+\dots\\
g(\frac{h}{2^2})&=g(x)+\frac{c_1h^2}{16}+\frac{c_2h^4}{256}+\frac{c_3h^6}{4096}+\dots
\end{aligned} \qquad (7.52)$$

با حذف c_1 از روابط فوق داریم :

$$g^{(1)}(h)=\frac{4g(\frac{h}{2})-g(h)}{3}$$
$$=g(x)-\frac{1}{4}c_2h^4-\frac{5}{16}c_3h^6-\dots$$
$$g^{(1)}(\frac{h}{2})=\frac{4g(\frac{h}{2^2})-g(\frac{h}{2})}{3}$$
$$=g(x)-\frac{1}{64}c_2h^4-\frac{5}{1024}c_3h^6-\dots \qquad (7.53)$$

بنابراین $g^{(1)}(\frac{h}{2}),g^{(1)}(h)$ والخ که از رابطه (53-7) حاصل میشوند تقریبی برای g(x) با دقت $0(h^4)$ هستند . با حذف c_2 از روابط (52-7) خواهیم داشت :

$$g^{(2)}(h)=\frac{4^2g^{(1)}(\frac{h}{2})-g^{(1)}(h)}{4^2-1}+\frac{1}{64}c_3h^6+\dots \qquad (7.54)$$

رابطه (54-7) تقریبی برای g(x) با دقت $o(h^6)$ می باشد .لذا نتایج دارای دقت مراتب بالاتر را می توان از فرمول زیر کسب نمود :

$$g^{(m)}(h)=\frac{4^m g^{(m-1)}(h/2)-g^{(m-1)}(h)}{4^m-1} \quad , \quad m=1,2,3,\dots \qquad (7.55)$$
$$g^{(0)}(h)=g(h)$$

این روند را برونیابی پیاپی برای مشتق گیری می نامند . مقادیر متوالی $g^{(m)}(h)$ برای مقادیر متفاوت m می توان مانند جدول زیر محاسبه کرد .

h	دوم	چهارم	ششم	هشتم
h	$g(h)$			
$\frac{h}{2}$	$g(\frac{h}{2})$	$g^{(1)}(h)$		
		$g^{(1)}(\frac{h}{2})$	$g^{(2)}(h)$	$g^{(3)}(h)$
$\frac{h}{2^2}$	$g(\frac{h}{2^2})$		$g^{(2)}(\frac{h}{2})$	
$\frac{h}{2^3}$	$g(\frac{h}{2^3})$	$g^{(1)}(\frac{h}{2^2})$		

با توجه به جدول فوق درمی یابیم که مقادیر جدولی یک ســـتون مشخص تقریبی بهتر از داده جدولی قبل از آن می باشد .هم چنین در ستونهای متوالی هر ستون نسبت به ستون قبلی آن تقریب بهتری بدست میدهد . بهترین نتایج در قسمت پائینی قطر جدول است این روند زمانی متوقف می گردد که داشته باشیم :

$$\left|g^{(k)}(h)-g^{(k-1)}(h/2)\right|<e$$

e معیار دقت حل مسئله می باشد .

مثال 7-3 : داده های جدولی زیر مفروض اند ، از فرمول $f'(x_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{2h}$ استفاده کنید وبا استفاده از روند برونیابی ریچاردسون $f'(3)$ را بیابید

x	-1	1	2	3	4	5	7
f(x)	1	1	16	81	256	625	2401

با استفاده از بسط سری تیلور داریم :

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{2h}=f'(x_1)+\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_1)+\frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_1)+\dots$$

لذا جدول زیر را با استفاده از روند برونیابی خواهیم داشت :

<table>
<tr><th rowspan="2">h</th><th colspan="3">$f'(3)$</th></tr>
<tr><th>$O(h^2)$</th><th>$O(h^4)$</th><th>$O(h^6)$</th></tr>
<tr><td>4</td><td>300</td><td rowspan="2">108</td><td rowspan="3">108</td></tr>
<tr><td>2</td><td>156</td></tr>
<tr><td>1</td><td>120</td><td>108</td></tr>
</table>

بدیهی است که $f'(3)=108$ بایستی حل دقیق باشد . زیرا $g^{(1)}(4)=g^{(1)}(2)=g^{(2)}(4)$ ازآنجا که داده ها بیانگر $f(x)=x^4$ هستند لذا ستون دوم بایستی جواب دقیق باشد زیرا نتایج جمله با خطای $ch^4\,f^{(5)}(z)$ هستند .

تمرین های فصل

1- یک فرمول پنج نقطه ای را از مرتبه $0(h^4)$ که از $f(x_0+3h),\ f(x_0+2h),\ f(x_0-h),\ f(x_0+h),\ f(x_0)$ استفاده می کند برای تقریب $f'(x_0)$ بدست آورید .

(راهنمایی : عبارت $Af(x_0-h)+Bf(x_0+h)+Cf(x_0+2h)+Df(x_0+3h)$ را درنظر گرفته بسط چندجمله ای درجه 5 تیلور را نوشته و D,C,B,A را بطور متناسب انتخاب کنید)

2-تمام دانشجویان ریاضی می دانند که مشتق f در x بصورت زیر تعریف میشود .

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تابع اختیاری f عدد x وکامپیوتر یا ماشین محاسب را انتخاب کرده و تقریبهای $f'_n(x)$ را برای $f'(x)$ که بصورت زیر است به ازای n=1,2,…,20 بدست آورید وآنچه را مشاهده می کنید شرح دهید .

$$f'_n(x)=\frac{f(x+10^{-n})-f(x)}{10^{-n}}$$

3-روشی برای تقریب $f''(x_0)$ با جمله خطایی از مرتبه h^2 با بسط چندجمله ای درجه 5 تیلور تابع f ، حول نقطه x_0 ومحاسبه آن در $x_0\pm 2h$ و $x_0\pm h$ بدست آورید.

4-تابع زیر را درنظر بگیرید

$$e(h)=\frac{e}{h}+\frac{h^2}{6}M$$

که در آن M کرانی برای مشتق مرتبه سوم تابع است . نشان دهید که $e(h)$ مینیممی در $\sqrt[3]{\frac{3e}{M}}$ دارد .

5-خطای برشی فرمولهای مشتق گیری زیر را بیابید ؟

$$(a) \qquad f'(x_k + \frac{h}{2}) \cong \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

$$(b) \qquad f''_{k+1} \cong \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_k - \frac{1}{12}\Delta^4 f_k)$$

$$(c) \qquad f'_k \cong \frac{4 f_{k+1} - f_{k+2} - 3 f_k}{2h}$$

$$(d) \qquad f''_k \cong \Delta^2 f_k \big/ h^2$$

6-فرمول مشتق گیری زیر داده شده است :

$$f'(x_0) = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 \qquad (x_k = x_0 + kh)$$

a_2, a_1, a_0 بطریقی بیابید که روش برای $f \in p_2$ دقیق باشد .جمله خطا را نیز بیابید .

