

آمار و مدلسازی

مؤلف: مهندس کهنسال

تعریف آمار: علم جمع آوری، تحلیل و ارائه اطلاعات را گویند.

فصل اول: اندازه گیری و مدلسازی:

مدلسازی: بیان یک مساله به زبان ریاضی را مدلسازی ریاضی گوییم مانند کار کپلر.
نکته: هر چقدر مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده تر، ابتدایی تر و نتیجه کار به پدیده مورد نظر نزدیکتر باشد مدلسازی ارزشمندتر است.

نکته: حُسن استفاده از اطلاعات عددی: اطلاعات عددی قابل تفسیر نیستند و برای هر کس معنای واحدی دارند.

نکته: اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی اندازه گیری است.

اندازه گیری: بیان اطلاعات به زبان اعداد و ارقام - اختصاص یک معیار عددی به یک صفت

خطای اندازه گیری: تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه گیری شده را گویند و آن را با E نشان می دهند.

نکته: این خطا لزوماً از واحد اندازه گیری کمتر است.

مثال ۱: اگر وزن شخصی ۷۳ اندازه گیری شود می توان نوشت:

$$\text{وزن} = 73 + E, |E| < 1$$

است. ولی اگر $73/2$ اندازه گیری شود:

$$\text{وزن} = 73/2 + E, |E| < 0.1$$

نکته: در محاسبه خطاهای اندازه گیری، از عباراتی همچون E_1, E_2 و E^2 به خاطر بسیار کوچک بودن صرف نظر می کنیم.

مثال ۲: اگر ضلع مکعبی ۲ اندازه گیری شده باشد خطای مساحت کل را بیابید.

مثال ۳: اگر طول و عرض یک مکعب مستطیل به ترتیب ۳ و ۴ اندازه گیری شده باشد و ارتفاع آن ۲ باشد خطای حجم آن را محاسبه کنید.

☺ تست ۴: در مورد تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه گیری شده، کدام گزینه نادرست است؟ (آزاد ۸۹)

(۱) کمتر از واحد اندازه گیری است

(۲) ممکن است صفر باشد

(۳) ممکن است منفی باشد

(۴) در مواردی مثبت است

گزینه ۲، زیرا خطا هیچگاه صفر نمی باشد.

فصل دوم: جامعه و نمونه:

جامعه آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء است که می‌خواهیم در مورد اعضای آن موضوع یا موضوعاتی را مطالعه کنیم. سرشماری: اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم می‌گوییم سرشماری کرده‌ایم. مشکلات سرشماری:

- (۱) در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه.
- (۲) وقت گیر بودن دسترسی به تمام اعضای جامعه
- (۳) گران تمام شدن بررسی تمام اعضای جامعه
- (۴) از بین رفتن جامعه در برخی مطالعات

تذکر: اگر جامعه آماری کوچک باشد مطالعه را به صورت سرشماری انجام می‌دهیم ولی اگر بزرگ باشد باید از نمونه آماری استفاده کرد.

نمونه آماری: زیر مجموعه‌ای از جامعه آماری است. نمونه‌گیری: مهم‌ترین بخش آمار است و باید نمایان‌گر خصوصیات عده بزرگتری که جامعه نام دارد، باشد. پس باید به اندازه کافی بزرگ باشد. همچنین باید تصادفی انتخاب شوند و انتخاب آنها نباید از قانون خاصی پیروی کند.

اندازه جامعه و اندازه نمونه: تعداد اعضای هر کدام را اندازه آن می‌نامند. تذکر: اندازه جامعه ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد ولی ما فقط با جامعه‌هایی سروکار داریم که تعداد اعضای آنها متناهی است.

نمونه تصادفی ساده: نمونه‌ای است که در آن:

- (۱) امکان انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان‌پذیر باشد.
- (۲) قبل از انتخاب نمونه نتوانیم با اطمینان بیشتر در مورد حضور یا عدم حضور عده‌ای در نمونه قضاوت کنیم.

استفاده از ماشین حساب برای انتخاب نمونه تصادفی ساده: دکمه RAN را می‌زنیم تا ماشین حساب عددی بین صفر و یک به ما تحویل دهد. سپس آن را در اندازه نمونه ضرب می‌کنیم و اولین عدد بزرگتر یا مساوی آن را در نظر می‌گیریم.

مثال ۵: می‌خواهیم دو عدد تصادفی بین ۱ تا ۵۰۰ بدست آوریم. دو بار RAN را می‌زنیم. دو عدد ۲۳۱ / ۰ / ۱۲۲ را به ما می‌دهد. اعداد حاصله کدامند؟

$$\begin{cases} 0/122 \times 500 = 61 \\ 0/231 \times 500 = 115.5 \Rightarrow [115.5] + 1 = 116 \end{cases}$$

تعریف داده: نتایج حاصل از اندازه‌گیری و یا بررسی نمونه را داده می‌گویند.

