بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی

دکتر فولادیان

فصل I - معرفی اجزاء و عناصر تشکیل دهندهٔ مدارهای الکتریکی :

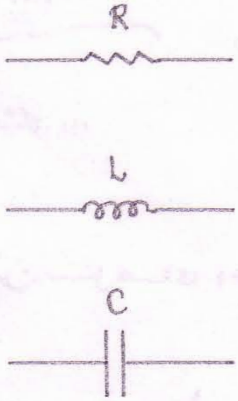
عناصر تشکیل دهندهٔ یک مدار الکتریکی را میتوان در سه گروه بشرح زیر طبقه‌بندی کرد.

I- عناصر غیرفعال شبکه

1- مقاومت اهمی R

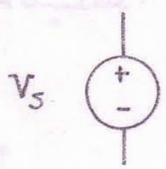
2- سلف یا اندوکتانس L

3- خازن یا کاپاسیتی C

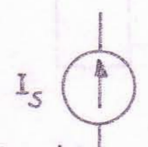


II- عناصر فعال

1- منبع ولتاژ ایده‌آل



2- منبع جریان ایده‌آل



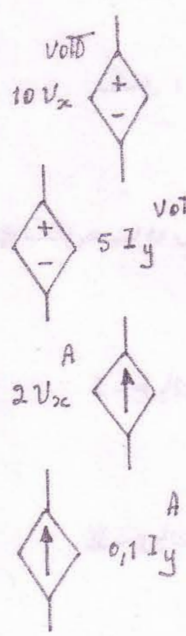
III- عناصر وابسته

1- منبع ولتاژ وابسته

- منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ
- منبع ولتاژ وابسته به جریان

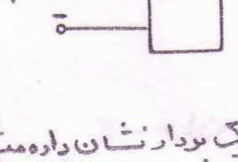
2- منبع جریان وابسته

- منبع جریان وابسته به ولتاژ
- منبع جریان وابسته به جریان



<u>تعریف مدار الکتریکی</u> - هر مدار الکتریکی از ترکیب یک یا چند عنصر الکتریکی تشکیل میشود.

و هر مدار الکتریکی توسط دو کمیت ولتاژ V، جریان I بیان میشوند.

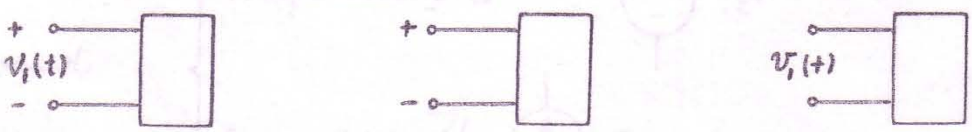


●●● عموماً ولتاژ دو سر هر مدار الکتریکی با پلاریته‌های (+)، (-) و جریان مدار با یک بردار نشان داده میشوند

●●● شکل های (۱) ، (۲) تعریف های ناصحیح ، نامناسب و ناقص از جریان هستند . ولی شکل (۳) تعریف صحیحی از جریان را ارائه میدهد.

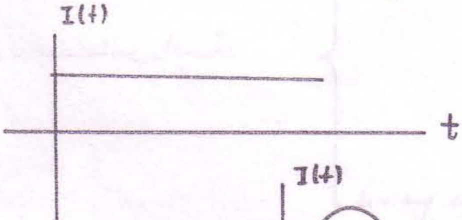
شکل (۱)   شکل (۲)   شکل (۳)

●●● همچنین شکل های (۴) ، (۵) تعاریف ناصحیح و نامناسب و ناقص از ولتاژ هستند . ولی شکل (۶) تعریف صحیحی از ولتاژ را ارائه میدهد.

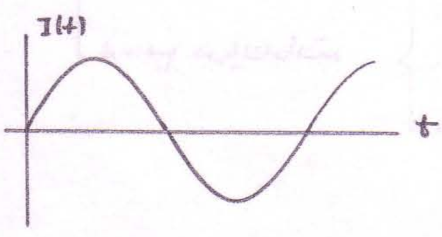


شکل (۴)   شکل (۵)   شکل (۶)

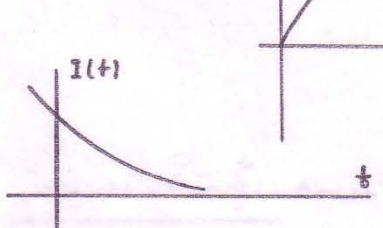
●●● شکل های زیر انواع جریان و یا ولتاژ در یک مدار را نشان میدهد.



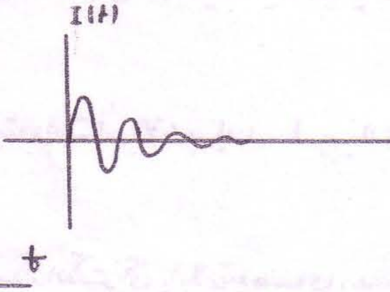
I - جریان مستقیم یا dc



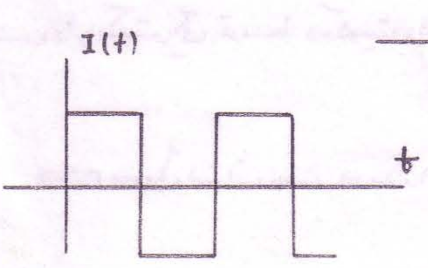
II - جریان متناوب سینوسی ac



III - جریان نمائی



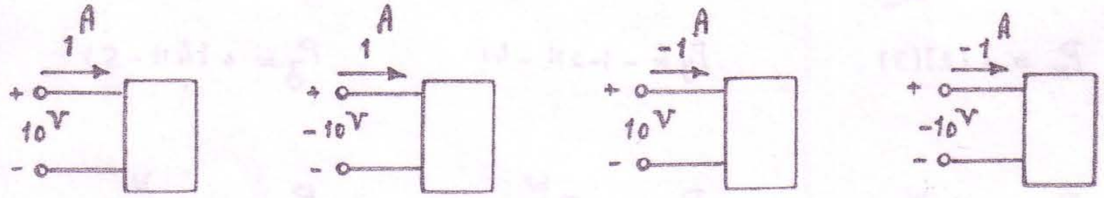
IV - جریان سینوسی میرا شونده



V - جریان مربعی

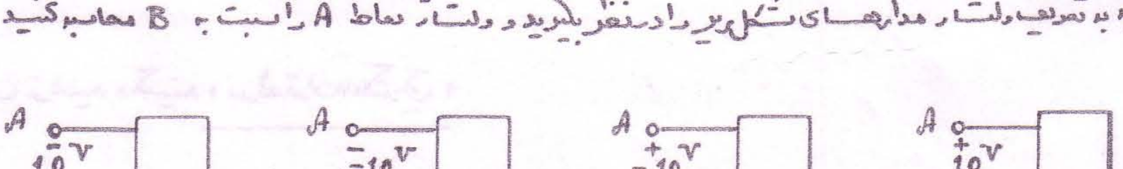
●●● جریان یک باطری از نوع جریان مستقیم dc و جریان برق شهر از نوع جریان متناوب سینوسی و جریان مربوط به تخلیه یا دشارژ خازن روی مقاومت اهمی از نوع جریان نمایی و جریان ناشی از تخلیه سلف و خازن در مدار RLC روی مقاومت اهمی در حالت خاصی از مدار از نوع جریان سینوسی میرا شونده و جریان خروجی یک مولتی ویبراتور از نوع جریان مربعی است.

●●● شکل‌های زیر مقادیر عددی ولتاژ (اختلاف پتانسیل) و شدت جریان عبوری از یک عنصر و یا یک مدار الکتریکی را نشان میدهد.



در شکل‌های بالا هر کدام از کمیت‌های ولتاژ V و جریان I می‌تواند مقادیر مثبت و یا منفی را داشته باشد.

●●● با توجه به تعریف ولتاژ، مدارهای شکل زیر را در نظر بگیرید و ولتاژ نقاط A را نسبت به B محاسبه کنید.



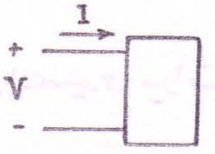
$V_{AB} = -(10)$ $\quad V_{AB} = -(-10)$ $\quad V_{AB} = +(-10)$ $\quad V_{AB} = +(+10)$

$V_{AB} = -10^V$ $\quad V_{AB} = +10^V$ $\quad V_{AB} = -10^V$ $\quad V_{AB} = +10^V$

●●● علاوه بر کمیت های ولتاژ V، جریان I کمیت مرکب دیگری در مدارهای الکتریکی بکار گرفته میشود

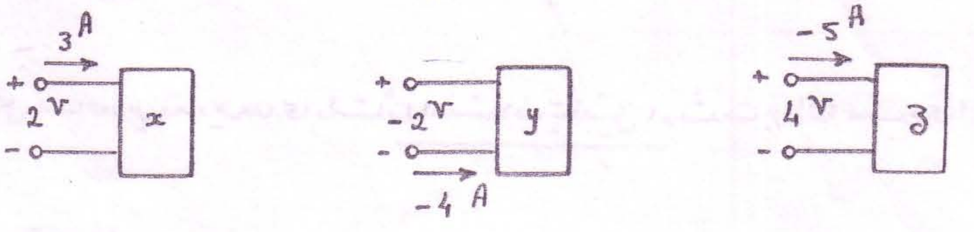
کمیت مورد نظر توان الکتریکی نامیده میشود و عموماً رفتار عناصر مختلف شبکه یا یک مدار الکتریکی را

بیان میکند



$P = V . I$ توان الکتریکی

●●● در شکل های زیر رفتار هر یک از عناصر x، y، z را با توجه به مقدار توان الکتریکی آن ها بررسی میکنیم



$P_x = +(2)(3)$ $\qquad$ $P_y = -(-2)(-4)$ $\qquad$ $P_z = +(4)(-5)$

$P_x = +6^W$ $\qquad$ $P_y = -8^W$ $\qquad$ $P_z = -20^W$

در شکل های بالا عنصر x معادل 6 وات توان جذب میکند (مصرف کننده توان الکتریکی) ولی

عنصر y معادل 8 وات توان تولید میکند (مولد توان الکتریکی) و همچنین عنصر z معادل 20 وات

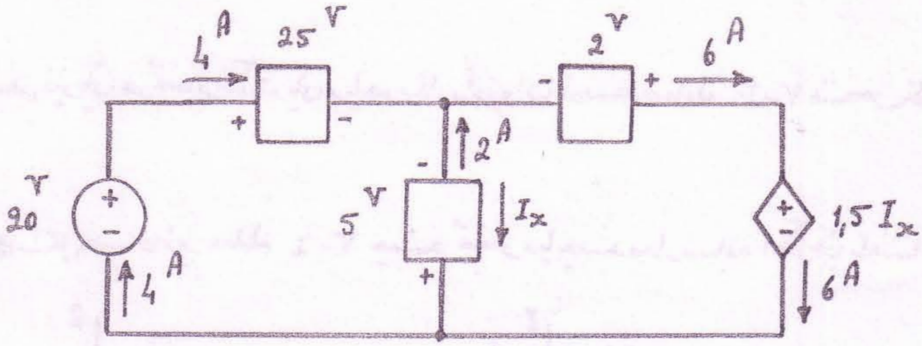
توان تولید میکند (مولد توان الکتریکی).

بنابراین عناصری که توان الکتریکی مثبت دارند بعنوان مصرف کننده و عناصری که توان

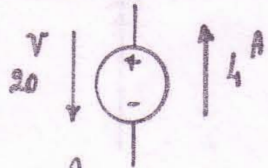
الکتریکی منفی دارند بعنوان مولد نامیده میشوند

$P > 0$: مصرف کننده $\qquad$ $P < 0$: مولد

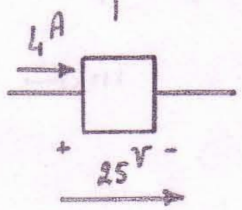
مثال ۱- توان جذب شده توسط هریک از عناصر مدار نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



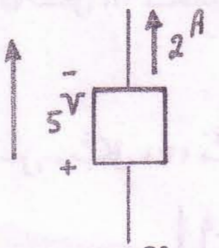
توان الکتریکی هرکدام از عناصر شبکه را با توجه به ولتاژ و جریان تعریف شده در روی شکل مدار محاسبه میکنیم.



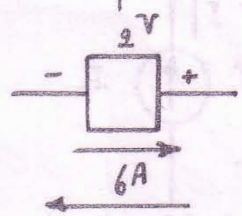
$P_1 = -(20)(4) = -80^W$ * مولد



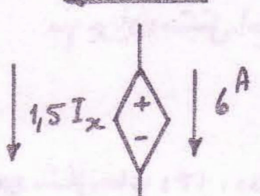
$P_2 = +(25)(4) = +100^W$ مصرف کننده



$P_3 = +(5)(2) = +10^W$ مصرف کننده



$P_4 = -(2)(6) = -12^W$ * مولد



$P_5 = +(1{,}5 I_x)(6) = 1{,}5(-2)(6) = -18^W$ * مولد

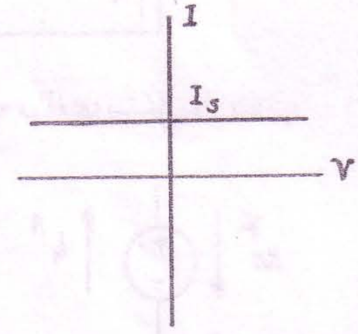
$I_x = -2^{Amp}$

همانطوریکه ملاحظه میشود عناصر شماره ۱، ۴، ۵ بعنوان مولد توان الکتریکی و عناصر شماره 2، 3 بعنوان مصرف کننده توان الکتریکی عمل میکنند. ضمناً جمع توانها در مدار مساوی صفر است. $\Sigma P = 0.$

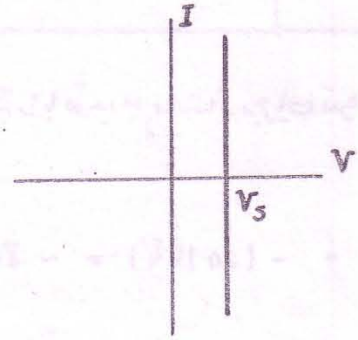
معادلات مشخصه ولت آمپر عناصر الکتریکی و مدارها :

رفتار فیزیکی هر عنصر الکتریکی یا هر مدار را میتوان توسط معادله V-I مشخص کرد.

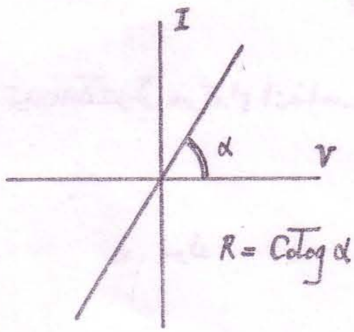
شکل های زیر معادله V-I چند عنصر یا چند مدار ساده الکتریکی را نشان میدهد.



شکل (۱)

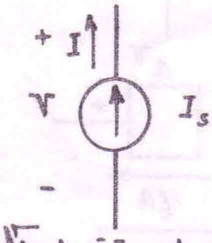


شکل (۲)

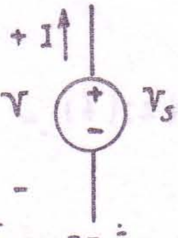


شکل (۳)

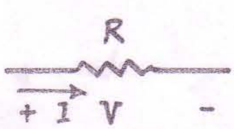
شکل (۱) مشخصه V-I یک منبع جریان ایده آل مستقل و شکل (۲) مشخصه V-I یک منبع ولتاژ ایده آل مستقل و شکل (۳) مشخصه V-I یک مقاومت اهمی خطی را نشان میدهد.



منبع جریان مستقل ایده آل

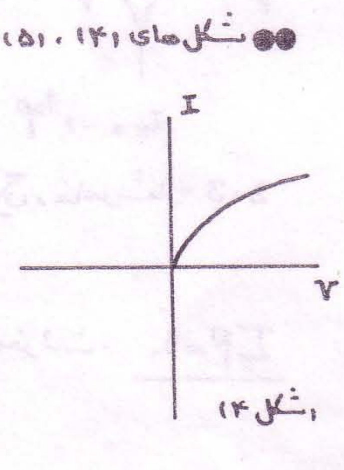


منبع ولتاژ مستقل ایده آل

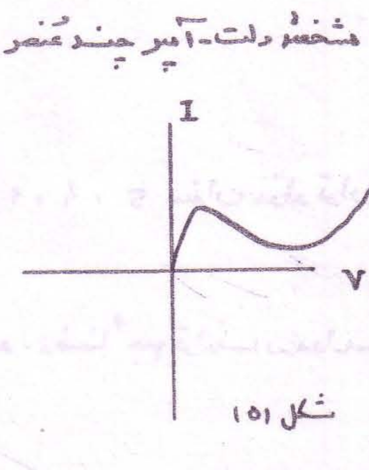


مقاومت اهمی خطی

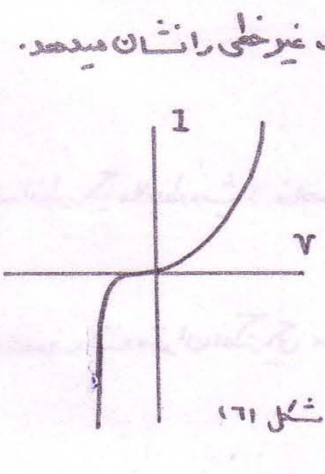
شکل های (۴)، (۵)، (۶) مشخصه ولت-آمپر چند عنصر با مقاومت غیرخطی را نشان میدهد.



شکل (۴)

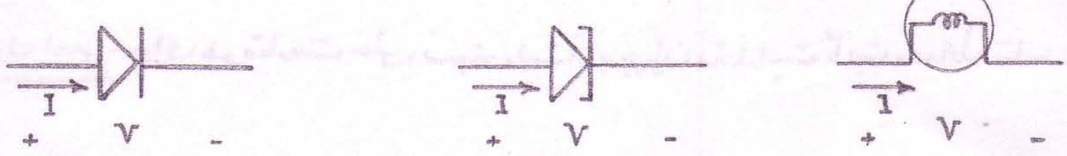


شکل (۵)



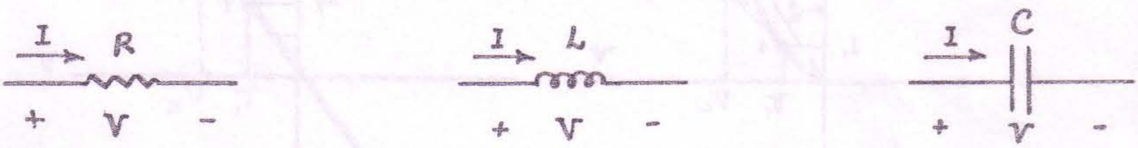
شکل (۶)

● شکل (۴) مشخصه ولت آمپر دو سر فیلامان داخل یک لامپ و شکل (۵) مشخصه ولت آمپر دو سر یک دیود تونل و شکل (۶) مشخصه ولت آمپر دو سر یک دیود واقعی را نشان میدهد.



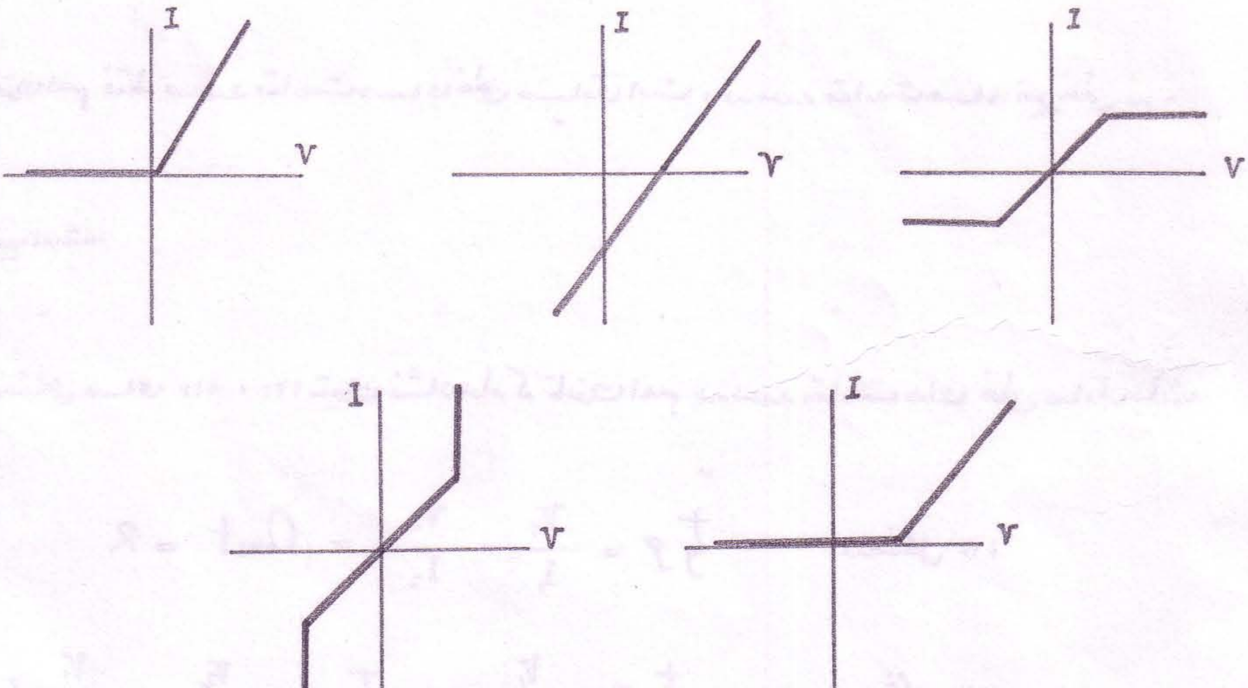
دیود واقعی — دیود تونل — فیلامان لامپ

●● معادلات زیر معادلات ولت-آمپر مربوط به مقاومت اهمی R، سلف L، خازن C میباشد.



$V = RI$ $\qquad$ $V = L\dfrac{dI}{dt}$ $\qquad$ $V = \dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(t)\,dt$

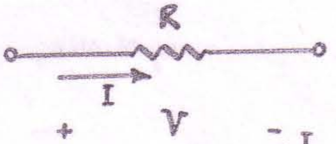
●● شکل های زیر نیز هر کدام میتواند معادلات مشخصه V-I یک مدار الکتریکی باشد.