7-از داده های جدولی زیر استفاده کنید و $f'(6.0)$ با خطای 0(h) و $f''(6.3)$ با خطای $0(h^2)$.

x	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
f(x)	0.1750	-0.1998	-0.2223	-0.2422	-0.2596

8- a, g, b, d را بطریقی بیابید که رابطه زیر

$$y\left((a+b)\big/2\right) = a y(a) + b y(b) + g y''(a) + d y''(b)$$

برای چندجمله ایهای درجه بالا تا حد ممکن دقیق باشد .جمله خطای را درصورتیکه $|b-a| \to 0$ بیابید .

فصل هشتم

8 - حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

8-1 مقدمه : بسیاری از مسائل ریاضیات کاربردی ، به معادلات دیفرانسیل معمولی منجر میشوند .یک معادله دیفرانسیل معمولی ، رابطه ای است بین یک تابع و مشتقات آن ومتغیر مستقل آن .کلی ترین فرم یک معادله دیفرانسیل معمولی را می توان بصورت زیر نوشت :

$$f(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0 \qquad (8.1)$$

y ومشتقات آن توابعی از x هستند و n بیانگر بالاترین مرتبه مشتق y نسبت به x است .مرتبه یک معادله دیفرانسیل عبارتست از بالاترین مرتبه مشتق آن و درجه یک معادله دیفرانسیل عبارتست از درجه بالاترین مرتبه مشتق . بعد از گویاسازی معادله مزبور هرگاه حاصل ضرب تابع وابسته y(x) با خودش و یا یکی از مشتقاتش در معادله بروز نکند معادله دیفرانسیل را خطی ودرغیر اینصورت غیر خطی می نامیم .

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام خطی را می توان به شکل زیر نوشت :

$$\sum_{p=0}^{n} f_p(x) y^{(p)}(x) = r(x) \qquad (8.2)$$

$f_p(x)$ توابع شناخته شده هستند .چنانچه معادله دیفرانسیل (8-1) را بصورت زیر بتوانیم بنویسیم :

$$y^{(x)} = F(x, y, y',...y^{(n-1)}) \qquad (8.3)$$

این معادله را نمایش کانونی (Cononical) معادله دیفرانسیل رابطه (8-1) نامیده می شود .

2-8-مسئله مقدار اولیه :

جواب عمـــــــومی یک معادله دیفرانسیل نظیر (8-1)رابطه ای بین y و x و n ثابت دلخواه که در معادله صدق می نماید .جواب معادله ممکن است به صورت ضمنی زیر باشد .

$$w(x, y, c_1, c_2,...c_n) = 0 \qquad (8.4)$$

یا به صورت یک تابع صریح از x بصورت زیر باشد

$$y = w(x, c_1, c_2, ..., c_n) \qquad (8.5)$$

ثابتهای c_1 تا c_n را می توان بادرنظرگرفتن n شرط ذیل :

$$y^{(v)}(x) = y_v \quad , \quad v = 0,1,2,...,n-1 \qquad (8.6)$$

در یـــک نقطه $x=x_0$ که به شرایط اولیه موسوم می باشد تعیین نمود .معادله دیفرانسیل (8-1) بهمراه شرایط اولیه (8-6) را مسئله مقدار اولیه مرتبه n ام می گویند .

8-3-مسئله مقدار مرزی :

چنانچه برای تعیین n ثابت دلخواه در جواب عمومی معادله از n شرط در بیش از یک نقطه استفاده کنیم .دراین حالت شرایط مرزی نامیده می شود ومعادله دیفرانسیل (8-1) بهمراه شرایط مرزی را مسئله مقدار مرزی می نامند.

8-4- تبدیل معادلات مراتب بالا به دستگاه معادلات مرتبه اول :

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام (8-3) بهمراه شرایط اولیه (8-6) را می توان به یک دستگاه متشکل از n مسئله مقدار اولیه مرتبه اول برگرداند .بنابراین داریم :

$$u_1 = y,\ y' = u_2\ , ...\ y^{(n-1)} = u_n$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_2 \ , \ u_1(x_0) = h_0 \\
u_2' &= u_3 \ , \ u_2(x_0) = h_1 \\
u_3' &= u_4 \ , \ u_3(x_0) = h_2 \\
&. \\
&. \\
u_n' &= g(x, u_1, u_2, ..., u_n) \ , \ u_n(x_0) = h_{n-1}
\end{aligned}$$

دستگاه فوق را می توان با نماد ماتریسی زیر نشان داد .

$$u' = f(x,u) \qquad u(x_0) = h \qquad (8.7)$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ . \\ g(x,u_1,u_2,\dots,u_n) \end{bmatrix}, \; h = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ . \\ h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \; , \; y(x_0) = y_0 \qquad (8.8)$$

بنابراین روشهای حل مسئله مقدار اولیه

ممکن است برای حل دستگاه معادله (8-7) بکار رود .

5-8 وجود جواب و یکتایی جواب :

ماهیت جواب معادله دیفرانسیل از لحاظ وجود جواب و هم چنین قادر بودن ما برای به دست آورده جواب تقریبی دقیقی برای آن به ماهیت و رفتار تابع f مربوط است . اساساً اگر f به اندازه کافی هموار باشد آنگاه جواب منحصربفردی برای معادله وجود خواهد داشت .لذا ما می توانیم جواب تقریبی با دقت های متفاوت برای معادله بیابیم .به هرحال راه های متفاوتی برای بیان «هموار بودن» وجود دارد که ما دو راه رادرنظر می گیریم .اول پیوستگی لیپ شیتس (Libschitz Continuity) ودوم ، هموار و یکنوا نزولی(Smooth and uniformly monotone decreasing) دومین راه حل عموماً برای ایجاد جواب مسئله مقدار اولیه درنظرگرفته میشود که یک شرط ضعیف است .حال به تعاریف زیر می پردازیم :

تعریف پیوستگی لیپ شیتس :

فرض می کنیم g یک تابع از R به توی R باشد . g را تابع پیوسته لیپ شیتس در بازه I می نامیم هرگاه یک ثابت k وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشیم :

$$|g(x_1) - g(x_2)| \le k|x_1 - x_2| \qquad (8.8)$$

تعریف هموار و یکنوا نزولی : فرض می کنیم g یک تابع از R به توی R باشد .g را تابع هموار و یکنوا نزولی می نامیم هرگاه g مشتق پذیر باشد ومشتق آن به ازای همه مقادیر x در رابطه زیر صدق نماید .

$$-M \le g'(x) \le -m < 0 \qquad (8.9)$$

در رابطه فوق mوM ثابتهای مثبت داده شده هستند .