روشهای جمع‌آوری داده‌ها:

- (۱) استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده
- (۲) از طریق پرسش: مستقیماً از اشخاص (شفاهی، مصاحبه) - پرسشنامه کتبی
- (۳) از طریق مشاهده و ثبت وقایع
- (۴) از طریق انجام آزمایش

فصل سوم: متغیرهای تصادفی:

متغیرهای تصادفی: مشخصه‌ی ویژه‌ای از افراد جامعه که مورد بررسی قرار می‌گیرد متغیر تصادفی نام دارد. مثال اگر مسأله‌ی آماری ما بررسی رنگ چشم اهالی یک شهر باشد، بخش‌های این مسأله‌ی آماری به صورت زیر است:

جامعه: تمام مردم شهر

نمونه: آن دسته از مردم شهر که رنگ چشمشان مورد بررسی قرار گرفته است. مثلاً اگر صد نفر از اهالی شهر را انتخاب کنیم و رنگ چشم آن‌ها را ببینیم، نمونه‌ی آماری ما شامل این صد نفر می‌باشد.
متغیر تصادفی: بدیهی است که ویژگی مورد بررسی در این مسأله‌ی آماری همان رنگ چشم افراد می‌باشد.

انواع متغیرهای تصادفی:

(۱) متغیر کمی: متغیری که با عدد و رقم قابل بیان باشد که خود بر دو نوع است:
الف: کمی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a, b را داشته باشد، هر مقداری بین آن دو را نیز بپذیرد. مانند: طول قد افراد.
ب: کمی گسسته: متغیر کمی که پیوسته نباشد گسسته است. مانند: تعداد غایبین یک کلاس.

(۲) متغیر کیفی: متغیری که غیر قابل اندازه‌گیری باشد که بر دو نوع است:
الف: کیفی ترتیبی: در آن نوعی ترتیب وجود دارد. مانند: مراحل زندگی انسان.
ب: کیفی اسمی: در آن ترتیب وجود ندارد. مانند: گروه خونی.

😊 **تست ۶:** مراحل تحصیلی متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟ (سراسری خارج-۸۶)

(۴) کیفی ترتیبی

(۳) کیفی اسمی

(۲) کمی پیوسته

(۱) کمی گسسته

گزینه ۴ صحیح است.

فصل چهارم: جدول فراوانی و دسته‌بندی:

جدول فراوانی (دسته بندی نشده): اگر در یک جدول، داده‌ها را بر حسب فراوانی مطلق آنها بنویسیم جدول فراوانی تولید کرده‌ایم. فراوانی مطلق در جدول فراوانی تعداد دفعاتی است که یک داده تکرار می‌شود.

x	۱	۲	۳	۴	۵
f _i	۲	۳	۲	۴	۶

مثال ۷: داده‌های ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ و ۵ و ۵ و ۵ و ۵ را میتوان به صورت زیر نشان داد:

تذکر: اگر متغیرهای ما گسسته و پرتکرار باشند جدول فراوانی بدون دسته‌بندی کارآمد است ولی اگر متغیر پیوسته باشد باید دسته بندی نمود.

دسته بندی:

اولین اقدامی که در مطالعه یک جامعه بر اساس داده‌ها انجام می‌دهیم، آن است که ببینیم میتوان جامعه را به چند دسته جدا تفکیک کرد؟ به طوری که اعضای موجود در هر دسته آشنا و یک‌دست باشند و تفاوت چندانی باهم نداشته باشند. مثال آب و هوای ایران

جدول دسته بندی:

دامنه تغییرات : برابر است با اختلاف کمترین داده از بیشترین داده: $R = x_{\max} - x_{\min}$

تذکر: اگر دامنه تغییرات به نظر کوچک باشد دیگر نیازی به دسته‌بندی نیست زیرا داده‌ها به هم نزدیک‌اند.

طول دسته (c): برابر است با دامنه تغییرات (R) تقسیم بر تعداد دسته‌ها (k) یعنی $c = \frac{R}{k}$

تذکر: قانون خاصی برای انتخاب تعداد دسته‌ها وجود ندارد، فقط باید طوری انتخاب شوند که فراوانی هیچ دسته‌ای صفر نشود.

هر دسته:

هر دسته به صورت $a-b$ نمایش داده می‌شود که a را کران پایین و b را کران بالا می‌نامند.

اگر عددی با کران بالای دسته‌ای برابر باشد آن را با دسته بعد در نظر می‌گیریم بجز دسته آخر.

وسط هر دسته را مرکز دسته یا نشان دسته می‌نامند و به صورت x_i نشان می‌دهند و داریم: $x_i = \frac{a+b}{2}$

در واقع اعداد موجود در هر دسته را برابر مرکز آن دسته در نظر می‌گیریم.

طول هر دسته برابر تفاضل کران پایین و بالا و همچنین تفاضل دو کران پایین یا بالای متوالی یا دو مرکز دسته متوالی می‌باشد.

انواع فراوانی‌ها:

فراوانی (مطلق) در جدول دسته‌بندی: فراوانی مطلق یک دسته برابر تعداد اعضای آن است که در آن دسته قرار می‌گیرند.

فراوانی نسبی: نسبت فراوانی مطلق یک دسته به کل فراوانی‌های همه دسته‌ها یعنی $\frac{f_i}{n}$.

درصد فراوانی نسبی: حاصلضرب فراوانی نسبی در ۱۰۰ را درصد فراوانی نسبی می‌نامند.

