

تئوری احتمال و آمار مهندسی

۱- در یک مطالعه آماری از یک نمونه که از جامعه گرفته شده، اطلاعات زیر به دست آمده است:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = -4000 \quad \text{و} \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000 \quad n = 10$$

ضریب چولگی این نمونه کدام است؟

-۴۰ (۴)

-۰/۱۰۴ (۳)

-۰/۱۴۲ (۲)

-۴ (۱)

۲- میزان تولید یک محصول در ۵ سال، به صورت جدول زیر می‌باشد. میزان تولید در هر سال به طور متوسط چند درصد زیاد شده است؟

سال	۱	۲	۳	۴	۵
تولید	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶

۱۰۰(\sqrt{2}-1)\% (۲)

۱۰۰\sqrt{2}\% (۱)

۲۰\% (۴)

۱۰۰\% (۳)

۳- یافته‌های یک نمونه تصادفی ۳ تابی از $N(0, \sigma^2)$ عبارت است از $X_1 = 2$ و $X_2 = -1$. مقدار برآوردگر حداقل درستنمایی (MLE) برای دهک اول این توزیع کدام است؟

-۱/\sqrt{3} (۴)

۳/۹ (۳)

-۳/۹ (۲)

۱/\sqrt{3} (۱)

۴- یک مدل y_i را با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. برآورد \hat{Y} بر اساس نتایج کدام است؟

$$\sum x_i = 22, \quad \sum y_i = 44, \quad \sum x_i y_i = 100, \quad \sum x_i^2 = 100, \quad \sum y_i^2 = 200, \quad n = 11$$

۱۸/۱۰ (۴)

۹/۱۰ (۳)

۱۸/۲ (۲)

۹/۱ (۱)

۵- اگر X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشند، مقدار کدام است؟

۱/۲ (۴)

۱/۳ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۶ (۱)

۶- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. برآورد کننده پارامتر θ از روش MLE بر اساس یک مشاهده از X کدام است؟

X	.	۱	۲
θ_1	۰/۱۶	۰/۱۲	۰/۱۲
θ_2	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۱۵
θ_3	۰/۱۵	۰/۱۲	۰/۱۳

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \theta_1 & x = 0 \\ \theta_2 & x = 1 \\ \theta_3 & x = 2 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \theta_1 & x = 0 \\ \theta_2 & x = 1 \\ \theta_3 & x = 2 \end{cases}$$

۷- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta$$

کدامیک از گزینه‌های زیر یک برآوردگر ناریب برای θ است؟

$$\frac{3}{2n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \quad (۲)$$

$$\frac{2}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \quad (۴)$$

$$\frac{3}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \quad (۳)$$

۸- فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ است. نمونه تصادفی ۳ تایی از این توزیع گرفته و واریانس نمونه را S^2 می‌نامیم. با چه احتمالی دست کم ۹۷۵٪ توزیع در بازه $(-\infty, \mu + 2S)$ قرار می‌گیرد؟

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^{-2} \quad (3)$$

$$1 - e^{-2} \quad (2)$$

$$1 - e^{-1} \quad (1)$$

۹- متغیر تصادفی X در فاصله $(0, \infty)$ را در نظر بگیرید و بر اساس یک مشاهده، آزمون فرض $H_0: f(x) = 2x$ در برابر $H_1: f(x) = 2x$ را در نظر می‌گیریم. اگر ناحیه رد به صورت $\alpha = P(X > k)$ باشد و β احتمال خطای نوع اول و α احتمال خطای نوع دوم باشند، کدام گزینه صحیح است؟

$$\alpha + \beta = \frac{5}{16} \quad (4)$$

$$\alpha + \beta = \frac{\gamma}{\lambda} \quad (3)$$

$$\beta = 2\alpha \quad (2)$$

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

۱۰- فرض کنید X دارای توزیع هندسی با تابع احتمال $P(X = x) = (1-p)^{x-1} p$ باشد، برای آزمون فرض $H_0: p = \frac{3}{4}$ در مقابل $H_1: p = \frac{1}{2}$ ناحیه رد آزمون به صورت $X \leq k$ تعیین شده است. کدام گزینه صحیح است؟

$$\beta = 1 - \ln \alpha \quad (4)$$

$$\beta = 1 - \alpha \quad (3)$$

$$\beta = 1 - \alpha^2 \quad (2)$$

$$\beta = (1 - \alpha)^2 \quad (1)$$

۱۱- کدام گزینه در مورد آزمون‌های سهل‌گیرانه و سخت‌گیرانه غلط است؟

(۱) اگر یک ادعا در حالت سخت‌گیرانه پذیرفته شود، در حالت سهل‌گیرانه نیز پذیرفته می‌شود.

(۲) اگر بخواهیم نسبت به یک ادعا سخت‌گیری کنیم، زمانی ادعا را می‌پذیریم که آماره در ناحیه بحرانی قرار گیرد.

(۳) اگر یک ادعا در حالت سخت‌گیرانه رد شود، در حالت سهل‌گیرانه نیز رد می‌شود.

(۴) اگر یک ادعا در حالت سهل‌گیرانه رد شود، در حالت سخت‌گیرانه نیز رد می‌شود.

۱۲- یافته‌های یک نمونه تصادفی ۴ تایی از $N(0, \sigma^2)$ عبارت است از $X_1 = 4$ و $X_2 = -2$. برای آزمون فرض $H_0: \sigma = 2$ در مقابل $H_1: \sigma \neq 2$ کدام است؟

$$e^{-\frac{5}{2}} \quad (4)$$

$$1 - e^{-\frac{5}{2}} \quad (3)$$

$$2P(Z \geq 2) \quad (2)$$

$$2P(Z \geq \sqrt{5}) \quad (1)$$

۱۳- در یک بررسی برابری میانگین‌های ۴ جامعه، از هر جامعه ۳ مشاهده جمع آوری شده است. اگر $\hat{\alpha}_i$ ها یا برآورد اثر تیمارها به ترتیب، $\hat{\alpha}_1 = -1$ ، $\hat{\alpha}_2 = 2$ ، $\hat{\alpha}_3 = 0$ ، $\hat{\alpha}_4 = 3$ باشند، و $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2$ باشد؛ آماره آزمون کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۱۴- در دو جامعه مستقل $(N(\mu_x, \sigma_x^2)$ و $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ ، برای انجام آزمون $H_0: \mu_x = \mu_y + 3$ در مقابل $H_1: \mu_x > \mu_y + 3$ نتایج حاصل از دو نمونه مستقل از دو جامعه به صورت زیر است:

$$n_x = 4, \quad \bar{X} = 48/25, \quad \sigma_x^2 = 9, \quad n_y = 4, \quad \bar{Y} = 42, \quad \sigma_y^2 = 16$$

آزمون برابرست با: p-value

$$0.9 \quad (4)$$

$$0.1 \quad (3)$$

$$0.1 \quad (2)$$

$$0.99 \quad (1)$$

۱۵- بر اساس نمونه تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n از توزیع زیر،

$$f(x, \theta) = 1, \quad \theta \leq x \leq \theta + 1 \quad -\infty < \theta < \infty$$

برآوردهای پارامتر θ از روش حداقل درستنمایی عبارت است از:

$$x_{(n)} - 1 \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} \quad (2)$$

$$x_{(n)} + 1 \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} \quad (1)$$

$$x_{(n)} \leq \theta \leq x_{(1)} + 1 \quad (4)$$

$$x_{(n)} - \frac{1}{\gamma} \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} + \frac{1}{\gamma} \quad (3)$$

۱۶- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $(Y_1, \dots, Y_n) \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ و $(S_x^2 = \lambda, S_y^2 = \mu)$ یک نمونه تصادفی از توزیع $H_0: \sigma_x < \sigma_y$ کدام است؟

$(S_x^2 = \lambda, S_y^2 = \mu)$ آزمون **p-value** باشد. $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$P(F_{\lambda, n-2} \leq \chi^2) \quad (4)$$

$$P(F_{\lambda, n-2} \leq 2) \quad (3)$$

$$P(F_{\lambda, n-2} \leq 1) \quad (2)$$

$$P(F_{\lambda, n-2} \geq 1) \quad (1)$$

۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i = A + BX_i + \varepsilon_i$, برآورد کننده ناریب برای σ^2 , واریانس خطای عبارت است از:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \quad (4)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \quad (3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \quad (2)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-1} \quad (1)$$

۱۸- فرض کنید X_1, X_2, X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای به ترتیب $N(2\mu_1, 1), N(2\mu_2, 1), N(2\mu_3, 1)$ باشند.

برآوردهای $\hat{\mu}_1$ از روش MLE کدام است؟

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (4)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{3} \quad (3)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6} \quad (2)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{14} \quad (1)$$

۱۹- اگر بدانیم در نمونه گیری از توزیع نرمال، با افزایش اندازه نمونه توزیع انحراف معیار نمونه یا S به سمت توزیع

$$N(\mu, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})$$

$$\left(\frac{S}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}, \frac{S}{1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \right) \quad (2)$$

$$\left(S - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, S + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \quad (1)$$

$$\left(S - S \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, S + S \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \quad (4)$$

$$\left(\frac{S}{1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}, \frac{S}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \right) \quad (3)$$

۲۰- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشد:

$$H_1: X \sim U(0, 1) \quad \text{یا} \quad H_0: X \sim \text{Exp}(1)$$

علاقهمند به آزمون H_0 در مقابل H_1 هستیم. ناحیه بحرانی به روش نیمن-پیرسن کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n X_i > c \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n |X_i| > c \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i < c \quad (2)$$

$$|\bar{X}| > c \quad (1)$$

پاسخ

۱ - گزینه «۲» صحیح است.

ضریب چولگی نمونه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}{\left(\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (100)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-400}{-400} = \frac{-400}{1000} = -0.4$$

البته این آماره یک برآورد اریب برای ضریب چولگی جامعه است.
۲ - گزینه «۲» صحیح است.

تولید در ۴ دوره ۲ برابر و در هر دوره به طور متوسط $\sqrt[4]{2}$ برابر شده است ($\bar{X}_g = \left(\frac{X_n}{X_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{16}{8} \right)^{\frac{1}{5-1}} = \sqrt[4]{2}$). بنابراین در هر دوره به طور متوسط ۱ درصد زیاد شده است.

۳ - گزینه «۴» صحیح است.

اگر میانگین معلوم باشد، $\text{MLE}(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$ است.

$$\text{MLE}(\sigma) = \sqrt{\frac{(2-0)^2 + (-2-0)^2 + (-1-0)^2}{3}} = \sqrt{3}$$

دهک اول نقطه‌ای است که احتمال سمت چپ آن $1/6$ است.

$$P(X \leq a) = 1/6 \Rightarrow a = \mu - 1/\sigma = -1/\sigma$$

$$\text{MLE}(-1/\sigma) = -1/\hat{\sigma} = -1/\sqrt{3}$$

۴ - گزینه «۳» صحیح است.

در مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ داریم:

$$\text{Var}(\hat{Y} | x_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)$$

که در آن برآورد σ^2 به صورت زیر است:

$$\frac{SSE}{n-2} = \frac{S_{YY} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{n-2}$$

در مدل $Y_i = BX_i + \varepsilon_i$ داریم:

$$\text{Var}(\hat{Y} | X_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

که در آن برآورد σ^2 به صورت زیر است:

$$\frac{SSE}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{n-1}$$

بنابراین برآورد $\text{Var}(\hat{Y} | X_i)$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \frac{100 - 100}{10} \times \frac{9}{100} = \frac{9}{10}$$

- گزینه «۴» صحیح است.

$$\Pr\left(\frac{S}{\sqrt{\chi^2} |\bar{X} - \mu|} < 1\right) = \Pr\left(\frac{\sqrt{\chi^2} |\bar{X} - \mu|}{S} > 1\right) = \Pr\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{S/\sqrt{\chi^2}} > 1\right) = \Pr(|t_{n-1}| > 1) = 2 \frac{\text{Arctg } x}{\pi} \Big|_1^\infty = 2 \times \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi} = \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- گزینه «۳» صحیح است.

- گزینه «۳» صحیح است.

$$E(X) = \int_0^\theta x \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right) dx = \frac{1}{\theta} x^2 \Big|_0^\theta = \frac{1}{\theta} \theta^2$$

$$E((X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{\theta} \theta = E\left(\frac{1}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)\right) = \theta$$

- گزینه «۴» صحیح است.

$$P(P(X < \mu + \chi^2 S) > 0 / 97.5) = P(P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\chi^2 S}{\sigma}\right) > 0 / 97.5) = P(P(Z < \frac{\chi^2 S}{\sigma}) > 0 / 97.5) = P\left(\frac{\chi^2 S}{\sigma} > Z_{0.975}\right)$$

$$= P\left(\frac{\chi^2 S}{\sigma} > (Z_{0.975})^2\right) = P(\chi^2 > 4) = P(\chi^2 > 2) = e^{-2} = e^{-1}$$

- گزینه «۳» صحیح است.

$$\alpha = P(X < \delta | H_0) = \int_0^\delta \lambda x^{\lambda-1} dx \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda}$$

$$\beta = P(X > \delta | H_1) = \int_{\delta}^1 \lambda x^{\lambda-1} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- گزینه «۱» صحیح است.

$$\alpha = P(X \leq k | H_0) = 1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k = 1 - \alpha$$

$$\beta = P(X > k | H_1) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda k} = (1 - \alpha)^\lambda$$

- گزینه «۳» صحیح است.

- گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که میانگین معلوم است، آماره آزمون $\chi^2_0 = \frac{nS'^2}{\sigma^2_0} = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\sigma^2_0}$ است. بنابراین داریم:

$$\chi^2_0 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\sigma^2_0} = \frac{4 + 16}{4} = 5 \Rightarrow p\text{-value} = P(\chi^2 > \chi^2_0) = P(\chi^2 > 5) = e^{-5/4}$$

- ۱۳ - گزینه «۳» صحیح است.

$$MS_{Tr} = \frac{SS_{Tr}}{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2}{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \hat{\alpha}_i^2}{k-1} = \frac{\gamma(1+\gamma+...+\gamma)}{\gamma-1} = 14$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{N-k} = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^k (n-1) S_i^2}{\sum_{i=1}^k (n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{k} = 2$$

$$F = \frac{MS_{Tr}}{MS_E} = \frac{14}{2} = 7$$

- ۱۴ - گزینه «۲» صحیح است.

$$Z_o = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 3}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = \frac{48/25 - 42 - 3}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}} = \frac{3/25}{\frac{5}{2}} = \frac{6/5}{5} = 1/3 \Rightarrow p - = \geq . = \geq 1 \cdot 3 = . 1$$

- ۱۵ - گزینه «۲» صحیح است.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\theta+1)^{-\theta}} = 1$$

بنابراین مقدار $L(\theta)$ به ازای تمام مقادیر ممکن θ یکسان خواهد شد و مطابق روش MLE پارامتر θ می‌تواند هر مقدار قابل قبولی را اختیار کند. با توجه به مقادیر ممکن برای x ($x < \theta+1$) ، مقادیر قابل قبول برای θ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} \forall x_i : \theta \leq x_i \leq \theta+1 \Rightarrow & \begin{cases} \forall x_i : \theta \leq x_i \Rightarrow \theta \leq x_{(1)} \\ \forall x_i : x_i \leq \theta+1 \Rightarrow x_{(n)} \leq \theta+1 \Rightarrow x_{(n)} - 1 \leq \theta \end{cases} \\ \Rightarrow x_{(n)} - 1 \leq \theta \leq x_{(1)} \end{aligned}$$

- ۱۶ - گزینه «۴» صحیح است.