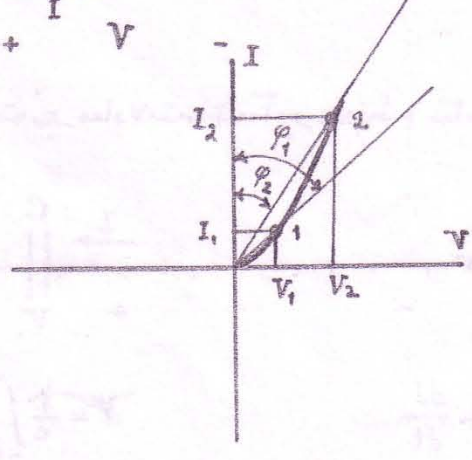


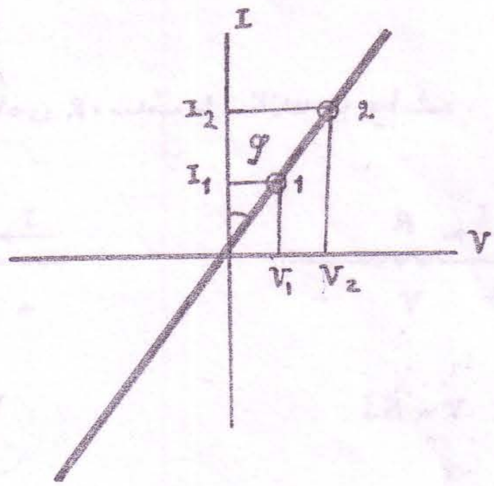
الف - قوانین تجربی و مدارهای ساده

I - قانون اهم - برای هر مقاومت خطی نسبت ولتاژ به جریان مقداریست ثابت و معادل مقاومت اهمی آن

یعنی $R = \frac{V}{I} = Const.$







شکل (۲) مقاومت غیرخطی — شکل (۱) مقاومت خطی

قانون اهم فقط در مورد مقاومت‌های خطی صادق است و در مورد مقاومت‌های غیرخطی غیر-قابل تعریف است.

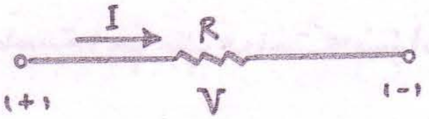
در شکل‌های (۱) ، (۲) میتوان نشان داد که قانون اهم در مورد مقاومت‌های خطی صادق میباشد.

در شکل (۱)
$$tg\,\varphi = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = Const = R$$

در شکل (۲)
$$tg\,\varphi_1 = \frac{V_1}{I_1} \quad , \quad tg\,\varphi_2 = \frac{V_2}{I_2} \qquad \frac{V_1}{I_1} \neq \frac{V_2}{I_2}$$

●●● طبق تعریف وبراساس قانون اهم در هر مقاومت خطی جهت جریان همواره از پتانسیل (+) بطرف

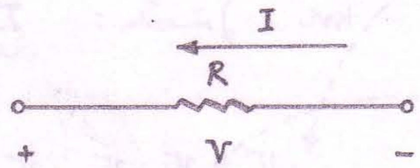
پتانسیل (−) است.



$V = RI$

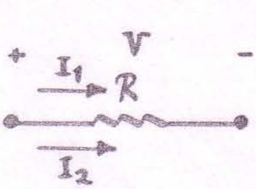
●● لذا اگر در یک مقاومت جهت جریان خلاف جهت واقعی تعریف شود قانون اهم نقض میشود واین

تناقض با علامت (−) بصورت زیر رفع میشود.

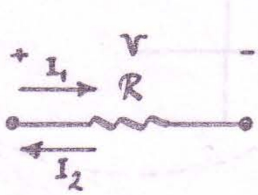


$V = -RI$

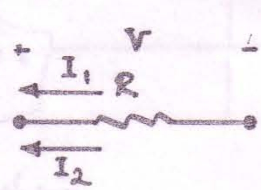
● دقیقاً براساس همین تعریف میتوان نوشت.



$V = R(I_1 + I_2)$



$V = R(I_1 - I_2)$

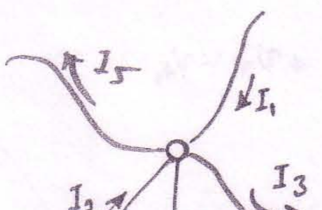


$V = -R(I_1 + I_2)$

II - قوانین کیرشف: 1- قانون ولتاژهای کیرشف 2- قانون جریانهای کیرشف

●●● قانون جریانهای کیرشف: (KCL)

در هر گره (انشعاب) جمع جبری جریانها مساوی صفر است.



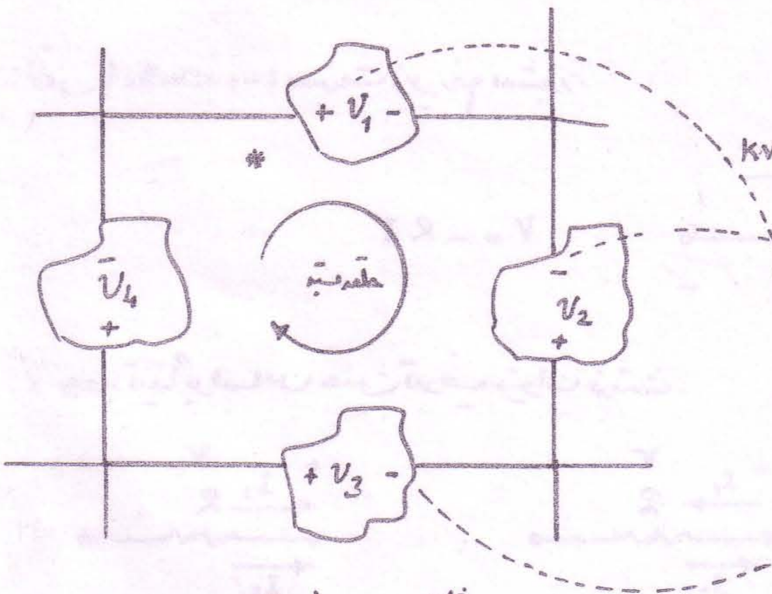
$$\sum_{\text{جبری}} I = 0. \qquad -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

ویا بعبارت دیگر در هر گره ویا انشعاب مجموع جریانهای ورودی مساوی مجموع جریانهای خروجی است.

$$\sum I_{\text{ورودی}} = \sum I_{\text{خروجی}} \qquad I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

قانون ولتاژهای کیرشف: (KVL)

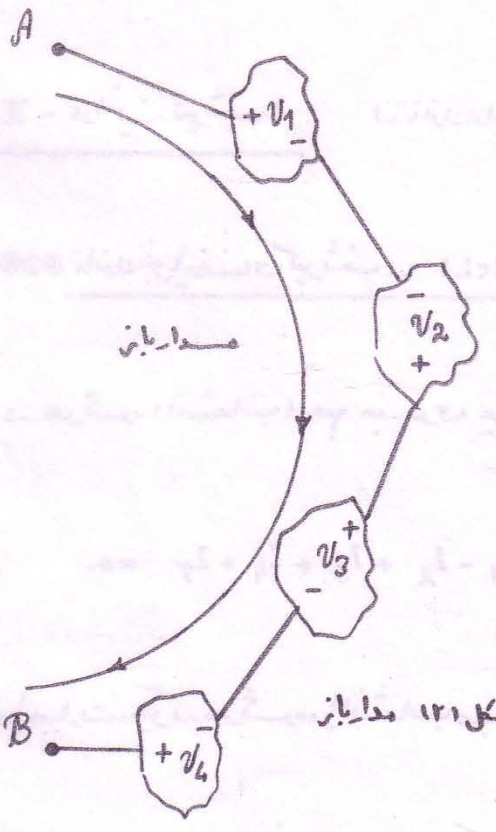
در هر مدار بسته (حلقه بسته) جمع جبری اختلاف پتانسیل ها مساوی صفر است. و همچنین برای هر مدار باز اختلاف پتانسیل دو سر مدار مساوی جمع اختلاف پتانسیل های دو سر عناصر تشکیل دهنده آن باشد.



KVL ↻ حلقه بسته : $\sum_{\text{جبری}} v = 0.$

$$+v_1 - v_2 - v_3 + v_4 = 0.$$

شکل (۱) مدار بسته



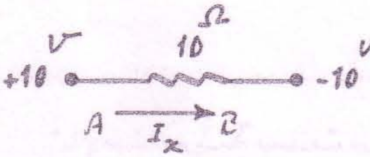
KVL ↻ حلقه باز $\quad V_{AB} = \sum_{\text{جبری}} v$

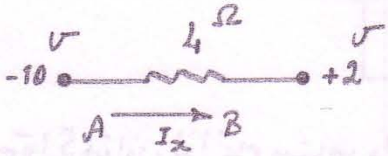
$$V_{AB} = +v_1 - v_2 + v_3 - v_4$$

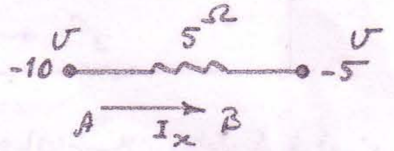
شکل (۲) مدار باز

چند مثال کاربردی در مورد قوانین اهم، کیرشف :

مثال ۱- در هریک از مقاومت های زیر I_x را محاسبه کنید.







$$V_{AB} = 10\, I_x$$

$$10 - (-10) = 10 I_x$$

$$\underline{I_x = 2 \ ^{Amp}}$$

$$V_{AB} = 4 I_x$$

$$-10 - (+2) = 4 I_x$$

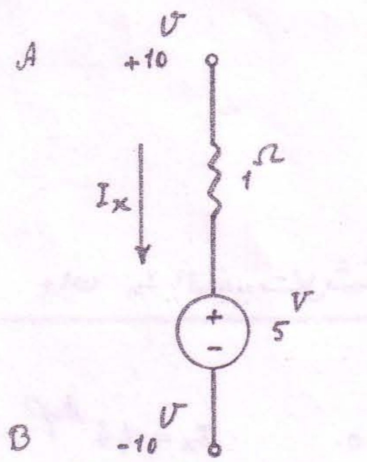
$$\underline{I_x = -3 \ ^{Amp}}$$

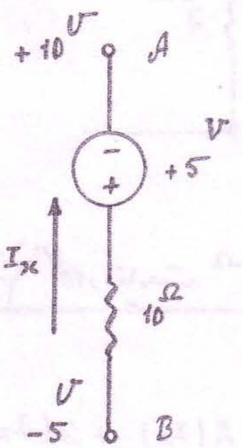
$$V_{AB} = 5 I_x$$

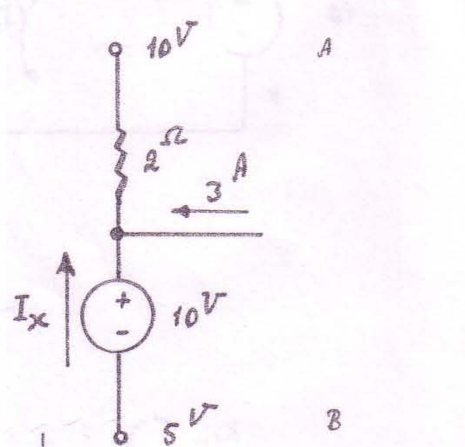
$$-10 - (-5) = 5 I_x$$

$$\underline{I_x = -1 \ ^{Amp}}$$

مثال ۲- در مدارهای شکل زیر I_x را محاسبه کنید.







$$V_{AB} = (1)(I_x) + 5$$

$$10 - (-10) = I_x + 5$$

$$\underline{I_x = 15 \ ^{Amp}}$$

$$V_{AB} = -5 + 10(-I_x)$$

$$10 - (-5) = -5 - 10 I_x$$

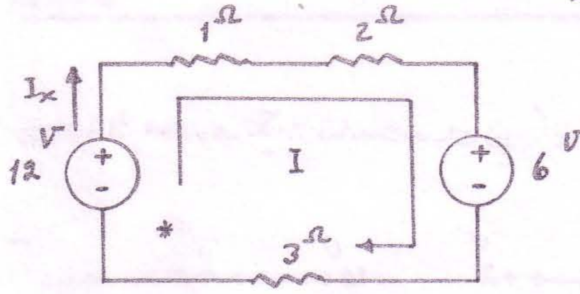
$$\underline{I_x = -2 \ ^{Amp}}$$

$$V_{AB} = 2(-(I_x + 3)) + 10$$

$$10 - 5 = -2 I_x - 6 + 10$$

$$\underline{I_x = -0{,}5 \ ^{Amp}}$$

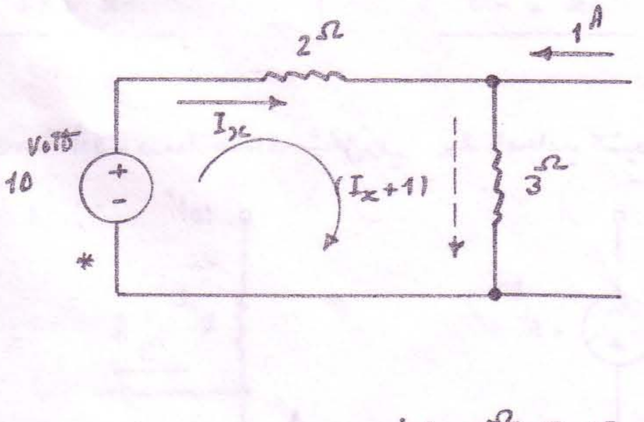
مثال ۳ - در هریک از مدارهای زیر مطلوبست محاسبه I_x



تمام عناصر شکل بصورت سری باهم قرار گرفته اند. لذا تمام عناصر دارای جریان یکسان و معادل I خواهند داشت.

$$KVL \; (I): \quad -12 + 1(I) + 2(I) + 6 + 3I = 0. \qquad I = 1^{Amp}$$

$$I_x = I = 1^{Amp}$$



جریان I_x با توجه به شکل جریان منبع 10^V، مقاومت 2^Ω میباشد

$$KVL: \quad -10 + 2(I_x) + 3(I_x + 1) = 0. \qquad I_x = 1{,}4^{Amp}$$

ترکیب مقاومت های اهمی: الف - ترکیب سری مقاومت ها ب - ترکیب موازی مقاومت ها

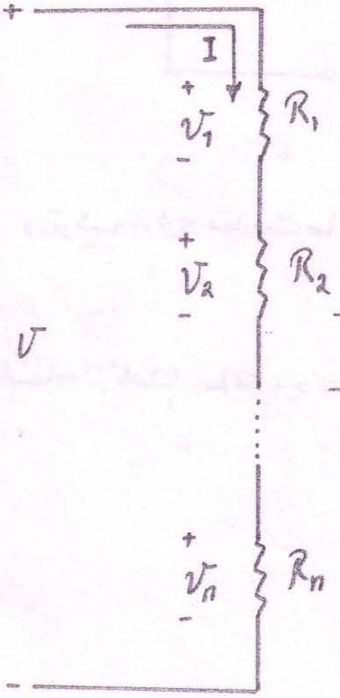
الف - ترکیب سری مقاومت ها:

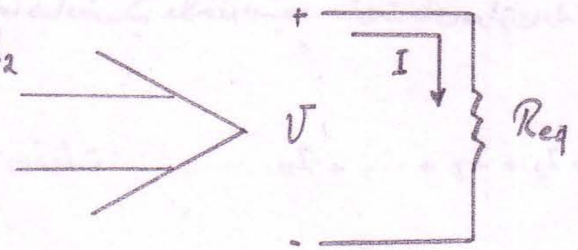
با توجه بانکه عناصر سری در یک شکل جریانهای یکسان دارند لذا میتوان نوشت

$$KVL: \quad V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \qquad V = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I$$

$$V = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)\, I$$

میتوان در عمل بجای چند مقاومت سری یک مقاومت معادل قرار داد.





مقاومت معادل چند مقاومت سری جریانی معادل جریان مقاومتهای سری را خواهد داشت. بنابراین:

$$R_{eq} \cdot I = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)\, I$$

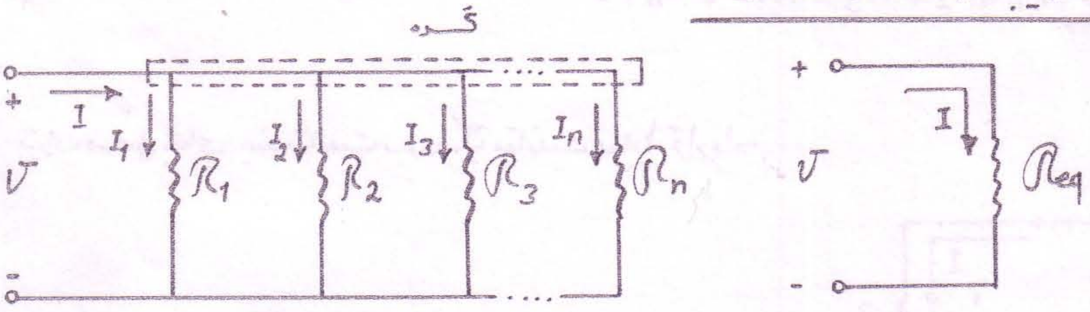
$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n}$$

●●● قانون تقسیم ولتاژ در مقاومت های سری:

بسادگی میتوان نشان داد که در مقاومت های سری ولتاژ به نسبت مقاومتها بین آنها تقسیم میشود

یعنی در مدار بالا $V_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2+\dots+R_n} V$ ، $V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2+\dots+R_n} . V$ .... $V_n = \frac{R_n}{R_1+R_1+\dots+R_n} V$

ب ـ ترکیب موازی مقاومت ها :



در ترکیب موازی مقاومت ها همانطوریکه ملاحظه میشود مقاومتهای موازی ولتاژهای برابر خواهند داشت.

لذا با استفاده از قانون kcl میتوان نوشت:

$$kcl: \quad I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \cdots + \frac{V}{R_n}$$

$$I = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)$$

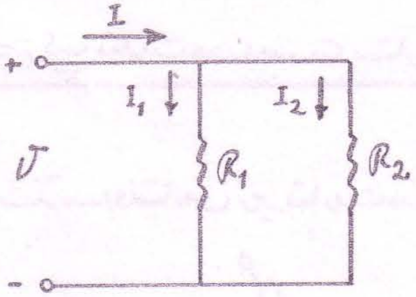
میتوان بجای ترکیب موازی چند مقاومت موازی مقاومت معادل آنها را قرار داد، بدیهی است مقاومت معادل چند مقاومت موازی ولتاژ هریک از مقاومت ها را خواهد داشت. بنابراین:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} \rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$

قانون تقسیم جریان در مقاومت های موازی : به سادگی میتوان نشان داد که در مقاومت های موازی جریان به نسبت عکس مقاومت ها بین آنها تقسیم میشود.

برای دو مقاومت موازی :



$$I_1 = \frac{V}{R_1} \qquad I_1 = \frac{R_{eq} \cdot I}{R_1}$$

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} \cdot I \quad , \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} \cdot I$$

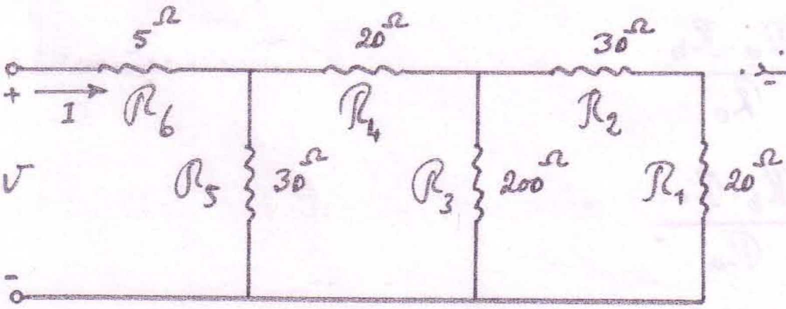
و بطریق مشابه برای n مقاومت موازی نیز میتوان اثبات کرد.

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} \cdot I \quad , \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} \cdot I \quad \ldots \quad I_n = \frac{R_{eq}}{R_n} \cdot I$$

یعنی در مقاومت های موازی جریان به نسبت عکس مقاومت هایشان تقسیم میشود.

ج - ترکیب مختلط مقاومت ها :

به شبکه های مقاومتی شکل زیر توجه کنید.



در مدار مقاومتی بالا ترکیب مقاومت ها بصورت سری، موازی باشد یعنی مقاومت های R_1، R_2 سری

باهم و ترکیب سری R_1، R_2 موازی با R_3 و منتجهٔ آنها سری با R_4 و مقاومت منتجهٔ آنها موازی با R_5

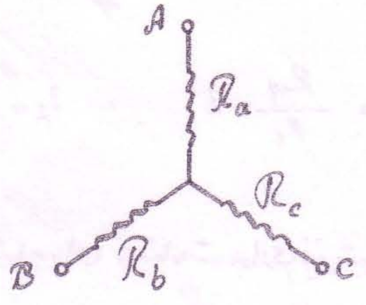
و حاصل آنها سری با R_6 میباشد بنابراین میزان مقاومت معادل را بشرح زیر محاسبه کرد.

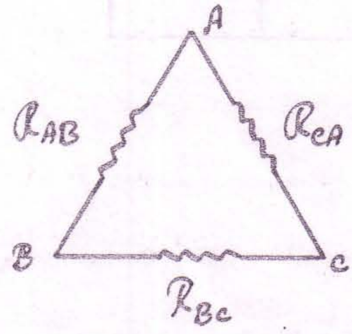
$$R_{12} = 20 + 30 = 50^\Omega \quad , \quad R_{123} = \frac{50 \times 200}{50 + 200} = 40^\Omega \quad R_{1234} = 40^\Omega + 20^\Omega = 60^\Omega$$

$$R_{12345} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20^\Omega \qquad R_{eq} = 5 + 20 = 25^\Omega \qquad \underline{R_{eq} = 25^\Omega}$$

●●● د - ترکیب مقاومت ها بصورت ستاره، مثلث

در شکل های مقابل زیر مقاومت ها بصورت ستاره و مثلث باهم ترکیب شده اند





میتوان با استفاده از ترکیب سری و موازی مقاومت ها از دیدگاه نقاط A,B ، B,C ، C,A

مقاومت ها را بهمدیگر تبدیل کرد.