برای روشن شدن تعاریف فوق دو مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر می گیریم

مثال 8-1 : دو مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر می گیریم :

$$y' = 4y - e^{-x} \;,\quad y(0) = 1 \qquad (8.10)$$
$$y' = -(1+x^2)\,y + \sin x,\;\; y(0) = 1 \qquad (8.11)$$

و در مسئله (8-10) داریم

$$f(x,y) = 4y - e^{-x}$$

لذا

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = (4y_1 - e^{-x}) - (4y_2 - e^{-x}) = 4(y_1 - y_2)$$

بنابراین داریم :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le 4|y_1 - y_2|$$

لذا نتیجه می گیریم که در این حالت تابع f نسبت به y پیوستگی لیپ شیتس دارد ودراین جا k=4 می باشد

.بهرحال تابع f یکنوانزولی نیست زیراکه $f_y(x,y)=4>0$ به ازای جمیع مقادیر y,x است .

درباره مسئله (8-11) تابع f عبارتست از :

$$f(x,y)=-(x^2+1)y+\sin x$$

لذا داریم :

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = -(-(x^2+1)\,y_1 + \sin x) - (-(x^2+1)\,y_2 + \sin x)$$
$$= -(x^2+1)(y_1 - y_2)$$

بنابراین برای $x \in [0,1]$ داریم :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le (x^2+1)|y_1 - y_2| \le 2|y_1 - y_2|$$

پس نتیجه می گیریم که تابع f دارای پیوستگی لیپ شیتس با تابت k=2 است .مضاف براین به ازای $0 \le x \le 1$

داریم :

$$f_y(x,y) = -(x^2+1) \;\; \Rightarrow \;\; -2 \le f_y(x,y) \le -1 < 0$$

این رابطه نشان می دهد که تابع f دراین حالت یکنوا نزولی وهموار است .

حال در موقعیتی هستیم که به قضایای وجود جواب ویکتایی جواب مسئله مقدار اولیه به پردازیم .

قضیه : فرض می کنیم R یک ناحیه باز مستطیلی باشد $R=\{(x,y): a\le x\le b, c<y<d\}$ هرگاه تابع f به ازای جمیع مقادیر $(x,y)\in R$ پیوسته باشد وهم چنین نسبت به y پیوستگی لیپ شیتس با ثابت k داشته باشد .آنگاه مسئله مقدار اولیه $y'=f(x,y)\,,\ y(x_0)=y_0$

به ازای جمیع مقادیر $(x_0,y_0)\in R$ دارای جواب منحصربفرد خواهد بود .مضافاً اینکه : هرگاه z(x) جواب مسئله مقدار اولیه فوق با شرایط اولیه $z(x_0)=z_0$ باشد آنگاه : $|y(x)-z(x)|\le e^{k(x-x_0)}|y_0-z_0|$

چنانچه بخواهیم شرایط بیشتری را بر روی تابع f قائل شویم ، قضیه زیر را داریم .

قضیه : هرگاه تابع f به ازای جمیع مقادیر متعلق به ناحیه باز مستطیلی R ، $(x,y)\in R$ پیوسته باشد وهم چنین نسبت به y هموار و یکنوانزولی باشد . آنگاه مسئله مقدار اولیه $y'=f(x,y)\,,\ y(x_0)=y_0$ به ازای جمیع مقادیر $(x_0,y_0)\in R$ دارای جواب منحصرد بفرد است .

مضافاً اینکه : هرگاه z(x) جواب مسئله مقدار اولیه مزبور با شرایط اولیه $z(x_0)=z_0$ باشد آنگاه :

$$|y(x)-z(x)|\le e^{-m(x-x_0)}|y_0-z_0|$$

در اینجا m ثابت کران بالا یکنوایی در رابطه (8.9) است .

اثبات دو قضیه فوق می توان در کتب نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی یافت ، اثبات این قضایا مربوط به درس ما نمی باشد .لذا از این به بعد مسائل مقدار اولیه ای را که درنظر می گیریم فرض می کنیم که دارای جواب منحصربفرد هستند وهم چنین فرض می کنیم که تابع f(x,y) دارای مشتقات نسبی پیوسته نسبت به y,x می باشد .

6-8 معادلات آزمون (Text Equations) :

رفتار جواب مسئله مقدار اولیه (8-8) در همسایگی هرنقطه ای نظیر $(\bar{x},\bar{y})$ را می توان با درنظر گرفتن فرم خطی

معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ پیش بینی کرد .

تابع غیرخطی f(x,y) را می توان با استفاده از بسط سری تیلور آن حول نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ وبرش آن بعد از جملات اول

، خطی نمود .لذا فرم خطی معادله دیفرانسیل فوق عبارتست از :

$$y' = l\,y + c$$
$$l = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}}$$

درصورتیکه :
$$c = f(\bar{x},\bar{y}) - \bar{y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}}(x-\bar{x})$$

با انتخاب $w = y + \frac{c}{l}$ معادله (8-12) بصورت زیر ساده میشود

$$w' = l\,w \qquad (8.13)$$

جواب w(x) در شکل زیر نشان داده شده است . جواب معادله فوق درصورتیکه عدد l مطلقاً موهومی باشد

متناوب خواهد بود .

شکل 1: نمایش $w = e^{lx}$

هم چنین مسئله مقدار اولیه مرتبه دوم زیر را :

$$y'' = f(x,y,y')$$
$$y(x_0) = h_0 \;\;,\;\; y'(x_0) = h_1 \qquad (8.14)$$

می توان متشابه با روند فوق الذکر بفرم خطی تیدیل کنیم :

$$w'' = -bw' - cw \qquad (8.15)$$

بطوریکه : $b = -\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, $c = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$

معادل دیفرانسیل (8-15) معادل دستگاه ذیل است :

$$u' = Au \qquad (8.16)$$

در صورتیکه : $u = [u_1, u_2]^T$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$

$$u_1 = w \quad , \quad u_2 = w'$$

ماهیت جواب معادله (8-15) ویا (8-16) به z_2, z_1 ریشه های معادله مشخصه ماتریس A وابسته است .

$$z^2 + bz + c = 0 \qquad (8.17)$$

حال سه حالت ذیل که ممکن است پیش بیاید را بررسی می کنیم :

1-اگر b>0 ، $c \geq 0$ و $b > 2\sqrt{c}$ باشند جوابهای معادله دیفرانسیل نمایی و نزولی هستند .برای c=0 معادله آزمـون (8-15) بصورت زیر خواهد بود .

$$w'' + bw' = 0 \quad , \quad b > 0 \quad (8.18)$$

2-اگر b<0 و $c \geq 0$ و $|b| > 2\sqrt{c}$ باشند ، جوابهای معادله دیفرانسیل ، نمایی و صعودی هستند .برای c=0 معادله آزمون بصورت زیر خواهد بود :

$$w'' + bw' = 0 \quad , \quad b < 0 \quad (8.19)$$

3-اگر c>0 و $|b| \leq 2\sqrt{c}$ باشند جوابهای معادله دیفرانسیل نوسانی هستند .