آماره آزمون بر اساس فرض صفر $\sigma_x = 2$ یا $\sigma_y = 2$ ساخته می‌شود. بنابراین داریم:

$$F_o = \frac{S_x^2 / S_y^2}{\sigma_{x_o}^2 / \sigma_{y_o}^2} = \frac{S_x^2 / S_y^2}{4} = \frac{S_x^2}{4 S_y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow p-value = P(F_{n_x-1, n_y-1} \leq F_o) = P(F_{1,1} \leq \frac{1}{2})$$

- ۱۷ - گزینه «۴» صحیح است.

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i (a + bx_i) = a \sum_{i=1}^n e_i + b \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n e_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n e_i y_i - \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i y_i$$

بنابراین داریم:

$$S_{y|x}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)(Y_i - \hat{Y}_i)}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) Y_i}{n-2}$$

- ۱۸ - گزینه «۱» صحیح است.

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - i\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{\sum (x_i - i\mu)^2}{2}} \Rightarrow \ln[L(\mu)] = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\sum (x_i - i\mu)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \ln[L(\mu)]}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{n \sum i(x_i - i\mu)}{2} = 0 \Rightarrow \sum i x_i - \mu \sum i^2 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum i x_i}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{6 \sum i x_i}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)}{14}$$

- ۱۹ - گزینه «۲» صحیح است.

$$S \approx N(\sigma, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{S - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx Z$$

$$-Z_{\alpha/2} \leq \frac{S - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\alpha/2} \Rightarrow -\frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{S}{\sigma} - 1 \leq \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{S}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \sigma \leq \frac{S}{1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}$$

نکته: اگر X دارای توزیع مربع کای با n درجه آزادی باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{\chi_n - n}{\sqrt{n}} \sim Z \Rightarrow P\left(\frac{\chi_n - n}{\sqrt{n}} > Z_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow P\left(\chi_n > n + Z_\alpha \sqrt{n}\right) = \alpha \Rightarrow \chi_{\alpha, n} \approx n + Z_\alpha \sqrt{n}$$

$$\frac{\sqrt{2\chi_n}}{n} - \sqrt{n} \sim Z \Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{2\chi_n}}{n} - \sqrt{n} > Z_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow P\left(\chi_n > \frac{(Z_\alpha + \sqrt{n})^2}{2}\right) = \alpha \Rightarrow \chi_{\alpha, n} \approx \frac{(Z_\alpha + \sqrt{n})^2}{2}$$

با استفاده از نکته دوم می‌توان نشان داد که در نمونه گیری از جامعه نرمال، با افزایش اندازه نمونه توزیع انحراف معیار نمونه یا S به سمت توزیع $N(\sigma, \frac{\sigma^2}{n})$ می‌کند.

- ۲۰ - گزینه «۴» صحیح است.

$$\frac{L(H_0)}{L(H_1)} < c_1 \Rightarrow \frac{\prod e^{-x_i}}{\prod \frac{1}{1-x_i}} < c_1 \Rightarrow e^{-\sum x_i} < c_1 \Rightarrow -\sum x_i < c_1 \Rightarrow \sum x_i > c$$

۱- شخصی را در نظر بگیرید که در نقطه صفر محور X قرار گرفته است. اگر این شخص هر بار به طور مستقل از سایر حرکت‌ها با احتمال p به سمت راست و با احتمال $p = 1 - q$ به سمت چپ حرکت کند، احتمال اینکه پس از $2k$ بار حرکت $2n$ واحد از مبدأ دور شده باشد، چقدر است؟

$$\binom{2k}{k+n} p^{k-n} q^{k-n} (p^n + q^n) \quad (2)$$

$$\binom{2k}{k+n} p^{k-n} q^{k-n} \quad (4)$$

$$\binom{2k}{k+n} p^{k+n} q^{k-n} \quad (1)$$

$$\binom{2k}{k+n} (p^n + q^n) \quad (3)$$

۲- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال $f(x) = ce^{-x^2 - \gamma x}$, $x \in R$ باشد. مقدار $E(X^2)$ کدام است؟

$$\frac{49}{4} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{51}{4} \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

۳- تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t) = e^{2t + \frac{\gamma t^2}{2}}$ است. تابع مولد گشتاور (4) کدام است؟ $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 4)$

$$e^{\frac{-\gamma t + \frac{\gamma t^2}{2}}{2}} \quad (4)$$

$$e^{\frac{\gamma t + \frac{\gamma t^2}{2}}{2}} \quad (3)$$

$$e^{\frac{\gamma t + \frac{\gamma t^2}{2}}{2}} \quad (2)$$

$$e^{\frac{-\gamma t + \frac{\gamma t^2}{2}}{2}} \quad (1)$$

۴- اگر $X \sim N(1, 4)$ و $Y \sim N(1, 9)$ متحیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار a رابطه زیر برقرار است؟ $P(2X + Y < a) = P(\gamma X - 2Y > \gamma a)$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$(2) \text{ صفر}$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

۵- اگر X دارای توزیع $(\sigma^2, 0)$ با تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$ باشد، به ازای کدام مقدار σ مقدار $P(X < 2)$ حداقل می‌شود؟

$$\sqrt{\frac{2}{2 \ln 2}} \quad (4)$$

$$(3) \text{ بینهایت}$$

$$(2) \text{ صفر}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2 \ln 2}} \quad (1)$$

۶- فرض کنید X دارای توزیع هندسی با پارامتر p باشد، برای عدد مثبت a ، مقدار $E(\max(X, a))$ کدام است؟

$$a + aq^a \quad (4)$$

$$(a + \frac{1}{p})q^a \quad (3)$$

$$a + \frac{q^a}{p} \quad (2)$$

$$a + q^a \quad (1)$$

۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور به صورت زیر باشد:

$$M_X(t) = \frac{(1 + e^t)(e^{rt} + e^{rt}) + \cos ht}{5}$$

$P(X \leq 1)$ برابر است با:

$$\frac{3}{10} \quad (4)$$

$$\frac{1}{10} \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

۸- فرض کنید می خواهیم با گرفتن نمونه‌هایی از دو جامعه نرمال مستقل با واریانس‌های به ترتیب 1 و 8 ، تفاضل میانگین‌های آنها را برآورد نماییم. اگر $n_1 = 2n_2 = 25$ و بخواهیم در سطح اطمینان 95% حداقل خطای 1 باشد، مجموع اندازه نمونه‌ها کدام است؟ $Z_{0.05}$ را برابر 2 در نظر بگیرید؟

$$160 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$

$$40 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$

۹- فرض کنید $X \sim B(4, p)$ و می خواهیم فرض $H_0: p = \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1: p > \frac{1}{4}$ را آزمون کنیم. اگر ناحیه بحرانی به صورت $\{0, 1\} = R$ باشد، توان آزمون کدام است؟

$$\frac{27}{32} \quad (4)$$

$$\frac{5}{32} \quad (3)$$

$$\frac{189}{256} \quad (2)$$

$$\frac{5}{16} \quad (1)$$

۱۰- یک نمونه n تایی از مدل $y_i = Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. کدام گزینه غلط است؟

(۱) برآورد B را می توان به صورت ترکیب خطی از y_i ها نوشت.

(۲) برآورد B دارای توزیع نرمال است.

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \quad (4)$$

۱۱- فرض کنید می خواهیم بر اساس یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال، یک برآورد فاصله ای $(\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha)$ درصدی دو طرفه برای میانگین جامعه بدھیم. اگر واریانس جامعه مجهول باشد، ولی به اشتباه معلوم فرض شود (به اشتباه واریانس نمونه به جای واریانس جامعه قرار داده شود)، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) طول فاصله ساخته شده، کمتر از طول فاصله واقعی خواهد بود.

(۲) طول فاصله ساخته شده، بیشتر از طول فاصله واقعی خواهد بود.

(۳) طول فاصله ساخته شده، مساوی طول فاصله واقعی خواهد بود.

(۴) بسته به اینکه واریانس نمونه از واریانس جامعه کمتر یا بیشتر یا مساوی آن باشد، هر کدام از گزینه های قبل می تواند درست باشد.

۱۲- اگرتابع چگالی متغیر تصادفی X بصورت $f(x) = 2\theta^2 x^{-3}, \theta \leq x < \infty$ باشد، برآورد θ از روش گشتاورها کدام است؟

$$\frac{\bar{X}}{2} \quad (4)$$

$$X_{(1)} \quad (3)$$

$$X_{(n)} \quad (2)$$

$$2\bar{X} \quad (1)$$

۱۳- برای آزمون فرض $H_0: \sigma = 2$ در مقابل $H_1: \sigma < 2$ در نمونه گیری از جامعه نرمال و در سطح معنادار بودن 0.05 اطلاعات $n = 16$ و $S^2 = 8$ موجود است. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) چون $p-value = 0.05 < \alpha = 0.05$ است، H_0 رد می شود.

(۲) چون $p-value = 0.05 < \alpha = 0.05$ است، H_0 رد نمی شود.

(۳) چون $p-value = 0.05 > \alpha = 0.05$ است، H_0 رد می شود.

(۴) چون $p-value = 0.05 > \alpha = 0.05$ است، H_0 رد نمی شود.

۱ - گزینه «۲» صحیح است.

فرض کنید X تعداد حرکت‌ها به سمت راست و $-X - 2k$ تعداد حرکت‌ها به سمت چپ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P(|X - (-2k - X)| = 2n) &= P(X - (-2k - X) = 2n) + P(X - (-2k - X) = -2n) \\ &= P(X = k + n) + P(X = k - n) = \binom{2k}{k+n} p^{k+n} q^{2k-(k+n)} + \binom{2k}{k-n} p^{k-n} q^{2k-(k-n)} \\ &= \binom{2k}{k+n} p^{k+n} q^{k-n} + \binom{2k}{k-n} p^{k-n} q^{k+n} = \binom{2k}{k+n} p^{k-n} q^{k-n} (p^{2n} + q^{2n}) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که: $\binom{2k}{k+n} = \binom{2k}{k-n}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+2\mu x - \mu^2}{2\sigma^2}} = ce^{-\frac{x^2+2\mu x}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

$$ce^{-x^2-\mu x} = ce^{-\frac{x^2+2\mu x}{2\sigma^2}} \Rightarrow 2\sigma^2 = 1, \sigma^2 = \frac{1}{2}, \frac{\mu}{\sigma^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$M_x(t) = e^{rt+st^2} \Rightarrow X \sim N(\mu = r, \sigma^2 = s)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{r}(X - s) = \frac{1}{r}X - \frac{s}{r} \sim N(\mu = \frac{r}{r} - \frac{s}{r} = -\frac{s}{r}, \sigma^2 = \frac{s}{r}) \Rightarrow M_y(t)$$

$$Y = \frac{1}{r}X - \frac{s}{r} \Rightarrow M_y(t) = M_x(\frac{1}{r}t)e^{-\frac{s}{r}t} = e^{r(\frac{1}{r}t)+s(\frac{1}{r}t)^2} e^{-\frac{s}{r}t} = e^{-\frac{s}{r}t+\frac{s}{r}}$$

$$P(rX + Y < a) = P(Z < \frac{a - (r+s)}{\sqrt{r+s}}) = \Phi(\frac{a - r}{\sqrt{r+s}})$$

$$P(sX - rY > sa) = P(Z > \frac{sa - (s-r)}{\sqrt{r+s}}) = P(Z > \frac{sa - r}{\sqrt{r+s}}) = 1 - \Phi(\frac{sa - r}{\sqrt{r+s}})$$

$$\Rightarrow \frac{a - r}{\sqrt{r+s}} = \frac{1 - rs}{\sqrt{r+s}} \Rightarrow a - r = 1 - rs \Rightarrow a = \frac{r}{s}$$

$$P(1 < X < r) = P(\frac{1}{\sigma} < Z < \frac{r}{\sigma}) = F_Z(\frac{r}{\sigma}) - F_Z(\frac{1}{\sigma})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(1 < X < r)}{\partial \sigma} = -\frac{r}{\sigma} f_Z(\frac{r}{\sigma}) + \frac{1}{\sigma} f_Z(\frac{1}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma} (-rf_Z(\frac{r}{\sigma}) + f_Z(\frac{1}{\sigma}))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} (-r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1^2}{2\sigma^2}}) = 0 \Rightarrow -re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{1^2}{2\sigma^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma^2} = (\ln r) - \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \ln r \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{r \ln r}}$$

$$E[\max(X, a)] = E[\max(X, a) | X \leq a] P(X \leq a) + E[X | X > a] P(X > a) = a(1 -$$

$$M_X(t) = \frac{(1+e^t)(e^{rt} + e^{st}) + \cos ht}{\Delta} = \frac{(e^{rt} + e^{st} + e^{rt+ht} + e^{st+ht})}{\Delta}$$

$$= \frac{1}{\Delta} e^{-t} + \frac{1}{\Delta} e^t + \frac{1}{\Delta} e^{rt} + \frac{1}{\Delta} e^{st} + \frac{1}{\Delta} e^{rt+ht} = P(-1) e^{-t} + P(1) e^t + P(r) e^{rt} + P(s) e^{st} + P(rt+ht) e^{rt+ht}$$

$$\Rightarrow P(-1) = \frac{1}{\Delta}, P(1) = \frac{1}{\Delta}, P(r) = \frac{1}{\Delta}, P(s) = \frac{1}{\Delta}$$

- ۸ - گزینه «۳» صحیح است.

$$Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 1 \Rightarrow Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_1}} = 1 \Rightarrow 2 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}} = 1 \Rightarrow n_1 = (2 \times \sqrt{5})^2 = 20.$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}} = 1 \Rightarrow n_1 = (2 \times \sqrt{5})^2 = 20 \Rightarrow n_2 = 4 \Rightarrow n_1 + n_2 = 24.$$

- ۹ - گزینه «۲» صحیح است.

$$\pi = P(X \in \{1, 2\} | H_1) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{18 + 1 \cdot 8}{256} = \frac{18}{256}$$

- ۱۰ - گزینه «۳» صحیح است.

$$Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{B}x_i)^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \hat{B}} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{(y_i - \hat{B}x_i)}_{e_i} = 0 \Rightarrow \hat{B} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

چون عرض از مبدأ معلوم است، آن را برآورد نمی‌کنیم و در نتیجه نسبت به \hat{A} مشتق نمی‌گیریم و $\sum_{i=1}^n e_i$ لزوماً صفر نمی‌شود.

- ۱۱ - گزینه «۱» صحیح است.