●● تبدیل مقاومت های ستاره به مثلث: برای تبدیل مقاومتهای ستاره Y به مثلث Δ از روابط زیر استفاده میشود.

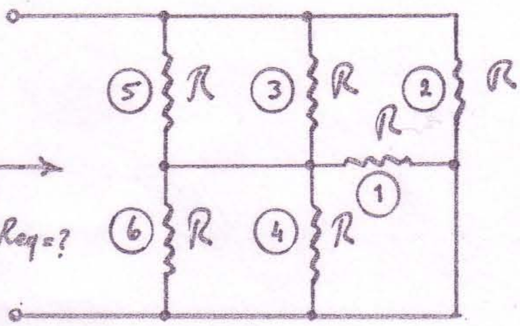
$$\begin{cases} R_{AB} = R_a + R_b + \dfrac{R_a \cdot R_b}{R_c} \\[2ex] R_{BC} = R_b + R_c + \dfrac{R_b \cdot R_c}{R_a} \\[2ex] R_{CA} = R_c + R_a + \dfrac{R_c \cdot R_a}{R_b} \end{cases}$$

●● تبدیل مقاومت های مثلث به ستاره: برای تبدیل مقاومت های Δ به مقاومت های Y از روابط زیر استفاده میشود.

$$\begin{cases} R_a = \dfrac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\[2ex] R_b = \dfrac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\[2ex] R_c = \dfrac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \end{cases}$$

چند مثال در مورد ترکیب مقاومت‌ها :

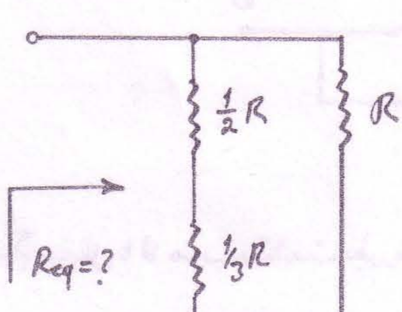
مثال ۱- مقاومت معادل هر یک از مدارهای شکل زیر را محاسبه کنید.



مقاومت‌های شماره ۱، ۴، 6 موازی باهم و مقاومت 3، 5 نیز باهم موازیند لذا

$$R_{146} = \frac{1}{3}R \qquad R_{35} = \frac{1}{2}R$$

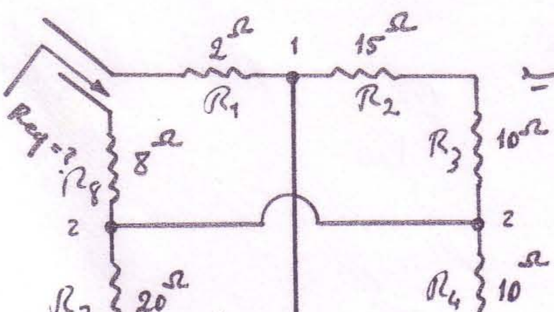
حال با جایگزین کردن مقاومت معادل بجای هر کدام از ترکیب‌های یاد شده شکل مدار بصورت زیر خلاصه می‌شود.



$$R_{eq} = \frac{R\left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}R\right)}{R + \left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}R\right)} = \frac{5}{11}R$$

$$\underline{R_{eq} = \frac{5}{11}R}$$

مثال ۲- مقاومت معادل شبکه مقاومتی شکل زیر را محاسبه کنید



در شکل مقاومتی بالا ترکیب سری مقاومت های R_2، R_3 با ترکیب سری مقاومتهای R_4 ، R_5 و در آخر هم با ترکیب سری مقاومت های R_6 ، R_7 موازیند لذا

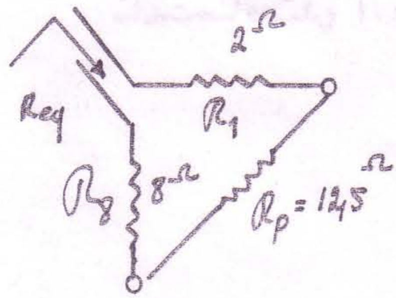
$$R_{23} = R_2 + R_3 = 15 + 10 = 25^{\Omega}$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 10 + 40 = 50^{\Omega}$$

$$R_{67} = R_6 + R_7 = 30 + 20 = 50^{\Omega}$$

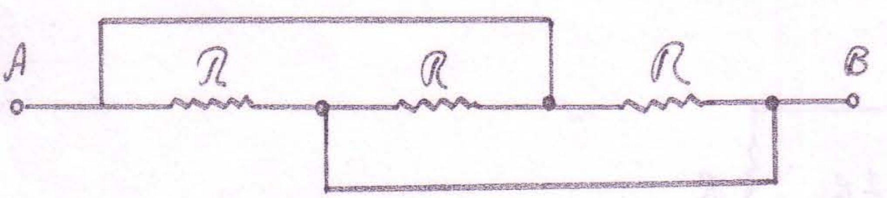
$R_p = ?$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{45}} + \frac{1}{R_{67}} = \frac{1}{25} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} \qquad \underline{R_p = 12{,}5^{\Omega}}$$



$$R_{eq} = 2 + 8 + 12{,}5 \qquad \underline{R_{eq} = 22{,}5^{\Omega}}$$

مثال ۲ - مقاومت معادل شکل را از دیدگاه دو نقطه A، B محاسبه کنید.



در شکل بالا هر سه مقاومت بطور موازی با هم بین نقاط A، B واقع شده اند. لذا

$$\underline{R_{eq} = \tfrac{1}{3} R}$$

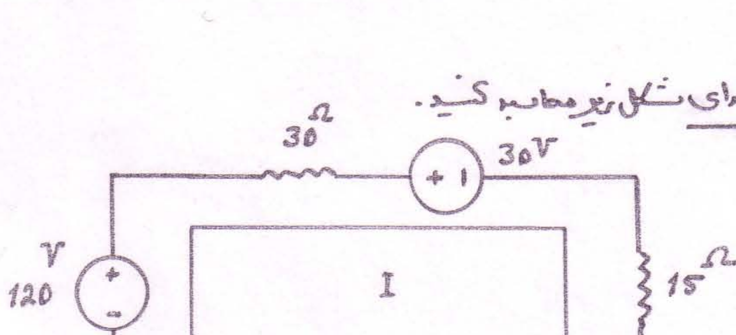
ب - روش های مختلف تحلیل شبکه های الکتریکی

I - روش حلقوی (معادلات جریان حلقه ها)   II - روش نقطه ای (معادلات پتانسیل گره ها)

مطالعهٔ روش حلقوی در تحلیل مدارهای الکتریکی :

در این روش از معادلات ولتاژهای کیرشف KVL برای تحلیل شبکه استفاده میشود، بطوریکه برای هر حلقه از شبکه یک جریان تعریف شده و سپس معادلات KVL برای هر یک از حلقه ها بکار گرفته میشود.

مثال ۱- شدت جریان I را در شبکهٔ یک حلقه ای شکل زیر محاسبه کنید.



شدت جریان I را در شبکه در یک جهت کاملاً اختیاری تعریف میکنیم و معادلهٔ ولتاژهای کیرشف را در حلقه تشکیل میدهیم.

KVL I : $-120 + 30I + 30 + 15I = 0.$

$45I - 90 = 0.$ $\underline{I = 2\ \text{Amp}}$

ثانیاً - اصل توازن توان‌ها را در شبکهٔ مثال بالا بررسی کنید.

اصل توازن توان‌ها - در یک شبکه همواره مجموع جبری توان‌ها مساوی صفر است. $\Sigma P = 0.$

قضیهٔ تلگان - اصل توازن توانها در هر شبکه بصورت دیگری نیز قابل تعریف است که

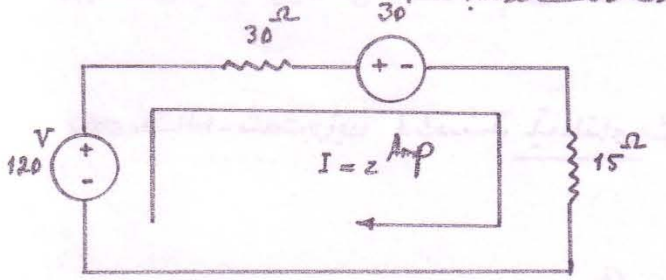
تحت عنوان قضیهٔ تلگان نامیده میشود

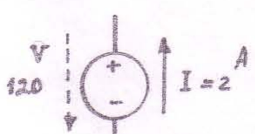
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} V_k \cdot I_k = 0.}$$

براساس این قضیه در هر شبکه رابطه زیر برقرار است.

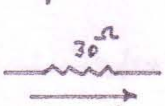
در رابطه بالا n تعداد عناصر شبکه میباشد.

بررسی و تحقیق صحت اصل توازن توانها در شبکه :

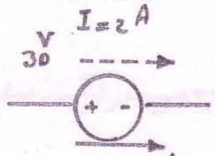




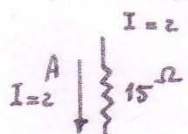
$P_{120^V} = -(120)(2) = -240\ W \quad < 0.$ مولد



$P_{30^\Omega} = +RI^2 = 30 \times 2^2 = 120^W \quad > 0$ مصرف‌کننده



$P_{30^V} = +(30)(2) = 60^W \quad > 0.$ مصرف‌کننده



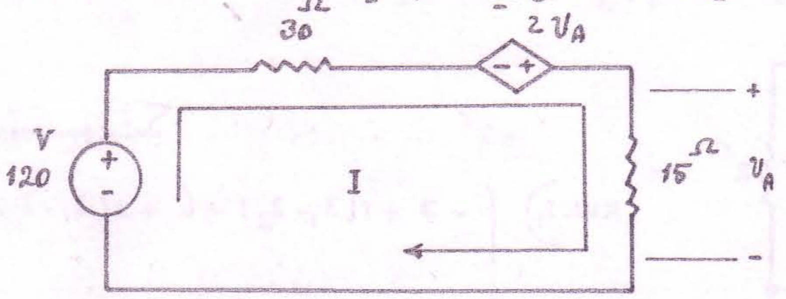
$P_{15^\Omega} = +RI^2 = 15 \times 2^2 = 60^W \quad > 0.$ مصرف‌کننده

$$\sum P = -240 + 120 + 60 + 60 = 0. \qquad \sum P = 0.$$

بررسی موضوع توسط رابطهٔ تلگان:

$$\sum_{k=1}^{4} V_k I_k = 0. \qquad -(120)(2) + (60)(2) + (30)(2) + (30)(2) = 0.$$

مثال ۲ - شدت جریان I را در مدار تک حلقه‌ای شکل زیر محاسبه کنید.



تحلیل شکل:

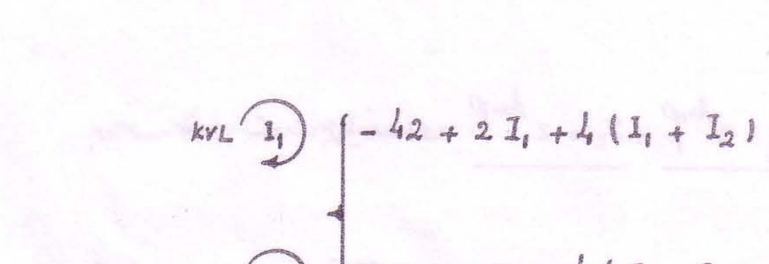
$$KVL\ (I):\quad -120 + 30I - 2V_A + 15I = 0.$$

$V_A = 15I$ قانون اهم در مقاومت 15^{Ω}

$$-120 + 30I - 2(15I) + 15I = 0. \qquad \underline{I = 8^{Amp}}$$

تمرین - صحت اصل توازن توان‌ها را در شکل مثال بالا تحقیق کنید.

مثال ۳ - با استفاده از روش حلقوی در مدار دو حلقه‌ای شکل زیر شدت جریان‌های I_1 ، I_2 را محاسبه کنید.

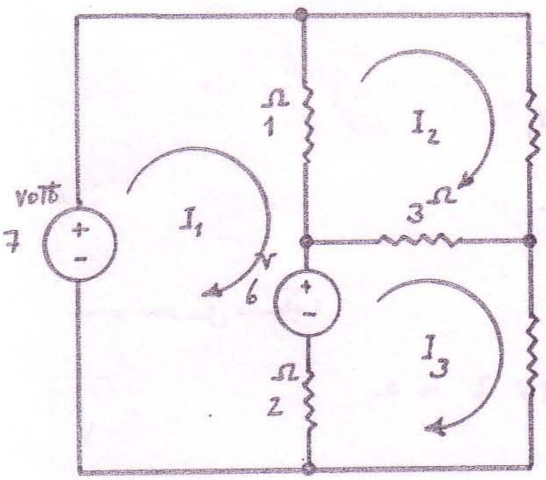


تحلیل شکل:

$$\begin{cases} KVL\ (I_1): & -42 + 2I_1 + 4(I_1 + I_2) = 0. \\ KVL\ (I_2): & +10 + 5I_2 + 4(I_2 + I_1) = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 6I_1 + 4I_2 = 42 \\ 4I_1 + 9I_2 = -10 \end{cases}$$

از حل معادلات بالا $I_1 = 11^{Amp}$ ، $I_2 = -6^{Amp}$ نتیجه می‌شود.

●●● مثال ۴- بروش حلقوی شدت جریانهای I_1 ، I_2 ، I_3 را محاسبه کنید.



تحلیل شکل:

$$\begin{cases} KVL\ I_1) & -7 + 1(I_1 - I_2) + 6 + 2(I_1 - I_3) = 0. \\ KVL\ I_2) & 1(I_2 - I_1) + 2I_2 + 3(I_2 - I_3) = 0. \\ KVL\ I_3) & -6 + 3(I_3 - I_2) + 1(I_3) + 2(I_3 - I_1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3I_1 - I_2 - 2I_3 = 1 \\ -I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0. \\ -2I_1 - 3I_2 + 6I_3 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

●● محاسبهٔ مقادیر I_1 ، I_2 ، I_3 با استفاده از روش دترمینانها:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1(36-9) - (-1)(0+18) + (-2)(0-36)}{3(36-9) - (-1)(-6-6) + (-2)(3+12)} = 3^{Amp}$$

بروش مشابه شدت جریانهای $\underline{I_2 = 2^{Amp}}$ ، $\underline{I_3 = 3^{Amp}}$ نتیجه میشود.

فرمول کلی برای تشکیل فرم ماتریسی معادلات مربوط به جریان حلقه‌ها:

در شکلهائیکه فاقد منابع جریان و منابع وابسته هستند میتوان فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را تشکیل داد.

●●● برای شبکه های n حلقه ای فاقد منابع جریان و منابع وابسته فرمول کلی فرم ماتریسی معادلات مربوط به جریان حلقه ها بشرح زیر خواهد بود .

$$\begin{bmatrix} +R_{11} & \pm R_{12} & \pm R_{13} \cdots \pm R_{1n} \\ \pm R_{21} & +R_{22} \cdots\cdots & \pm R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm R_{n1} & \pm R_{n2} \cdots\cdots & +R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \vdots \\ E_{nn} \end{bmatrix}$$

●●● در ماتریس های بالا : $I_1, I_2, \ldots, I_n$ شدت جریان حلقه ها

R_{11} مجموع مقاومت های واقع در حلقه 1

$\vdots$

R_{nn} مجموع مقاومت های واقع در حلقه n

R_{13} مجموع مقاومت های واقع در فصل مشترک حلقه های اول و سوم

E_{11} مجموع نیروی محرکه های واقع در حلقه 1

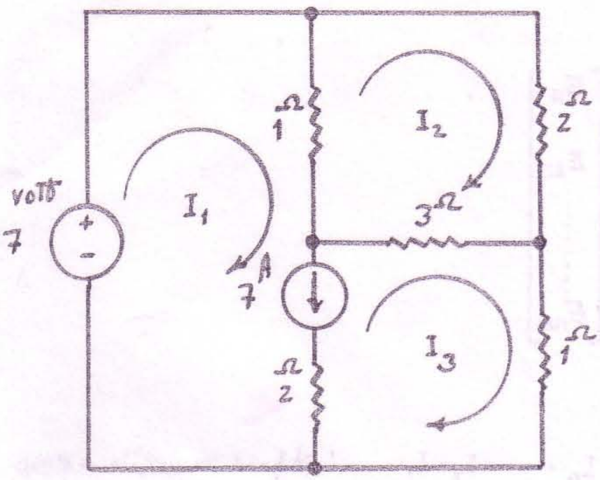
$\vdots$

E_{nn} مجموع نیروی محرکه های واقع در حلقه n

ـــ در فرم ماتریس بالا علامت ضرائب $R_{11}, R_{22}, R_{33}, \ldots, R_{nn}$ همواره مثبت ولی علامت ضرائب R_{IJ} ($I \neq J$) برحسب جهت شدت جریان حلقه ها میتواند مثبت و یا منفی باشد . مثلاً اگر جهت جریانهای حلقه های اول و سوم در مقاومت R_{13} موافق هم باشد علامت R_{13} مثبت و در غیراینصورت علامت آن منفی خواهد بود .

تمرین - با استفاده از فرمول کلی فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را در شبکه مثال بالا تشکیل دهید.

مثال ۵ - مطلوبست فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها در شبکه شکل زیر:



تحلیل شبکه :

در شبکه داده شده معادلات KVL را در حلقه‌های اول و سوم بواسطه حضور منبع جریان 7^{Amp} نمی‌توان تشکیل داد. و فقط تشکیل KVL در حلقه دوم مقدور باشد.

بنابراین برای تشکیل سه معادله بشرح زیر باید عمل کرد.

KVL حلقه دوم : $1(I_2-I_1)+2(I_2)+3(I_2-I_3)=0.$ (معادله 1)

KVL حلقه کلی : $-7+2(I_2)+1(I_3)=0.$ (معادله 2)

I_1 7^A I_3 : $I_1-I_3=7$ (معادله 3)

فرم ماتریسی معادلات:

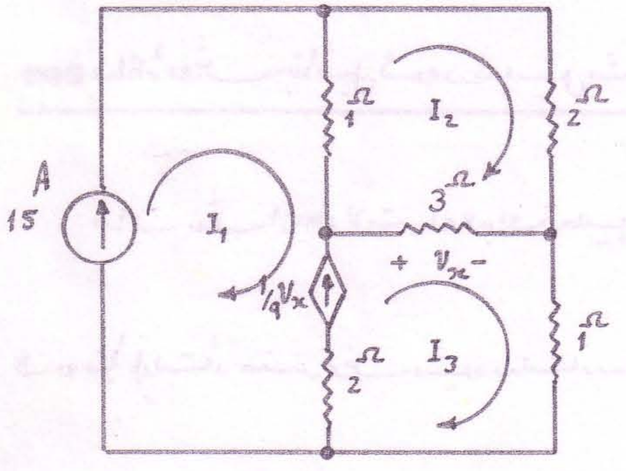
$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

از حل معادلات : $I_1 = 9^{Amp}$

$I_2 = 2{,}5^{A}$ ، $I_3 = 2^{Amp}$

ـــ توجه داشته باشید فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را نتوان مستقیماً از روی شبکه و بکمک فرمول کلی بدست آورد. (بواسطهٔ حضور منبع جریان 7^{Amp})

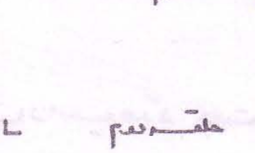
●●● مثال ۶ - فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را در شبکهٔ شکل زیر تشکیل دهید.



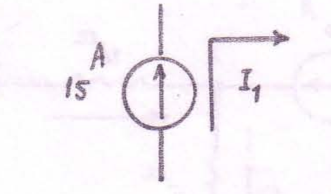
ـــ تحلیل شبکه: بازهم در شبکهٔ بالا بواسطهٔ حضور منابع جریان مستقل 15^{Amp}، وابستهٔ $\frac{1}{9}V_x$ معادلات KVL را نتوان در حلقه‌های اول و سوم و حتی حلقهٔ کلی تشکیل داد.

بنابراین برای تشکیل سه معادله برحسب جریان حلقه‌ها بشرح زیر عمل میکنیم.

KVL حلقه دوم : $1(I_2 - I_1) + 2(I_2) + 3(I_2 - I_3) = 0.$ (معادله 1)



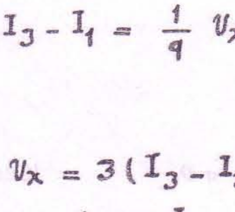
$I_1 = 15$ (معادله 2)



$$I_3 - I_1 = \frac{1}{9} V_x$$

$$V_x = 3(I_3 - I_2)$$

$\Rightarrow 3I_1 - I_2 - 2I_3 = 0.$ (معادله 3)



$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0. \\ 15 \\ 0. \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه ها :

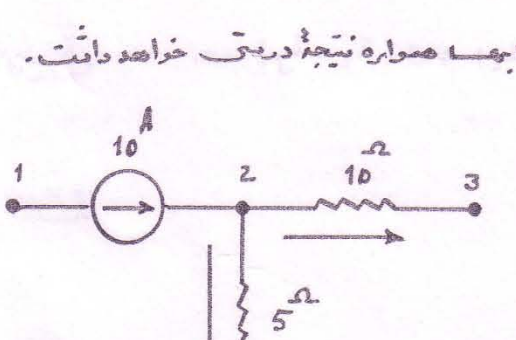
از حل معادلات : $\underline{I_1 = 15^A \ , \ I_2 = 11^A \ , \ I_3 = 17^A}$ نتیجه میشود.

●●● مطالعهٔ روش پتانسیل گره در تحلیل شبکه ها :

در این روش از معادلات kcl برای تحلیل شبکه استفاده میکنند. در این روش یک گره بعنوان گره مبنا با ولتاژ صفر فرض میشود و ولتاژ سایر گره ها نسبت به گره فوق محاسبه میشود. بنابراین برای یک شبکه با n گره (n-1) معادله kcl نوشته میشود و از حل معادلات فوق پتانسیل گره ها محاسبه میشود.