فراوانی تجمعی: مجموع همه فراوانی‌ها از دسته اول تا هر دسته را فراوانی تجمعی می‌نامند. به عبارت دیگر فراوانی تجمعی

هر دسته برابر تعداد اشیایی است که مقدار آنها از کران بالای آن دسته کم‌ترند.

فراوانی نسبی تجمعی: نسبت فراوانی تجمعی یک دسته به کل فراوانی‌های همه دسته‌ها.

درصد فراوانی نسبی تجمعی: حاصلضرب فراوانی نسبی تجمعی در ۱۰۰ را درصد فراوانی نسبی تجمعی می‌نامند.

مثال ۸: داده های زیر را در ۴ دسته طبقه بندی کنید و جدول زیر را کامل کنید.

۲۰ و ۲۰ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱ و ۹ و ۹ و ۹ و ۷ و ۶ و ۶ و ۳ و ۰

دسته ها				
فراوانی (مطلق) f_i				
فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n}$				
درصد فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n} \times 100$				
فراوانی تجمعی				
فراوانی نسبی تجمعی				
درصد فراوانی نسبی تجمعی				

نتایج مهم:

(۱) مرکز هر دسته نماینده آن دسته است و می توان فرض کرد تمام اعداد داخل دسته با مرکز دسته برابرند پس فراوانی مطلق هر دسته برابر است با دفعات تکرار مرکز دسته.

(۲) در دو دسته a ام و b ام، فاصله کران های پایین، فاصله کران های بالا و فاصله مراکز دسته ها برابر است با:

$$(b-a) \times c$$

😊 **تست ۹:** دامنه ی تغییرات ۱۰ داده ی مثبت آماری برابر ۱۵ و دامنه ی تغییرات مربعات این داده ها برابر ۳۰۰ است. بزرگ ترین داده کدام است؟

۱۲/۵ (۱) ۱۵ (۲) ۱۷/۵ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ:

😊 **تست ۱۰:** جدول $\frac{x_i}{f_i}$ را در نظر می گیریم. در این جدول، فراوانی نسبی متناظر با $x_i = 3$ برابر ۳/۰ می باشد. در این صورت x برابر است با:

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ:

☺ تست ۱۱: اگر فراوانی نسبی یک دسته از جدول، برابر 0.4 و فراوانی مطلق همان دسته برابر 124 باشد مجموع فراوانی مطلق بقیه دسته ها کدام است؟

۳۱۰ (۱) ۱۲۴ (۲) ۱۸۶ (۳) ۶۲ (۴)

پاسخ:

☺ تست ۱۲: اندازه‌ی قد 120 دانش‌آموز در جدول زیر آمده است؛ فراوانی دسته‌ی چهارم کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

مرکز دسته	۱۵۵	۱۵۸	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۷	۱۷۰
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۱۸	x	۲۰	۱۲
	۳۰ (۴)	۲۵ (۳)	۲۴ (۲)	۲۰ (۱)		

☺ تست ۱۳: فراوانی نسبی یک داده برابر 0.1 می‌باشد. اگر فراوانی این داده ۵ واحد افزایش یابد فراوانی نسبی آن دو برابر می‌شود. تعداد کل داده‌ها در ابتدا چه قدر بوده است؟

۴۵ (۴) ۴۰ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

پاسخ:

☺ تست ۱۴: فراوانی نسبی داده‌ای برابر 0.1 می‌باشد. اگر فراوانی این داده ۵ برابر شود، فراوانی نسبی جدید این داده کدام است؟

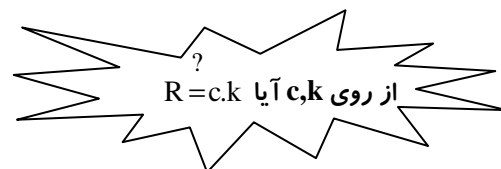
$\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{5}{10}$ (۱)

☺ تست ۱۵: در جدول زیر درصد فراوانی نسبی دسته وسط ۲۴ است. فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	a	۴۱	۵۰
	۱۶ (۴)	۱۵ (۳)	۱۴ (۲)	۱۲ (۱)	

😊 **تست ۲۱:** اگر در یک سری داده کوچکترین و بزرگترین داده ۴۳ و ۱۵ باشند و بخواهیم آنها را در ۱۰ دسته با طول دسته ۳ طبقه‌بندی کنیم کران پایین ششمین دسته چقدر است؟

۲۹ (۱)	۳۰ (۲)	۲۸ (۳)	۳۱ (۴)
--------	--------	--------	--------



مثال ۲۲: در یک دسته‌بندی طول دسته و تعداد دسته‌ها به ترتیب ۵ و ۶ می‌باشد. دامنه تغییرات چند است؟

نتیجه:

😊 **تست ۲۳:** در یک جدول فراوانی، کمترین داده ۳۰، تعداد دسته‌ها ۴ و طول دسته‌ها ۶ است، بیشترین داده‌ها کدام می‌تواند باشد؟