-اگر b<0 باشد آنگاه جواب یک تابع نوسانی میرا است و دامنه نوسان آن بیکران می گردد وقتیکه : $x \to \infty$

-اگر b=0 باشد معادله آزمون (8-15) بصورت زیر خواهد بود .

$$w'' + cw = 0 \quad , \quad c > 0 \quad (8.20)$$

جواب این معادله متناوبی با دور تناوب $2p/\sqrt{c}$ است .

برای b=0 و c=0 درمی یابیم که z_2, z_1 اعداد مطلقاً موهومی هستند .

بنابراین ماهیت جوابهای دستگاه معادلات ویا معادلات مراتب بالا ممکن است با استفاده از معادله آزمون (8-13) برای حالتهایی که l مطلقاً حقیقی یا مطلقاً موهومی ویا l مختلط باشد بررسی کرد .

در این قسمت ما به بررسی حل عددی مسئله مقدار اولیه (I.V.P) می پردازیم .

7-8 روشهای عددی برای حل مسائل مقدار اولیه :

مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر می گیریم

$$y' = f(x, y) \quad , \quad a \le x \le b \quad , \quad y(a) = a \qquad (8.21)$$

دراین رابطه a, b, a اعداد ثابتی هستند .ابتدا فاصله [a,b] را به n زیرفاصله مساوی افراز می کنیم (می توان زیر فاصله های نامتساوی الفاصله رانیز درنظر گرفت) بنابراین ما درصدد یافتن جواب(21-8) در نقاط زیر هستیم .

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

نقاط فوق را نقاط گره ای یا شبکه ای می نامند نقاط فوق را می توان بصورت زیر هم درنظر گرفته شوند

$$x_j = x_0 + jh \ , \ \ j = 0(1)n$$

بطوریکه
$$h = \frac{b-a}{n}$$

در روشـــــهای عددی ما عدد y_j را که درواقع یک جواب تقریبی برای جواب تحلیلی y(x) در نقطه x_j می باشد می یابیم .لذا مجموعه $\{y_j\}$ یعنی $y_0, y_1, \ldots, y_n$ حل های عددی مسئله مقدار اولیه (21-8) می باشند .اعداد $\{y_j\}$ از یک مجموعه معادلات جبری که معادلات تفاضلی نامیده میشود محاسبه می کنیم .تقریبهای تفاضلی فراوانی برای حل معادله دیفرانسیل داده شده فوق وجود دارد .این روشها را می توان بطور اجمالی به دو دسته کلی تقسیم نمود:

1-روشهای تک گامی

2-روشهای چندگامی

در این جا ما فقط به روشهای تک گامی می پردازیم .روشهای تک گامی را نیز می توان به دو دسته تقسیم کرد اول روشهای تک گامی صریح و دوم روشهای تک گامی ضمنی .فرم کلی روشهای تک گامی صریح عبارتند از:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j, h) \quad , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (8.22)$$

تابع f را تابع تصحیح می نامند وبه تابع f وگام h ونقاط شبکه وابسته است .خطای برشی یا Truncate روش تک گامی را در حالت کلی بصورت زیر تعریف می کنیم

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_j + y(x_i), h) \quad , \quad (8.23)$$

تعریف مرتبه دقت یک روش تک گامی :

بزرگترین رقمی نظیر p که در رابطه ذیل صدق می نماید را مرتبه دقت روش تک گامی می نامند .

$$\left| h^{-1} T_{j+1} \right| \le O(h^p)$$

8-8 روش اویلر:

مسئله (21-8) را در نقاط $x=x_j$ درنظر می گیریم .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) \qquad (8.24)$$

در این رابطه اگر مشتق مرتبه اول رابا یک فرمول مشتق گیری براساس تفاضل پیشرو مرتبه اول تقریب بزنیم داریم

$$\frac{\Delta y(x_j)}{h} + \text{خطا} = f(x_j, y(x_j)) \qquad j = 0(1)n$$

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} + \text{خطا} = f(x_j, y(x_j))$$

با نادیده گرفتن جمله خطا داریم $\quad y_{j+1} - y_j = hf(x_j, y_j) \ , \ j = 0(1)n-1$

یا $\quad y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \ , \ j = 0(1)n-1 \qquad (8.25)$

روش (8-25) فرمول اویلر است که ساده ترین روش صریح تک گامی است .این روش نیز روش آدامز-بشفورث مرتبه اول نامیده میشود .این روش را در نقاط گره ای $j=0(1)n-1$ و x_j بکار گرفته میشود تا جوابهای عددی مسئله مقدار اولیه داده شده را محاسبه نمائیم .

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\
&. \\
&. \\
y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

با انتخاب گام h و شرایط اولیه داده شده می توان y_1 را محاسبه کرد وسپس به آسانی y_2 تاy_n قابل محاسبه هستند.

خطای برشی یا موضعی (Local truncation error)

خطای تقریب که تفاضل بین جواب تحلیلی مسئله در نقطه $x=x_{j+1}$ و جواب y_{j+1} که از روش (8-25) وبا استفاده حساب دقیق بدست می آید را خطای برشی یا موضعی یا خطای گسسته سازی نامیده میشود.لذا داریم :

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} \;\; , \;\; i = 0(1)n-1$$

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_i, y(x_i))$$

با استفاده از بسط سری تیلور حول x_j ورابطه (8-24) داریم :

$$T_{j+1} = \frac{h^2}{2} y''(z) \quad , \quad x_j < z < x_{j+1}$$

اگر فرض کنیم $\underset{[a,b]}{Max}|T_{j+1}| = T$, $\underset{[a,b]}{Max}|y''(z)| = M_2$ بـــــــــاشند از رابـــــطه فـــــــــوق نتیجه می گیریم : (8.26) $T \le \frac{h^2}{2} M_2$ لذا نتیجه می گیریم که مرتبه خطای برشی موضعی $O(h^2)$ وقتیکه $h \to 0$.در