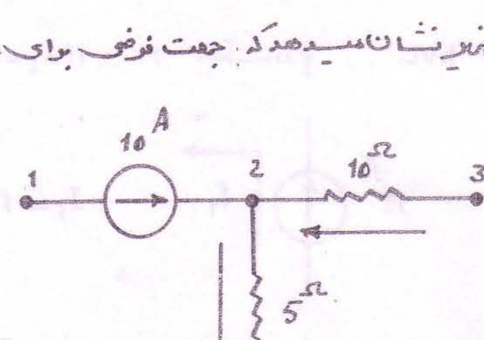
در تشکیل معادله kcl در هر گره معمولاً جریان تمام انشعابهای غیرفعال / مقاومت ها در جهت دور شدن از گره فرض میشود

شکل زیر نشان میدهد که جهت فرض برای جریان انشعابها همواره نتیجهٔ درستی خواهد داشت.



$$kcL\ 2: \quad -10 + \frac{V_2 - V_3}{10} + \frac{V_2}{5} = 0.$$

$$\underline{0{,}3\,V_2 - 0{,}1\,V_3 = 10}$$

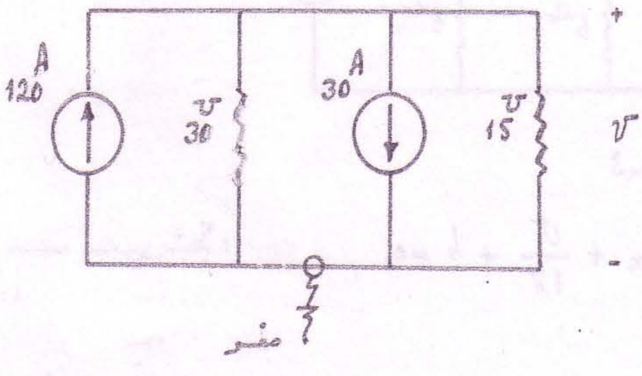


$$kcL2: \quad -10 - \frac{V_3 - V_2}{10} + \frac{V_2}{5} = 0.$$

$$\underline{0{,}3\,V_2 - 0{,}1\,V_3 = 10}$$

تحلیل نقطه‌ای شبکه‌ها با دو گره:

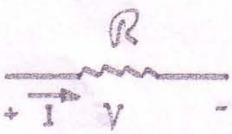
مثال ۱ - با استفاده از روش نقطه‌ای پتانسیل گره، شبکهٔ شکل زیر را تحلیل کنید.

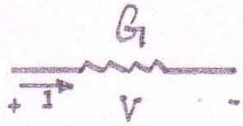


تحلیل شبکه:

KCL گره اصلی : $-120 + 30V + 30 + 15V = 0.$ $\quad V = 2$ volt

توجه داشته باشید که در شبکهٔ فوق بجای مقاومت، هدایت هر شاخه تعریف شده است.





$$G = \frac{1}{R}$$

$$V = RI \qquad I = \frac{V}{R}$$

$$V = RI \Rightarrow V = \frac{1}{G} I \qquad I = G \cdot V$$

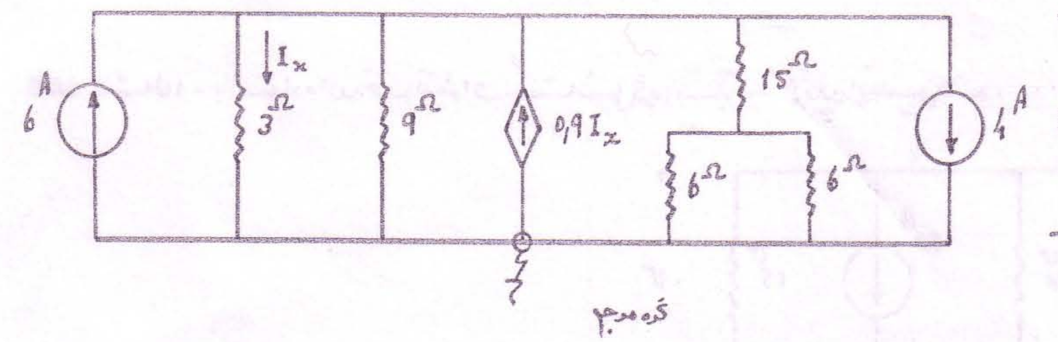
$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \qquad P = GV^2$$

بررسی و تحقیق اصل توازن توان:

$$\Sigma P = 0. \qquad -(120 \times 2) + (30 \times 2^2) + (30 \times 2) + (15 \times 2^2) = 0.$$

$$-240 + 120 + 60 + 60 = 0.$$

●●● مثال ۲- ولتاژ V را در شبکه شکل زیر محاسبه کنید.



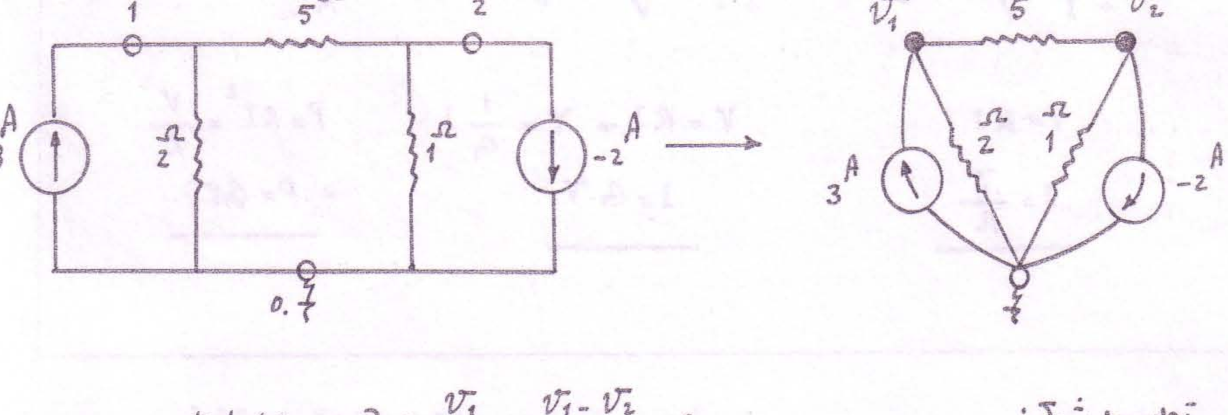
ـــ تحلیل شبکه:

KCL گره اصلی : $-6+\frac{V}{3}+\frac{V}{9}-0,9\,I_x+\frac{V}{18}+4=0.$

$I_x=\frac{V}{3} \longrightarrow -6+\frac{V}{3}+\frac{V}{9}-0,9\,\frac{V}{3}+\frac{V}{18}+4=0. \qquad \underline{V=10^{\text{Volt}}}$

ـــ تحلیل نقطه‌ای شبکه‌های الکتریکی با n گره:

●●● مثال ۳- فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره‌ها را در شبکه شکل زیر تشکیل دهید.



تحلیل شبکه:

KCL 1: $-3+\frac{V_1}{2}+\frac{V_1-V_2}{5}=0.$

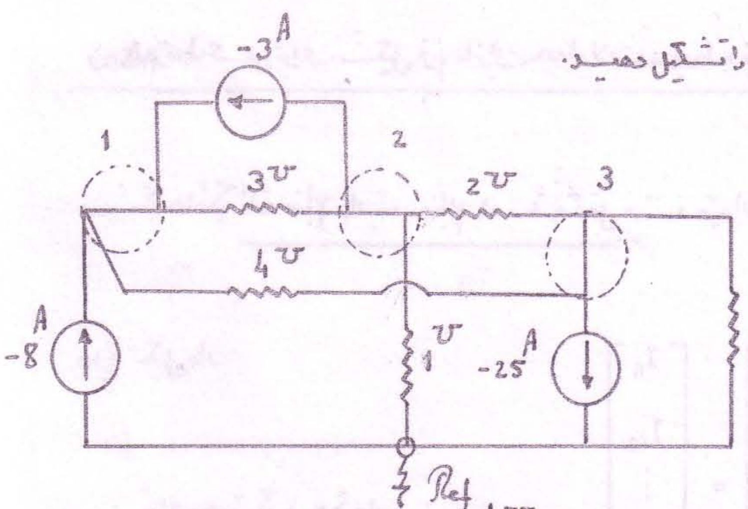
KCL 2: $+(-2)+\frac{V_2}{1}+\frac{V_2-V_1}{5}=0.$

$0,7\,V_1-0,2\,V_2=3 \longrightarrow \begin{bmatrix}0,7 & -0,2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix} \longrightarrow V_1=5^{\text{Volt}}$

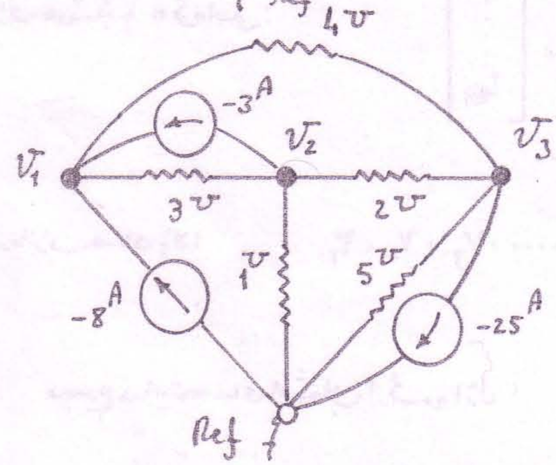
[redacted]

$,2 \quad 1,2 \;]\; [V_2] \; [2] \qquad V_2=2,5^{\text{Volt}} \qquad -0,2\,V_1+1,2\,V_2=2 \qquad [-0,$

مثال ۴ - فرم ماتریسی معادلات پتانسیل گره ها را تشکیل دهید.



تحلیل شکل :



$$
\begin{cases}
\text{KCL1: } -(-8)-(-3)+3(V_1-V_2)+4(V_1-V_3)=0. \\
\text{" 2: } +(-3)+3(V_2-V_1)+1(V_2)+2(V_2-V_3)= \\
\text{" 3: } +(-25)+5(V_3)+2(V_3-V_2)+4(V_3-V_1)=0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
7V_1-3V_2-4V_3=-11 \\
-3V_1+6V_2-2V_3=3 \\
-4V_1-2V_2+11V_3=25
\end{cases}
\longrightarrow
\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ماتریس هدایت ها} \\ 3\times3}}
\cdot
\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ماتریس پتانسیل گره ها} \\ 3\times1}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ماتریس جریان ها} \\ 3\times1}}
$$

از حل معادلات بالا $V_1=1^{Volt}$ ، $V_2=2^{Volt}$ ، $V_3=3^{Volt}$ نتیجه میشود.

میتوان فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها را مستقیماً با استفاده از فرمول کلی تشکیل داد.

فرمول کلی برای تشکیل فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها:

در شبکه هائیکه فاقد منابع وابسته و منابع ولتاژ مستقل هستند میتوان فرم ماتریسی معادلات پتانسیل گره ها را طبق فرمول زیر تشکیل داد.

برای هر شبکه با n گره اصلی:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & \cdots & -G_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \vdots \\ I_{nn} \end{bmatrix}$$

در ماتریس های بالا: V_1 ، V_2 ، V_3 ، .... V_n پتانسیل گره های اصلی شبکه

G_{11} مجموع هدایت های انشعابی از گره اول

$\vdots$

G_{nn} مجموع هدایت های انشعابی از گره n ام

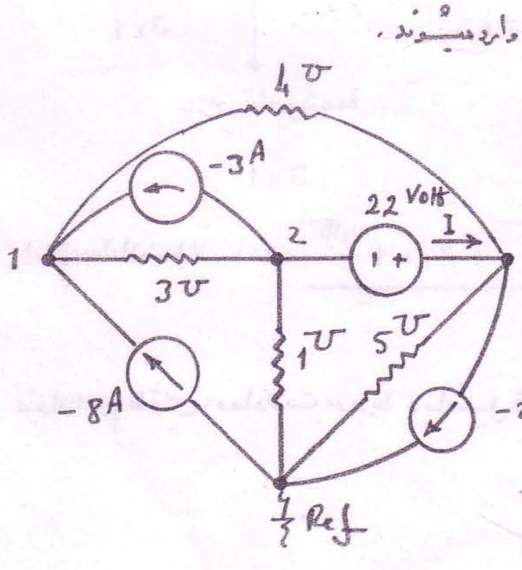
G_{ij} ، ($I \neq J$) مجموع هدایت های واقع بین گره های I ، J

I_{11} مجموع جریانهائیکه از طریق منابع فعال به گره 1 وارد میشوند.

$\vdots$

I_{nn} مجموع جریانهائیکه از طریق منابع فعال به گره n وارد میشوند.

مثال ۵ - مطلوبست فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها:



ـــــ تحلیل مدار : بواسطه حضور منبع ولتاژ مستقل 22^V نمی توان فرم ماتریسی معادلات پتانسیل گره ها را با استفاده از فرمول کلی بدست آورد.

همچنین حضور منبع 22^V مابین گره های اصلی 2، 3 باعث می شود که نتوان معادلات KCL را برای گره ها نوشت. به معادلات زیر توجه کنید.

$$\text{KCL 1:} \quad -(-8)-(-3)+3(V_1-V_2)+4(V_1-V_3)=0.$$

معادله 1

$$\text{KCL 2:} \quad +(-3)+3(V_2-V_1)+1(V_2)+\ ?\ =0.$$

غیر قابل استفاده

$$\text{KCL3:} \quad +(-25)+5(V_3)+4(V_3-V_1)+\ ?\ =0.$$

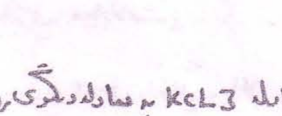
غیر قابل استفاده

همانطوریکه ملاحظه می شود از معادلات بالا فقط معادله KCL در گره 1 قابل استفاده بوده و مابقی عملاً بکار گرفته نمی شود. البته می توان با تعریف جریان I در منبع 22 ولت و ترکیب معادله KCL 2 ، معادله KCL3 به معادله دیگری رسید. توجه کنید.

$$\begin{cases} \text{KCL2:} & +(-3)+3(V_2-V_1)+1(V_2)+I=0. \\ & + \\ \text{KCL3:} & +(-25)+5(V_3)+4(V_3-V_1)-I=0. \end{cases}$$

$$+(-3)+(-25)+3(V_2-V_1)+5(V_3)+1(V_2)+4(V_3-V_1)=0.$$

معادله 2



معادله 3 با استفاده از منبع 22^V و با توجه به ولتاژ گره های 2، 3 نوشته می شود.

$$V_3 - V_2 = +22$$

معادله 3

حال با حل سه معادله بالا ولتاژهای V_1، V_2، V_3 محاسبه می شود.

تعریف فوق گره: در هر شکل دو گره اصلی و منبع ولتاژ دائم بین آنها را میتوان یک فوق گره در نظر گرفت.

و قانون KCL را برای آن نوشت.

تشکیل معادله 2 بکمک تعریف فوق گره:

KCL فوق گره: $+(-3)+3(V_2-V_1)+1(V_2)+(-25)+5(V_3)+4(V_3-V_1)=0.$

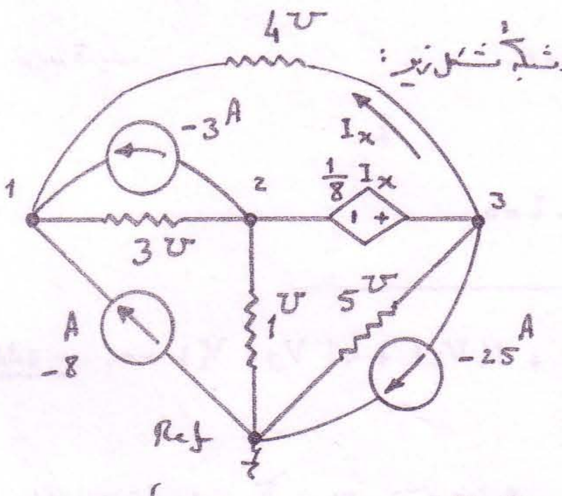
تشکیل فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها:

$$\begin{cases} 7V_1-3V_2-4V_3=-11 \\ -7V_1+4V_2+9V_3=28 \\ 0V_1-V_2+V_3=22 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -7 & +4 & +9 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 28 \\ 22 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی معادلات:

از حل ماتریس بالا V_1، V_2، V_3 محاسبه میشوند.

مثال ۶- مطلوبست محاسبهٔ ولتاژهای V_1، V_2، V_3 در شکل زیر:



تحلیل شکل: معادله KCL در گره 1، فوق گره 2 و 3، و معادله سوم را بکمک منبع ولتاژ وابسته در مدار تشکیل میدهیم.

$$\begin{cases} \text{KCL1:} & -(-3)-(-8)+3(V_1-V_2)+4(V_1-V_3)=0. & \text{معادله 1} \\ \text{KCL 2,3 فوق گره:} & +(-3)+1(V_2)+3(V_2-V_1)+5(V_3)+(-25)+4(V_3-V_1)=0. & \text{معادله 2} \\ \text{در منبع وابسته} & V_3-V_2=\frac{1}{8}I_x \;,\; I_x=4(V_3-V_1) \longrightarrow V_1-2V_2+V_3=0. & \text{معادله 3} \end{cases}$$

فرم ماتریسی معادلات بالا:

$$\begin{bmatrix} +7 & -3 & -4 \\ -7 & +4 & +9 \\ +1 & -2 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس هدایت ها | ماتریس جریانها

ماتریس پتانسیل گره ها

ـــ از حل معادلات بالا ولتاژهای V_1 ، V_2 ، V_3 محاسبه میشوند

$$V_1 = 1^{\,volt} \quad , \quad V_2 = 2^{\,volt} \quad , \quad V_3 = 3^{\,volt}$$

●●● خاصیت خطی و جمع آثار:

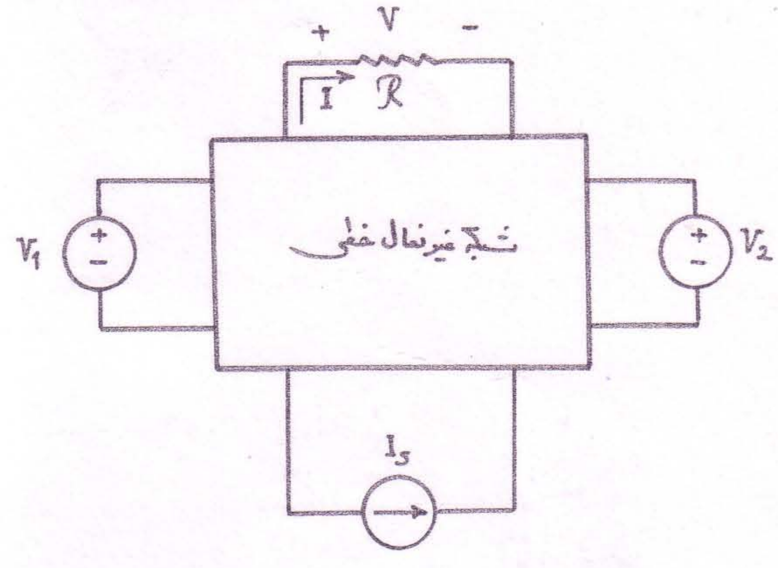
●● الف - خاصیت خطی:

در هر شبکه با عناصر خطی نسبت تابع تحریک به پاسخ آن در هر نقطه از شبکه مقداری است ثابت. بطوریکه اگر مقدار توابع تحریک شبکه k برابر شود، پاسخ آن نیز در هر موقعیت از شبکه k برابر خواهد شد.

با استفاده از خاصیت خطی میتوان قضیهٔ جمع آثار را در شبکه های خطی بصورت زیر بیان کرد.

●● ب - قضیهٔ جمع آثار:

در هر شبکهٔ خطی با چندین تابع تحریک، شدت جریان یا اختلاف پتانسیل دوسر هر یک از عناصر شبکه از جمع جبری شدت جریانها یا اختلاف پتانسیل های ایجاد میشود که هر کدام از منابع (توابع تحریک) به تنهایی در آن عنصر ایجاد میکنند.



● برای محاسبه پاسخ مربوط به هر منبع تحریک

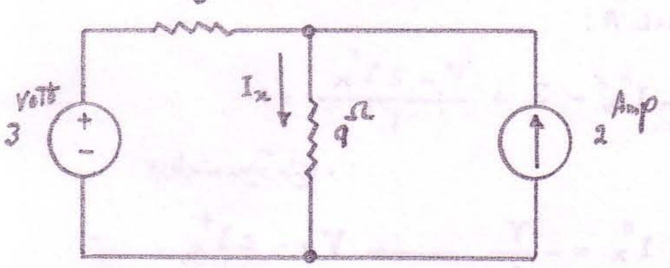
باید منابع ولتاژ دیگر را اتصال کوتاه و منابع جریان

را باز کرد.

$$I = I_1 \Big|_{\text{توسط منبع ولتاژ } V_1} + I_2 \Big|_{\text{توسط منبع ولتاژ } V_2} + I_3 \Big|_{\text{توسط منبع جریان } I_s}$$

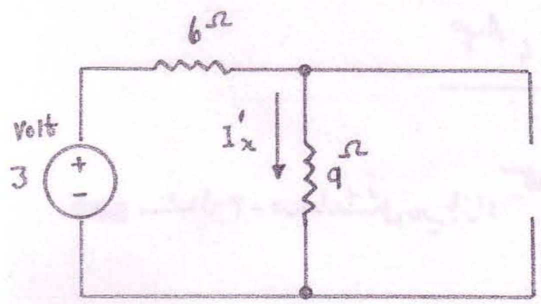
$$V = V'_1 \Big|_{\text{توسط منبع ولتاژ } V_1} + V'_2 \Big|_{\text{توسط منبع ولتاژ } V_2} + V'_3 \Big|_{\text{توسط منبع جریان } I_s}$$

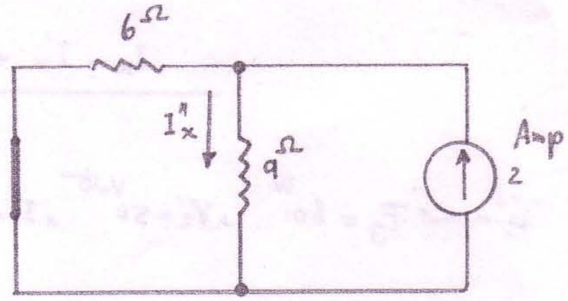
مثال ۱ـ شدت جریان I_x را با استفاده از تئوری جمع آثار محاسبه کنید.