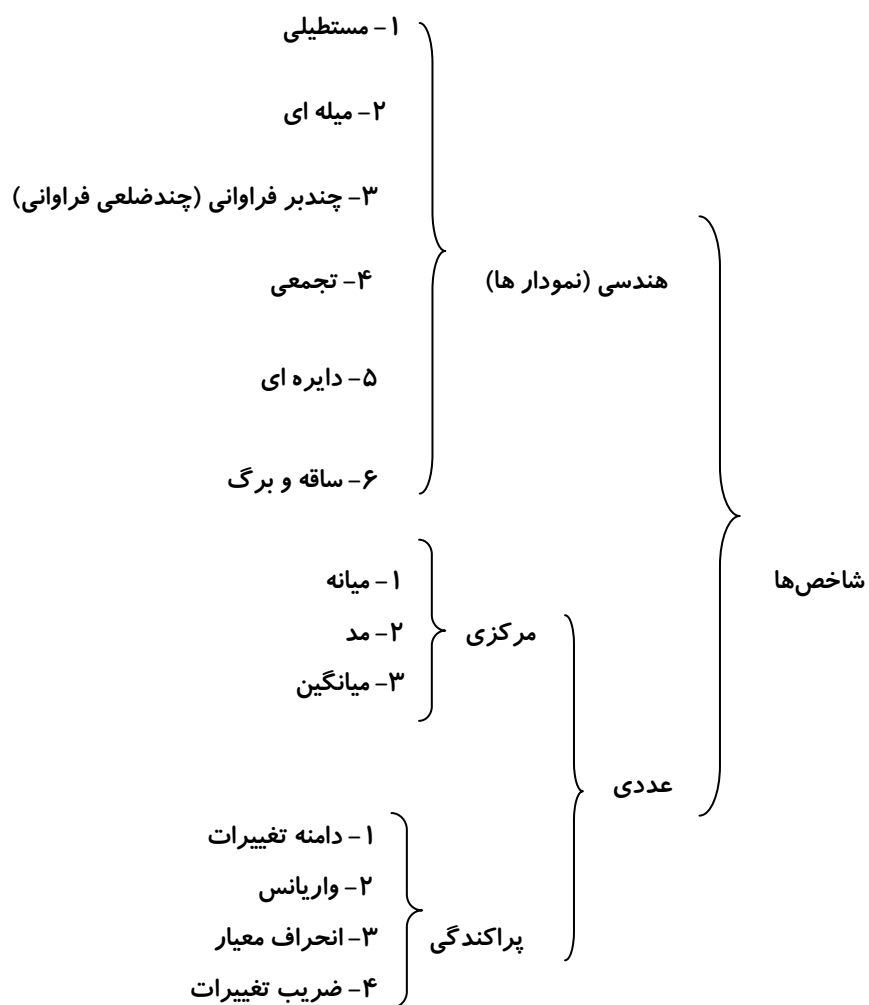
۵۶ (۱)	۴۱ (۲)	۵۲ (۳)	۵۸ (۴)
--------	--------	--------	--------

پاسخ:

😊 **تست ۲۴:** در یک دسته‌بندی داده‌ها، کران پایین دسته‌ی پنجم ۳۷ و مرکز دسته‌ی دوم ۲۲ است. اگر تعداد دسته‌ها ۷ باشد، بیش‌ترین مقدار داده‌ها برابر کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۴۷ (۱)	۴۸ (۲)	۵۴ (۳)	۵۶ (۴)
--------	--------	--------	--------

پاسخ:



شاخص های هندسی:

مثال ۲۵: نمرات آزمون کلاسی از ۵ به صورت زیر است. نمودار میله ای آنها را رسم کنید:

۵ و ۵ و ۵ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱

مثال ۲۶: نمودارهای مستطیلی و چندبر و تجمعی ودایره ای را برای مثال ۳ رسم نمایید.

دسته ها	۰-۵	۵-۱۰	۱۰-۱۵	۱۵-۲۰
فراوانی (مطلق)	۲	۷	۳	۸

نکات :

(۱) کدوم نمودار برای کدوم متغیر؟

میل‌های ————— ← کیفی و کمی گسسته

مستطیلی ————— ← کمی پیوسته

چندبر ————— ← کمی پیوسته

دایره‌ای ————— ← کیفی

(۲) در نمودار میل‌های ترتیب قرار گرفتن میل‌ها مهم نیست.

(۳) هر نمودار میل‌های شامل سه قسمت است: عنوان نمودار، برچسب محورها و مقیاس.

(۴) در نمودار مستطیلی ملاک مقایسه، مساحت مستطیل‌هاست. حال اگر طول دسته‌ها یکسان باشند فقط کافی است ارتفاع‌ها را مقایسه

کنیم. بر همین مبنا تعریف دقیق نمودار مستطیلی به صورت زیر است :

نمودار مستطیلی نمایشی از داده‌های دسته‌بندی شده است که در آن سطح مستطیل‌ها متناسب با فراوانی دسته‌هاست.

(۵) مساحت زیر نمودار مستطیلی و نمودار چندبر با هم برابرند و مقدار این مساحت برابر است با: $S = c.n$

(۶) اگر بخواهیم تغییرات متغیر را بهتر نشان دهیم از نمودار چندبر استفاده می‌کنیم.

(۷) اگر نمودار چندبر فراوانی نسبی را رسم کنیم در این صورت اطلاعات منسجم‌تری در اختیار ما قرار می‌گیرد چون می‌توان فراوانی را با کل جامعه مقایسه کرد.

(۸) برای مقایسه دو نمودار بهتر است دو نمودار چندبر باهم مقایسه شوند.