روند محاسبات دقیق و حساب دقیق در روش اویلر y_j را می یابیم واما در محاسبات عددی بعلت تأثیر خطای روند کردن عملاً y_j بدست نمی آید لذا ما تقریب $\bar{y}_j$ را برای مقدار عملاً محاسبه شده معرفی می کنیم واین چنین تعریف می کنیم .

$$\bar{y}_{j+1} = \bar{y}_j + hf(x_j, \bar{y}_i) - R_{j+1} \quad , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (8.27)$$

خطـــــــــای روند کردن R_{j+1} مقداریست که $\bar{y}_j$ در روش اویلر (8-25) صدق نمی نماید .روش اویلر (8-25) و (8-27) را روی معادله آزمون $y' = l\,y$ بکار می بریم وتفاضل آنها را بصورت زیر می یابیم :

$$y(x_{j+1}) - \bar{y}_{j+1} = y(x_j) - \bar{y}_j - l\,h(y(x_i) - \bar{y}_j) + T_{j+1} + R_{j+1}$$

با فرض $e_j = y(x_j) - \bar{y}_j$ وقرار دادن آن در رابطه فوق معادله خطا را بصورت زیر می یابیم :

$$e_{j+1} = (1 + l\,h)e_j + T_{j+1} + R_{j+1} \qquad (8.28)$$

با درنظرگرفتن رابطه تفاضلی زیر

$$E_{j+1} = AE_j + B \qquad (8.29)$$

بطوریکه $|1 + l\,h| \le A$ و $|T_{j+1} + R_{j+1}| \le B$ ، بدیهی است که $|e_j| \le E_j$ است .اگر فرض کنیم $|e_0| \le E_0$ باشد داریم :

$$E_1 = AE_0 + B$$
$$E_2 = AE_1 + B = A^2 E_0 + (A+1)B$$
$$.$$
$$.$$
$$E_j = A^j E_0 + \left(\frac{A^j - 1}{A-1} \right) B$$

مشروط بر اینکه $A \neq 1$ باشد .عبارت زیر همواره برقرار است .

$$(1 + hl\,)^j < \exp(l\,(x_j - x_0)) \;\; , \;\; l > 0$$

با جایگزینی $E_0 = |e_0|$ داریم :

$$|e_j| < \exp(x_j - x_0)\,l\,)|e_0| + \frac{\exp(l\,(x_j - x_0)) - 1}{hl}(T + R) \qquad (8.30)$$

بطوریکه

$$\max_{[a,b]} |R_{j+1}| = R$$

حال موارد زیر را درنظر می گیریم :

1-اگر $R=0$, $e_0=0$ فرض کنیم ، رابطه (8.30) بصورت زیر ساده میشود .

$$|e_j| < \frac{T}{l\,h}(\exp(l\,(x_j - x_0)) - 1)) \qquad (8.31)$$

از آنجا که $T = O(h^2)$ است وقتیکه $h \to 0$ میل کند $|e_j| \to 0$ میل خواهد کرد .نتیجه می گیریم روش اویلر همگراست .

2-اگر e=0 باشد از رابطه (8.30) نتیجه می گیریم که :

$$|e_j| < \frac{\exp[l\,(x_j - x_0)] - 1}{l}(\frac{T}{h} + \frac{R}{h}) \qquad (8.32)$$

از آنجا که $T = O(h^2)$ کران خطا کاهش می یابد زمانی که h کاهش می یابد .اما تا زمانی که خطای روند کردن غلبه نکند .از یک نقطه ای به بعد کران بالا افزایش می یابد چنانچه h را کاهش دهیم .این رفتار خطا در شکل زیر نمایش داده شده است .

مثال 8-2 : با استفاده از روش اویلر مسئله مقدار اولیه زیر را با گام $h=0.1, h=0.2$ و h=0.05 در بازه [0,1] حل کنید . با نادیده گرفته خطای گردکردن (روند کردن) کرانی برای خطا بیابید؟

$$y' = -2xy^2 \ , \ y(0) = 1$$

حل : با استفاده از روش اویلر داریم وبا گام h=0.2 :

$$y_{j+1} = y_j - 2x_j.hy_j^2 \quad , \quad j = 0(1)4$$
$$j = 0\ ,\ x_0 = 0\ ,\ y_0 = 1$$
$$y(0.2) \approx y_1 = y_0 - 2hx_0 y_0^2 = 1$$
$$j = 1\ ,\ x_1 = 0.2\ ,\ y_1 = 1$$
$$y(0.4) \approx y_2 = y_1 - 2hx_1 y_1^2 = 1 - 2(0.2)(0.2)(1)^2 = 0.92$$
$$j = 2\ ,\ x_2 = 0.4\ ,\ y_2 = 0.92$$
$$y(0.6) = y_3 = y_2 - 2hx_2 y_2^2 = 0.92 - 2(0.2)(0.4)(0.92)^2 = 0.78458$$

بر همین اساس مقادیر دیگر جواب عبارتند از :

$$y(0.8) \approx y_4 = 0.63684$$
$$y(1) \approx y_5 = 0.50706$$

حال اگر گام h=0.1 باشد j=0(1)9 خواهد بود لذا داریم :

$$y(0.1) \approx y_1 = 1.0 \qquad y(0.2) \approx y_2 = 0.98$$
$$y(0.3) \approx y_3 = 0.94158 \qquad y(0.4) \approx y_4 = 0.88839$$
$$y(0.5) \approx y_5 = 0.82525 \qquad y(0.6) \approx y_6 = 0.75715$$
$$y(0.7) \approx y_7 = 0.68835 \qquad y(0.8) \approx y_8 = 0.62202$$
$$y(0.9) \approx y_9 = 0.56011 \qquad y(1) \approx y_{10} = 0.50364$$

وسرانجام برای گام h=0.05 داریم :

$$y(0.05) \approx y_1 = 1 \qquad y(0.1) \approx y_2 = 0.995$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y(0.95) \approx y_{19} = 0.52831 \qquad y(1) \approx y_{20} = 0.50179$$

خطای برشی اویلر عبارتست از :

$$T = \frac{h^2}{2} y''(z)$$
$$|T| = \frac{h^2}{2}|y''(z)| \le \frac{h^2}{2}\max_{[0,1]}|y''(x)|$$

از آنجا که جواب دقیق مسئله $y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ است داریم :

$$|T| \le \frac{h^2}{2} \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \right| \le h^2$$

9-8 روش سری تیلور

فرض می کنیم y(x) را می توان با سری تیلور حول نقطه x_j بسط دهیم .