ـــ تحلیل شبکه:

$$I_x = I'_x \Big|_{\text{توسط } 3^V} + I''_x \Big|_{\text{توسط } 2^A}$$



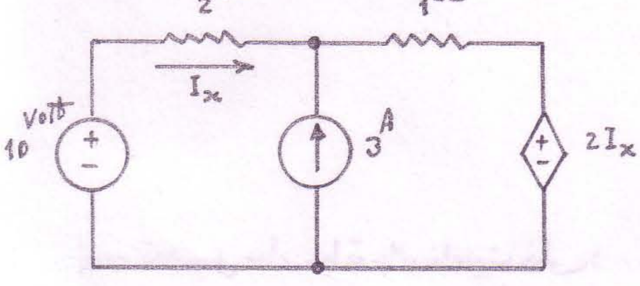


$$I'_x = \frac{3}{6+9} = 0{,}2^{\,Amp}$$

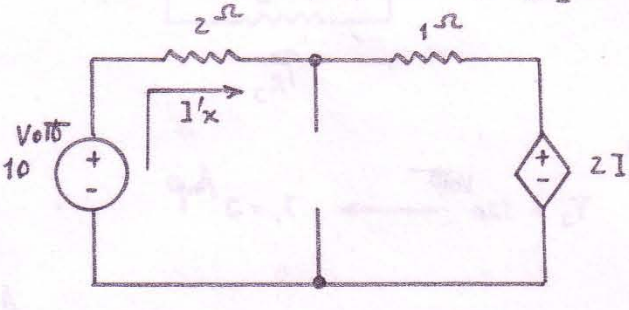
$$I''_x = \frac{6}{6+9} \times 2 = 0{,}8^{\,Amp}$$

$$\underline{I_x = 0{,}2 + 0{,}8 = 1^{\,Amp}}$$

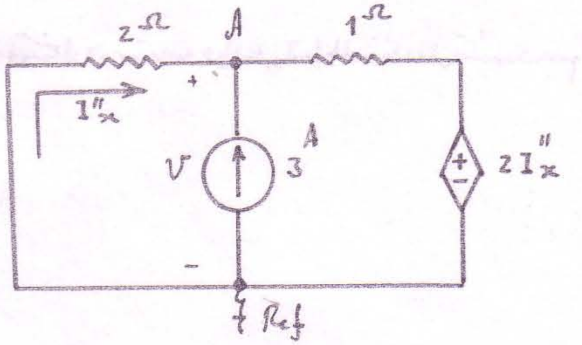
مثال ۲ـ مطلوبست محاسبه I_x با استفاده از اصل جمع آثارها:



ـــ تحلیل شبکه: محاسبه I'_x



$$KVL \circlearrowright : \quad -10 + 2I'_x + 1I'_x + 2I'_x = 0 \qquad \underline{I'_x = 2^{\,Amp}}$$



ب - محاسبه I''_x:

KCL A:

$$-I''_x - 3 + \frac{V - 2I''_x}{1} = 0.$$

از طرف دیگر داریم.

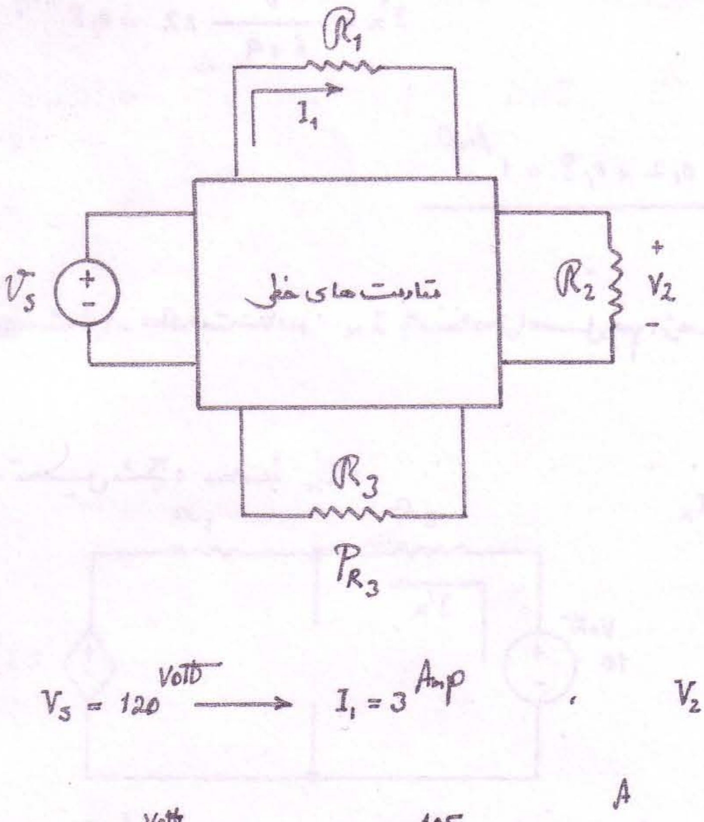
$$I''_x = -\frac{V}{2} \longrightarrow V = -2I''_x$$

$$-I''_x - 3 - 2I''_x - I''_x = 0. \qquad \underline{I''_x = -0{,}6^{Amp}}$$

$$\underline{I_x = I'_x + I''_x = 2 - 0{,}6 = 1{,}4^{Amp}}$$

مثال ۳ - در مدار شکل زیر بازاء $V_S = 120^{Volt}$ ، $I_1 = 3^{Amp}$ و $V_2 = 50^{Volt}$ و $P_3 = 60^{W}$ می‌شود

حال اگر V_S را کاهش داده به 105^{Volt} برسانیم مقادیر جدید I_1 ، V_2 ، P_3 را بدست آورید.



تحلیل مدار - با توجه به خاصیت خطی:

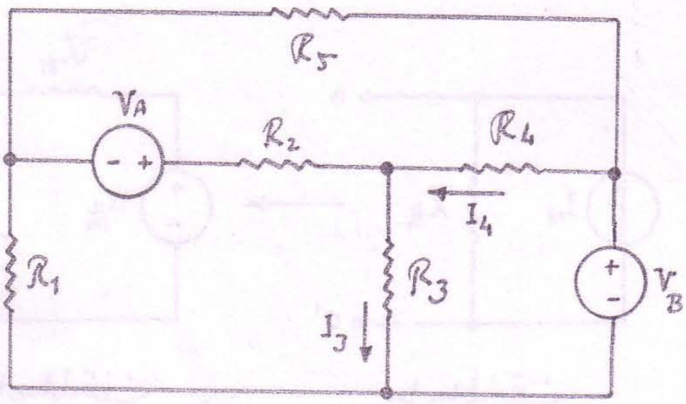
$$V_S = 120^{Volt} \longrightarrow I_1 = 3^{Amp} \quad , \quad V_2 = 50^{Volt} \quad , \quad P_3 = 60^{W}$$

$$V_S = 105^{Volt} \longrightarrow I_1 = \frac{105}{120} \times 3 = 2{,}625^{A} \ , \ V_2 = \frac{105}{120} \times 50 = 43{,}75^{Volt}$$

$$P_3 = \underline{\left(\frac{105}{120}\right)^2} \times 60 = 45{,}94^{W}$$

مثال ۴ - در مدار شکل زیر: اگر $V_A = 20^V$ ، $V_B = 0$ باشد، مقدار $I_3 = 1,5^{Amp}$ است. اگر $V_A = 50^{Volts}$ ، $V_B = 0.$ باشد، I_3 چند آمپر خواهد بود.

ثانیاً اگر $V_A = 20^V$ ، $V_B = 50^V$ باشد. $I_4 = 2^{Amp}$ است. اگر $V_A = 50^V$ ، $V_B = 20^V$ باشد $I_4 = -1^A$ است. اگر $V_A = 30^V$ ، $V_B = 100^V$ باشد. I_4 را محاسبه کنید.



ـــ تحلیل شکل: الف ـ

$$V_A = 20^V ,\ V_B = 0. \longrightarrow I_3 = 1,5^{Amp} \xrightarrow{\text{خاصیت خطی}} V_A = 50^V ,\ V_B = 0. \longrightarrow I_3 = \frac{50}{20} \times 1,5$$

ب ـ

$$\left.\begin{array}{l} V_A = 20^V ,\ V_B = 50^V \longrightarrow I_4 = 2^A \\ \\ V_A = 50^V ,\ V_B = 20^V \longrightarrow I_4 = -1^A \end{array}\right\} V_A = 30^V ,\ V_B = 100^V \longrightarrow I_4 = ?$$

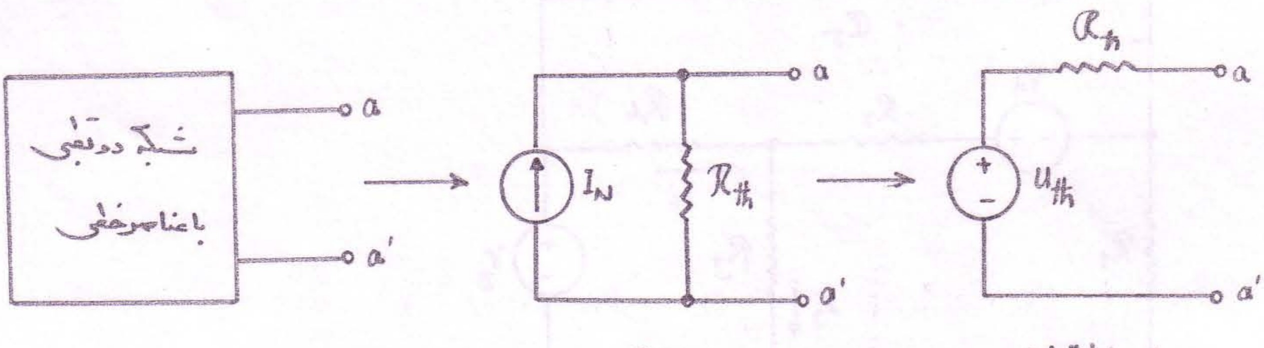
با استفاده از خاصیت خطی در شبکه‌ها:

$$\begin{cases} 20K_1 + 50K_2 = 2 \\ \\ 50K_1 + 20K_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -\dfrac{4,5}{105} \\ \\ k_2 = \dfrac{6}{105} \end{cases}$$

$$I_4 = 30k_1 + 100k_2 = 30 \times \frac{-4,5}{105} + 100 \times \frac{6}{105} = 4,429^{Amp}$$

قضایای تونن و نورتن :

هرگاه یک شبکه با عناصر خطی را از دیدگاه دو نقطه a'، a مطابق شکل بصورت یک منبع ولتاژ با یک مقاومت سری مدلسازی کنیم. مدار معادل تونن آن شبکه را تعریف کرده‌ایم و اگر چنانچه آن را بصورت یک منبع جریان با مقاومت موازی مدلسازی کنیم مدار معادل نورتن شبکه را بدست آورده‌ایم.



مدار معادل نورتن　　　　مدار معادل تونن

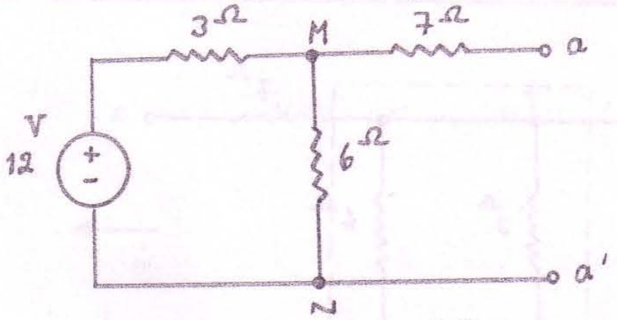
ولتاژ تونن V_{th}، جریان نورتن I_N و R_{th} مقاومت تونن را میتوان از روابط زیر محاسبه کرد.

1) $V_{th} = V_{aa'}\Big|_{I_{aa'}=0}$　　2) $I_N = I_{aa'}\Big|_{V_{aa'}=0}$　　3) $R_{th} = R_{eq\,aa'}\Big|_{\text{با حذف منابع}} = \dfrac{V_{th}}{I_N}$

میتوان گفت ولتاژ تونن ولتاژی است که توسط ولتمتر در نقاط a'، a سنجیده میشود و همچنین جریان نورتن I_N جریان سنجش شده توسط آمپرمتر در موقعیت a'، a میباشد.

برای محاسبه مدار معادل تونن و نورتن علاوه بر روابط بالا میتوان از روش تبدیل منابع، روش معادله مشخصه استفاده کرد. مثالهای زیر این روشها را نشان میدهند.

●●● مثال ۱ـ مطلوبست محاسبهٔ مدار معادل تونن و نورتن شبکهٔ شکل زیر از دیدگاه a ، a' :



ـــ تحلیل شبکه : محاسبهٔ مدار معادل تونن و نورتن با استفاده از روابط تعریف شده :

$$\boxed{1}\quad V_{th} = V_{aa'}\Big|_{I_{aa'}=0.} \qquad I_{aa'} = 0. \longrightarrow V_{aa'} = V_{MN} = \frac{6}{3+6} \times 12 = 8^{\,Volt}$$

$$V_{th} = 8^{\,Volt}$$

$$\boxed{2}\quad I_N = I_{aa'}\Big|_{V_{aa'}=0.}$$

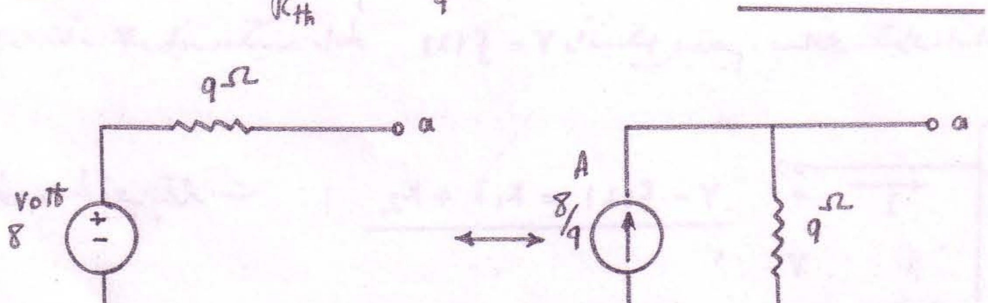
با اتصال کوتاه کردن a ، a' بمنظور ایجاد شرط $V_{aa'} = 0.$

برای محاسبه I_N باید شبکه درحلقه‌ای تشکیل شده تحلیل شود، که این روش نسبتاً طولانی است لذا از رابطه

(3) ابتدا R_{th} را محاسبه و سپس I_N را با استفاده از رابطه $I_N = \dfrac{V_{th}}{R_{th}}$ محاسبه میکنیم.

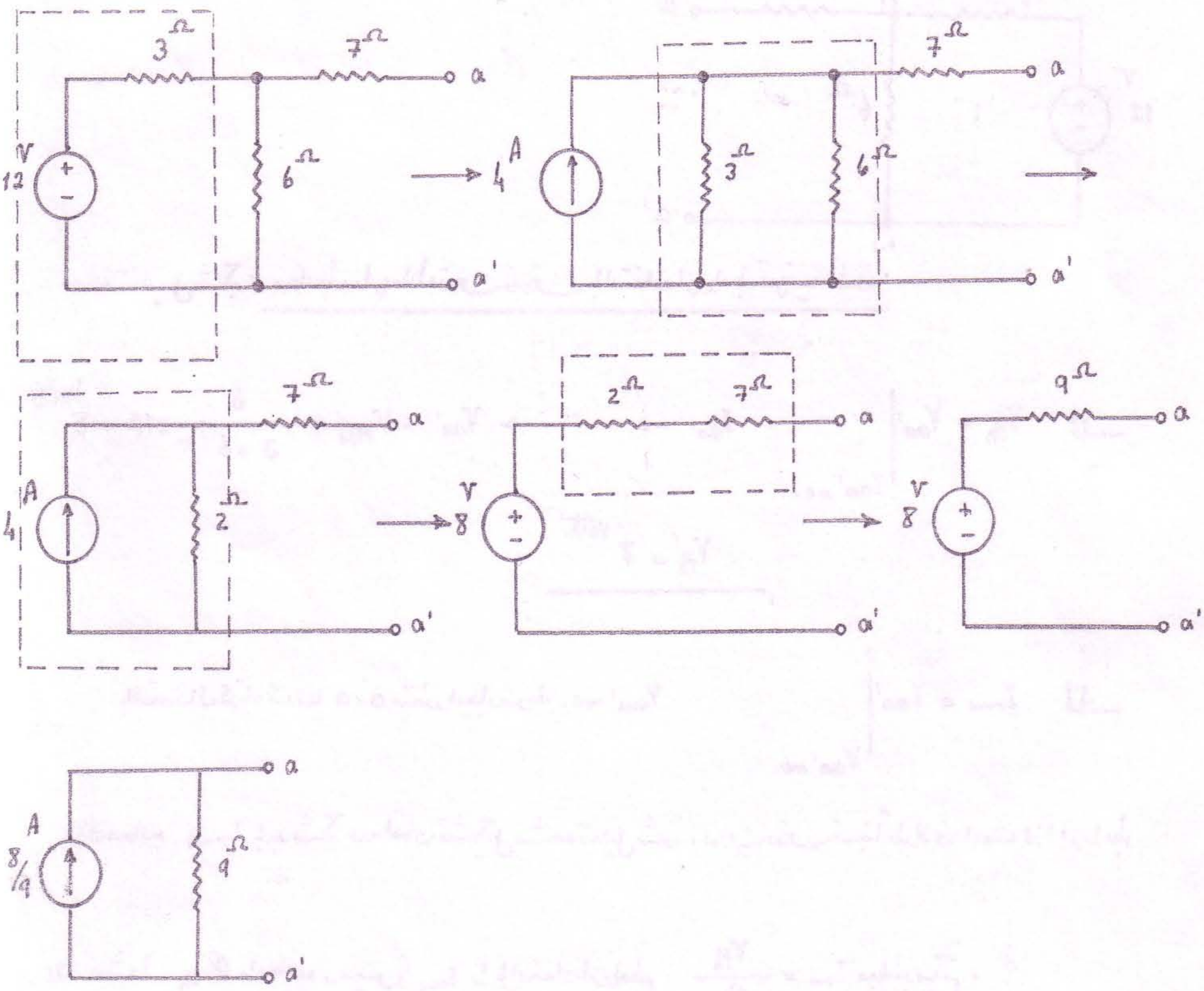
$$\boxed{3}\quad R_{th} = R_{eq\,aa'}\Big|_{\text{با اتصال کوتاه منبع } 12^V} = 7 + \frac{6 \times 3}{6+3} = 9^{\Omega} \qquad R_{th} = 9^{\Omega}$$

$$\boxed{4}\quad I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{8}{9}^{A} \qquad I_N = 8/9^{\,Amp}$$



مدار معادل تونن مدار معادل نورتن

—— روش دوم - محاسبهٔ مدار معادل نورتن و تونن با استفاده از روش تبدیل منابع :

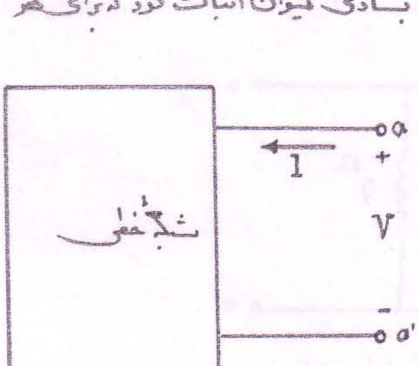


—— روش سوم - روش معادلهٔ مشخصه :

در این روش شبکه را از دیدگاه نقاط a ، a' به ولتاژ V وصل کرده و پس با فرض اینکه شبکه جریان I

به ازای هر ولتاژ V دریافت میکند رابطهٔ $V = f(I)$ را تشکیل میدهیم . به سادگی میتوان اثبات کرد که برای هر

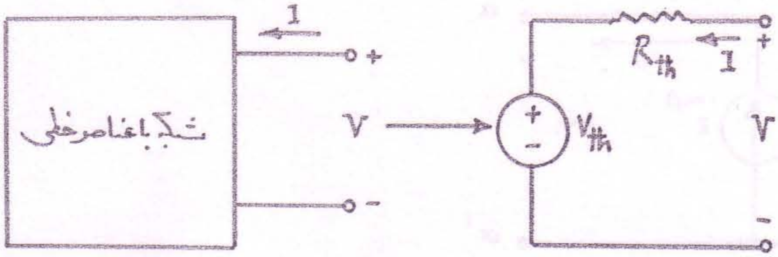
شبکهٔ خطی رابطهٔ زیر برقرار است



$$V = f(I) = K_1 I + K_2$$

در معادلهٔ مشخصهٔ بالا $K_1 = R_{th}$ ، $K_2 = V_{th}$ ، $\frac{K_2}{K_1} = I$

برای اثبات مطلب فوق کافیست مدار معادل تونن شبکه را در نظر گرفته و معادله KVL را تشکیل دهیم.