طول فاصله اطمینان در این حالت $S/\sqrt{n} > t_{\alpha/2, n-1}$ بوده که در صورتیکه واریانس جامعه مجھول باشد، ولی به اشتباه معلوم فرض شود، به اشتباه طول فاصله $S/\sqrt{n} < Z_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$ می‌شود که چون واریانس توزیع Z از $t_{\alpha/2, n-1}$ کمتر است و برای $\alpha < 0.05$ رابطه $Z_{\alpha/2} < t_{\alpha/2, n-1}$ درست است، گزینه ۱ صحیح است.

- ۱۲ - گزینه «۴» صحیح است.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} 2\theta^x x^{-\theta} dx = 2\theta \frac{1}{\theta} = 2\theta \Rightarrow \bar{X} = 2\hat{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$$

- ۱۳ - گزینه «۱» صحیح است.

$$\chi^2_{\cdot} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_{\cdot}} = \frac{15 \times 1}{4} = 3.75 \Rightarrow p-value = P(\chi^2_{n-1} \geq \chi^2_{\cdot}) = P(\chi^2_{15} \geq 3.75) \approx 0.1 < \alpha = 0.05$$

۱- با شش عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۴ حرفی می‌توان ساخت که عدد ۵ حتماً در آن باشد؟

۱۲۰ (۴)

۱۶۸ (۳)

۱۳۲ (۲)

۱۰۸ (۱)

۲- جعبه‌ای دارای ۱۰ مهره با شماره ۱ تا ۱۰ است که ۴ مهره از آن‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و شماره‌ها را به ترتیب صعودی $x_4 < x_3 < x_2 < x_1$ مرتب می‌کنیم. مقدار $P(x_1 = 4)$ کدام است؟

$\frac{1}{14}$ (۴)

$\frac{3}{14}$ (۳)

$\frac{3}{10}$ (۲)

$\frac{9}{14}$ (۱)

۳- فرض کنید n مرد و m زن را به تصادف در یک ردیف مرتب می‌کنیم. احتمال اینکه بین هر دو مرد حداقل ۲ زن وجود داشته باشد، چقدر است؟

$$\frac{\binom{m-n+2}{n}}{(n+m)!} \quad (۲)$$

$$\frac{n! \binom{m-n+2}{n} m!}{(n+m)!} \quad (۱)$$

$$\frac{\binom{m-n+2}{n}}{n!m!} \quad (۴)$$

$$\frac{\binom{m-n+2}{n}}{n!(n+m)!m!} \quad (۳)$$

۴- میزان فروش شیر یک فروشگاه، متغیر تصادفی X بوده که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

فروشگاه روزانه ۴ واحد شیر برای فروش تهیه می‌کند. این فروشگاه در ۶۰ روز به طور متوسط چند روز دچار کمبود شیر می‌شود؟

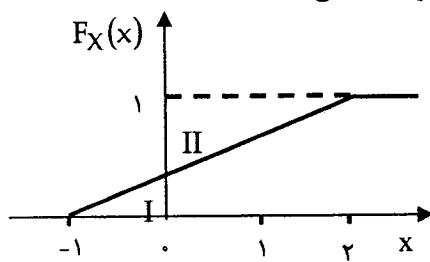
۴۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۵۰ (۱)

۵- فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت زیر است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) امید ریاضی متغیر برابر است با مساحت ناحیه II منهای مساحت ناحیه I

۲) امید ریاضی متغیر برابر است با $\frac{1}{2}$

۳) متغیر تصادفی مورد نظر یک متغیر تصادفی یکنواخت است.

۴) هر سه مورد

۶- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(x) = x^n$, باشد، مقدار $E(\max\{X, \frac{1}{2}\})$ کدام است؟

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۱)$$

$$\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۴)$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۳)$$

۷- اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین‌های به ترتیب ۲ و ۳ باشند، $P(\min\{X_1, X_2\} = X_1)$ کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

۸- اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع نرمال استاندارد باشند و $\Phi(X_i)$ تابع توزیع تجمعی باشد و متغیر $Y_i = (n+1)\Phi(X_i)$ تعريف شود، مقدار $E(\max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\})$ کدام است؟

$$n \quad (4)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (3)$$

$$\frac{n+1}{n} \quad (2)$$

$$n+1 \quad (1)$$

۹- تابع احتمال توأم دو متغیر X و Y به صورت $P(x, y) = c \frac{e^{x+y}}{x!y!}$ ، $x = 0, 1, 2, \dots$ ، $y = 0, 1, 2, \dots$ است. کدام

$$4 \quad (4)$$

$$e^r \quad (3)$$

$$e \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۰- اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از یک توزیع نمایی با میانگین ۳ باشند، توزیع متغیر تصادفی $X_{(1)} - X_{(n)}$ کدام است؟

$$4) \text{ نمایی با میانگین } 3 \quad (4)$$

$$3) \text{ نمایی با میانگین } \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$2) \text{ نمایی با میانگین } \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$1) \text{ نمایی با میانگین } \frac{3}{2} \quad (1)$$

۱۱- فرض کنید متغیر تصادفی X یک متغیر مثبت با میانگین و واریانس محدود به ترتیب μ, σ^2 باشد. اگر $Y = \ln X$ باشد، امید ریاضی و واریانس تقریبی Y کدام است؟

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (1)$$

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu} \quad (2)$$

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (3)$$

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (4)$$

۱۲- یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه با اعضای $N, \dots, 1, 2$ به صورت با جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X_i را متغیر تصادفی برنولی تعريف می‌کنیم که زمانی مقدار یک را اختیار می‌کند که عضو شماره i جامعه در نمونه n تایی انتخاب شود. مقدار $E(X_i)$ کدام است؟

$$\frac{n}{N} \quad (4)$$

$$1 - \left(\frac{n}{N}\right) \quad (3)$$

$$1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \quad (2)$$

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^n \quad (1)$$

۱۳- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای مستقل با توزیع $(1, \cdot, U)$ هستند و $X_{(1)}$ و $X_{(2)}$ آماره‌های مرتب آنها هستند. مقدار $Cov(X_1, X_{(1)} + X_{(2)})$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} \quad (1)$$

۱۴- فرض کنید یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع (μ, σ^2) به صورت $0/1, 0/6, 0/9, -0/2$ باشد. برای آزمون

$H_0: \mu \geq p$ -value در مقابل $H_1: \mu < p$ است؟

۰/۵۹۷ (۴)

۰/۴۲ (۳)

۰/۵۷۹ (۲)

۰/۴۰ (۱)

۱۵- اگر یک مشخصه کمی دارای توزیع نرمال باشد و برای یک نمونه ۱۶ تایی از آن، فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین جامعه $[10/25, 13/25]$ به دست آمده باشد، واریانس این نمونه چقدر است؟

۲۰/۲۵ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲/۲۵ (۲)

۹ (۱)

۱۶- پنج قطعه یک بار توسط ترازوی A و یک بار توسط ترازوی B اندازه گیری می‌شوند. اگر نتایج به صورت زیر باشد، p-مقدار برای آزمون برابری میانگین‌های دو ترازو کدام است؟

A ترازوی	۱۱۰	۹۹	۱۱۲	۸۵	۹۹
B ترازوی	۱۱۲	۱۰۱	۱۱۳	۸۸	۱۰۱

$2P(t_f \geq 2\sqrt{10})$ (۴)

$2P(t_f \geq 2\sqrt{5})$ (۳)

$2P(t_f \geq 2\sqrt{10})$ (۲)

$2P(t_f \geq 2\sqrt{5})$ (۱)

۱۷- یک تأمین کننده ادعایی کند که درصد اقلام معیوب او ۱۰ درصد است. ولی کارفرما در مقابل او ادعایی کند که این درصد ۲۰ درصد است. برای آزمون ادعایی تأمین کننده در مقابل ادعایی کارفرما، قطعات تأمین کننده را یک به یک بررسی می‌کنیم. اگر اولین قطعه معیوب در سومین آزمایش باشد، p-مقدار کدام است؟

۰/۷۲۹ (۴)

۰/۲۷۱ (۳)

۰/۱۹ (۲)

۰/۸۱ (۱)

۱۸- مایلیم در مورد ۳ توزیع نرمال مستقل، فرض

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

را در برابر این فرض که دست کم دو میانگین نامساوی‌اند، آزمایش کنیم. با داشتن اطلاعات زیر،

تیمار	۱	۲	۳
اندازه نمونه	۴	۴	۴
میانگین نمونه	۹	۱۰	۲۰
واریانس نمونه	۷	۱۰	۱۰

مقدار آماره آزمون مقایسه میانگین ۳ جامعه کدام است؟

$\frac{37}{9}$ (۴)

صفر (۳)

$\frac{296}{9}$ (۲)

$\frac{148}{9}$ (۱)

۱۹- مدل رگرسیون $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ را در نظر بگیرید که یک نمونه ۵ تایی از آن موجود است. اگر خطاهای به صورت $e_1 = 0/1, e_2 = -0/1, e_3 = 0/2, e_4 = -0/3, e_5 = 0/0$ باشند، مقدار برآورد واریانس متغیر پاسخ کدام است؟

۰/۰۳۲ (۴)

۰/۰۴ (۳)

۰/۰۵۳ (۲)

۰/۱ (۱)

۲۰- مدل $y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ را با خطای تصادفی $(\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2))$ در نظر بگیرید. اگر بر اساس یک نمونه ۱۶ تایی نتایج زیر حاصل شده باشد، مقدار آماره آزمون $H_0: B = 1$ در مقابل $H_1: B \neq 1$ کدام است؟

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 32, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i = 48, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i y_i = 102, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 73, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i^2 = 160.$$

$\frac{2}{3}$ (۴)

$-\sqrt{\frac{7}{6}}$ (۳)

$-\sqrt{\frac{6}{7}}$ (۲)

$\frac{2}{21}$ (۱)

پاسخ

۱ - گزینه «۲» صحیح است.

عدد ۵ که باید باشد، برای انتخاب سایر اعداد هم روی اینکه چند بار عدد یک انتخاب شود، افزایش می‌کنیم:

$$\binom{3}{3} \times 4! = 24$$

تعداد حالاتی که هیچ کدام از یک‌ها انتخاب نمی‌شود:

$$\binom{3}{2} \times 4! = 72$$

تعداد حالاتی که یکی از یک‌ها انتخاب می‌شوند:

$$\binom{3}{1} \times \frac{4!}{2!} = 36$$

تعداد حالاتی که دو تا از یک‌ها انتخاب می‌شوند:

بنابراین تعداد کل حالات $= 132 = 24 + 72 + 36$ است.

۲ - گزینه «۳» صحیح است.

یکی از اعداد باید کمتر از ۴، یکی برابر با ۴ و دو تا هم بیشتر از ۴ باشند:

$$P(X_1=4) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{3 \times 15}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

۳ - گزینه «۱» صحیح است.

کل حالات $(n+m)$ است. برای اینکه بین هر دو مرد، حداقل ۲ زن باشد، ابتدا مردها را به $n!$ حالت مرتب می‌کنیم. این مردها $n+1$ فضا ایجاد می‌کنند که در ۱-۱ n تای بین آنها باید هر کدام حداقل ۲ زن باشد. پس اگر زن‌ها را یکسان فرض کنیم، تعداد حالاتی که می‌توان آنها را در $n+1$ محل ایجاد شده طوری

قرار داد که در $1-n$ تای آنها حداقل ۲ زن قرار گیرند برابر است با $\binom{(m-2(n-1))+(n+1)-1}{(n+1)-1}$. حال اگر زن‌ها را متفاوت در نظر بگیریم، تعداد

حالات مرتب کردن آنها در مکان‌های مشخص شده نیز $m!$ حالت است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{n! \binom{(m-2(n-1))+(n+1)-1}{(n+1)-1} m!}{(n+m)!} = \frac{n! \binom{m-n+2}{n} m!}{(n+m)!}$$

۴ - گزینه «۲» صحیح است.

X : تعداد روزهایی که فروشگاه دچار کمبود شیر می‌شود.

A : کمبود

$$P(A) = \int_{\frac{1}{5}}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left. \frac{-1}{1+x} \right|_{\frac{1}{5}}^{\infty} = \frac{1}{5} \Rightarrow E(X) = 6 \times \frac{1}{5} = 12$$

۵ - گزینه «۴» صحیح است.

برای همه انواع متغیرهای تصادفی، داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x) dx$$

که برابر است با مساحت ناحیه II منهای مساحت ناحیه I

در ضمن شبیه یا مشتق تابع توزیع تجمعی (که همان تابع چگالی است) در ناحیه $[1, 2]$ ثابت است. پس X یک متغیر تصادفی یکنواخت در ناحیه

$[1, 2]$ است و امید ریاضی آن $\frac{1}{2}$ است.

۶ - گزینه «۳» صحیح است.

$$f(x) = nx^{n-1}, \quad 0 < x < 1$$

$$\begin{aligned} E(\max\{X_1, X_2\}) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} nx^{n-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x n x^{n-1} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{n+1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

۷ - گزینه «۴» صحیح است.

$$P(\min\{X_1, X_2\} = X_1) = P(X_1 \leq X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

۸ - گزینه «۴» صحیح است.

$E(\max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\})$ است و در نتیجه $E(\Phi(X_i))$ دارای توزیع $U(0, n+1)$ است و

$\frac{n}{n+1}(n+1) = n$ است.

۹ - گزینه «۴» صحیح است.

X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پواسون با پارامتر ۲ هستند که $E(X+Y)$ برابر با ۴ می‌شود.

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}, y = 0, 1, 2, \dots$$

- ۱۰ - گزینه «۱» صحیح است.

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n طول عمرهای λ لامپ هستند که اگر آنها را هم‌زمان روشن کنیم مدت زمان تا سوختن هشتمین لامپ (λ) است. بعد از سوختن هشتمین لامپ، مدت زمان تا سوختن یکی از دو

لامپ بعدی، مینیمم ۲ متغیر تصادفی نمایی است که خود یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{1}{3} \times 2\lambda = 2\lambda$ و میانگین $\frac{3}{2}$ می‌شود.

- ۱۱ - گزینه «۳» صحیح است.

$$E[g(X)] \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2} \sigma^2$$

$$\text{Var}[g(X)] \approx [g'(\mu)]^2 \sigma^2$$

$$g(X) = \ln X \Rightarrow g'(X) = \frac{1}{X} \Rightarrow g''(X) = -\frac{1}{X^2}$$

$$\Rightarrow E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

- ۱۲ - گزینه «۲» صحیح است.

X_i یک متغیر تصادفی برنولی است. بنابراین داریم:

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

- ۱۳ - گزینه «۱» صحیح است.

$$X_{(1)} + X_{(2)} = X_1 + X_2$$

$$\text{Cov}(X_1, X_{(1)} + X_{(2)}) = \text{Cov}(X_1, X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) = \frac{1}{12}$$

- ۱۴ - گزینه «۳» صحیح است.

$$p\text{-value} = P(Z \leq Z_0) = P\left(Z \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0.1 - 0}{1 / \sqrt{4}}\right) = P(Z \leq -0.2) = P(Z \geq 0.2) = 1 - 0.579 = 0.42$$

- ۱۵ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} = [10/25, 13/75] \Rightarrow \bar{X} = \frac{10/25 + 13/75}{2} = 12 \Rightarrow t_{0.05, 15} \frac{S}{\sqrt{n}} = 1/75 \Rightarrow 1/75 \frac{S}{\sqrt{n}} = 1/75 \Rightarrow S^2 = 16$$

- ۱۶ - گزینه «۴» صحیح است.