(۹) اگر در نمودار چندبر، تعداد داده‌ها افزایش یابد، آنگاه تعداد دسته‌ها افزایش و طول دسته‌ها کاهش می‌یابد و این باعث می‌شود پاره‌خطها بسیار کوچک شوند و منحنی شبیه یک زنگوله و کاملاً متقارن شود که آن را منحنی نرمال می‌نامند.

(۱۰) نمودار تجمعی صعودی است و از مبدا شروع می‌شود.

(۱۱) در نمودار دایره‌ای ترتیب قرار گرفتن نواحی مهم نیست. در ضمن اگر همه فراوانی‌ها k برابر شوند، نمودار تغییر نمی‌کند.

😊 **تست ۲۷:** استفاده از نمودار چندبر فراوانی برای نمایش داده‌های مربوط به کدام متغیر مناسب‌تر است؟ (آزاد ۸۶)

(۱) جنسیت افراد (۲) مراحل زندگی (۳) درآمد خانوار (۴) تعداد جمعیت

😊 **تست ۲۸:** اگر مجموع مساحت‌های مستطیل‌ها در نمودار مستطیلی تعدادی داده برابر ۱۲۰ و فراوانی نسبی دسته‌ی اول برابر $\frac{1}{10}$

و فراوانی همین دسته ۴ باشد طول هر دسته برابر است با:

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

😊 **تست ۲۹:** اگر نمودار چند بر فراوانی تعدادی داده به صورت رو به رو باشد کدام گزینه صحیح است؟



- (۱) همه‌ی داده‌ها با هم برابرند.
- (۲) همه‌ی داده‌ها به جز ۲ داده با هم برابرند.
- (۳) فراوانی همه‌ی دسته‌ها برابر است.
- (۴) فراوانی همه‌ی دسته‌ها به جز فراوانی ۲ دسته برابر است.

😊 **تست ۳۰:** در نمودار دایره‌ای نمرات ۸۴ دانش‌آموز کمان متناظر با نمرات بین ۱۸-۱۶ برابر ۶۰ درجه است. فراوانی متناظر با نمره ۱۷ در نمودار میله‌ای کدام است؟ (سراسری تجربی ۷۶)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

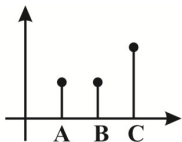
😊 **تست ۳۱:** در یک آمارگیری، داده‌ها را در ۳ دسته طبقه‌بندی کرده‌ایم به طوری که فراوانی نسبی دسته‌های اول و دوم به ترتیب

$\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی متناظر با دسته‌ی سوم کدام است؟

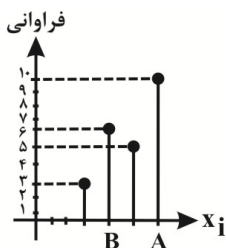
- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۸۰

پاسخ:

😊 **تست ۳۲:** نمودار میله‌ای رو به رو مربوط به کدام یک از نمودارهای دایره‌ای زیر است؟



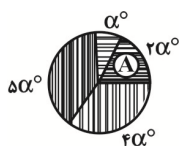
😊 **تست ۳۳:** اگر نمودار میله‌ای داده‌های آماری به صورت مقابل باشد، در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مربوط به A چند درجه از زاویه‌ی مربوط به B بیش‌تر است؟



- (۱) ۶۰° (۲) ۹۰° (۳) ۳۰° (۴) ۴۵°

پاسخ:

😊 **تست ۳۴:** یک کارخانه‌ی تولید مواد غذایی ۴ نوع محصول تولید می‌کند. با توجه به نمودار دایره‌ای تولید محصولات در یک روز، درصد فراوانی نسبی محصول A برابر است با:



- (۱) ۱۲/۵ (۲) ۱۶/۶ (۳) ۱۱ (۴) ۸/۵

🙄 **تست ۳۵:** داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته بندی شده‌اند، فراوانی تجمعی نسبی در دسته چهارم و پنجم به ترتیب $0.40, 0.48$ است. در نمودار دایره‌ای زاویه مربوط به دسته پنجم چند درجه است؟

(۱) $40/5$ (۲) $41/4$ (۳) $42/6$ (۴) $43/2$

🙄 **تست ۳۶:** اگر در جدول فراوانی داده‌های پیوسته و طبقه‌بندی دو نقطه $(21, 42), (24, 51)$ دو نقطه متوالی از نمودار فراوانی تجمعی باشند، کدام نقطه زیر روی چندبر فراوانی قرار دارد؟ (سراسری ۸۸ ریاضی)

(۱) $(21, 51)$ (۲) $(22/5, 9)$ (۳) $(24, 9)$ (۴) $(22/5, 42)$

مثال ۳۷: نمودار ساقه و برگ داده‌های زیر را رسم کنید.

۰, ۱, ۳, ۳, ۴, ۷, ۹, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۸, ۲۱, ۲۹, ۳۷

نکات:

- (۱) از این نمودار زمانی استفاده می‌شود که دامنه تغییرات کم باشد.
- (۲) در قسمت برگ اولاً اعداد تکراری باید نوشته شوند و ثانیاً به صورت صعودی باشند.

مثال ۳۸: در نمودار ساقه و برگ زیر اگر کلید نمودار به صورت $۳=۷۳$ باشد، میانگین آنها را بیابید.