$$y(x) = y(x_j) + (x - x_j)y'(x_j) + \frac{1}{2!}(x - x_j)^2 y''(x_j) + \dots$$
$$+ \frac{1}{p!}(x - x_j)^p y^{(p)}(x_j) + \frac{1}{(p+1)!}(x - x_j)^{p+1} y^{(p+1)}(x_j + qh) \qquad (8.33)$$

این بسط برای $x \in [a,b]$, $0 < q < 1$ برقرار است . چنانچه $x = x_{j+1}$ را در رابطه فوق جایگزین کنیم داریم :

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \dots + \frac{1}{p!} h^p y^{(p)}(x_j) + \frac{1}{(p+1)!} h^{p+1} y^{p+1}(x_j + qh)$$

رابطه زیر را تعریف می کنیم :

$$hf(x_j, y(x_j), h) = hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \dots + \frac{1}{p!} h^p y^{(p)}(x_j)$$

با جایگزینی جواب تقریبی y_j بجای جواب دقیق $y(x_j)$ می توان عبارت $hf(x_j, y_j, h)$ را از عبارت $hf(x_j, y(x_j), h)$ بدست آورد .لذا برای محاسبه تقریب y_j عبارت زیر را داریم :

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j, h) \quad , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (8.34)$$

این روش را روش سری تیلور مرتبه p ام می نامند .اگر در رابطه (34-8) ، p=1 باشد روش اویلر را خواهیم داشت :

$$y_{j+1} = y_j + hy'_j = y_j = hf(x_j, y_j) \qquad j = 0(1)n-1$$

برای اینکه بتوانیم از روش (34-8) استفاده کنیم نیاز است که $y'(x_j), y(x_j)$ تا $y^{(p)}(x_j)$ را تعیین نمائیم .اگر $y(x_j), x_j$ معلوم باشند آنگاه مشتقات مراتب مختلف آن را می توان محاسبه کرد .ابتدا مقادیر معلوم $y(x_j), x_j$ را در معادله دیفرانسیل داده شده قرار میدهیم بنابراین داریم : $y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$

ثانیاً از معادله دیفرانسیل (21-8) مشتق می گیریم تا مشتقات مراتب بالاتر y(x) را بیابیم لذا داریم :

$$y' = f(x, y)$$
$$y'' = f_x + ff_y$$
$$y''' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y)$$

.

.

$f_x, f_y, ...$ بیانگر مشتقات نسبی f نسبت به y,x والخ می باشد .مقادیر $y''(x_j), y'''(x_j)$ و... را می توان با جایگزینی x=(x$_j$) محاسبه کرد .بنابراین اگر $x_j, y(x_j)$ دقیقاً معلوم باشند آنگاه روش (8-34) را می توان برای محاسبه y_{j+1} بکار برد وخطای آن عبارتست از :

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(x_j + qh)$$

تعداد جملاتی را که بایستی در رابطه (8-34) بکار گرفته شوند بوسیله خطای قابل اغماض تعیین می شود. اگر این خطا e باشد و سری در جمله $y^{(p)}(x_j)$ قطع گردد آنگاه

$$h^{p+1}\left| y^{(p+1)}(x_j + qh) \right| < (p+1)!e$$

$$h^{p+1}\left| f^{(p)}(x_j + qh) \right| < (p+1)!e \qquad , (8.35) \quad \text{یا}$$

برای یک h از رابطه فوق می توان p را بدست آورد و اگر p از پیش معلوم باشد میتوان کرانی برای h بیابیم. از آنجا که $x_j + hq$ معلوم نیست ، لذا $\left| f^{(p)}(x_j + qh) \right|$ در رابطه (80-35) با مقدار ماکزیمم درباره [a,b] جایگزین می گردد

مثال 8-3 :

مسئله مقدار اولیه : $y(0) = 0 \quad , \quad y' = x^2 + y^2$ مفروض است. سه جمله اول ناصفر در بسط سری تیلور $y_{(x)}$ را بیابید و مقدار $y(1)$ را محاسبه کنید. هم چنین x ای را بیابید که خطای در $y(x)$ که از دو جمله اول ناصفر بدست می آید از 10^{-6} کمتر باشد.

حل : $y_{(0)} = 0 \quad , y'_{(0)} = 0$

$$y'' = 2x + 2yy' \quad , \quad y''_{(0)} = 0$$

$$y''' = 2 + 2(yy'' + y'^2) \quad , \quad y'''_{(0)} = 2$$

$$y^{(4)}{}_{(0)} = y^{(5)}{}_{(0)} = y^{(6)}{}_{(0)} = 0$$

$$y^{(7)} = 2(yy^{(6)} + 6y'y^{(5)} + 15y''y^{(4)} + 10(y''')^2) \quad . \quad y^{(7)}{}_{(0)} = 80$$

$$y^{(8)}{}_{(0)} = y^{(9)}{}_{(0)} = y^{(10)}{}_{(0)} = 0$$

$$y^{(11)} = 2[yy^{(10)} + 10y'y^{(9)} + 45y''y^{(8)} + 120y'''y^{(7)} + 210y^{(4)}y^{(6)} + 126(y^{(5)})^2]$$

$$y^{(11)}{}_{(0)} = 38400$$

بسط سری تیلور $y(x)$ عبارتست:

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11}$$

برای تقریب $y(1)$ داریم

$$y(1) \approx 0.3502$$

اگر فقط دو جمله ناصفر بکار گرفته شود،آنگاه مقدار x را از رابطه زیر می یابیم.

$$\left|\frac{2}{2049}x^{11}\right| < 0.5\times10^{-7}$$

باحل آن داریم $\quad x \approx 0.41$

10-8 روشهای رانگ – کوتا :

روشهای تیلور که قبلاً بحث شد دارای ویژگی مناسبی هستند و آن همانا خطای برش موضعی مرتبه بالا آنهاست، ولی نیاز به محاسبه مشتقات f(x,y) در بسیاری از مسائل می تواند پیچیده و ملال آور باشد بنابراین از روش تیلور به ندرت استفاده می گردد. ماابتدا اصول اساسی روشهای رانگ-کوتا را بیان می کنیم. با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j + qh)$$
$$= y(x_j) + hf((x_j + qh), y(x_j + qh)) \quad , \quad 0 < q < 1$$

به ازای $q = \frac{1}{2}$ داریم :

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf(x_j + \frac{h}{2}, y(x_j + \frac{h}{2}))$$

روش اویلر با نصف گام $h/2$ داریم

$$y(x_j + \frac{h}{2}) \approx y_j + \frac{h}{2} f_j$$

بنابراین تقریب زیر را داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2} \ , \quad y_j + \frac{h}{2} f_j)$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\begin{aligned} K_1 &= hf_j \\ K_2 &= hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{1}{2} K_1) \\ y_{j+1} &= y_j + K_2 \end{aligned} \tag{8.36}$$

این روش را روش اویلر با نصف گام می نامند .