A	۱۱۰	۹۹	۱۱۲	۸۵	۹۹
B	۱۱۲	۱۰۱	۱۱۳	۸۸	۱۰۱
D	۲	۲	۱	۳	۲

$$\bar{d} = ۱$$

$$S_d^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{4} (1+1) = \frac{1}{2}$$

$$t_0 = \frac{\bar{d} - \mu_0}{S_d / \sqrt{n}} = \frac{\bar{d} \sqrt{n}}{S_d} = \frac{2 \sqrt{5}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{10}$$

بنابراین داریم:

$$P\text{-Value} = ۲P(t_{0.5} \geq |t_0|) = ۲P(t_0 \geq 2\sqrt{10})$$

- ۱۷ - گزینه «۳» صحیح است.

$$X \sim G(p)$$

$$H_0 : p = 0.10$$

$$H_1 : p = 0.20$$

ناحیه بحرانی به صورت $c < X$ است و مقدار مشاهده شده برای X برابر با ۳ است. بنابراین داریم:

$$p\text{-value} = P(X \leq 3 | H_0) = 1 - (0/9)^3 = 1 - 0/729 = 0/271$$

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

اندازه نمونه‌ها یکسان است. بنابراین \bar{X}_i ها و S_i^2 ها هستند، به میانگین ساده تبدیل می‌شوند.

$$MSE = \frac{7+10+10}{3} = 9 \quad \bar{X}_{..} = \frac{9+10+20}{3} = 13$$

$$\Rightarrow SST_r = n_1(\bar{X}_1 - \bar{X}_{..})^2 + n_2(\bar{X}_2 - \bar{X}_{..})^2 + n_3(\bar{X}_3 - \bar{X}_{..})^2 = 4(13-9)^2 + 4(13-10)^2 + 4(13-20)^2 = 4 \times (16+9+49) = 296$$

$$MST_r = \frac{SST_r}{k-1} = \frac{296}{2} = 148 \quad , \quad F_o = \frac{MST_r}{MSE} = \frac{148}{9}$$

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$\sum_{i=1}^3 e_i = 0 \Rightarrow e_3 = 0/1 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^3 e_i^2}{3} = \frac{0/0.1 + 0/0.1 + 0/0.4 + 0/0.9 + 0/0.1}{3} = \frac{0/16}{3} = 0/0.53$$

۲۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - n\bar{x}^2 = 73 - 16 \times 2^2 = 9$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^6 y_i^2 - n\bar{y}^2 = 16 - 16 \times 3^2 = 16$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^6 x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 10.2 - 16 \times 2 \times 3 = 6$$

$$\hat{B} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad S_{Y|x}^2 = \frac{SS_E}{n-2} = \frac{16 - \frac{6}{3}}{n-2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$t_o = \frac{\hat{B} - 1}{S_{Y|x} / \sqrt{S_{xx}}} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{\sqrt{\frac{6}{7}} / \sqrt{9}} = -\sqrt{\frac{7}{6}}$$

۱- میزان باران سالانه (بر حسب اینچ) در یک ناحیه معین دارای توزیع نرمال با $\mu = 40$ و $\sigma = 5$ است. احتمال اینکه از امسال برای مدت ۵ سال منتظر بمانیم تا میزان بارندگی در سال بیش از ۴۰ اینچ باشد کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{7}{8} \quad (3)$$

$$\frac{15}{16} \quad (2)$$

$$\frac{1}{32} \quad (1)$$

۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع زیر باشد :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

مقدار $P(|X - \frac{2}{3}| > \frac{1}{3})$ کدام است؟

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

$$\frac{4}{9} \quad (3)$$

$$\frac{1}{27} \quad (2)$$

$$\frac{8}{27} \quad (1)$$

$\frac{1}{27}$

۳- فرض کنید احتمال از بین رفتن نام خانوادگی یک خانواده بعد از نسل n ام برابر با $e^{-\lambda n}$ باشد. در این صورت احتمال بقای نام خانوادگی در این خانواده برای همیشه برابر است با :

$$1 - e^{-\lambda} \quad (4)$$

$$e^{-\lambda} \quad (3)$$

$$e^{-\lambda^2} \quad (2)$$

$$e^{-\lambda^2} \quad (1)$$

۴- اگر تابع نرخ خرابی طول عمر یک دستگاه به صورت $a t^\lambda$ باشد، و $P(X > 2) = 0.1$ باشد، احتمال کدام است؟

$$(0.1)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$(0.1)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

$$(0.1)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$(0.1)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

۵- فرض کنید مدت زمان سفر شما از خانه تا محل کنکور آزمایشی، متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۴۰ دقیقه و انحراف میان ۱۰ دقیقه است. اگر بخواهید با احتمال ۹۵ درصد تأخیر نداشته باشید و کنکور آزمایشی ساعت ۸ شروع شود، آخرین زمانی که باید منزل را ترک کنید، کدام است؟

$$16/5 \text{ دقیقه قبل از ۸} \quad (2)$$

$$7/3 \text{ دقیقه بعد از ۷} \quad (4)$$

$$8 \text{ دقیقه قبل از ۸} \quad (1)$$

$$16/5 \text{ دقیقه بعد از ۷} \quad (3)$$

۶- اگر X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر یکسان p باشند و $(q = 1 - p)$ باشند، مقدار عبارت $P(Y_1 = \dots = Y_n = 1)$ از کدام گزینه زیر به دست می‌آید؟

$$1 - p^n \quad (4)$$

$$1 - \frac{q^n}{1 - p^n} \quad (3)$$

$$1 - \frac{p^n}{1 - q^n} \quad (2)$$

$$1 - q^n \quad (1)$$

۷- فرض کنید قطر میله‌های تولیدی یک کارخانه به طور مستقل دارای تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{2}$ ، $10 < x < 12$ است.

احتمال اینکه در ۱۰ میله، ۵ میله دارای قطر کمتر از $10/5$ و ۲ میله دارای قطر بیشتر از $11/5$ باشد، چقدر است؟

$$\frac{63}{46} \quad (4)$$

$$\frac{315}{46} \quad (3)$$

$$\frac{63}{47} \quad (2)$$

$$\frac{315}{47} \quad (1)$$

۸- فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-(2y+x)}$ باشند، احتمال آنکه فقط یکی از آن‌ها مقدار کمتر از یک را اختیار کند کدام است؟

$$2e^{-1}(1-e^{-1}) \quad (1)$$

$$e^{-1} + e^{-1} - 2e^{-1} \quad (2)$$

$$e^{-1} - e^{-1} \quad (3)$$

$$e^{-1}(1-e^{-1}) \quad (4)$$

۹- اگر X_1, X_2 و X_3 متغیرهای مستقل نمایی باشند و میانگین X_i برابر با $\frac{1}{3}$ باشد، مقدار

$$P(\min\{X_1, X_2, X_3\} = X_1) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\theta}{3} \quad (1)$$

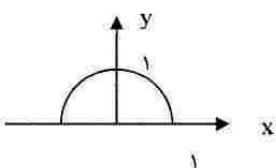
$$\frac{6}{11} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۰- نقطه‌ای به تصادف از داخل نیم دایره شکل زیر انتخاب می‌کنیم. اگر (x,y) نمایانگر مختصات نقطه انتخابی باشد،

$$\text{Var}(X|Y=y) \text{ کدام است؟}$$



$$\frac{1+y^2}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1-y^2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1+y^2}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1-y^2}{2} \quad (4)$$

۱۱- فرض کنید X_1, X_2, X_3 سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که در آن X_1, X_2 دارای توزیع یکسان نمایی با پارامتر یک و X_3 نیز دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ است. مقدار $P(\min(X_1, X_2) < X_3)$ کدام است؟

$$\frac{1+e^{-1}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1+e^{-1}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1-e^{-2}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1-e^{-2}}{2} \quad (4)$$

۱۲- یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را $m+n$ بار به طور مستقل انجام می‌دهیم. اگر بدانیم در مجموع این آزمایش‌ها k موفقیت حاصل شده، امید ریاضی تعداد موفقیت‌ها در m آزمایش اول کدام است؟

$$\frac{km}{m+n} \quad (1)$$

$$\frac{k}{m+n} \quad (2)$$

$$\frac{n}{m+n} \quad (3)$$

$$\frac{m}{m+n} \quad (4)$$

۱۳- X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع یکسان هستند. اگر $\text{Var}(X-Y) = 2$ ، $\text{Var}(X+Y) = 1$ باشد، در این صورت ضریب همبستگی بین X و Y برابر است با:

$$-\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۴- فرض کنید $(0,1)$ و $X \sim U(0,1)$ باشد. در این صورت مقدار $\text{Var}(X+Y)$ کدام است؟

$$\frac{2}{12} \quad (1)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{12} \quad (4)$$

۱۵- اگر برای متغیرهای تصادفی مستقل X_1, X_2 داشته باشیم:

$$E(t^{X_i}) = \cdot / ۳ + \cdot / \sqrt{t}$$

آنگاه مقدار $P(X_1 + X_2 = 1)$ کدام است؟

$\cdot / ۴۹$ (۱)

$\cdot / ۲۱$ (۲)

$\cdot / ۴۲$ (۳)

$\cdot / ۰۹$ (۴)

۱۶- اگر X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل بونولی با پارامتر $1/2$ باشند و $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ به صورت Y_k تعریف شود. در این

صورت مقدار $E(Y_5 Y_7)$ کدام است؟

$\cdot / ۲۵$ (۱)

$\cdot / ۱۸$ (۲)

$\cdot / ۸۵$ (۳)

$\cdot / ۳۵$ (۴)

۱۷- اگر X و Y متغیرهای مستقل باشند و $Var(Y) = 4$ و $Var(X) = 5$ ، $E(X) = 2$ ، $Cov(X, XY) = 15$ ، آنگاه مقدار کدام است؟

$\cdot / ۳$ (۱)

$\cdot / ۱۳$ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۴)

۱۸- در ناحیه‌ای ۲ نوع مختلف از یک حشره زندگی می‌کنند، هر دفعه که حشره‌ای به دام می‌افتد مستقل از نوع حشره

قبلی با احتمال $\sum_{i=1}^r P_i = 1$ ، $(i = 1, \dots, r)$ P_i از نوع آام است. متوسط تعداد حشراتی که قبل از حشره نوع ۱ به دام

افتاده‌اند کدام است؟

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^r P_i} - 1$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^r P_i}$$

$$\frac{1 - P_1}{P_1}$$

$$\frac{1}{P_1}$$

۱۹- سه آزمایش را در نظر بگیرید که دارای شانس موفقیت یکسان هستند. اگر X نشان دهنده تعداد موفقیت‌ها در این آزمایش‌ها باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$\cdot \leq P(X = 2) \leq \cdot / ۶$ (۱)

$\cdot / ۴ \leq P(X = 2) \leq 1$ (۲)

$\cdot \leq P(X = 2) \leq \cdot / ۳$ (۳)

$\cdot / ۶ \leq P(X = 2) \leq 1$ (۴)

۲۰- فرض کنید ۴۸ نقطه به تصادف در فاصله $(1, 3)$ انتخاب می‌کنیم و اختلاف عدد آام از ۲ را با X_i نمایش می‌دهیم.

مقدار $P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i < -6\right)$ کدام است؟

$\cdot / ۰۵$ (۱)

۱) تقریباً صفر

$\cdot / ۱۵۸$ (۲)

$\cdot / ۰۶۷$ (۳)

۱ - گزینه «۱» صحیح است.
 $X = \text{میزان بارندگی در هر سال}$

$$P(X > 4) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

احتمال اینکه اولین موفقیت در سال پنجم باشد برابر است با

۲ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P(|X - \frac{2}{3}| > \frac{1}{3}) = P(X - \frac{2}{3} > \frac{1}{3}) + P(X - \frac{2}{3} < -\frac{1}{3}) = P(X > 1) + P(X < \frac{1}{3}) = 0 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

۳ - گزینه «۱» صحیح است.

$$P(|X - \frac{2n}{3}| > \frac{1}{3}) = P(X - \frac{2n}{3} > \frac{1}{3}) + P(X - \frac{2n}{3} < -\frac{1}{3}) = P(X > n) + P(X < \frac{n}{3}) = 0 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

احتمال اینکه نام خانوادگی بعد از نسل n ام از بین بود برابر با $e^{-\frac{2n}{3}}$ پس احتمال اینکه تا نسل n ام از بین نرود برابر با $e^{-\frac{1}{3}}$ است. پس احتمال بقا برای همیشه در حالت $\infty \rightarrow n$ به دست می آید که برابر است با $e^{-\frac{1}{3}}$.

۴ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P(X > 1) = 0/1 \Rightarrow e^{-\int_0^1 at^2 dt} = 0/1 \Rightarrow e^{-\frac{a}{3}} = 0/1 \Rightarrow P(X > 2) = e^{-\int_0^2 at^2 dt} = e^{-\frac{a}{3}} = (0/1)^{\lambda} = (0/1)^{\lambda}$$

۵ - گزینه «۴» صحیح است.

فرض کنید X مدت زمان سفر شما باشد. در اینصورت داریم:

$$P(X < a) = 0/95 \Rightarrow P(Z < \frac{a-4}{1}) = 0/95 \Rightarrow \frac{a-4}{1} = 0/65 \Rightarrow a = 56/5$$

یعنی با احتمال $0/95$ سفر شما بیشتر از $56/5$ دقیقه طول نمی کشد و اگر $56/5$ دقیقه قبل از 8 صبح حرکت کنید، با احتمال $0/95$ زودتر از 8 به محل آزمون می رسید.

۶ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P(Y_1 = 0 | Y_n = 1) = \frac{P(Y_1 = 0 \cap Y_n = 1)}{P(Y_n = 1)} = \frac{1-p^n - q^n}{1-q^n} = 1 - \frac{p^n}{1-q^n}$$

۷ - گزینه «۱» صحیح است.

قطر هر میله به طور مستقل با احتمال $\frac{1}{4}$ کمتر از $10/5$ ، با احتمال $\frac{1}{4}$ بیشتر از $11/5$ و با احتمال $11/5$ و $10/5$ است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\binom{10}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{10!}{5!3!2!} \cdot \frac{3^5}{4^{10}} = \frac{315}{4^7}$$

۸ - گزینه «۴» صحیح است.

X و Y متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای به ترتیب $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ هستند.

$$P(X \geq 1, Y < 1) + P(X < 1, Y \geq 1) \\ = e^{-1}(1-e^{-1}) + (1-e^{-1})e^{-1} = e^{-1} - e^{-1} + e^{-1} - e^{-1} = e^{-1} + e^{-1} - 2e^{-1}$$

۹ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\min\{X_1, X_2\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$P(\min\{X_1, X_2, X_3\} = X_1) = P(X_1 \leq \min\{X_2, X_3\}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)} = \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})} = \frac{6}{11}$$

۱۰ - گزینه «۳» صحیح است.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{c}{f(y)} = k \Rightarrow (X|y) \sim U[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X|y) = \frac{[\sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2})]^2}{12} = \frac{1-y^2}{3}$$

۱۱ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\min(X_1, X_2) \sim \text{Exp}(2\lambda = 2)$$

$$P(\min(X_1, X_2) < X_3) = \int_0^1 P(\min(X_1, X_2) < X_3 | X_3 = a) f_{X_3}(a) da$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{-2a}) \frac{1}{1-a} da = 1 - \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = \frac{1+e^{-2}}{2}$$

۱۲ - گزینه «۴» صحیح است.