ساقه	برگ			
۱	۰	۰	۱	۳ ۴
۲	۱	۱	۲	
۳	۱			

مُر (نما): داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد.

نکته: یک جامعه آماری می‌تواند یک یا چند مد داشته باشد. جامعه‌هایی که چند مد دارند یک‌دست نیستند. (مثال قد خردسال و بزرگسال)

نکته: اگر همه داده‌ها به یک اندازه تکرار شده باشند مد نداریم.

مثال: در ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۶ مد برابر ۱ و ۶ می‌باشد.

مثال: مد ندارد $\Rightarrow ۱۵, ۱۰, ۱۴, ۱۲, ۲۰$

مثال: مد ندارد $\Rightarrow ۱۰, ۱۵, ۱۰, ۱۴, ۱۴, ۱۵$

میانه: مقداری است که تعداد داده‌های قبل و بعد از آن برابر باشند (البته اگر مرتب باشند).

اگر داده‌های آماری را به ترتیب صعودی (یا نزولی) مرتب کنیم آنگاه:

الف: اگر تعداد داده‌ها فرد باشد وسط میانه است. (در واقع برای n داده فرد $\frac{n+1}{2}$ مین داده میانه است)

ب: اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانه، نصف مجموع دو داده وسط است.

نکته: میانه قسمت اول را چارک اول (Q_1) و میانه قسمت دوم را چارک سوم (Q_3) می‌نامند. دقت کنید که چارک دوم همان میانه است.

چارک اول از $\frac{1}{4}$ اعداد بیشتر و از $\frac{3}{4}$ آنها کمتر است. چارک سوم از $\frac{3}{4}$ اعداد بیشتر و از $\frac{1}{4}$ آنها کمتر است.

نمودار جعبه‌ای: نموداری است که داده‌ها را براساس پنج مقدار نمایش می‌دهد:

۱- کوچکترین داده ۲- چارک اول ۳- میانه ۴- چارک سوم ۵- بزرگترین داده

که از چارک اول تا چارک سوم را داخل جعبه قرار می‌دهیم. این نمودار نشان می‌دهد داده‌ها بیشتر کجا متمرکزند.

مثال ۳۹: در داده‌های ۱۴ و ۱۰ و ۱۶ و ۲۰ و ۹ و ۹ و ۱۵ و ۱۵ مد، میانه و چارکها را بیابید و نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.

مثال ۴۰: در جدول زیر میانه و مد را بدست آورید:

داده‌ها	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۲	۴	۳	۱

تست ۴۱: داده‌های آمار را در ۹ دسته با طول دسته ۴ دسته‌بندی کرده‌ایم. اگر ۸ داده بین چارک اول و سوم به آنها اضافه شود و

یک واحد از طول دسته کم کنیم، در دسته‌بندی جدید تعداد دسته‌ها کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

میانگین (\bar{x}):

*از روی داده‌ها:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

*از روی جدول (میانگین وزنی) (اگر جدول فراوانی باشد x_i داده‌ها و اگر جدول دسته‌بندی شده باشد x_i مرکز دسته است):

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

*از روی نمودار: اطلاعات نموداری را جدولی ببینید و با فرمول فوق محاسبه کنید.

چند نکته:

(۱) اگر میانگین n داده برابر \bar{x} باشد آنگاه مجموع آنها برابر است با: $n\bar{x}$

(۲) اگر اعداد تشکیل تصاعد حسابی دهند آنگاه میانگین نصف مجموع داده اول و آخر است (البته اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانگین همان داده وسط است)

(۳) اگر اعداد به هم نزدیک باشند می‌توان از روش حدسی استفاده کرد.

(۴) تفاضل هر داده از میانگین را انحراف از میانگین گویند و همواره مجموع آنها صفر است. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^n f_i (X_i - \bar{X}) = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0 \quad \text{از روی داده‌ها}$$

برقرار است.

حدود دسته	۲-۴	۴-۶	۶-۸	۸-۱۰
فراوانی	۲	۴	۳	۱
۵/۶ (۴)			۵/۵ (۳)	

☺ تست ۴۲: میانگین داده‌های جدول مقابل کدام است؟

(۱) ۵/۲

(۲) ۵/۴

(۳) ۵/۵

(۴) ۵/۶

پاسخ:

دسته	فراوانی
۰-۶	x
۶-۱۲	$x+1$
۱۲-۱۸	$x-1$

☺ تست ۴۳: اگر میانگین داده‌های آماری زیر برابر ۸ باشد فراوانی نسبی دسته وسط کدام است؟

 $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ:

☺ تست ۴۴: در جدول زیر میانگین کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

حدود دسته	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶	۲۶-۳۰
فراوانی تجمعی	۸	۲۰	۲۷	۳۵	۴۰
			۲۰ (۴)		۱۹/۶ (۳)
					۱۹/۵ (۲)
					۱۹ (۱)

مثال ۴۵: می‌دانیم که ضریب دروس عمومی کنکور به صورت زیر است:

ادبیات ۴، دین و زندگی ۳، عربی ۲ و زبان ۲.

اگر درصدهای دانش‌آموزی در این دروس به ترتیب ۵ و ۳۰ و ۴۰ و ۵۰ باشند، میانگین درصدهای او را بیاید.