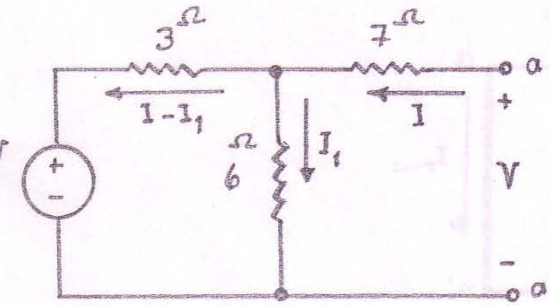
$$KVL\ \circlearrowright : \quad V = R_{th} I + V_{th}$$

$$V = K_1 I + K_2$$

مقایسهٔ روابط بالا نشان میدهد که

$$K_1 = R_{th} \ ,\quad K_2 = V_{th} \ ,\quad I_{\text{س}} = \frac{K_2}{K_1}$$

ـــ روش معادله مشخصه در محاسبه مدار معادل تونن و نورتن :

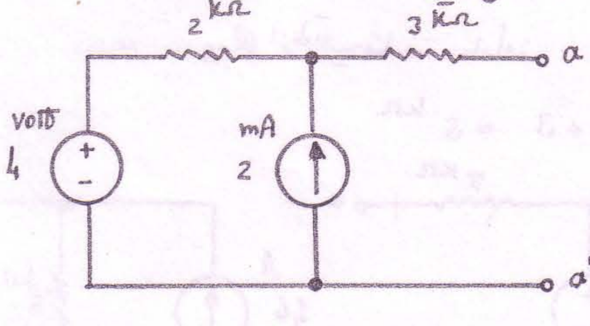


برای تشکیل رابطهٔ $V = f(I) = K_1 I + K_2$ معادلات KVL را در حلقه های مشخص شده در شکل تشکیل میدهیم.

$$\begin{cases} KVL\ \circlearrowright 1: & V = 7I + 6I_1 \\ KVL\ \circlearrowright 2: & V = 7I + 3(I - I_1) + 12 \end{cases} \xrightarrow[\text{با حذف}]{I_1} V = 9I + 8$$

بنابراین: $R_{th} = K_1 = 9^{\Omega}$ ، $V_{th} = K_2 = 8^{volt}$ ، $I_{\text{س}} = K_2/K_1 = 8/9^{Amp}$ نتیجه میشود

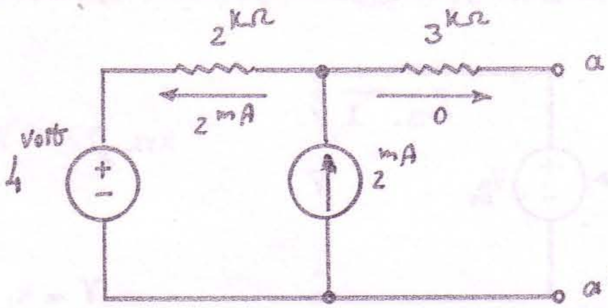
مثال ۲- مطلوبست محاسبهٔ مدار معادل تونن و نورتن شبکهٔ شکل زیر:



تحلیل شبکه:

① $V_{th} = V_{aa'}\Big|_{I_{aa'}=0}.$

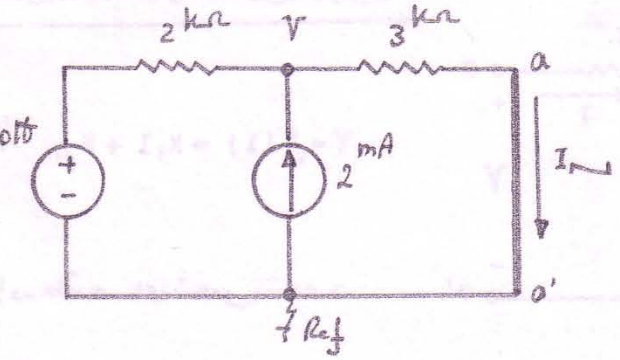
$I_{aa'} = 0.$



KVL ↻ : $V_{aa'} = 3000 \times 0 + 2000 \times \frac{2}{1000} + 4$ $\qquad \underline{V_{th} = 8^{\text{Volt}}}$

(2) $\quad I_{sc} = I_{aa'} \Big|_{V_{aa'} = 0.}$

$V_{aa'} = 0. \longrightarrow$



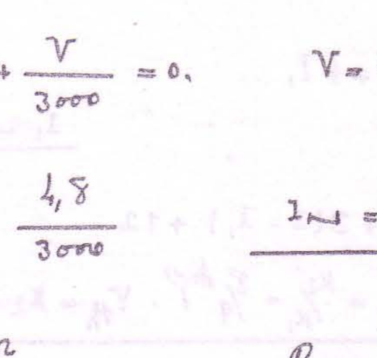
kcl گره‌ای : $\frac{V-4}{2000} - \frac{2}{1000} + \frac{V}{3000} = 0. \qquad V = 4{,}8^{\text{Volt}}$

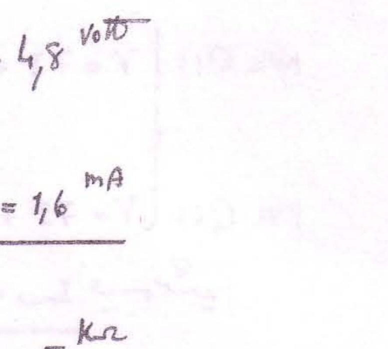
$I_{sc} = \frac{V}{3000} = \frac{4{,}8}{3000} \qquad \underline{I_{sc} = 1{,}6^{\text{mA}}}$

(3) $\quad R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{8}{1{,}6\,\text{mA}} = 5^{\text{k}\Omega} \qquad \underline{R_{th} = 5^{\text{k}\Omega}}$

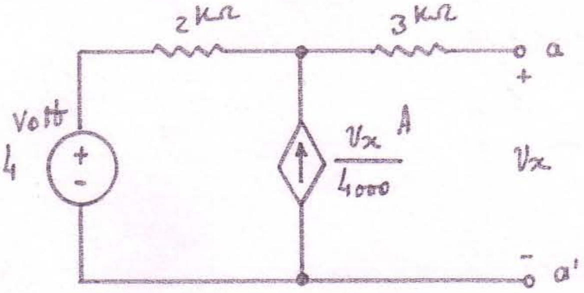
محاسبه R_{th} از طریق مقاومت معادل:

$R_{th} = R_{eq\,aa'} \Big|_{\text{با اتصال کوتاه منبع } 4^V \text{، باز } 2^A} = 2 + 3 = 5^{\text{k}\Omega}$





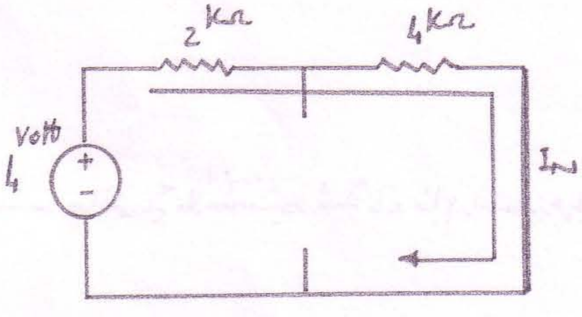
مثال 3 - مدار معادل تونن و نورتن شبکه شکل زیر را از دیدگاه پایانه های a ، a' محاسبه کنید.



(1) $V_{th} = V_{aa'}\Big|_{I_{aa'}=0}$ $\quad I_{aa'}=0 \longrightarrow V_x = 0 + 2000 \times \frac{V_x}{4000} + 4$

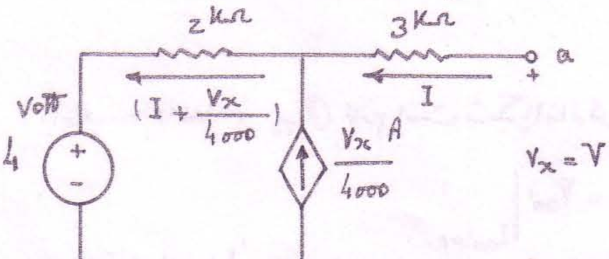
$V_x = \frac{1}{2}V_x + 4 \qquad V_x = 8 \qquad \underline{V_{th} = 8^{\,Volt}}$

(2) $I_N = I_{aa'}\Big|_{V_{aa'}=0}$ $\quad V_{aa'}=0 \longrightarrow V_x = 0 \longrightarrow$ منبع جریان وابسته باز میشود.



$$\underline{I_N = \frac{4}{2+3} = 0{,}8^{\,mA}}$$

$R_{th} = R_{eq_{aa'}}\Big|_{\text{با حذف منبع } 4V}$ غیرقابل استفاده ، $\underline{R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = 10^{\,K\Omega}}$



—— تحلیل روش معادله مشخصه :

$KVL \; : \; V_x = 3000I + 2000\left(I + \frac{V_x}{4000}\right) + 4$

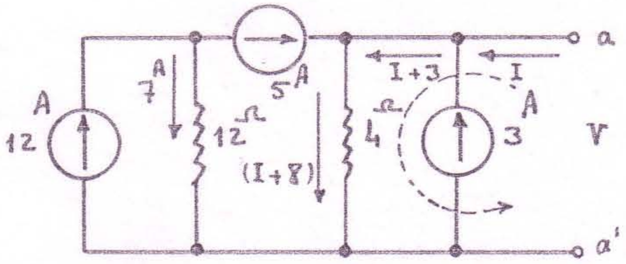
$V_x = 3000I + 2000I + \frac{1}{2}V_x + 4$

$V = V_x = 10{,}000\,I + 8$

فرم کلی $V = k_1 I + k_2$

$$\underline{R_{th} = k_1 = 10^{\,K\Omega} \;,\; V_{th} = k_2 = 8^{\,Volt} \;,\; I_N = k_2/k_1 = 0{,}8^{\,mA}}$$

مثال ۴ - معادلهٔ مشخصهٔ شبکهٔ شکل زیر را تشکیل داده و مدار معادل تونن و نورتن آنرا بدست آورید.



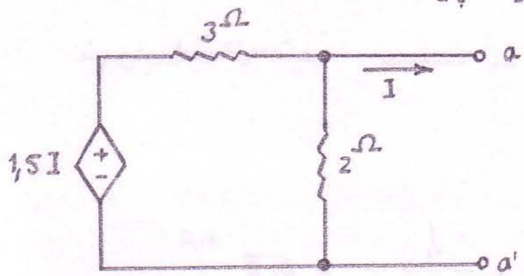
ـــ تشکیل معادلهٔ مشخصه:

$$V = f(I) = K_1 I + K_2$$

$$KVL \; C: \quad V = 4(I+8) \longrightarrow V = 4I + 32$$

$$R_{th} = 4^{\Omega} \;,\quad V_{th} = 32^{Volt} \;,\quad I_{N} = \frac{V_{th}}{R_{th}} = 8^{Amp}$$

مثال ۵ - مطلوبست محاسبهٔ مدار معادل تونن و نورتن شبکه از دیدگاه پایانه‌های a، a':



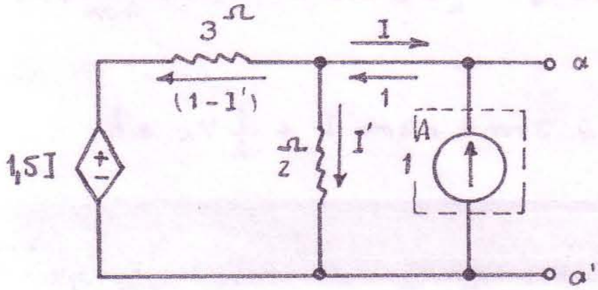
ـــ همانطوریکه ملاحظه میشود شبکه فاقد منابع ولتاژ و جریان مستقل میباشد. لذا شبکه غیرفعال بوده و ولتاژ تونن و جریان

نورتن معادل صفر میباشد و مدار معادل تونن و نورتن شبکه فقط شامل مقاومت اهمی R_{th} خواهد بود.

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{N}} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

، $R_{th} = R_{eq\,aa'}$ بواسطهٔ حضور منبع وابسته غیرقابل استفاده

بنابراین برای محاسبه R_{th} لازم است شبکه با اضافه کردن منبع جریان 1^{Amp} فعال گردد.



$$V_{th} = V_{aa'}\Big|_{I_{aa'}=0}$$

با استفاده از معادلهٔ KVL:

$$V_{aa'} = 2I' \;,\quad V_{aa'} = 3(1 - I') + 1,5(-1)$$

$$2I' = 3(1 - I') - 1,5 \longrightarrow \underline{I' = 0,3^{A}}$$

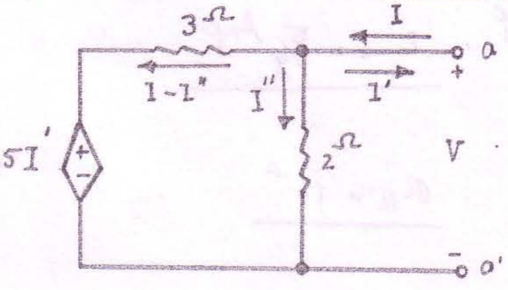
$$V_{th} = V_{aa'} = 2I' = 0,6^{Volt} \qquad \underline{V_{th} = 0,6^{V}} \qquad I_{N} = I_{aa'}\Big|_{V_{aa'}=0} \qquad \underline{I_{N} = 1^{Amp}}$$

$I_N = 1^{Amp}$

توجه داشته باشید با اتصال کوتاه کردن a ، a' کل شبکه غیرفعال از مدار خارج شده ، اتصال a ، a' از طریق منبع 1^{Amp} تغذیه میشود .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} \longrightarrow R_{th} = 0{,}6^{\Omega}$$

روش معادله مشخصه : عموماً محاسبه مدار معادل تونن ، نورتن شبکه‌های غیرفعال با استفاده از معادله مشخصه انجام میگیرد .



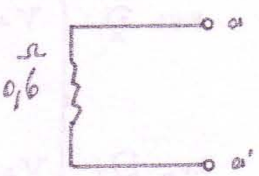
$$V = f(I) = k_1 I + k_2$$

$$V = 2I'' \quad , \quad V = 3(I - I'') + 1{,}5(-I)$$

حذف کن

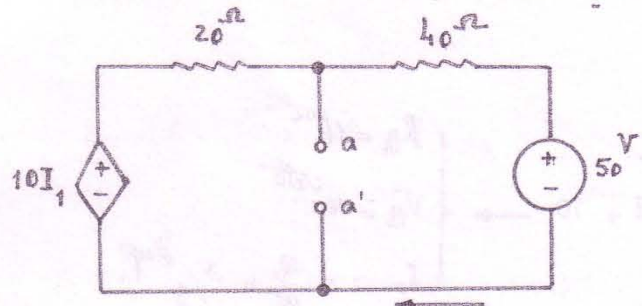
تطبیق $\quad V = 0{,}6\, I \quad , \quad V = k_1 I + k_2$

$R_{th} = 0{,}6 \qquad V_{th} = 0 \qquad I_N = 0$



مدار معادل تونن ، نورتن از دیدگاه a ، a'

مثال 6 - مطلوبست محاسبه مدار معادل تونن ، نورتن از دیدگاه a ، a' :



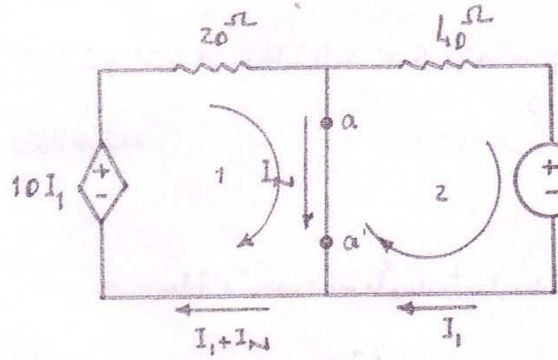
(1) $\quad V_{th} = V_{aa'}\Big|_{I_{aa'}=0} \qquad I_{aa'} = 0 \qquad KVL: \quad -10I_1 + 20I_1 + 40I_1 + 50 = 0$

$\underline{I_1 = -1^{Amp}} \qquad V_{th} = V_{aa'} = 40(-1) + 50 = 10^{Volt} \qquad \underline{V_{th} = 10^{Volt}}$

(2) $\quad I_N = I_{aa'}\Big|_{V_{aa'}=0}$

برای محاسبه I_N نقاط a ، a' را اتصال کوتاه میکنیم .

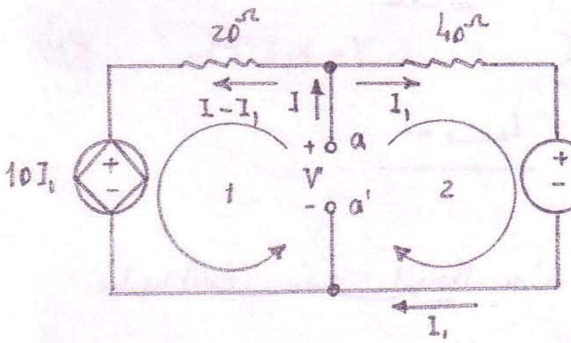
محاسبهٔ I_{sc} :



$$\text{KVL } 1): \begin{cases} -10 I_1 + 20(I_1 + I_{sc}) = 0 \\ +50 + 40 I_1 = 0 \end{cases} \quad \text{KVL } 2)$$

$$I_1 = -\frac{5}{4}\ \text{Amp} \ ,\quad \underline{I_{sc} = \frac{5}{8}\ \text{Amp}}$$

(3) $$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{10}{5/8} = 16^{\Omega} \qquad \underline{R_{th} = 16^{\Omega}}$$



ـــــ روش معادلهٔ مشخصه: $V = f(I) = k_1 I + k_2$

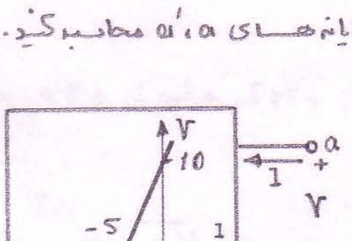
$$\text{KVL } 1): \begin{cases} V = 20(I - I_1) + 10 I_1 \\ V = 40 I_1 + 50 \end{cases} \quad \text{KVL } 2)$$

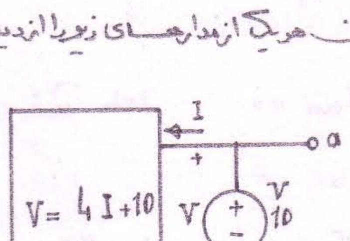
$$4 \begin{cases} V = 20I - 10 I_1 \\ V = 40 I_1 + 50 \end{cases} \quad +$$

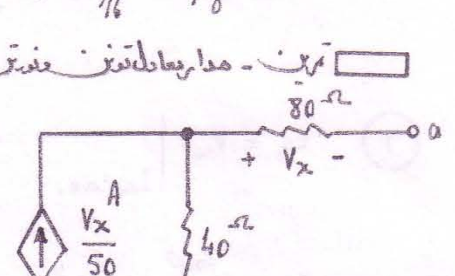
$$5V = 20 \times 4 I + 50$$

$$V = 16 I + 10 \longrightarrow \begin{cases} R_{th} = 16^{\Omega} \\ V_{th} = 10^{\text{volt}} \\ I_{sc} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}\ \text{Amp} \end{cases}$$

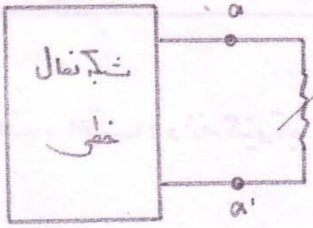
تمرین - مدار معادل تونن هر یک از مدارهای زیر را از دیدگاه پایانه‌های a، a' محاسبه کنید.





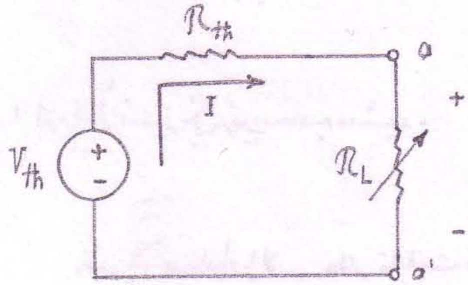


قضیهٔ انتقال حداکثر توان :



در یک شبکه فعال خطی وقتی حداکثر توان به بار R_L تحویل داده میشود که

$$R_L = R_{th}$$



اثبات : مدار معادل تونن شبکه فعال خطی را از دیدگاه a ، a' در نظر میگیریم .

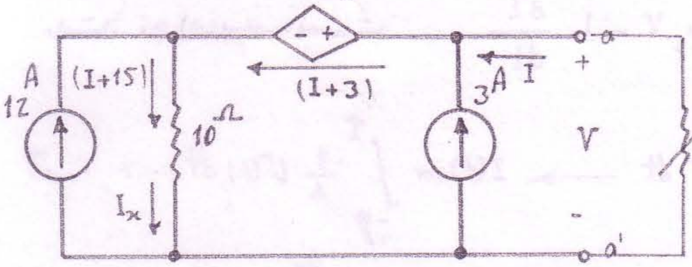
$$P = R_L I^2 = R_L \left(\frac{V_{th}}{R_L + R_{th}} \right)^2 \rightarrow P = \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2} \cdot V_{th}^2$$

$$\frac{dP}{dR_L} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_L + R_{th})^2 - 2R_L(R_L + R_{th})}{(R_L + R_{th})^4} V_{th}^2 = 0$$

$$R_L^2 + R_{th}^2 + 2R_L R_{th} - 2R_L^2 - 2R_L R_{th} = 0 \qquad \boxed{R_L = R_{th}}$$

رابطه بالا در مدارهای عملی تحت عنوان تطبیق امپدانس نامیده میشود .

مثال- در مدار شکل زیر R_L را بازای انتقال حداکثر توان محاسبه کنید .



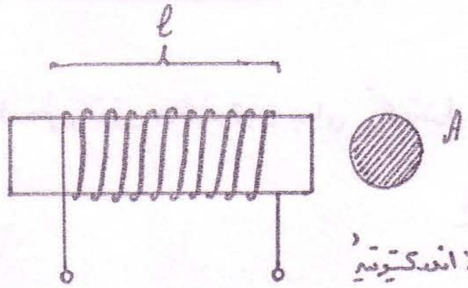
معادله مشخصه $V = f(I)$ را تشکیل میدهیم .

$$V = +5I_x + 10I_x \quad , \quad I_x = I + 15$$

$$V = 15(I + 15) \qquad V = 15I + 225 \qquad R_{th} = 15^{\Omega}$$

بازای انتقال حداکثر

$$R_L = R_{th} = 15^{\Omega}$$



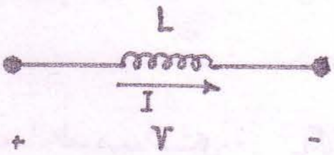
الف - القاء و اندوکتیویته L :

برای یک بوبین یا سیم پیچ با مشخصات فیزیکی مطابق شکل بالا اندوکتیویته L از رابطه فیزیکی زیر محاسبه میشود.

$$\boxed{L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \cdot A}{\ell}}$$

بطوریکه در رابطه بالا μ_0 قابلیت نفوذ مغناطیسی خلاء ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$) و μ_r قابلیت نفوذ مغناطیسی نسبی ، N تعداد حلقه ها ، ℓ طول بوبین و A سطح مقطع بوبین میباشد.

واحد L هانری بوده و با H نشان داده میشود و در مدارهای الکتریکی سمبل آن بصورت زیر میباشد.