اگر بدانیم در مجموع این آزمایشها k موفقیت حاصل شده، تعداد موفقیتها در m آزمایش اول دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای

$$\frac{km}{m+n}, (m+n, k, m)$$

۱۳ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{cases} \text{Var}(X - Y) = 2 \\ \text{Var}(X + Y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 2 \\ \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 2 \\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sigma_X^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 2 \\ 2\sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 1 \end{cases} \Rightarrow 4\sigma_X^2 = 3 \Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \sigma_X = \frac{1}{2}$$

۱۴ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\text{Var}(X + Y) = E[\text{Var}((X + Y) | X)] + \text{Var}[E((X + Y) | X)]$$

$$= E[\text{Var}(Y | X)] + \text{Var}[X + E(Y | X)] = E[\frac{1}{12}] + \text{Var}[X + \frac{1}{2}] = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

یا

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y | X)] + \text{Var}[E(Y | X)] = E[\frac{1}{12}] + \text{Var}[X + \frac{1}{2}] = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, E(Y | X)) = \text{Cov}(X, X + \frac{1}{2}) = \text{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

۱۵ - گزینه «۲» صحیح است.

$$E(t^x) = \sum_x t^x P(x) = . / 3 + . / 7 t$$

بنابراین X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل هستند که مقادیر $. / 3$ و $. / 7$ را با احتمالهای به ترتیب $3 / 10$ و $7 / 10$ اختیار می‌کنند. پس داریم:

$$P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = ., X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = .) = . / 3 \times . / 7 + . / 7 \times . / 3 = . / 42$$

- ۱۶ - گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} E(Y_5 Y_7) &= E((X_1 + X_2 + \dots + X_5)(X_1 + X_2 + \dots + X_7)) \\ &= E(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_5^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^5 \sum_j X_i X_j) = 5 \times 1 + 3 \times 0 / 1 \times 0 / 1 = 0 / 8 \end{aligned}$$

- ۱۷ - گزینه «۴» صحیح است.

$$\text{Cov}(X, XY) = E(X^T Y) - E(X)E(XY) = E(X^T)E(Y) - [E(X)]^T E(Y) = E(Y)\text{Var}(X) \Rightarrow E(Y) \quad ۳$$

- ۱۸ - گزینه «۲» صحیح است.

تعداد حشراتی که قبل از حشره نوع ۱ به دام می‌افتد برابر با تعداد شکست‌ها قبل از رسیدن به اولین پیروزی است. بنابراین متوسط

تعداد حشره‌های قبل از رسیدن به اولین نوع ۱ $\frac{1}{P_1}$ است.

- ۱۹ - گزینه «۲» صحیح است.

امید ریاضی تعداد موفقیتها در n آزمایش برابر است با مجموع احتمال موفقیت تک تک آنها. پس در این تست که امید ریاضی تعداد موفقیتها در ۳ آزمایش برابر $1/8$ شده و احتمال موفقیت آزمایشها برابر است، احتمال موفقیت هر آزمایش برابر با $1/6$ است.

$$X = X_1 + X_2 + X_3 \quad , \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر آزمایش } i \text{ موفق باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^3 X_i\right) = \sum_{i=1}^3 E(X_i) = 1/8 \Rightarrow E(X_i) = P(X_i = 1) = 1/6$$

$$P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) + P(X_3 = 1) - 2 \leq P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \leq \min\{P(X_1 = 1), P(X_2 = 1), P(X_3 = 1)\} \\ 0/6 + 0/6 + 0/6 - 2 \leq P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \leq 0/6$$

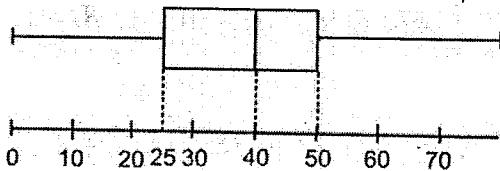
$$P(X = 3) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \Rightarrow 0 \leq P(X = 3) \leq 0/6$$

- ۲۰ - گزینه «۳» صحیح است.

$$X_i \sim U(-1, 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{48} X_i \approx N(48 \times 0, 48 \times \frac{1}{12} = 16) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i < -6\right) \approx P\left(Z < \frac{-6}{4}\right) = 0.67$$

آمار و احتمال مهندسی

۱- ناتوجه به نمودار جعبه‌ای زیر، ضریب چولگی چارکی داده‌ها و نوع توزیع آن‌ها کدام است؟



۲) ۰/۲ و چوله به چپ

۴) ۰/۴ و چوله به چپ

۱) ۰/۴ و چوله به چپ

۳) ۰/۲ و چوله به راست

۲- اگر توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، برآورد گشتاوری زوج (α, β) برابر است با:

$$\left(\frac{\bar{x} - 2\bar{x}^2 + 1}{2}, \frac{3\bar{x} - 2\bar{x}^2 + 1}{2} \right) \quad (2)$$

$$\left(\frac{\bar{x}^2 - \bar{x} - 1}{2}, \frac{\bar{x}^2 - 2\bar{x} - 1}{2} \right) \quad (1)$$

$$\left(\bar{x}^2 + 2\bar{x} - 1, 2\bar{x}^2 - \bar{x} \right) \quad (4)$$

$$\left(\bar{x}^2 - 2\bar{x} + \frac{1}{2}, \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{x}}{2} \right) \quad (3)$$

۳- در یک مدل رگرسیون خطی ساده، $y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ باشد، کدام یک از عبارات زیر درست است؟

X	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\beta - \alpha - \frac{1}{2}$	$\alpha - \beta$	α

$$\text{var}(e_i) = \text{var}(y_i) - \text{var}(\hat{y}_i) \quad (2)$$

$$\text{var}(y_i) = \text{var}(\hat{y}_i) \quad (1)$$

$$\text{var}(e_i) = \text{var}(y_i) + \text{var}(\hat{y}_i) \quad (4)$$

$$\text{var}(y_i) = \text{var}(e_i) \quad (3)$$

۴- می‌خواهیم از مجموعه n نفر، یک شورای j نفری ($j \leq n$) انتخاب و پس از این شورای j نفری یک شورای فرعی i نفری

(i) انتخاب کنیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i} \quad (4) \quad \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} \quad (5) \quad \binom{n}{j} \binom{n-j}{i} \quad (2) \quad \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \quad (1)$$

۵- هرگاه برای هر $n \in N$ داشته باشیم $P(A_n) = 1$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0 \quad (4) \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad (3) \quad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 \quad (2) \quad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad (1)$$

۶- اگر A, B پیشامدهای مستقل باشند، آنگاه کدام اگزینه نادرست است؟

$$P(A-B) = P(A)P(B^c) \quad (2)$$

$$P(A|B) = P(A|B^c) \quad (1)$$

$$P(A \cap B|A) = P(B) \quad (4)$$

$$P(A \cup B) = P(A)P(B) - P(B) \quad (3)$$

۷- فرض کنید n توب متمایز را به تصادف در N ظرف توزیع می‌کنیم. با فرض این که همه N^n ترتیب توزیع توب‌ها هم شانس باشند، احتمال این که در ظرف اول m توب باشد، کدام است؟ ($m \leq n$)

$$\frac{m!(N-1)}{N^n} \quad (2)$$

$$\binom{N}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-m} \quad (1)$$

$$\frac{\binom{n}{m}}{N^n} \quad (4)$$

$$\binom{n}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m} \quad (3)$$

۸- سکه‌ای که شانس شیر آمدن آن P است را به طور مرتب پرتاب می‌کنیم، تا هر دو روی سکه (خط و شیر) مشاهده شود. متوجه تعداد پرتاب‌ها عبارت است از:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} - 1 \quad (4)$$

$$\frac{1-P}{P} + P \quad (3)$$

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} \quad (2)$$

$$\frac{1}{P(1-P)} \quad (1)$$

۹- فرض کنید $E(C^X) = 1$, C مقداری از $\left(P > \frac{1}{2}\right)$ است. $P(X=-1) = 1 - P(X=1) = 1 - P$

$$1 - P \quad (4)$$

$$\frac{1}{P} \quad (3)$$

$$\frac{1-P}{P} \quad (2)$$

$$P \quad (1)$$

۱۰- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با میانگین 2 باشد و $(x, x) \sim N$ آنگاه مقدار $\text{var}(Y|X=x)$ کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۱۱- تابع چگالی احتمال توأم y, x به صورت $f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-y}$ است. مقدار کدام است؟

$$\frac{y^2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{y^3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{4}{y^3} \quad (2)$$

$$\frac{y^4}{4} \quad (1)$$

۱۲- فرض کنید x از تابع چگالی احتمال زیر باشد آنگاه تابع چگالی $T = X^2$ کدام است؟

$$f_x(x) = 3x^2(1-x)^2, 0 < x < 1$$

$$f_T(t) = 15\sqrt{t}(1-\sqrt{t})^2, 0 < t < 1 \quad (2)$$

$$f_T(t) = 15\sqrt{t(1-t)}, 0 < t < 1 \quad (1)$$

$$f_T(t) = 15t(1-\sqrt{t})^2 \quad 0 < t < 1 \quad (4)$$

$$f_T(t) = 15\sqrt{t}(1-t)^2 \quad 0 < t < 1 \quad (3)$$

۱۳- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد و $Y = X_{(1)}X_{(2)}\dots X_{(n)}$ نشان دهنده

امین آماره ترتیبی است) آنگاه $E(Y)$ کدام است؟ $(q = 1-p)$

$$p^n + q^n \quad (4) \quad p^n \quad (3) \quad q^n \quad (2) \quad p^n q^n \quad (1)$$

۱۴- فرض کنید x_1, x_2, x_3, x_4 یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، توزیع متغیر تصادفی

$$F(1, 3) \quad (4) \quad 2F(1, 3) \quad (3) \quad F(1, 2) \quad (2) \quad F(3, 1) \quad (1)$$

۱۵- اگر x_1, x_2, \dots, x_n نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد آنگاه کارآئی \bar{X}^n نسبت به X_i برابر است با:

$$\frac{1}{n} \quad (4) \quad n \quad (3) \quad \frac{n}{2} \quad (2) \quad \frac{2}{n} \quad (1)$$

۱۶- فرض کنید $x \sim beta(\theta, 1)$ باشد و بخواهیم پرتوان ترین آزمون سطح α برای فرض های $H_0: \theta = 1$ و $H_1: \theta = 2$ را در سطح α انجام

دهیم ناحیه بحرانی برابر است با:

$$0 < X < 1 - \alpha \quad (4) \quad 0 < X < \alpha \quad (3) \quad X > \alpha \quad (2) \quad X > 1 - \alpha \quad (1)$$

۱۷- فرض کنید x بیانگر تعداد شیرها و y بیانگر تعداد خطها در ۵ بار پرتاب یک سکه سالم باشد $CoV(Y, X+Y)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4) \quad -\frac{3}{4} \quad (3) \quad -\frac{5}{4} \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۱۸- برای بررسی اثر یک قرص در پایین آوردن فشار خون با استفاده از نمونهای تصادفی اطلاعات زیر بدست آمده است، فاصله

$$(t_{0.025, 4} = 2.78) \quad (2.78 / 2.78 = 0.95) \quad (2.78 / 2.78 = 0.95)$$

قبل از مصرف	۸۰	۷۵	۷۲	۷۰	۸۰	
بعد از مصرف	۶۶	۶۹	۶۲	۶۸	۷۲	
	(۴/۲۴ و ۹/۵۶)	(۴/۲۲ و ۱۳/۶)				
			(۲/۴۴ و ۱۳/۵۶)			(۲/۴ و ۹/۶)

۱۹- در مدل رگرسیونی خطی ساده $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ نمونه ۱۰ تایی نتایج زیر حاصل شده است، فاصله اطمینان ۹۵٪

$$(t_{0.025, 9} = 2.26) \quad (2.26 / 2.26 = 0.95)$$

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 16, \quad \sum(y_i - \bar{y})^2 = 100, \quad r = 0.8$$

$$2 \pm 2 / 3\sqrt{4/95} \quad (4) \quad 3 \pm 2 / 3\sqrt{4/95} \quad (3) \quad 3 \pm 2 / 3\sqrt{5/6} \quad (2) \quad 2 \pm 2 / 3\sqrt{5/6} \quad (1)$$

۲- متغیر تصادفی X ، مقادیر $1, 0, -1$ را به ترتیب با احتمال‌های $a, 1-a-b, b$ اختیار می‌کند. براساس یک نمونه تصادفی برآورد

$$\left(\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \text{ کدام است؟}$$

$$\left(\bar{x}_n, \bar{x}_n \right) \quad (4) \quad \left(\frac{\bar{x}_n - \bar{x}_n}{2}, \frac{\bar{x}_n + \bar{x}_n}{2} \right) \quad (3) \quad \left(\bar{x}_n, \bar{x}_n - \bar{x}_n \right) \quad (2) \quad \left(\bar{x}_n, \bar{x}_n \right) \quad (1)$$

آمار و احتمال مهندسی

۱ - گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به نمودار Box-plot رسم شده اطلاعات زیر قابل دسترسی است :

$$Q_1 = 25, Q_3 = Med = 40, Q_3 = 50$$

چون Q_3 به Q_1 نزدیک است بنابراین توزیع چوله به چپ است و در توزیع های چوله به چپ $Med < Mode < \bar{X}$. به طور تقریبی میانگین عبارت است از :

$$\bar{X} = \frac{V_{0.5} - V_{0.25}}{2} = 35$$

در این رابطه منظور از S پراکندگی کل داده ها (V_b) است.

$$\begin{aligned} \text{ضریب چولگی} &= \frac{3(\bar{X} - Med)}{S} \\ &= \frac{3(35 - 40)}{10} = -0.5 \end{aligned}$$

۲ - گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{1}{2} + 1 - \beta + 2\alpha = \bar{x} \\ E(x^2) &= \frac{1}{2} + 1 - \beta + 4\alpha = \bar{x}^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \beta + 2\alpha = \bar{x} \\ \frac{1}{2} - \beta + 4\alpha = \bar{x}^2 \end{cases} \Rightarrow 1 + 2\tilde{\alpha} = \bar{x}^2 - \bar{x} \Rightarrow \tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^2 - \bar{x} - 1}{2} \\ \tilde{\beta} &= \frac{1}{2} + \bar{x}^2 - \bar{x} - 1 - \bar{x} \Rightarrow \tilde{\beta} = \bar{x}^2 - 2\bar{x} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۳ - گزینه «۲» صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{var}(e_i) &= \text{var}(y_i - \hat{y}_i) = \text{var}(y_i) + \underbrace{\text{var}(\hat{y}_i)}_{\text{var}(\hat{y}_i)} - 2\text{cov}(y_i, \hat{y}_i) \\ &= \text{var}(y_i) - \text{var}(\hat{y}_i) \end{aligned}$$

۴ - گزینه «۳» صحیح است.