تست ۴۶: دانش‌آموزی در درس حسابان در مستمر اول ۹ و در ترم اول ۸ و در مستمر دوم نمره ۹ را کسب کرده است.

این دانش‌آموز باید در ترم دوم حداقل چه نمره‌ای کسب کند تا قبول شود؟

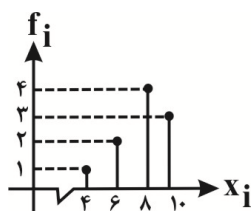
۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

مثال ۴۷: در نمودار زیر مد، میانه و میانگین را بیاید:



تست ۴۸: در داده‌های آماری با نمودار ساقه و برگ، داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین

داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

ساقه	برگ						
۳	۱	۴	۵	۷	۸	۸	۹
۴	۰	۰	۴	۵	۵	۶	
۵	۲	۳	۶	۶	۷		

۴۳ / ۴ (۴)

۴۳ / ۲ (۳)

۴۲ / ۹ (۲)

۴۲ / ۷ (۱)

😊 **تست ۴۹:** جدول زیر مقادیر انحراف از میانگین داده‌های آماری دسته‌بندی شده را مشخص می‌کند. فراوانی مطلق دسته ششم چقدر است؟ (سراسری تجربی خارج ۸۵)

۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

انحراف از میانگین	-۴	-۲	-۱	۰	۲	۲	۳
فراوانی مطلق	۵	۱۱	۹	۴	۸	x	۳

😊 **تست ۵۰:** میانگین ۲ داده برابر ۳ و میانگین ۸ داده دیگر برابر ۴ می‌باشد. میانگین کل داده‌ها کدام است؟

۳/۵ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۳/۸ (۴)

پاسخ:

نتیجه: اگر m عدد با میانگین \bar{X} و n عدد با میانگین \bar{Y} باشد آنگاه میانگین کل برابر است با :

😊 **تست ۵۱:** اگر میانگین n داده‌ی آماری ۱۵ و میانگین ۱۵ داده‌ی دیگر برابر ۱۰ باشد، به طوری که میانگین تمام داده‌ها با هم ۱۲ باشد، n کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

پاسخ:

😊 **تست ۵۱:** اگر میانگین $\{x, y, z\}$ مساوی ۱۵ باشد و میانگین $\{2x, 2y, 2z, u, v\}$ مساوی ۳۱ باشد، میانگین $\{u, v\}$ کدام است؟

۳۲/۵ (۱) ۳۱/۵ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴)

پاسخ:

😊 **تست ۵۲:** میانگین ۸ داده‌ی آماری برابر ۱۲ است. اگر اعداد ۹ و ۲۵ را به این داده‌ها اضافه کنیم، میانگین جدید برابر است با:

۱۹ (۱) ۱۷ (۲) ۱۵ (۳) ۱۳ (۴)

پاسخ:

😊 **تست ۵۳:** از داده های ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۴ کدام داده را حذف کنیم تا میانگین نسبت به قبل کمترین تغییرات را داشته باشد؟ (آزاد ریاضی ۸۵)

۱۴ (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴)

😊 **تست ۵۴:** معدل ۱۰ ادرس دانش آموزی ۱۴/۵ است. اگر نمره یک درس وی به جای ۷ عدد ۱۷ وارد شده باشد معدل واقعی او کدام است؟

۱۳ (۱) ۱۳/۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ:

😊 **تست ۵۵:** اگر میانگین داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر \bar{x} باشد، میانگین داده های $x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots, x_n + \bar{x}$ کدام است؟ (آزاد تجربی ۷۹)

(۱) $\frac{(n+1)\bar{x}}{2}$ (۲) $2\bar{x}$ (۳) $\frac{(n+2)\bar{x}}{2}$ (۴) $\frac{n\bar{x}}{2}$

پاسخ:

😊 **تست ۵۶:** اگر میانگین داده های $x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_n - n$ برابر \bar{x} باشد، داده های $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ دارای کدام میانگین هستند؟ (آزاد تجربی ۷۱)

(۱) $\bar{x} + n + 1$ (۲) $\bar{x} + \frac{n(n+1)}{2}$ (۳) $\bar{x} + \frac{n+1}{2}$ (۴) $2\bar{x}$

پاسخ:

شاخصهای پراکندگی:

دامنه تغییرات: این شاخص برای بیان پراکندگی مناسب نیست زیرا فقط بزرگترین و کوچکترین داده در آن موثرند.

واریانس (σ^2):

از بهترین شاخصهای پراکندگی است و مقدار آن با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

*از روی داده‌ها:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

از روی این فرمول، واریانس را برابر میانگین مجذور انحرافات از میانگین نیز می‌نامند.

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

این فرمول در مواقعی کاربرد دارد که مجموع مربعات جملات و میانگین داده شده باشد.

*از روی جدول (اگر جدول فراوانی باشد x_i داده‌ها و اگر جدول دسته‌بندی شده باشد x_i مرکز دسته است):

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + \dots + f_n \cdot x_n^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

*از روی نمودار: اطلاعات نموداری را جدولی ببینید و با فرمول فوق محاسبه کنید.