حال با استفاده از روش اویلر می توان روند زیر را نیز بررسی کرد

$$y'(x_j + \frac{h}{2}) \approx \frac{1}{2}\left[y'(x_j) + y'(x_j + h)\right]$$
$$\approx \frac{1}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf_i)\right]$$

بنابراین تقریب ذیل را خواهیم داشت :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf_i)\right] \tag{8.37}$$

این روش را می توان بفرم زیر نیز نوشت :

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + h, y_j + K_1)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\ ,\ \ j = 0(1)n-1 \qquad (8.38)$$

این روش را روش کوشی – اویلر می نامند .

روشهای (36-8) و(38-8) را می توان بصورت زیر تعبیر نمود

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\text{متوسط ضریب زاویه}\right) \qquad (8.39)$$

این اساس ایده روشهای رانگ-کوتا می باشند . به طور عمومی در روشهای رانگ- کوتا ما ضریب زاویه را در نقطه x_j و سایر نقاط دیـگر می یابیم و متوسط این ضریب زاویه ها را درگام h ضرب می نمائیم و به جواب y_j اضافه می کنیم.بنابراین روشهای رانگ – کوتا را می توان به صورت کلی ذیل تعریف کرد .

روشهای رانگ – کوتا

روش رانگ – کوتا با V ضریب زاویه را میتوان بصورت زیر تعریف کرد

$$K_1 = hf(x_j y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1)$$
$$k_3 = hf(x_j + c_3 h\,,\ y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$
$$k_4 = hf(x_j + c_4 h\,,\ y_j + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)$$

.

.

.

$$k_v = hf(x_j + c_v h\,,\ y_j + \sum_{i=1}^{v-1} a_{vi} k_i$$
$$y_{j+1} = y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + \ldots + w_v k_v$$
$$\sum_{i=1}^{v} w_i = 1 \qquad (8.40)$$

در فرمول (40-8) تابع تصحیح عبارتست از ترکیب خطی ضریب زاویه ها درنقطه x_j و تعداد دیگر نقاط که در بین x_j و x_{j+1} قرار دارند. بادانستن طرف راست (40-8) می توان y_{j+1}را به آسانی محاسبه کرد بنابراین روش

رانگ – کوتا (8-40) یک روش صریح v ضریب زاویه ای است. برای تعیین c ها، a ها و wها در (8-40) ما y_{j+1} را بصورت سری توانی h بسط میدهیم بطوریکه با بسط سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل تا تعداد معینی از جملات منطبق باشد. برای آسانی کار در ذیل نحوه بدست آوردن aها و cها و wها را برای روش مرتبه دوم با جزئیات بحث و بررسی می کنیم.

روش مرتبه دوم

روش رانگ – کوتا دوضریب زاویه زیر را مدنظر قرار میدهیم.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_j, y_j)\\
k_2 &= hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1)\\
y_{j+1} &= y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 \qquad (8.41)
\end{aligned}
$$

پارامترهای w_2, w_1, a_{21}, c_2 بطریقی می یابیم تا y_{j+1} به $y(x_{j+1})$ نزدیکتر گردد. بنابراین بسط سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل $y(x_{j+1})$ را بصورت زیر داریم.

$$
\begin{aligned}
y(x_{j+1}) &= y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) + \frac{h^3}{31} y'''(x_j) + \dots\\
&= y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)_{x_j}\\
&= \frac{h^3}{31}[f_{xx} + 2 fy_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y)]_{xj} + \dots \qquad (8.42)
\end{aligned}
$$

هم چنین داریم

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf_j\\
k_2 &= hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} hf_j)\\
&= h[f_j + h(c_2 f_x + a_{21} ff_y)_{xj} + \frac{h^2}{2}(c^2 f_{xx} + 2c_2 a_{21} ff_{xy}\\
&\quad + a^2{}_{21} f^2 f_{yy})_{xj} + \dots]
\end{aligned}
$$

با جایگزینی k_1 و k_2 در (8-41) داریم.

$$y_{j+1} = y_j + (w_1 + w_2) h f_j + h^2 (w_2 c_2 f_x + w_2 a_{21} f f_y)_{xj}$$
$$+ \frac{h^3}{2} (w_2)(c^2{}_2 f_{xx} + 2 c_2 a_{21} f f_{xy} + a^2{}_{21} f^2 f_{yy})_{xj} + \ldots \qquad (8.43)$$

در روابط (8.42) , (8.43) ضرائب توانهای مختلف h را با هم مقایسه می کنیم .بنابراین داریم :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ c_2 w_2 = 1/2 \\ a_{21} w_2 = 1/2 \end{cases}$$

جواب دستگاه فوق عبارتست از $w_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}, w_2 = \frac{1}{2c_2}, a_{21} = c_2$ بطوریکه $c_2 \neq 0$ ، پارامترآزاد می باشد

.چنانچه جواب را در رابطه (8-43)قرار دهیم داریم :

$$y_{j+1} = y_j + h f_j + \frac{h^2}{2} (f_x + f f_y) x_j + \frac{h^3 c_2}{4} (f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f^2 f_{yy})_{x_j} + \ldots \qquad (8.44)$$

خطای برشی عبارتست از :

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} = h^3 \left[(\frac{1}{6} - \frac{c_2}{4})(f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy}) x_j + \frac{1}{6} \{ f_y (f_x + f f_y) \}_{x_j} + \ldots \right] \qquad (8.45)$$

این رابطه نشان می دهد که روش (8-41) دارای دقت مرتبه دوم است .پارامتر آزاد c_2 معمولاً بین صفر و یک انتخاب می گردد .برخی اوقات c_2 را بطریقی انتخاب می کنیم که یکی از w هارا در (8-41) صفر شوند بعنوان مثال اگر $C_2 = \frac{1}{2}$ انتخاب شود $w_1=0$ می گردد .

(a) اگر $C_2 = \frac{1}{2}$ انتخاب شود روش کلاسیک را داریم :

$$y_{j+1} = y_j + h f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f_j) \ , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (8.46)$$

این رابطه همان روش نصف گام اویلر است .

(b) اگر $c_2=1$ بعنوان پارامتر آزاد انتخاب کنیم داریم :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_j) + f(x_j + h, y_i + h f_i) \right] \ , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (8.47)$$

این روش همان روش کوشی اویلر است که قبلاً بحث کردیم .