ابتدا i نفر را از n نفر انتخاب می‌کنیم (شورای فرعی) و سپس بقیه اعضای شورای j نفری را از $n-i$ نفر باقی مانده انتخاب می‌کنیم. تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i}$$

توجه کنید که ابتدا می‌توانیم شورای اصلی را انتخاب کنیم که تعداد حالات ممکن
 $\binom{j}{i}$ و سپس شورای فرعی را به صورت $\binom{n}{j}$ انتخاب کنیم

برابر است با: $\binom{n}{j} \binom{j}{i}$

$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i}$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

طبق نامساوی بول داریم:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

۶- گزینه «۳» صحیح است.

زیرا:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \\ &= P(A)P(B^c) + P(B) \end{aligned}$$

از طرفی گزینه ۱ صحیح است، زیرا استقلال A, B نتیجه می‌دهد که رخداد B تاثیری در رخداد A ندارد. گزینه ۲ نیز صحیح است زیرا A, B نیز مستقل‌اند. گزینه ۴ نیز صحیح است.

۷- گزینه «۳» صحیح است.

تعداد کل حالات توزیع توپ‌ها برابر است با: N^n . برای به دست آوردن تعداد حالات مساعد، ابتدا m توپ از n توپ را انتخاب می‌کنیم و در
 ظرف اول قرار می‌دهیم. اکنون $N-1$ ظرف باقی می‌ماند و $n-m$ توپ که به $(N-1)^{n-m}$ طریق می‌توانیم آنها را توزیع کنیم. بنابراین تعداد
 حالات مورد نظر عبارت است از:

$$\binom{n}{m} (N-1)^{n-m}$$

$$\frac{\binom{n}{m} (N-1)^{n-m}}{N^n} = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

-۸- گزینه «۴» صحیح است.

متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های لازم تا مشاهده هر دو روی سکه در نظر می‌گیریم. متغیر تصادفی X ، مقداری از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots\}$ را اختیار می‌کند، زیرا حداقل به ۲ پرتاب برای مشاهده هر دو روی سکه نیاز داریم. پیشامد $\{X = i\}$ رخ می‌دهد اگر و فقط اگر همه $(1-P)^{i-1}$ پرتاب اول شیر و پرتاب $i-1$ خط باشد و یا همه $(1-P)^{i-1}$ پرتاب اول خط و پرتاب $i-1$ شیر باشد. پس

$$P(X = i) = P(1-P)^{i-1} + (1-P)P^{i-1} \quad i = 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X) &= \sum_{i=2}^{\infty} iP(1-P)^{i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} i(1-P)P^{i-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} iP(1-P)^{i-1} - P \right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i(1-P)P^{i-1} - (1-P) \right) \end{aligned}$$

اما امید ریاضی متغیر تصادفی هندسی با پارامتر P است که برابر است با: $\frac{1}{P}$ پس

$$E(X) = \left(\frac{1}{P} - P \right) + \left(\frac{1}{1-P} - (1-P) \right) = \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} - 1$$

-۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$E(C^x) = 1 \Rightarrow C^{-1}(1-P) + CP = 1 \Rightarrow PC^r - C + 1 - P = 0$$

$$C = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4P(1-P)})}{2P} \Rightarrow C = \frac{1 \pm \sqrt{4P^2 - 4P + 1}}{2P} = \frac{1 \pm \sqrt{(2P-1)^2}}{2P} = \frac{1 \pm |2P-1|}{2P}$$

چون $P > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow C = \frac{1 \pm (2P-1)}{2P} \Rightarrow C = 1 \text{ یا } C = \frac{1-P}{P}$$

چون $1 \neq C$ بنابراین

-۱۰- گزینه «۴» صحیح است.

$$\text{var}(Y) = E(\text{var}(Y|X=x)) + \text{var}(E(Y|X=x)) = E(X) + \text{var}(X) = 2 + 4 = 6$$

-۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$X|Y=y \sim u(0, y) \Rightarrow E(X^r|Y=y) = \int_0^y x^r \frac{1}{y} dx = \frac{y^r}{r}$$

-۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$T = X^r \Rightarrow X = \sqrt{T} \Rightarrow |j| = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $f_T(t) = r \times \frac{1}{\sqrt{t}} t^{(1-\sqrt{t})^r}$ $\circ \langle t \rangle \Rightarrow f_T(t) = 15\sqrt{t} (1-\sqrt{t})^r$ $\circ \langle t \rangle$

- گزینه «۳» صحیح است.

$$Y = X_1 X_2 \dots X_n = \prod_{i=1}^n X_i \Rightarrow E(Y) = \prod_{i=1}^n E(X_i) = \prod_{i=1}^n p = p^n$$

- گزینه «۴» صحیح است.

واضح است که X_i دارای توزیع کای دو با ۱ درجه آزادی است ($i = 1, \dots, 4$) بنابرین $X_i \sim \chi_{(3)}^2$. از طرفی از استقلال ها نتیجه می‌شود که $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$ مستقل است پس:

$$Y = \frac{X_1^2}{\frac{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}{3}} \stackrel{d}{=} \frac{\chi_{(1)}^2}{\chi_{(3)}^2} \sim F(1, 3)$$

- گزینه «۴» صحیح است.

$$T_1 = n\bar{X}^r$$

$$\text{var}(T_1) = \text{var}(n\bar{X}^r) = n^r \text{var}(\bar{X}^r)$$

برای محاسبه واریانس \bar{X}^r داریم :

$$\bar{X}^r \sim N\left(0, \frac{\sigma^r}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}^r}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \Rightarrow \frac{n}{\sigma^r} \bar{X}^r \sim \chi_{(1)}^r$$

$$\Rightarrow \text{var}(\bar{X}^r) = \frac{\sigma^r}{n^r} \text{var}\left(\frac{n}{\sigma^r} \bar{X}^r\right) = \frac{\sigma^r}{n^r}$$

$$\Rightarrow \text{var}T_1 = \sigma^r$$

$$\text{و به همین ترتیب به ازای } T_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^r \text{ داریم :}$$

$$\text{var}(T_r) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^r\right) = \frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i^r)$$

$$= \frac{1}{n} \text{var}(\bar{X}^r) = \frac{\sigma^r}{n}$$

حال با توجه به تعریف کارائی نسبی نتیجه می‌شود که :

$$T_{\gamma} \text{ کارآئی } e(T_1, T_{\gamma}) = \frac{\text{var}(T_{\gamma})}{\text{var}(T_1)} = \frac{1}{n}$$

- گزینه «۱» صحیح است.

بوسیله لم نیمن پیرسن داریم :

$$\frac{f_{\gamma}}{f_1} = \frac{\frac{1}{\beta(\gamma, 1)}}{\frac{1}{\beta(1, 1)}} \frac{X^{\gamma-1} (1-X)^{1-1}}{X^{1-1} (1-X)^{1-1}} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1)} X = \gamma x$$

$$\Rightarrow X > \frac{k}{\gamma}$$

$$\alpha = \int_{\frac{k}{\gamma}}^1 \frac{1}{\beta(1, 1)} X^{1-1} (1-X)^{1-1} dx = 1 - \frac{k}{\gamma}$$

$$\Rightarrow X > 1 - \alpha$$

- گزینه «۱» صحیح است.

$$\rho(x, y) = -1 \Rightarrow \text{CoV}(X, Y) = -1 \times \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} = -\frac{\sigma}{4}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\sigma}{4}$$

$$\text{CoV}(Y, X+Y) = \text{CoV}(X, Y) + \text{Var}(Y) = -\frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{4} = 0$$

- گزینه «۲» صحیح است.

- گزینه «۳» صحیح است.

$$\hat{b} = r \sqrt{\frac{SSY}{SSX}} = 0 / 1 / \sqrt{\frac{100}{16}} = 2 \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 11 - 2 = 3, \quad \frac{SSE}{SSY} = 1 - r^2 = 0 / 36 \Rightarrow SSE = 36$$

$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{36}{16} = 4 / 5 \quad \hat{v}ar(\hat{a}) = MSE \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)$$

$$= 4 / 5 (0 / 1 + 1) = 4 / 95 \quad \hat{a} \pm t_{n-2, 0.05} \sqrt{\hat{v}ar(\hat{a})} = 3 \pm 2 / 3 \sqrt{4 / 95}$$

- گزینه «۳» صحیح است.

$$E(x) = b - a \quad b - a = \bar{x}_n$$

$$E(x^r) = a + b \Rightarrow b + a = \bar{x}_n^r$$

در نتیجه:

$$r b = \bar{x}_n + \overline{x_n} \Rightarrow \tilde{b} = \frac{\bar{x}_n + \overline{x_n}}{r}$$
$$\tilde{a} = \tilde{b} - \bar{x}_n = \frac{\bar{x}_n + \overline{x_n}}{r} - \bar{x}_n = \frac{\overline{x_n} - \bar{x}_n}{r}$$

تئوری احتمال و آمار مهندسی

- ۱- تعداد n جعبه موجود است. در جعبه اول یک مهره سفید و $(n-1)$ مهره سیاه و در جعبه دوم دو مهره سفید و $(n-2)$ مهره سیاه و ... و در جعبه n ام، n مهره سفید وجود دارد. به تصادف از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم. انتظار می‌رود کلاً چند مهره سفید از جعبه‌ها خارج می‌شود؟

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (2) \quad \frac{n+1}{2} \quad (1) \quad \frac{n}{2} \quad (1)$$

- ۲- در ظرفی ۳ توب سفید و ۴ توب سیاه وجود دارد. ۳ توب از این ظرف یکی یکی بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، احتمال این که توب اول و سوم هر دو سفید باشند، کدام است؟

$$\frac{4}{7} \quad (4) \quad \frac{3}{7} \quad (3) \quad \frac{2}{7} \quad (2) \quad \frac{1}{7} \quad (1)$$

- ۳- فرض کنید ده توب به شماره‌های $1, 2, \dots, 10$ را درون ده جعبه به شماره‌های $1, 2, \dots, 10$ توزیع کنیم چقدر احتمال دارد فقط یک جعبه خالی بماند؟

$$\frac{\sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^9} \quad (2) \quad \frac{\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^{10}} \quad (1) \\ \frac{\binom{9}{8}}{\binom{19}{9}} \quad (4) \quad \frac{\binom{18}{8}}{\binom{19}{9}} \quad (3)$$

- ۴- فرض کنید ۱۰ معلم را بین ۴ مدرسه می‌خواهیم توزیع کنیم چقدر احتمال دارد به هر مدرسه حداقل یک معلم برود؟

$$\frac{\binom{13}{3}}{10^4} \quad (4) \quad 1 - \frac{3^{10} - 3 \times 2^9 + 1}{4^9} \quad (3) \quad \frac{\binom{9}{3}}{\binom{13}{3}} \quad (2) \quad \frac{3^{10} - 3 \times 2^9 + 1}{4^9} \quad (1)$$

- ۵- فرض کنید x, y, z دارای تابع احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y+z} \quad x, y, z = 1, 2, \dots$$

مقدار $P(x = y + z)$ کدام است؟

$$\frac{1}{49} \quad (4) \quad \frac{1}{34} \quad (3) \quad \frac{1}{25} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

۶- حاصل $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}\binom{8}{6}$ (۴) $7\binom{14}{8}$ (۳) $\frac{7}{2}\binom{13}{7}$ (۲) $7\binom{13}{6}$ (۱)

۷- فرض کنید در یک آزمون ۴ گزینه‌ای، دانشجویی جواب درست سؤال را با احتمال P بداند یا به تصادف یکی از ۴ گزینه را انتخاب می‌کند. احتمال این که به یک سؤال پاسخ درست دهد کدام است؟

$\frac{1+2P}{4}$ (۴) $\frac{3P}{4}$ (۳) $\frac{1+P}{4}$ (۲) $\frac{1-P}{4}$ (۱)

۸- دادگاهی ۹۵ درصد اوقات مجرمین واقعی را محکوم می‌کند و ۱ درصد اوقات بیگناهان را محکوم می‌کند، اگر ۵٪ درصد متهمان مجرم باشند، احتمال این که یک فرد محکوم، واقعاً مجرم باشد کدام است؟

$\frac{19}{9200}$ (۴) $\frac{95}{2200}$ (۳) $\frac{95}{294}$ (۲) $\frac{95}{100}$ (۱)

۹- یک تاس سالم را ۷ مرتبه پرتاپ می‌کنیم، احتمال این که هر خال حداقل یک مرتبه ظاهر شود چقدر است؟ ($6^7 = 1296$)

$\frac{35}{3888}$ (۴) $\frac{35}{648}$ (۳) $\frac{35}{324}$ (۲) $\frac{5}{234}$ (۱)

۱۰- علی و حسین همراه با ۸ نفر دیگر تشکیل یک صفت می‌دهند. احتمال این که دقیقاً ۵ نفر بین این دو نفر ایستاده باشند، کدام است؟

$\frac{6}{45}$ (۴) $\frac{4}{45}$ (۳) $\frac{2}{45}$ (۲) $\frac{1}{45}$ (۱)

۱۱- در پرتاپ ده بار یک تاس چقدر احتمال دارد ۵ بار اول ۲ و ۴ بار ظاهر گردد؟

$\frac{23}{140}$ (۴) $\frac{25}{140}$ (۳) $\frac{23}{60}$ (۲) $\frac{25}{10}$ (۱)
 $\binom{15}{6}$ (۶)

۱۲- از میان ۱۲ جفت کفش ۹ لنگه بر می‌داریم. احتمال آن که فقط ۲ جفت انتخاب شود کدام است؟

$\frac{66 \times 32 \times 10^5}{P_{24}^9}$ (۴) $\frac{66 \binom{10}{5} \times 32}{\binom{24}{9}}$ (۳) $\frac{66 \binom{10}{5}}{\binom{24}{9}}$ (۲) $\frac{2^6 \binom{10}{5}}{\binom{24}{9}}$ (۱)

۱۳- حاصل $\binom{15}{2} + \binom{15}{4} + \dots + \binom{15}{12}$ کدام است؟

$2^{10}(2^{10}-1)$ (۴) $2^{10}(2^4-1)$ (۳) $2^{14}-1$ (۲) 2^{14} (۱)

۱۴- حاصل $\sum_{x=0}^{15} \frac{1}{x!(15-x)!}$ کدام است؟

$15!(2)^{15}$ (۴) $\frac{2}{15!}$ (۳) $\frac{2^{15}}{15!}$ (۲) $\binom{15}{2}$ (۱)

۱۵- اگر $P(A - (B \Delta C)) = 0/6$ و $P(B') = 0/8$ و $P(C) = 0/6$ و A و B و C مستقل باشند، کدام است؟

$0/41$ (۴) $0/22$ (۳) $0/11$ (۲) $0/15$ (۱)

۱۶- به چند طریق می‌توان ۱۴ اتومبیل نامتایز را بین ۴ اداره تقسیم کرد طوری که به اداره اول حداقل ۳ و حداقل ۸ اتومبیل برسد؟

$\binom{15}{3} - \binom{12}{3}$ (۴) $\binom{17}{3} - \binom{11}{3}$ (۳) $\binom{13}{2} - \binom{7}{2}$ (۲) $\binom{14}{2} - \binom{8}{2}$ (۱)

۱۷- اگر A_i ها پیشامدهای مستقل باشند، احتمال آن که حداقل یکی از A_i ها رخ دهد کدام است؟

$$1 - \frac{3}{4}^5 = \frac{31}{32}$$

$$1 - \frac{3}{4}^5 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}^5 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}^5 = \frac{3}{4}$$

۱۸- به چند طریق می‌توان $(n-1)$ توب نامتمایز را درون ۱۵ جعبه توزیع کرد، به طوری که فقط ۳ جعبه خالی می‌باشد.

$$20 \binom{n-1}{12}$$

$$25 \binom{n-1}{12}$$

$$\binom{15}{3} \binom{n-1}{11}$$

$$25 \times 13 \binom{n-2}{11}$$

۱۹- احتمال شیر آمدن سکه‌ای P است. k نفر در یک بازی شرکت می‌کنند. هر کس شیر بیاورد برنده است. اگر خط بباید به نفر بعدی می‌دهند و به همین ترتیب ادامه دارد. احتمال برنده شدن اولی کدام است؟

$$\frac{1}{1-P^k}$$

$$\frac{1}{1-(1-P)^k}$$

$$\frac{P}{1-(1-P)^k}$$

$$\frac{P}{1-P^k}$$

۲۰- از ظرفی شامل ۲۰ توب سفید و ۱۲ توب سیاه، ۷ توب به‌طور تصادفی و بدون جایگذاری خارج می‌شوند و بدون دیدن رنگ‌شان دور ریخته می‌شوند. احتمال آن که سومین توب که به صورت تصادفی خارج می‌شود سیاه و ششمین توب سفید باشد، کدام است؟

$$\frac{10}{31}$$

$$\frac{15}{62}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{12}{33}$$

تئوری احتمال و آمار مهندسی

- گزینه ۲ درست است.