انحراف معیار (σ):

جذر واریانس می‌باشد، همه‌ی فرمول‌های واریانس برای انحراف معیار نیز معتبر است با این تفاوت که جذر آن‌ها مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

ضریب تغییرات:

اگر σ انحراف معیار و \bar{x} میانگین باشد آن گاه ضریب تغییرات که با نماد CV نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

به عبارت دیگر ضریب تغییرات عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

اگر ضریب تغییرات را در ۱۰۰ ضرب کنیم، حاصل را درصد ضریب تغییرات می‌نامند.

از آنجایی که ضریب تغییرات باید مثبت باشد، لذا ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت تعریف می‌شود.

نکته: واحد میانگین و میانه و مد و دامنه تغییرات و انحراف معیار از همان واحد متغیر است. واحد واریانس مجذور واحد متغیر

است. ضریب تغییرات واحد ندارد.

تست ۵۷: واریانس داده‌های جدول مقابل کدام است؟ (سراسری تجربی ۷۸)				
۷	۵	۳	۱	داده‌ها
۴	۹	۲	۱	فراوانی
۲ (۱)	۲/۲۵ (۲)	۲/۵ (۳)	۲/۷۵ (۴)	

پاسخ:

مثال ۵۸: ضریب تغییرات داده‌های ۱ و ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ را بیابید.

نکته: اگر n عدد تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت d دهند آنگاه واریانس از رابطه زیر محاسبه می‌شود: $\frac{n^2-1}{12} \times d^2$

تست ۵۹: اگر داده‌های آماری ۱ و ۱۵ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۴ و ۹ و ۱ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۸ و ۱۴ را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، انحراف معیار داده‌های داخل جعبه کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)				
۱/۱ (۱)	۱/۲ (۲)	۱/۲۵ (۳)	۱/۳ (۴)	

تست ۶۰: اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر $\sigma = 5$ ، $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 400$ و $\sum_{i=1}^n x_i = 160$ باشد، \bar{x} کدام است؟				
۲ (۱)	۱۰ (۲)	۱۶ (۳)	۴۰ (۴)	

پاسخ:

تست ۶۱: اگر $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 20$ و $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 200$ باشد، انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{10} کدام است؟				
۱ (۱)	۲ (۲)	۴ (۳)	۱۶ (۴)	

پاسخ:

📄 **تست ۶۲:** هشت داده‌ی آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض است. اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ۱۰ داده‌ی حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

(۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۴/۸ (۴) ۵

پاسخ:

📄 **تست ۶۳:** انحراف معیار ۲۶ داده آماری برابر ۲ می‌باشد. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است از بین آنها حذف شود، واریانس ۲۵ داده دیگر کدامست؟ (سراسری ریاضی خارج ۸۷)

(۱) ۳/۹۶ (۲) ۴/۰۸ (۳) ۴/۱۲ (۴) ۴/۱۶

📖 **نکته:** اگر هر کدام از شاخص‌های پراکندگی (دامنه تغییرات - واریانس - انحراف معیار - ضریب تغییرات) صفر شود آنگاه

.....

😊 **تست ۶۴:** دامنه‌ی تغییرات داده‌های ۴ و $c-1$ و $2b$ و a^3+3 برابر صفر است؛ حاصل $a+b+c$ برابر است با:

(۱) ۱۶ (۲) ۱۳ (۳) ۱۰ (۴) ۸

پاسخ:

نکته:

داده‌ها	مد	میان	میانگین	دامنه تغییرات	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات
با جمع شوند							
در ضرب شوند							

😊 **تست ۶۵:** اگر واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۳ باشد، واریانس داده‌های $4x_1+5, 4x_2+5, \dots, 4x_n+5$

برابر است با:

(۱) ۱۲ (۲) ۱۷ (۳) ۵۳ (۴) ۴۸

پاسخ:

😊 **تست ۶۶:** اگر ضریب تغییرات داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر $2/0$ و میانگین این داده‌ها ۱۰ باشد، واریانس داده‌های $-2x_1, -2x_2, \dots, -2x_n$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۴۰

😊 **تست ۶۷:** اگر واریانس قیمت‌ها در سال گذشته ۱۰۰۰ ریال بوده و امسال ۱۰ درصد به قیمت‌ها افزوده شده باشد، واریانس قیمت‌ها کدام است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۲۱۰

😊 **تست ۶۸:** واریانس داده‌های $\frac{x_1 - 2}{5}$ و $\frac{x_2 - 2}{5}$ و ... و $\frac{x_n - 2}{5}$ برابر ۸ است؛ انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) ۱۰

😊 **تست ۶۹:** تعدادی داده آماری را ۳ برابر کرده و آنها را با ۲ جمع می‌کنیم، در این صورت ضریب تغییرات نصف می‌شود. میانگین کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

😊 **تست ۷۰:** ضریب تغییرات تعدادی داده ۶ است. اگر به تمامی داده‌ها دو برابر میانگین آنها را اضافه کنیم، آنگاه ضریب تغییرات جدید کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۲

مثال ۷۰: ضریب تغییرات داده‌های ۵۱، ۱۰۱، ۱۵۱، ۲۰۱، ۲۵۱ را بیابید.

مثال ۷۱: واریانس داده‌های جدول زیر را بیابید.

x_i	۳۲	۴۰	۵۶	۷۲
f_i	۲	۳	۱	۲