رابطه الکتریکی سلف : تجربه نشان میدهد که رابطه بین ولتاژ و جریان سلف بصورت $V = L\frac{dI}{dt}$ میباشد. ولذا میتوان جریان $I(t)$ را از رابطه زیر بدست آورد.

$$V = L\frac{dI}{dt} \longrightarrow dI = \frac{1}{L} V \cdot dt \longrightarrow I(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{L} V(t)\, dt \longrightarrow$$

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V(t)\, dt \longrightarrow I(t) = I(0^+) + \frac{1}{L}\int_{0^+}^{t} V(t)\, dt$$

بنابراین :

$$\boxed{V = L\frac{dI}{dt}} \qquad \boxed{I(t) = I(0^+) + \frac{1}{L}\int_{0^+}^{t} V(t)\, dt}$$

خواص فیزیکی عنصر سلف یا اندوکتانس L :

I - اختلاف پتانسیل دو سر سلف متناسب است با تغییرات جریان عبوری از آن ، بطوریکه هرچه تغییرات جریان عبوری از آن بیشتر باشد اختلاف پتانسیل دو سر آن بیشتر و بالعکس $\left(V = L \frac{dI}{dt} \right)$

II - در شبکه های جریان مستقیم با توجه به اینکه $\frac{dI}{dt} = 0$ می باشد، اختلاف پتانسیل دو سر سلف مساوی صفر باشد :

بعبارت دیگر در شبکه های جریان مستقیم سلف به مشابهٔ اتصال کوتاه عمل میکند.

III - سلف با تغییرات سریع (آنی) جریان بشدت مخالفت میکند. $I(0^+) = I(0^-)$

IV - سلف برخلاف مقاومت هرگز مصرف کنندهٔ انرژی نبوده بلکه آنرا درخود ذخیره میکند. $W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2$

— محاسبهٔ انرژی ذخیره شده در سلف : میدانیم : $p = v \cdot i$

$$p = v \cdot i \longrightarrow p = L \frac{dI}{dt} \cdot I \longrightarrow p \cdot dt = L I \, dI$$

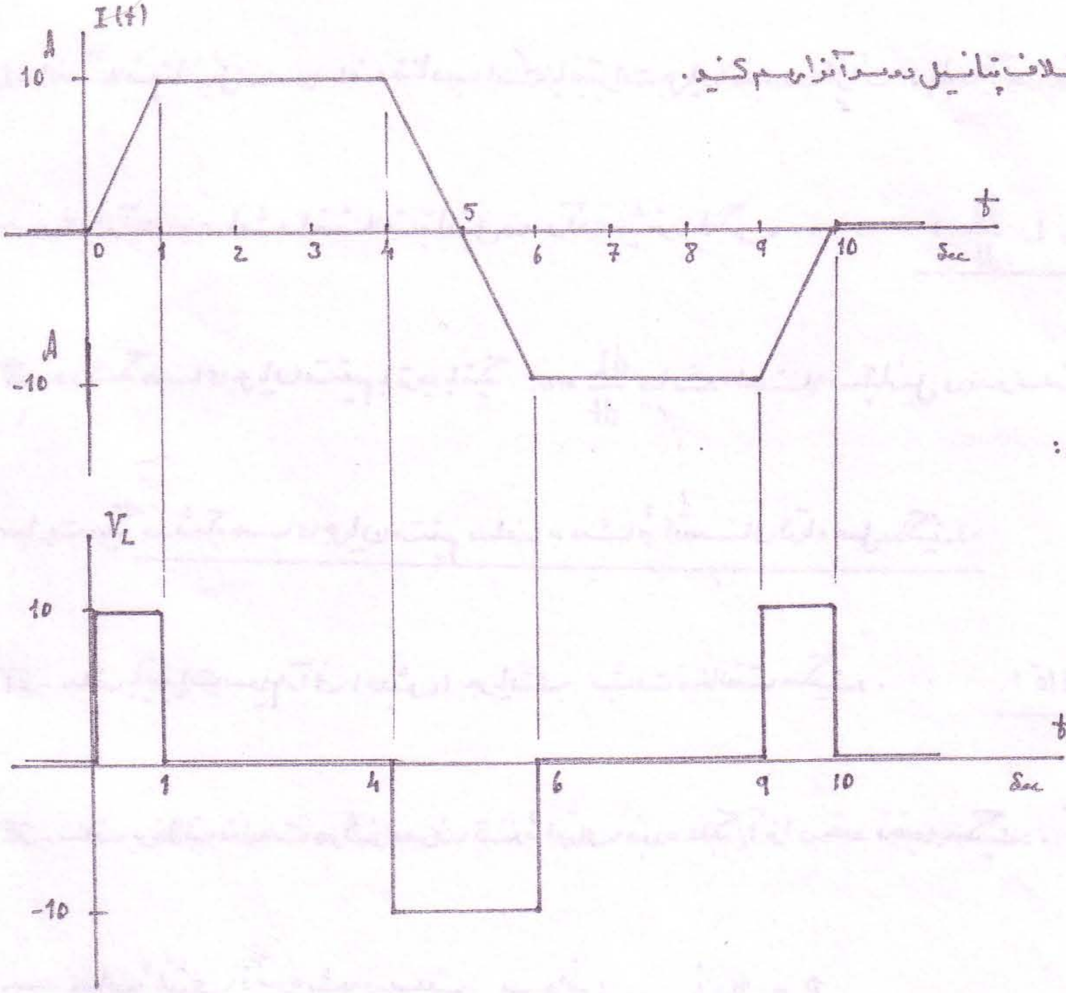
$$W_L(t) = \int_0^t p \cdot dt = \int_{I(0^+)}^{I(t)} L I \, dI = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$\boxed{W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2 + W_L(0^+)}$$

مثال های زیر خواص فیزیکی سلف را بطور کامل مورد بررسی قرار میدهد.

مثال ۱- از یک سلف با اندوکتانس $1\ H$ ، شدت جریانی که تغییرات آن مطابق شکل زیر باشد، عبور میکند

نمودار تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر آن را رسم کنید.



تحلیل مسأله:

① $0 < t < 1^{Sec}$ $\qquad V_L = L \dfrac{dI}{dt} = 1 \dfrac{10 - 0}{1 - 0} = 10^{Volt}$

② $1^{Sec} < t < 4^{Sec}$ $\qquad (I = 10^{Amp} = Const.$ چون $\dfrac{dI}{dt} = 0.)$ $\qquad V_L = L \dfrac{dI}{dt} = 0.$

③ $4^{Sec} < t < 6^{Sec}$ $\qquad V_L = L \dfrac{dI}{dt} = 1 \dfrac{(-10) - (+10)}{6 - 4} = 10^{Volt}$

④ $6^{Sec} < t < 9^{Sec}$ $\qquad V_L = L \dfrac{dI}{dt} \qquad V_L = 0. \qquad (\dfrac{dI}{dt} = 0.)$

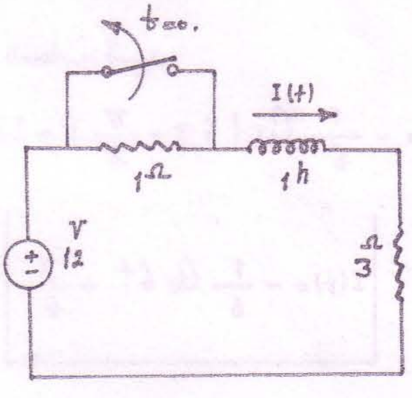
⑤ $9^{Sec} < t < 10^{Sec}$ $\qquad V_L = L \dfrac{dI}{dt} = 1 \dfrac{0 - (-10)}{10 - 9} = 10^{Volt}$

از مطالعهٔ نمودار بالا میتوان به نتایج زیر رسید.

I - همانطوریکه ملاحظه میشود تغییر شدت جریان سلف از صفر به 10 آمپر در مدت یک ثانیه ولتاژی معادل 10^V در دو سر سلف ایجاد میکند. حال اگر این تغییر جریان 10 آمپری بعوض یک ثانیه در مدت زمان محدودتر یعنی 0,1 ، 0,01 ، $0,001^{sec}$ ثانیه انجام گیرد. اختلاف پتانسیل دو سر سلف بعوض 10^V بترتیب به 100^V ، 1000^V ، $10,000^V$ میرسد. بنابراین نتیجه میشود.

ولتاژ دو سر سلف با تغییرات جریان عبوری از آن متناسب میباشد. بطوریکه هرچه میزان تغییرات بیشتر باشد اختلاف پتانسیل دو سر سلف بیشتر خواهد بود و بالعکس

II - همانطوریکه ملاحظه میشود در محدوده ای از زمان که شدت جریان عبوری ثابت است مقدار اختلاف پتانسیل دو سر سلف صفر میباشد.



مثال ۲ - در مدار شکل زیر کلید K در $t=0$ باز میشود مطلوبست $I(0^+)$:

تحلیل مدار: $I(0^+)$ جریان در اولین لحظه بعد از باز شدن کلید.

$I(0^-)$ جریان در آخرین لحظه قبل از باز شدن کلید.

در $t<0$ کلید K وصل است و مقاومت 1^Ω از طریق کلید K اتصال کوتاه میباشد. لذا:

$I(t<0) = \frac{12}{3} = 4^{Amp}$ $\qquad$ $I(0^-) = 4^{Amp}$

با توجه باینکه سلف با جهش جریان مخالفت میکند.

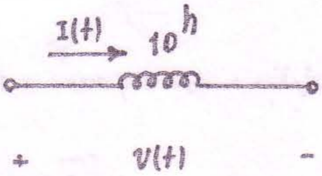
$$\underline{I(0^+) = I(0^-) = 4^{Amp}}$$

توجه داشته باشید که در طول زمان $t > 0$ بعلت ثابت بودن جریان مدار سلف مشابه اتصال کوتاه عمل میکند

و تنها در موقع قطع و وصل کلید K بعلت تغییرات جریان در مدار ظاهر میشود.

مثال ۳- در سر یک سلف با اندوکتانس 10 هانری به ولتاژ سینوسی به معادله $v(t) = 10 \sin 6t$

وصل شده است. شدت جریان عبوری را محاسبه کنید.



ـــ تحلیل شکل:

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_{0^+}^{t} v(t)\,dt + I(0^+) \longrightarrow I(t) = \frac{1}{10}\int_{0^+}^{t} 10 \sin 6t\,dt + I(0^+)$$

$$I(t) = \frac{1}{10} \times 10 \times \frac{1}{6}(-\cos 6t) + I(0^+) \longrightarrow I(t) = -\frac{1}{6}\cos 6t + I(0^+)$$

مثال ۴- اگر در مثال بالا مقدار جریان عبوری از سلف در $t = -\frac{\pi}{3}$ معادل 1^{Amp} باشد مقدار $I(t)$

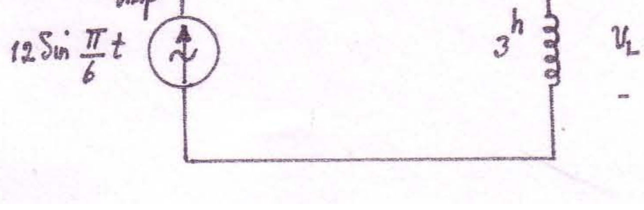
را محاسبه کنید.

$$I(t) = -\frac{1}{6}\cos 6t + I(0^+) \longrightarrow I\left(t = -\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{6}\cos\left(6 \times -\frac{\pi}{3}\right) + I(0^+)$$

$$\longrightarrow 1 = -\frac{1}{6} \times 1 + I(0^+) \longrightarrow I(0^+) = \frac{7}{6} \qquad \boxed{I(t) = -\frac{1}{6}\cos 6t + \frac{7}{6}}$$

مثال ۵- در مدار شکل زیر افت ولتاژ در سر مقاومت R و افت ولتاژ در سر سلف و حداکثر انرژی

شارژ شده در سلف را محاسبه کنید.

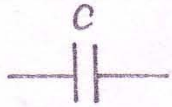


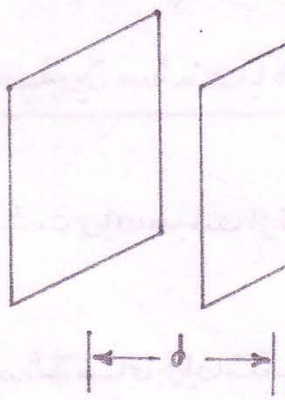
ـــ تحلیل مداری: $V_R = R\cdot I(t) = 0{,}1 \times 12 \sin\frac{\pi}{6}t = 1{,}2 \sin\frac{\pi}{6}t$ Volt

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = 3\times\frac{d}{dt}\left(12\sin\frac{\pi}{6}t\right) = 3\times 12\times\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t = 6\pi\cos\frac{\pi}{6}t \quad \text{Volt}$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\times 3\times\left(12\sin\frac{\pi}{6}t\right)^2 = 216\sin^2\frac{\pi}{6}t \qquad \underline{W_L(t) = 216} \ \text{Jole}$$

ب ـ ظرفیت و کاپاسیته C :

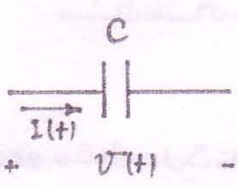




رابطه فیزیکی خازن: برای هر خازن صفحه ای مطابق شکل مقابل ظرفیت از رابطه زیر بدست میآید.

$$\boxed{C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}}$$

بطوریکه در رابطه فوق C ظرفیت خازن برحسب F (فاراد)، A سطح مقطع جوشن های خازن برحسب متر مربع، d ضخامت عایق برحسب m ، ε_0 ضریب دی الکتریک خلاء ؛ $\varepsilon_0 = 8{,}85\times 10^{-12}\ F/m$ ، ε_r ضریب دی نبی عایق میباشد.



رابطه الکتریکی خازن: رابطه بین ولتاژ و جریان خازن بصورت زیر بیان میشود

$$\underline{I = C\frac{dv}{dt}} \quad \text{یا} \quad \underline{v(t) = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} I(t)\,dt + v_c(0^+)}$$

$$I(t) = C\frac{dv}{dt} \rightarrow dv = \frac{1}{C}\cdot I(t)\,dt \rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} I(t)\,dt + v_c(0^+)$$

انرژی ذخیره شده در خازن :

$$p = v \cdot i$$

$$p = v \cdot c\frac{dv}{dt} \qquad p.dt = c\, v\, dv \qquad \int_0^t p.dt = \int_{v_0}^{v} c\, v\, dv$$

$$\boxed{W_c(t) = \frac{1}{2} c v^2 + W_c(0^+)}$$

خواص فیزیکی عمدهٔ خازن یا کاپاسیته c :

I - شدت جریان عبوری از خازن با تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر آن متناسب است. $\left(I = c\,\frac{dv}{dt}\right)$

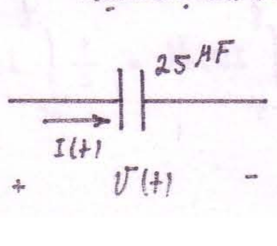
II - در شبکه های جریان مستقیم شدت جریان عبوری از خازن صفر است. بعبارت دیگر جریان مستقیم از خازن عبور نمی کند و خازن در شبکه های DC بمثابهٔ مدار باز عمل میکند.

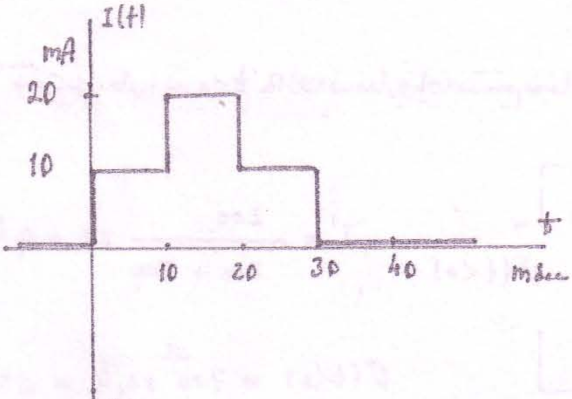
III - خازن با تغییرات سریع و آنی (جهش) ولتاژ بشدت مخالفت میکند. یعنی $V_c(0^+) = V_c(0^-)$

IV - خازن هرگز انرژی را تلف نمی کند بلکه آنرا در خود ذخیره میکند. $W_c(t) = \frac{1}{2} c v^2$

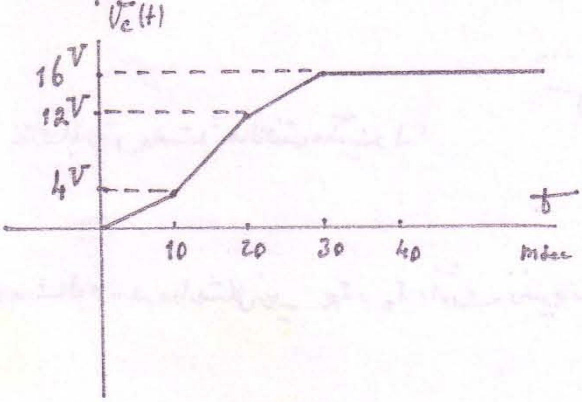
مثال های زیر خواص فیزیکی خازن را بطور کامل مورد تجزیه و تحلیل و بررسی قرار میدهد.

●●● مثال ۱ - از یک خازن $25\ \mu F$ (میکروفارادی) بدون ولتاژ اولیه شدت جریانی مطابق شکل زیر عبور میکند. نمودار تغییرات ولتاژ دو سر خازن را محاسبه و رسم نمائید. و مقدار آن را در $t = 40\ msec$ محاسبه نمائید.





ـــــ تحلیل :



محاسبه :

1) $V_c(0) = 0.$

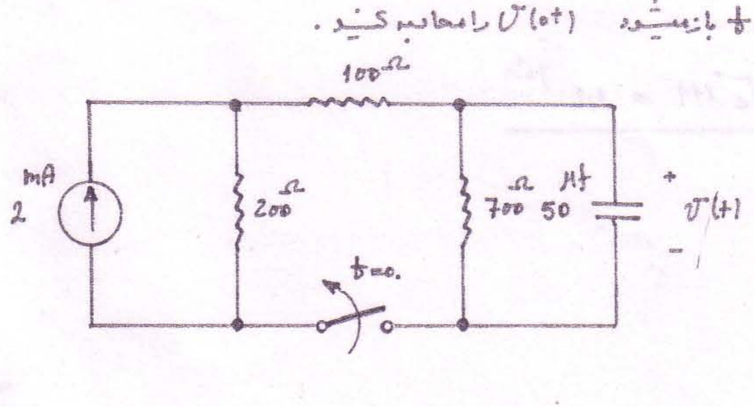
2) $V_c(t = 10^{msec}) = \dfrac{1}{25\times10^{-6}}\displaystyle\int_0^{10\times10^{-3}} I(t)\cdot dt = \dfrac{1}{25\times10^{-6}} \times 10\times10^{-3} \times 10\times10^{-3} = 4^{Volt}$

3) $V_c(t=20^{msec}) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{10\times10^{-3}}^{20\times10^{-3}} I(t)\cdot dt + V_c(t=10^{msec}) = 8 + 4 = 12^{Volt}$

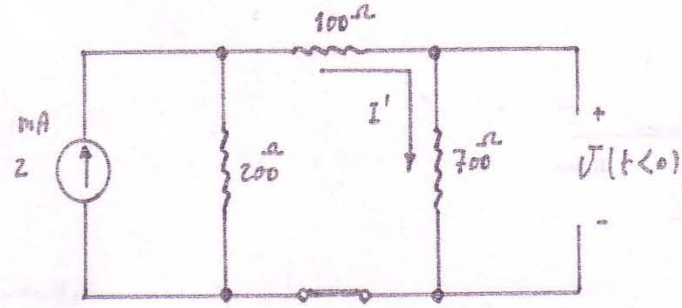
4) $V_c(t=30^{msec}) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{20\times10^{-3}}^{30\times10^{-3}} I(t)\,dt + V_c(t=20^{msec}) = 4 + 12 = 16^{Volt}$

5) $\underbrace{V_c(t=40^{msec}\,,\ \text{بعد})}_{t>30^{msec}} = 16^{Volt}$ $\qquad$ $\underline{V_c(t=40^{msec}) = 16^{Volt}}$

●●● مثال ۲- در مدار شکل زیر کلید k در $t=0.$ باز میشود. $V(0^+)$ را محاسبه کنید.



تحلیل مدار: در $t<0$ خازن در مدار جریان مستقیم بعنوان مدار باز عمل میکند و مقدار $V(t<0)$ برابر است با:



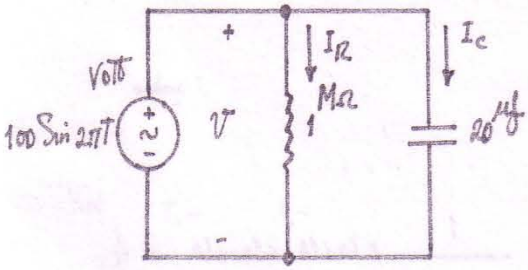
$$I' = \frac{200}{200+800} \times 2 = 0{,}4 \ ^{mA}$$

$$V(t<0) = 700^{\Omega} \times 0{,}4 = 280 \ ^{mVolt}$$

خازن با جهش ولتاژ مخالفت میکند لذا

$$\underline{V(0^+) = V(0^-) = V(t<0) = 280 \ ^{mVolt}}$$

مثال ۳- در مدار شکل زیر I_R ، I_c ، انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه کنید.