اگر متغیر X_i مقدار ۱ را وقتی که مهره خارج شده از ج به آم سفید است بگیرد و در غیر این صورت صفر باشد پس تداد مهره سفید

خارج شده عبارت است از: $X = \sum_{i=1}^n X_i$ و لذا:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{i}{n}$$

- گزینه ۱ درست است.

سفید سفید

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$$

با توجه به قاعده پواسون کافی است سفید بودن اول و دوم را حساب کنیم.

- گزینه ۲ درست است.

محاسبه تداد حالات توزیع ۱۰ توب متمایز در ۱۰ ج به متمایز این گونه محاسبه می شود:

10^{10}

حالات خالی ماندن فقط یک ج به، ابتدا یک ج به از ۱۰ تا انتخاب می شود و باید توجه شود که در ۹ ج به باقی مانده حداقل یک توب باید باشد، پس:

$$\binom{10}{1} \sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{10}{1} \sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^{10}} = \frac{\sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^9}$$

- گزینه ۳ درست است.

حالاتی که حداقل یک م لم به هر مدرسه برود:

$$\sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{k} (4-k)^{10} =$$

$$4^{10} - 4 \times 3^{10} + 6 \times 2^{10} - 4 \times 1^0$$

حالات بدون محدودیت:

$$4^{10}$$

احتمال مورد نظر:

$$\frac{4^{10} - 4 \times 3^{10} + 6 \times 2^{10} - 4}{4^{10}} = 1 - \frac{4^{10} - 3 \times 2^9 + 1}{4^9}$$

- گزینه ۴ درست است.

$$\begin{aligned} P(x = y + z) &= \sum_y \sum_z P(x = y + z, y = y, z = z) \\ &= \sum_y \sum_z \binom{1}{1}^{y+z+1-y+1-z} = \sum_y \binom{1}{1}^{1-y} \sum_z \binom{1}{1}^{1-z} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{aligned} \binom{n}{0}^r + \binom{n}{1}^r + \binom{n}{2}^r + \dots + \binom{n}{n}^r &= \binom{rn}{n} \\ \left(\binom{n}{1}^r + \binom{n}{2}^r + \dots + \binom{n}{n}^r \right) - \binom{n}{0}^r &= \binom{rn}{n} - \binom{n}{0}^r \\ \left(\binom{n}{1}^r + \binom{n}{2}^r + \dots + \binom{n}{n}^r \right) - \binom{n}{0}^r - \binom{n}{1}^r &= \binom{rn}{n} - \binom{n}{0}^r - \binom{n}{1}^r \\ \vdots & \\ \binom{n}{n}^r - \binom{n}{0}^r - \dots - \binom{n}{n-1}^r &= \binom{rn}{n} - \binom{n}{0}^r - \dots - \binom{n}{n-1}^r \end{aligned}$$

دو طرف تساوی‌ها را جمع می‌کنیم:

$$\binom{n}{0}^r + r \binom{n}{1}^r + \dots + n \binom{n}{n}^r = r \binom{rn}{n} - n \binom{n}{0}^r - (n-1) \binom{n}{1}^r - \dots - r \binom{n}{n-2}^r - \binom{n}{n-1}^r$$

داریم، پس: $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$

$$S = \binom{n}{0}^r + \binom{n}{1}^r + \dots + n \binom{n}{n}^r = n \binom{rn}{n} - \left(\binom{n}{0}^r + r \binom{n}{1}^r + \dots + n \binom{n}{n}^r \right)$$

$$rS = n \binom{rn}{n} \rightarrow S = \frac{n}{r} \binom{rn}{n} = n \binom{rn-1}{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{r}{r} \binom{14}{7} = r \binom{13}{6}$$

- گزینه ۴ درست است.

اگر A دانستن و A' ندانستن جواب باشد و E جواب درست دادن باشد، بنا به قانون احتمال کل داریم:

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(A')P(E|A') = P(1) + (1-P)\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}P$$

- ۸ - گزینه ۲ درست است.

قرار دهید

A : محکوم شدن

B : مجرم واقعی بودن

بنا بر فرض

$$P(A|B) = 0/95$$

$$P(A|B') = 0/01$$

$$P(B) = 0/005$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 0/995$$

بنا به قاعده بیز

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} \\ &= \frac{(0/005)(0/95)}{(0/005)(0/95) + (0/995)(0/01)} = \frac{95}{294} \end{aligned}$$

- ۹ - گزینه ۳ درست است.

انتخاب ۲ تاس برای عدد یکسان
 $\binom{2}{2}$

$$\frac{\binom{7}{2}6!}{6^7} = \frac{210 \cdot 720}{648}$$

- ۱۰ - گزینه ۳ درست است.

کل حالات انتخاب ۲ محل برای این دو نفر با رعایت ترتیب است دو حالت برای جایه‌جایی علی و حسین و چهار حالت برای انتقال دسته هفت نفری وجود دارد.

$$\frac{2 \times 4}{P_{10}^2}$$

- ۱۱ - گزینه ۳ درست است.

۵ بار اول که یک حالت دارد همان ۴ است. از بین ۵ بار دوم ۴ بار آن باید ۶ بباید و نه ۵ بار آن. پس با $\binom{6}{4}$ مکان ۶ها انتخاب و برای مکان باقی مانده ۵ حالت (به جز ۶) ممکن است.

$$\frac{\binom{5}{4}1^4 \times 5}{6^6} = \frac{25}{648}$$

- ۱۲ - گزینه ۳ درست است.

مخرج همه حالات انتخاب ۵ لنگه از میان ۲۴ لنگه کشف است.

$$\frac{\binom{12}{2} \binom{10}{5} \binom{25}{5}}{\binom{24}{9}}$$

انتخاب ۲ جفت است پس باید ۵ لنگه دیگر جفت نباشد.

ت بین ۵ جفتی است که قرار است از هر کدام یک لنگه برداریم.

انتخاب یک لنگه از هر کدام از آن جفتها را حساب می‌کند.

۱۳ - گزینه ۴ درست است.

$$\sum_r \binom{n}{r} = 2^{n-1}$$

امان

$$\begin{pmatrix} 1\Delta \\ \vdots \\ 1\Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\Delta \\ \vdots \\ 1F \end{pmatrix} = 1 + 1\Delta = 1\varphi$$

پس:

$$\binom{1\omega}{2} + \cdots + \binom{1\omega}{12} = 2^{14} - 16$$

$$= 2^{14} - 2^4 = 2^4 (2^{10} - 1)$$

۱۴ - گزینه ۲ درست است.

$$\binom{1\Delta}{x} = \frac{1\Delta!}{x!(1\Delta-x)!} \rightarrow \sum_{x=0}^{1\Delta} \frac{1}{x!(1\Delta-x)!} = \frac{1}{1\Delta!} \sum_{x=0}^{1\Delta} \binom{1\Delta}{x} = \frac{1}{1\Delta!} \cdot 1^{1\Delta}$$

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} = 2^n \quad : \text{نکته}$$

- ۱۵ گزینه ۲ درست است.

نکته: اگر A و B و C مستقل باشند، $A \wedge B \Delta C'$ مستقلند.

$$P(A - (B \Delta C')) = P(A \cap (B \Delta C')^c) = P(A)P(B \Delta C')$$

$$= (\circ / \mathfrak{r}) (1 - P(B \Delta C')) = (\circ / \mathfrak{r}) (\circ / \mathfrak{d} \mathfrak{e}) = \circ / 112$$

$$P(B \Delta C') = P(B \cup C') - P(B \cap C') = P(B) + P(C') - 2P(B \cap C')$$

$$\frac{0}{2} + \frac{0}{4} - 2\left(\frac{0}{2}\right)\left(\frac{0}{4}\right) = \frac{0}{44}$$

۱۶ - گزینه ۱ درست است.

باشد م ادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ را با شرط $3 \leq x_1 \leq 8$ حل کنیم.

کافی است با توجه به:

$$\{x_1 \leq x_2 \leq x_3\} = \{x_1 \geq x_2\} - \{x_1 \geq x_3\}$$

ت داد حالتی را که x_1 حداقل ۳ است منهای وقتی x_1 حداقل ۹ است حساب کنیم که جواب می‌شود.

$$\binom{11+\varphi-1}{\varphi-1} - \binom{5+\varphi-1}{\varphi-1} = \binom{1\varphi}{\varphi} - \binom{1}{\varphi}$$

۱۷ - گزینه ۴ درست است.

$$P(A_i) = 1 - \frac{r}{e^{i+1}}$$

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A'_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{r}{r^{i+1}} = 1 - \frac{r^n}{\frac{n(r+n)}{r} + n} \\
 &= 1 - \frac{r^n}{\frac{n r}{r} + n} \\
 &= 1 - \frac{r^{10}}{r^{65} - r^{10}}
 \end{aligned}$$

- گزینه ۱ درست است.

تعداد طرقی که می‌توانیم ج به خالی را انتخاب کنیم و $\binom{n-2}{12-1}$ تداد جواب (طبیعی) برای مادله $x_1 + \dots + x_{12} = n-1$ می‌باشد.

$$\binom{15}{3} \binom{n-2}{11} = \frac{15!}{3! 12!} \binom{n-2}{11} = 35 \times 13 \binom{n-2}{11}$$

- گزینه ۲ درست است.

احتمال برنده شدن اولی از جمع این عبارات حاصل می‌شود.

P: احتمال برنده شدن

۱-P: احتمال باختن

نفر اول در همان دفعه اول برنده شود یا در دور اول کسی برنده نشود و در ابتدای دور ب د نفر اول برنده شود و یا دو دور کسی برنده نشود و در ابتدای دور سوم نفر اول برنده شود و به همین ترتیب ادامه دارد.

$$P + (1-P)^k P + (1-P)^{2k} P + \dots = P \frac{1}{1 - (1-P)^k}$$

این جمع یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $(1-P)^k$ است.

- گزینه ۳ درست است.

طبق قاعده پواسون، احتمال سیاه بودن سومی همان احتمال سیاه بودن اولی و احتمال سفید بودن ششمی همان احتمال سفید بودن دومی است.

$$\frac{1}{32} \times \frac{1}{31} = \frac{1}{62}$$

- ۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گستته با تابع احتمال زیر است. برای آزمون $H_0: X \sim f_0$ در مقابل $H_1: X \sim f_1$ اگر ناحیه رد به صورت $\{x > \theta\}$ تعریف شود، توان آزمون کدام است؟

x	۱	۲	۳		
f_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
f_1	$\frac{2-\theta}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{1+\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$

- ۲- اگر در یک جدول توافقی تعداد سطرها از ۴ به ۳ کاهش یابد، درجه آزادی آزمون استقلال چقدر کاهش می‌یابد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

- ۳- فرض کنید $(\mu, \sigma^2) = (11, 1)$ باشد. برای آزمون فرض $H_0: \mu = 11$ در مقابل $H_1: \mu = 10$ ، اگر خطای نوع I (اندازه آزمون) از ۰/۰۲۵ به ۰/۰۵ تغییر کند، توان آزمون چه تغییری می‌کند؟

- (۱) به میزان ۹۱٪ کاهش می‌یابد.
 (۲) به میزان ۹۱٪ افزایش می‌یابد.
 (۳) به میزان ۳۱۵٪ کاهش می‌یابد.
 (۴) به میزان ۳۱۵٪ افزایش می‌یابد.

- ۴- میانگین خط ترمز لنت نوع A، زمانی که سرعت اتومبیل ۶۰ کیلومتر باشد، واحد مهندسی لنت جدیدی طراحی کرده است. این نوع لنت در ۶۴ خودرو سواری مورد آزمایش قرار می‌گیرد و نشان می‌دهد متوسط خط ترمز در سرعت ۶۰ کیلومتر 25.6 متر و انحراف معیار نمونه ۶۴ تایی برابر 4.0 است. آیا این اختلاف 15.0 متر ثابت می‌کند که لنت جدید مؤثرer است؟

- (۱) بله، چون $Z = -1/5 < -1/65$
 (۲) خیر، چون $Z = -1/5 > -1/65$
 (۳) خیر، تست معنی دار نیست.