(c)اگر $c_2=\frac{2}{3}$ انتخاب شود یعنی ضریب جملاتی از خطای قطع کردن را صفر بسازیم روشی را بدست خواهیم آورد، روش رانگ-کوتا مرتبه دوم بهینه می باشد .

$$
\begin{aligned}
& w_1=\frac{1}{4}\,,\ w_2=\frac{3}{4}\\
& K_1=hf(x_j,y_j)\\
& K_2=hf(x_j+\frac{2}{3}h,y_j+\frac{2}{3}K_1)\\
& y_{j+1}=y_j+\frac{1}{4}(K_1+3K_2)\ \ ,\ \ j=0(1)n-1 \qquad (8.48)
\end{aligned}
$$

روشهای رانگ – کوتا مرتبه سوم :

$$
\begin{aligned}
& K_1=hf(x_j,y_j)\\
& K_2=hf(x_j+c_2h,y_j+a_{21}K_1)\\
& K_3=hf(x_j+c_3h,y_j+a_{31}K_1+a_{32}K_2)\\
& y_{j+1}=y_j+w_1K_1+w_2K_2+w_3K_3 \qquad j=0(1)n-1
\end{aligned}
$$

نظیر روش مرتبه دوم می توان a های و c ها و w ها را محاسبه کرد .چنانچه $c_2=\frac{1}{2}$ بعنوان پارامتر آزاد انتخاب کنیم .روشی که می یابیم روش کلاسیک مرتبه سوم رانگ – کوتا می باشد .

$$
\begin{aligned}
& c_2=a_{21}=\frac{1}{2}\,,\ c_3=1\,,\ a_{31}=-1\,,\ a_{32}=2\,,\ w_1=w_3=\frac{1}{6}\,,\ w_2=\frac{4}{6}\\
& K_1=hf(x_j+y_j)\\
& K_2=hf(x_j+\frac{1}{2}h,y_j+\frac{1}{2}K_1)\\
& K_3=hf(x_j+h,y_j-K_1+2K_2)\\
& y_{j+1}=y_j+\frac{1}{6}(K_1+4K_2+K_3)\ \ ,\ \ j=0(1)n-1 \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

روش های مرتبه چهارم رانگ – کوتا

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} K_1)$$
$$K_3 = hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$$
$$K_4 = hf(x_j + c_4 h, y_j + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3)$$
$$y_{j+1} = y_j + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 + w_4 K_4 \qquad j = 0(1)n-1$$

باز هم نظیر روند فوق عمل می کنیم c ها ، a ها و w ها را می یابیم در اینجا ما فقط 11 رابطه را بدست می آوریم اما تعداد مجهولات 13 می باشد ، با انتخاب پارامتر آزاد برابر 1/2 مجهولات را بصورت زیر می توان محاسبه کرد .لذا روش کلاسیک مرتبه چهارم رانگ – کوتا را خواهیم داشت :

$$c_2 = a_{21} = c_3 = a_{32} = \frac{1}{2}$$
$$a_{31} = 0$$
$$c_4 = 1 \quad a_{41} = a_{42} = 0 \quad a_{43} = 1$$
$$w_1 = \frac{1}{6} \quad w_2 = \frac{2}{6} \quad w_3 = \frac{2}{6} \quad w_4 = \frac{1}{6}$$

روش کلاسیک مرتبه چهارم رانگ – کوتا

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hfx_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}K_1$$
$$K_3 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}K_2)$$
$$K_4 = hf(x_j + h, y_j + K_3)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \qquad j = 0(1)n-1 \qquad (8.50)$$

مثال 8-4 : مسئله مقدار اولیه ذیل را با روش مرتبه چهارم کلاسیک رانگ –کوتا با گام h=0.2 حل کنید ؟

$$y' = -2xy^2\ ,\ y(0)=1\ ,\ 0 \le x \le 1$$

$$h=\frac{b-a}{n} \Rightarrow n=\frac{1}{0.2}=5$$

$$x_j = 0 + jh \qquad j = 0(1)5$$

$$x_0 = 0\ ,\ x_1 = 0.2\ ,\ x_2 = 0.4\ ,\ x_3 = 0.6\ ,\ x_4 = 0.8\ ,\ x_5 = 1$$

$$For\ \ j=0 \qquad K_1 = hf(x_0, y_0) = -2(0.2)(0)(1)^2 = 0$$

$$K_2 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1) = -2(0.2)(\frac{0.2}{2})(1)^2 = -0.04$$

$$K_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_2) = -2(0.2)(\frac{0.2}{2})(0.98)^2 = -0.038416$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3) = -2(0.2)(0.2)(0.961584)^2 = -0.0739715$$

$$y(0.2) \approx y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0 - 0.8 - 0.076832 - 0.0739715] = 0.9615328$$

$$For\ \ j=1$$

$$K_1 = -0.0739636$$
$$K_2 = -0.1025754$$
$$K_3 = -0.0994255$$
$$K_4 = -0.1189166$$

بر همین اساس :

$$y(0.4) \approx y_2 = 0.8620525$$
$$y(0.6) \approx y_3 = 0.7352784$$
$$y(0.8) \approx y_4 = 0.6097519$$
$$y(1.0) \approx y_5 = 0.5000073$$

تمرینات فصل

1- مسئله مقدار اولیه مفروض است $y(0)=0$, $0 \le x \le 2$, $y' = 1 + x\sin y$ را با گام h=0.2 با کلیه روشها فوق الذکر حل کنید؟

2- مسئله مقدار اولیه زیر را با گام h=0.5 با روشهای مراتب دوم و سوم و چهارم رانگ- کوتا حل کنید؟

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 e^x\ ,\ 1 \le x \le 2 \quad y(1) = 0$$

3- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است : $y' = x + y \ , \ \ y(0) = 1 \, , \, x \in [0,1]$ این مسئله را با گام h=0.1 با تمامی روشهای فوق الذکر حل کنید خطای این روشها را در نقاط گره ای بیابید وبا روشهای دیگر مقایسه کنید؟

4- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است : $y' = y - x^2 + 1 \ , \ 0 \le x \le 2 \, , \, y(0) = 0.5$ با گام h=0.1 با روشهای مرتبه دوم و چهارم تیلور حل کنید .خطای روش را در نقاط گره ای بیابد؟

5- مسئله مقدار اولیه $y' = xe^{3x} - 2y \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, y(0) = 0$ را با گام h=0.5 با روشهای مرتبه دوم و چهارم تیلور حل کنید؟

6- با استفاده از روش تیلور مرتبه دوم وبا گام h=0.1 مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید؟

$$y' = 1 + x \sin xy \, , \, 0 \le x \le 2 \, , \, y(0) = 0$$

7- مسائل مثالها 4و5و6 را با طول گامهای مندرج شده فوق با سایر روشهای فصل حل کنید؟