- ۵- اگر یک جعبه محتوی ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه باشد و از این جعبه ۳ مهره تصادفی انتخاب و X تعداد مهره‌های سیاه فرض شود، پس از ۷۰ مرتبه تکرار تجربه، نتایج زیر به دست آید، برای آزمون فوق هندسی بودن این توزیع، p-value برای آزمون نیکوبی برآش چقدر است؟

O_i	$X=0$	$X=1$	$X=2$	
	16	40	14	$e^{-2/4} (1)$
	$1 - e^{-1/2} (2)$			
		$1 - e^{-2/4} (3)$		

- ۶- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین $\theta = 1$ است. برای آزمون فرض $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta \neq 1$ اگر مقدار $X = 2$ حاصل شده باشد، p-value کدام است؟

(۱) $1 - e^{-2}$ (۲) e^{-2} (۳) $2e^{-2}$ (۴) $2(1 - e^{-2})$

- ۷- مهندس کیفیت در یک خط تولید مدعی است که نسبت اقلام معیوب خط تولید او 20% درصد است. اگر بخواهیم بر اساس یک نمونه تصادفی 100 تایی ادعای او را آزمون کنیم، ناحیه بحرانی بر اساس نسبت موقوفیت‌های نمونه کدام است؟
- $\hat{p} > 0.3284$ (۴) $\hat{p} > 0.468$ (۳) $\hat{p} > 0.126$ (۲) $\hat{p} > 0.2784$ (۱)

- ۸- برای آزمون فرض $H_0: \mu = 120$ در مقابل $H_1: \mu < 120$ با سطح معنی داری 0.025 و توان 0.975 ، وقتی که صفت مورد مطالعه دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^2 = 5$ می‌باشد چه تعداد نمونه لازم است؟
- 10 (۴) 30 (۳) 20 (۲) 40 (۱)

- ۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:
- $$f(x, \theta) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} ; \quad x \geq 1$$
- ناحیه بحرانی به روش نیمن-پیرسون برای آزمون $H_0: \lambda = 2$ در مقابل $H_1: \lambda > 2$ کدام است؟
- $X_{(1)} \leq k$ (۴) $\bar{X} \leq k$ (۳) $\bar{X} \geq k$ (۲) $X_{(n)} \leq k$ (۱)

- ۱۰- مایلیم در مورد ۳ توزیع نرمال مستقل، فرض
- $$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
- را در برابر این فرض که دست کم دو میانگین نامساوی‌اند، آزمایش کنیم. با داشتن اطلاعات زیر،
- | تیمار | ۱ | ۲ | ۳ |
|---------------|---|----|----|
| اندازه نمونه | ۶ | ۴ | ۴ |
| میانگین نمونه | ۸ | ۱۰ | ۲۰ |
| واریانس نمونه | ۸ | ۱۰ | ۱۰ |
- (مجموع مربعات خطای) برابر است با:
- 128 (۴) 160 (۳) 130 (۲) 100 (۱)

- ۱۱- در تست قبل مقدار واریانس نمونه‌ای ادغامی کدام است؟
- $\frac{50}{7}$ (۴) $\frac{120}{14}$ (۳) $\frac{100}{11}$ (۲) $\frac{120}{11}$ (۱)
- ۱۲- در تست قبل، مقدار آماره آزمون مقایسه میانگین ۳ جامعه کدام است؟
- $8/58$ (۴) $9/36$ (۳) $20/24$ (۲) $4/29$ (۱)
- ۱۳- بین متغیرهای X و Y رابطه خطی $-1/2X + 15 = \hat{Y}$ بر اساس یک نمونه تصادفی بدست آمده است. اگر برای 3 مقدار واقعی Y برابر با $11/4$ باشد، گزینه صحیح تر برای ضریب همبستگی نمونه‌ای چند است؟
- $r_{xy} = -1$ (۴) $-1 \leq r_{xy} < 0$ (۳) $-1 < r_{xy} < 0$ (۲) $-1 \leq r_{xy} \leq 0$ (۱)

- ۱۴- مدل $y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ را با خطای تصادفی $(\varepsilon_i) \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید a و b برآورد کننده‌های کمترین مربعات بر اساس یک نمونه مستقل از (x_i, y_i) بوده و $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ باشند. $Cov(Y_i, \hat{Y}_i) = a + bx_i$ باشد، با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

$\frac{\sigma^2}{n}$ (۴) $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ (۳) $Var(\hat{Y}_i)$ (۲) $Var(Y_i)$ (۱)

۱۵- اگر یک نمونه از مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ داشته باشیم، فرض کنید a و b برآوردهای کمترین مربعات بر اساس یک نمونه مستقل از (x_i, y_i) بوده و $y_i - \hat{y}_i = a + bx_i - \hat{y}_i$ باشند، مقدار

$$\sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \hat{y}_i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n e_i y_i \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (2)$$

(۱) صفر

۱۶- در نمونه‌ای به حجم ۱۸ از مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ، با فرض $r(X, Y) = -0.9$ مقدار $r(Y, \hat{Y})$ کدام است؟

$$-0.9 \quad (4)$$

$$-0.9 \quad (3)$$

$$-0.8 \quad (2)$$

$$-0.3 \quad (1)$$

۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده، تغییر واحد متغیر مستقل از متر به سانتیمتر، در کدامیک از موارد زیر منتج به تغییر نمی‌شود؟

$$(4) معادله خط رگرسیون$$

$$(3) برآورد ضریب زاویه$$

$$(2) ضریب تعیین$$

$$(1) برآورد عرض از مبدأ$$

۱۸- اگر داده‌های زیر یک نمونه از مدل رگرسیون خطی ساده باشند، با توجه جدول زیر ضریب همبستگی نمونه X و Y برابر است با:

X	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
Y	5	4	3	-3	-1	1	2	3	4

$$(4) در فاصله صفر تا یک$$

$$(3) صفر$$

$$(2) کوچک‌تر از صفر$$

$$(1) متهای یک$$

۱۹- در یک مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ ، بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۶ تایی اطلاعات زیر حاصل شده است. برآورد واریانس \hat{B} کدام است؟

$$r = \frac{1}{7} \quad \text{و} \quad \sum X_i^2 = 73 \quad \text{و} \quad \sum Y_i^2 = 160 \quad \text{و} \quad \bar{y} = 3 \quad \text{و} \quad \bar{x} = 2$$

$$\frac{2}{21} \quad (4)$$

$$\frac{6}{7} \quad (3)$$

$$\frac{7}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{14} \quad (1)$$

۲۰- اگر یک نمونه از مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ داشته باشیم و \hat{A} و \hat{B} برآوردهای کمترین مربعات بر اساس یک نمونه مستقل از (x_i, y_i) باشند. $Var(\hat{A} + \hat{B})$ کدام است؟

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - 1)^2}{S_{xx}} \right) \quad (2)$$

$$\sigma^2 \frac{(\bar{x} - 1)^2}{S_{xx}} \quad (4)$$

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 + 1}{S_{xx}} \right) \quad (1)$$

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 - 1}{S_{xx}} \right) \quad (3)$$

۱- گزینه «۴» صحیح است.

$$1 - \beta = P(X > 1 | H_1) = P(X > 1 | f_1) = \frac{1}{3} + \frac{\theta}{3}$$

۲- گزینه «۴» صحیح است.
تغییر درجه آزادی برابر است با:

$$(4-1)(3-1) - (3-1)(2-1) = 6-2 = 4$$

۳- گزینه «۲» صحیح است.

$$n = \frac{\sigma^2 \times (Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$$\alpha = 0.025 \Rightarrow 1 = \frac{1 \times (Z_{0.025} + Z_\beta)^2}{(11-10)^2} \Rightarrow 1 = 1/96 + Z_\beta \Rightarrow Z_\beta = -1/96 \Rightarrow \beta = P(Z > Z_\beta) = 0.831$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 = \frac{1 \times (Z_{0.05} + Z_\beta)^2}{(11-10)^2} \Rightarrow 1 = 1/65 + Z_\beta \Rightarrow Z_\beta = -1/65 \Rightarrow \beta = P(Z > Z_\beta) = 0.74$$

راه دوم:

$$\alpha = 0.025 \Rightarrow \beta = P(X < \mu_0 + Z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | H_1) = P(X < 10 + 1/96 \frac{1}{\sqrt{1}} | \mu = 11)$$

$$= P(Z < \frac{10 + 1/96 - 11}{1}) = P(Z < -1/96) = 0.831$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \beta = P(X < \mu_0 + Z_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | H_1) = P(X < 10 + 1/65 \frac{1}{\sqrt{1}} | \mu = 11)$$

$$= P(Z < \frac{10 + 1/65 - 11}{1}) = P(Z < -1/65) = 0.74$$

پس β به اندازه ۰.۹۱ کاهش و $\beta - 1$ با اندازه ۰.۹۱ افزایش می‌باید.

۴- گزینه «۱» صحیح است.

$$t_0 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} = \frac{\sqrt{84}(63/5 - 65)}{0/4} = -3$$

سطح معنادار بودن داده نشده است ولی منظور طراح این بوده که چون مقدار آماره خیلی کم شده است، فرض بی اثر بودن لنت جدید رد می‌شود.

۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$E_i = 7 \times P(X = i) = 7 \times \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 3-i \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 3-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_0 = 2, E_1 = 4, E_2 = 1.$$

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
O_i	16	40	14
E_i	20	40	10

از آنجایی که تعداد مهره‌های قرمز و سیاه مشخص است، پارامتری برآورد نمی‌شود و بنابراین درجه آزادی آزمون برابر با $2 = 3 - 0 - 1 = 3 - 0 - 1 = 2$ است. از طرفی چون ناحیه بحرانی سمت راست است، داریم:

$$p-value = P(\chi^2 \geq \chi^2_0) = P(\chi^2 \geq 2/4) = e^{-1/2}$$

۶- گزینه «۲» صحیح است.

$$P-Value = \min\{P(X \leq x), P(X \geq x) | H_0\} = \min\{P(X \leq 2), P(X \geq 2) | \theta = 1\}$$

$$= \min\{1 - e^{-1}, e^{-1}\} = 2e^{-1}$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

ناحیه رد به صورت زیر است:

$$\hat{p} > p_0 + Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.20 + 1/96 \sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{100}} = 0.20 + 1/96 \times 0.04 = 0.2784$$

- ۸ - گزینه «۱» صحیح است.

$$n \approx \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)^r \sigma^r}{(\mu_1 - \mu_0)^r} = \frac{(r+2)^r \times 1000}{400} = 40$$

- ۹ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\frac{L(H_0)}{L(H_1)} < c_1 \Rightarrow \frac{\prod e^{-(x_i - 1)}}{\prod r e^{-r(x_i - 1)}} < c_1 \Rightarrow e^{-\sum x_i + r \sum x_i} < c_r \Rightarrow \sum x_i < c_r \Rightarrow \bar{X} < c_r$$

- ۱۰ - گزینه «۱» صحیح است.

$$SSE = (n_1 - 1)S_1^r + (n_r - 1)S_r^r + (n_\varphi - 1)S_\varphi^r = 5 \times 8 + 3 \times 10 + 3 \times 10 = 100$$

- ۱۱ - گزینه «۲» صحیح است.

$$S_p^r = \frac{(n_1 - 1)S_1^r + (n_r - 1)S_r^r + (n_\varphi - 1)S_\varphi^r}{(n_1 - 1) + (n_r - 1) + (n_\varphi - 1)} = \frac{SSE}{N - k} = \frac{100}{11}$$

- ۱۲ - گزینه «۴» صحیح است.

$$\bar{X}_{..} = \frac{8 \times 8 + 4 \times 10 + 4 \times 20}{14} = 12 \Rightarrow SST_r = n_1(\bar{X}_{..} - \bar{X}_1)^r + n_r(\bar{X}_{..} - \bar{X}_r)^r + n_\varphi(\bar{X}_{..} - \bar{X}_\varphi)^r \\ = 8(12 - 8)^r + 4(12 - 10)^r + 4(12 - 20)^r = 368$$

$$MST_r = \frac{SST_r}{k-1} = \frac{368}{2} = 184, \quad MSE = \frac{SSE}{N-k} = \frac{100}{11}, \quad F_o = \frac{MST_r}{MSE} = \frac{184}{\frac{100}{11}} = 20/24$$

- ۱۳ - گزینه «۳» صحیح است.

از آنجایی که $b = -1/2$ منفی شده است، r نیز منفی است ($r < 0$). همچنین به ازای $x = 3$ مقدار واقعی Y برابر با $11/4$ شده که بدین معنی است که نقطه مورد نظر روی خط است. ولی چون معلوم نیست سایر نقاط روی خط هستند یا خیر، معلوم نیست که r برابر -1 می‌شود یا خیر (در این تست اگر همه نقاط روی خط بودند، $r = -1$ می‌شود که در این مسئله لزوماً چنین نیست). بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

- ۱۴ - گزینه «۲» صحیح است.

$$\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i)$$

در ضمن داریم:

$$\triangleright \text{Cov}(e_i, \hat{Y}_i) = \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, \hat{Y}_i) = \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) - \text{Cov}(\hat{Y}_i, \hat{Y}_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i) - \text{Var}(\hat{Y}_i) = 0.$$

$$\triangleright \text{Cov}(e_i, Y_i) = \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, Y_i) = \text{Cov}(Y_i, Y_i) - \text{Cov}(\hat{Y}_i, Y_i) = \sigma^r - \text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma^r \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^r}{S_{xx}} \right)$$

$$\triangleright \text{Var}(e_i) = \text{Cov}(e_i, e_i) = \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, e_i) = \text{Cov}(Y_i, e_i) - \text{Cov}(\hat{Y}_i, e_i) = \sigma^r \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^r}{S_{xx}} \right)$$

- ۱۵ - گزینه «۱» صحیح است.

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i (a + bx_i) = a \sum_{i=1}^n e_i + b \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

در ضمن داریم:

$$\sum_{i=1}^n e_i^r = \sum_{i=1}^n e_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n e_i y_i - \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i y_i$$

- ۱۶ - گزینه «۴» صحیح است.

$$r(Y, \hat{Y}) = |r(X, Y)|$$

- ۱۷ - گزینه «۲» صحیح است.

تغییر واحد متغیر مستقل از متر به سانتیمتر، باعث می‌شود، $\hat{B} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ نیز یک‌صدم برابر می‌شود. همچنین S_{xy} صد برابر و S_{xx} ده هزار برابر می‌شود. تغییر نمی‌کند.

$$r^2 = \frac{(S_{xy})^2}{S_{yy} S_{xx}}$$

ضریب تعیین r^2 و مجموع مربعات خطای SSE = $(1 - r^2)S_{yy}$ تغییر نمی‌کند.

- ۱۸ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\bar{x} = . \quad \bar{y} = . \quad \sum x_i y_i = -5 - 4 - 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 + 4 + 5 = .$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = . \Rightarrow r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = .$$

- ۱۹ - گزینه «۴» صحیح است.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{16} x_i^2 - n \bar{x}^2 = 73 - 16 \times 2^2 = 9$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{16} y_i^2 - n \bar{y}^2 = 160 - 16 \times 3^2 = 16$$

$$\frac{SS_E}{S_{YY}} = 1 - r^2 \Rightarrow SS_E = (1 - r^2)S_{YY} = \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

واریانس \hat{B} برابر با $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ است و بنابراین برآورده واریانس \hat{B} برابر است با:

$$\frac{S_{Y|x}}{S_{xx}} = \frac{SS_E / (n - 2)}{S_{xx}} = \frac{12}{14 \times 9} = \frac{2}{21}$$

- ۲۰ - گزینه «۲» صحیح است.

$$\text{Var}(\hat{A} + \hat{B}) = \text{Var}(\hat{A}) + \text{Var}(\hat{B}) + 2\text{Cov}(\hat{A}, \hat{B})$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right) + \frac{\sigma^2}{S_{xx}} - 2\sigma^2 \frac{\bar{x}}{S_{xx}} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} + \frac{1}{S_{xx}} - \frac{2\bar{x}}{S_{xx}} \right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - 1)^2}{S_{xx}} \right)$$