تحلیل شکل:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{100 \sin 2\pi t}{1\times10^{-6}} = 0{,}1 \sin 2\pi t \ ^{mA}$$

$$\underline{I_R = 0{,}1 \sin 2\pi t \ ^{mA}}$$

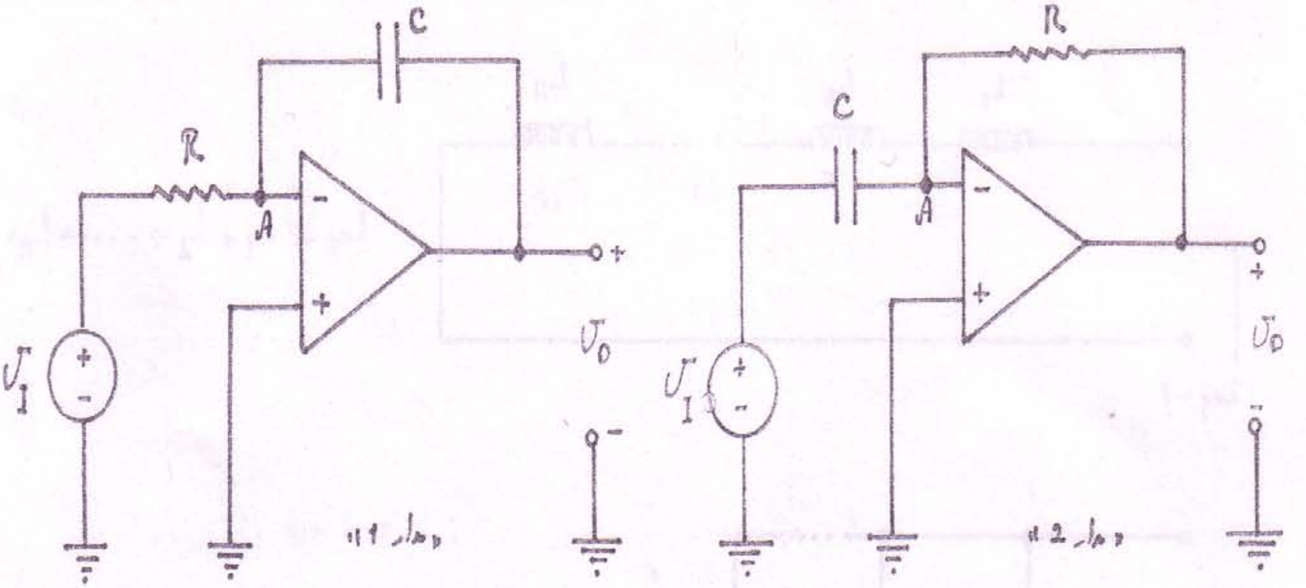
$$I_c = c\frac{dV}{dt} = 20\times10^{-6}\frac{d}{dt}(100 \sin 2\pi t) = 20\times10^{-6}\times100\times2\pi \cos 2\pi t$$

$$\underline{I_c = 4\pi \cos 2\pi t \ ^{mA}}$$

$$W_c(t) = \frac{1}{2}cV^2 = \frac{1}{2}\times20\times10^{-6}\times(100 \sin 2\pi t)^2 = 0{,}1 \sin^2 2\pi t$$

$$\underline{W_c(t) = 0{,}1 \ ^{Jole}}$$

●●● مثال ۴- نشان دهید که مدارهای شکل زیر بعنوان مشتق گیر و انتگرال گیر عمل میکنند.



تحلیل مدار (۱):

$$KCL\ A: \quad I_C + I_R = 0. \qquad C\frac{dV_O}{dt} + \frac{V_I}{R} = 0. \qquad dV_O = \frac{-1}{RC}V_I \cdot dt$$

$$V_O = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_I \cdot dt$$

مدار انتگرال گیر

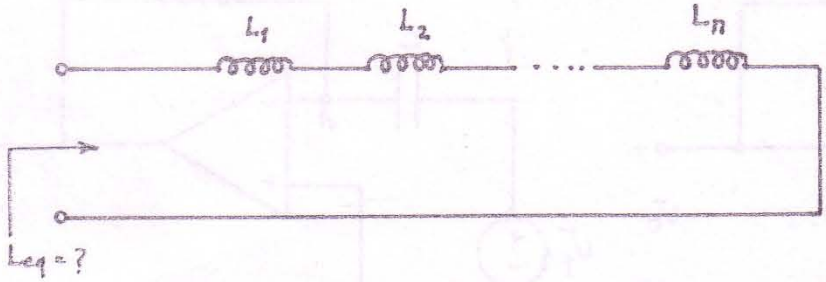
تحلیل مدار (۲):

$$KCL\ A: \quad I_R + I_C = 0. \qquad \frac{V_O}{R} + C\frac{dV_I}{dt} = 0. \qquad V_O = -RC \cdot \frac{dV_I}{dt}$$

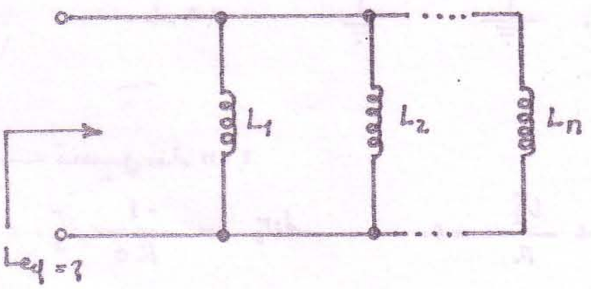
$$V_O = -RC\frac{d}{dt}V_I$$

مدار مشتق گیر

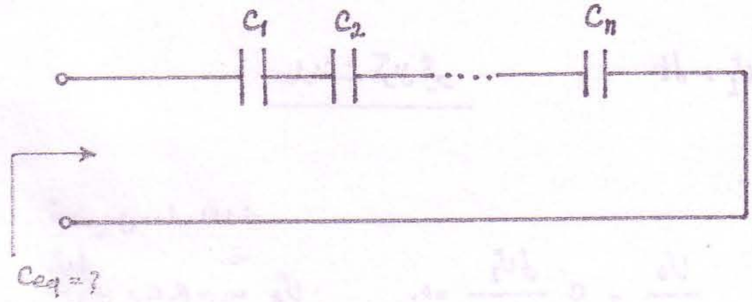
ترکیب سری و موازی سلف‌ها و خازن‌ها:



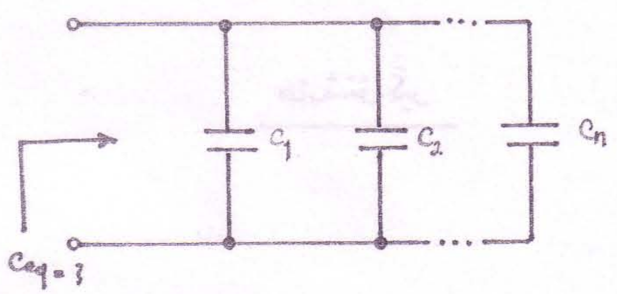
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

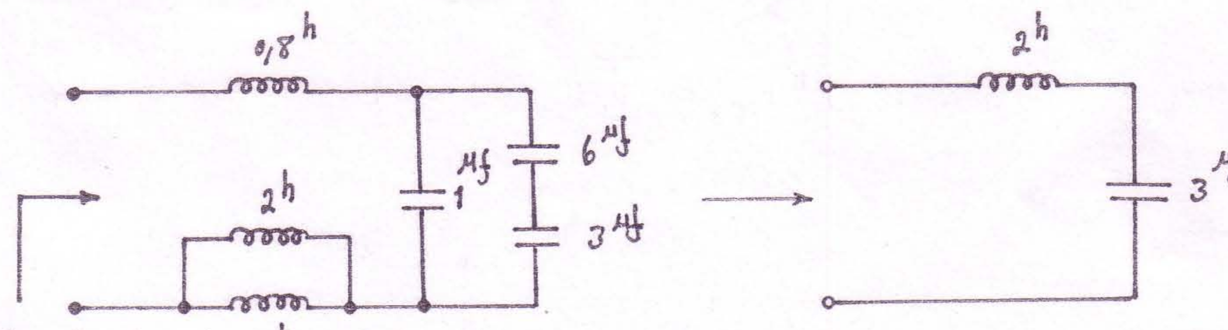


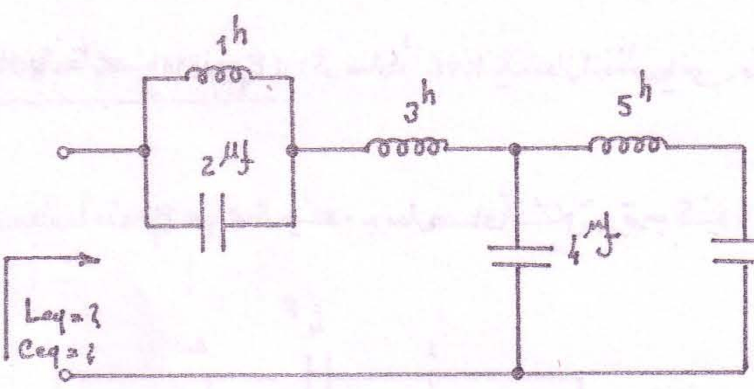
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

مثال - مدار معادل هر یک از مدارهای زیر را محاسبه کنید.

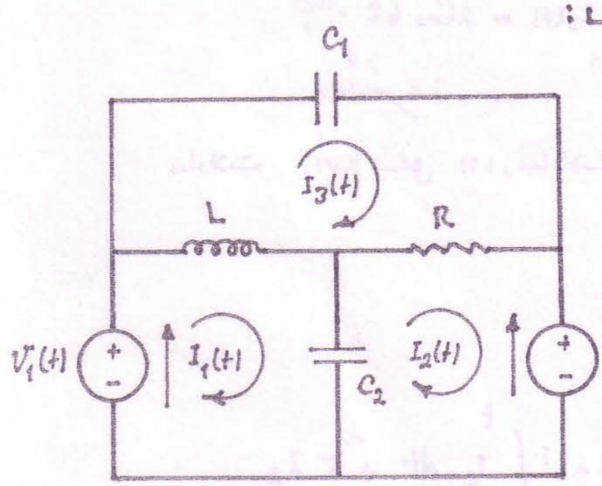




ساده ترین شکل ممکن

تشکیل معادلات ماتریسهای کیرشف در مدارهای R ، L ، C با منابع تحریک زمانی

مثال - مطلوبست فرم ماتریسی معادلات مربوط به جریان حلقه ها :



تشکیل معادلات KVL :

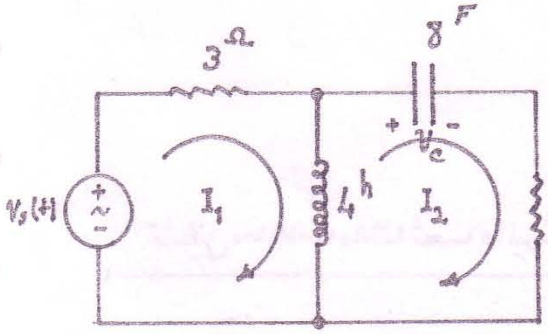
$$\begin{cases} \text{KVL } I_1 & V_1(t) = L\dfrac{d}{dt}\left(I_1(t) - I_3(t)\right) + \dfrac{1}{c_2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\left(I_1(t) - I_2(t)\right)dt \\ \text{KVL } I_2 & -V_2(t) = \dfrac{1}{c_2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\left(I_2(t) - I_1(t)\right)dt + R\left(I_2(t) - I_3(t)\right) \\ \text{KVL } I_3 & 0 = \dfrac{1}{c_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} I_3(t)\,dt + R\left(I_3(t) - I_2(t)\right) + L\dfrac{d}{dt}\left(I_3(t) - I_1(t)\right) \end{cases}$$

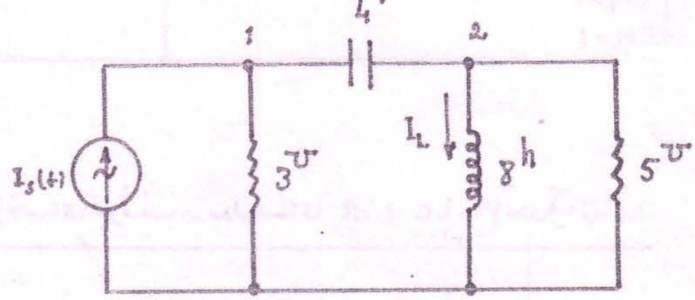
با تبدیل معادلات بالا به معادلات کلاسیک دیفرانسیل مستقیماً و یا به روش های مختلف (روش تبدیل لاپلاس)

میتوان شدت جریانهای $I_1(t)$ ، $I_2(t)$ ، $I_3(t)$ را محاسبه کرد.

●●● مدارهای مزدوج : اگر معادلهٔ KVL یک مدار از نظر ریاضی دقیقاً همشکل معادلهٔ KCL مدار دیگر باشد

دو مدار را مزدوج هم می‌گویند. به مدارهای شکل زیر توجه کنید.





$v_s(t) = 2\cos 6t$ Volt

(مدار شکل ۱)

$I_s(t) = 2\cos 6t$ Amp

(مدار شکل ۲)

معادلات KVL شکل (۱) و معادلات KCL شکل (۲) را تشکیل داده با هم مقایسه میکنیم.

$$\begin{cases} \text{KVL } I_1: & 2\cos 6t = 3I_1 + 4\left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt}\right) \\ \text{KVL } I_2: & 0 = 4\left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_1}{dt}\right) + v_c(0^+) + \frac{1}{8}\int_{0^+}^{t} I_2 \cdot dt + 5I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{KCL } 1: & 2\cos 6t = 3V_1 + 4\left(\frac{dV_1}{dt} - \frac{dV_2}{dt}\right) \\ \text{KCL } 2: & 0 = 4\left(\frac{dV_2}{dt} - \frac{dV_1}{dt}\right) + I_L(0^+) + \frac{1}{8}\int_{0^+}^{t} V_2 \cdot dt + 5V_2 \end{cases}$$

مقایسهٔ معادلات بالا نشان میدهد که طبق تعریف مدارهای (۱) و (۲) مزدوج هم هستند.

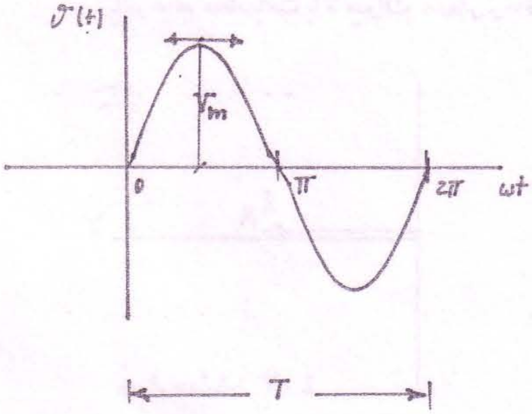
برای رسم مزدوج هر مدار باید منبع ولتاژ به منبع جریان و بالعکس منبع جریان به منبع ولتاژ و همچنین سلف به خازن

و خازن به سلف، مقاومت به هدایت و هدایت به مقاومت تبدیل شود.

تعداد گره‌ها مدار (۲) = تعداد حلقه‌های مدار (۱)

الف - مطالعهٔ شبکه‌های جریان متناوب سینوسی Ac در حوزهٔ اعداد حقیقی (حوزهٔ زمانی):

قبل از مطالعهٔ شبکه‌های جریان متناوب سینوسی ابتدا فرم های مختلف نمایش جریان متناوب سینوسی را بررسی میکنیم.



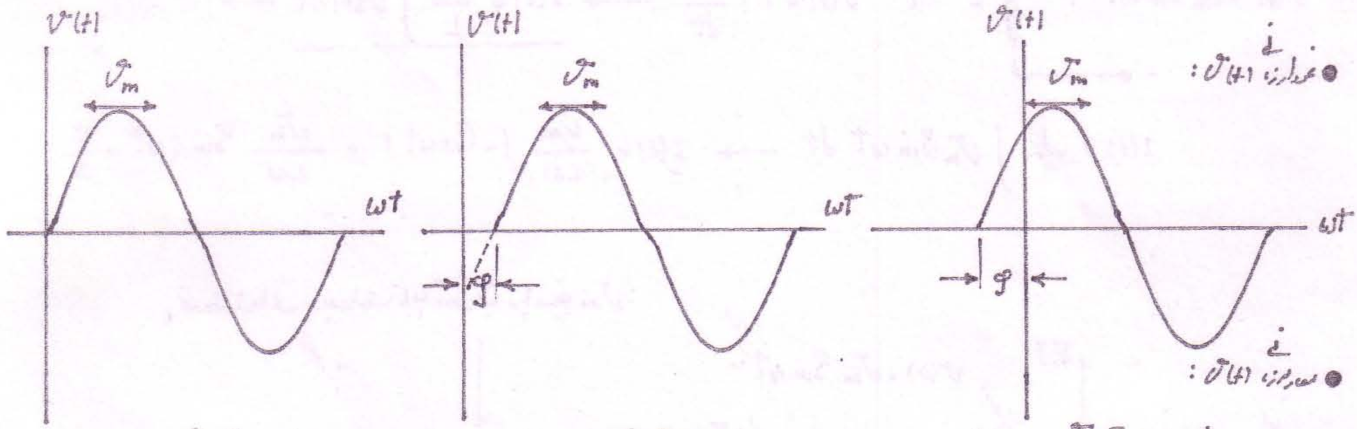
مقدار لحظه‌ای $v(t) = V_m \sin \omega t$

مقدار مؤثر $V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, V_m$

فرکانس $f = \frac{1}{T}$ ، T زمان تناوب

شکل های زیر فرم های مختلف نمایش جریان متناوب سینوسی را نشان میدهند.

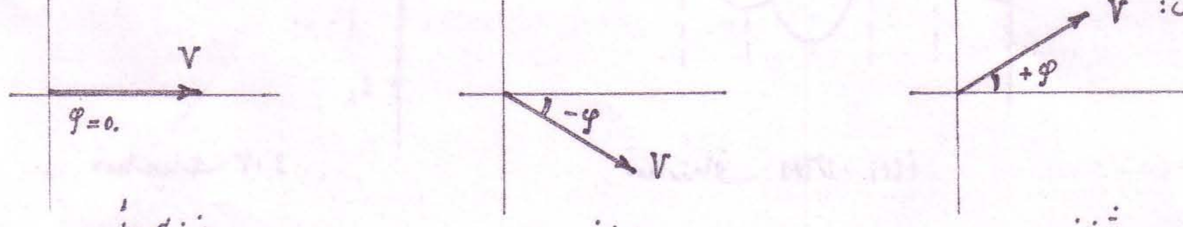
● مقدار لحظه‌ای: $v(t)$



$v(t) = V_m \sin \omega t$	$v(t) = V_m \sin(\omega t - \varphi)$	$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$
$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0$	$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle -\varphi$	$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle +\varphi$

● فرم قطبی:

● نمودار برداری:

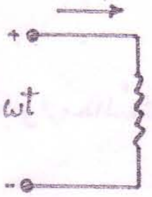


هم فاز با مبدأ — پس فاز — پیش فاز

حال ابتدا رفتار هریک از عناصر غیرفعال شبکه را در مقابل جریان متناوب سینوسی مورد مطالعه قرار داده

و پاسخ هریک از عناصر R ، L ، C را در مقابل تابع تحریک سینوسی محاسبه میکنیم.

1



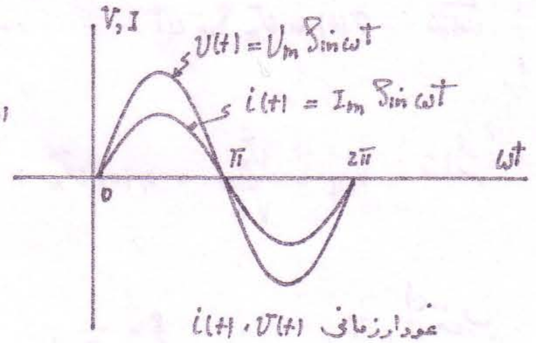
$v(t) = V_m \sin \omega t$

$$v(t) = R \cdot i(t) \longrightarrow V_m \sin \omega t = R \cdot i(t) \longrightarrow i(t) = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$$

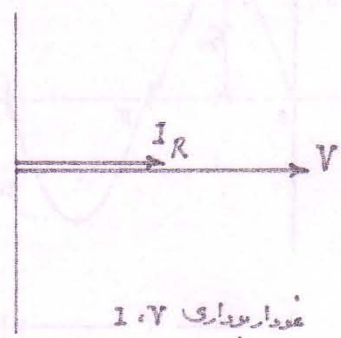
باتوجه به محاسبات بالا میتوان نمودار زمانی و برداری تابع تحریک شبکه و پاسخ آن را بصورت زیر رسم کرد.

امپدانس مدار مقاومت خالص :

$Z = R$

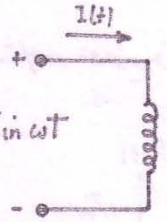


نمودار زمانی $v(t)$ ، $i(t)$



نمودار برداری V ، I

2



$v(t) = V_m \sin \omega t$

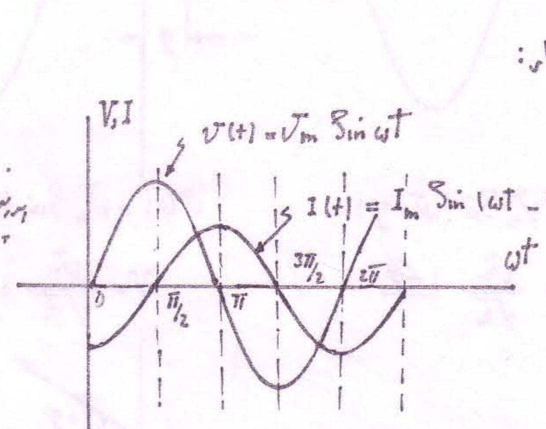
$$v(t) = L \cdot \frac{dI}{dt} \longrightarrow \underline{I(t) = \frac{1}{L} \int v(t)\, dt} \longrightarrow$$

$$I(t) = \frac{1}{L} \int V_m \sin \omega t \, dt \longrightarrow I(t) = \frac{V_m}{L\omega} (-\cos \omega t) = \frac{V_m}{L\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

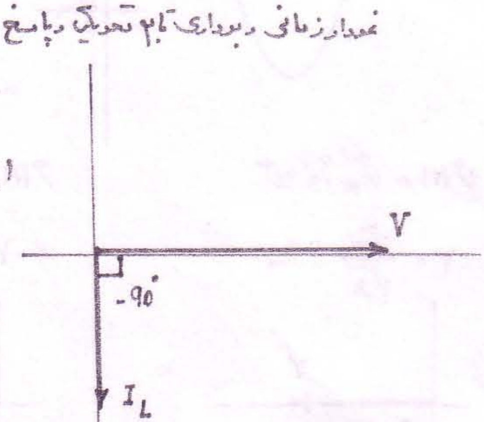
نمودار زمانی و برداری تابع تحریک و پاسخ مدار:

امپدانس مدار L خالص :

$Z = L\omega$

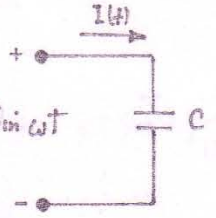


نمودار زمانی $v(t)$ ، $i(t)$



نمودار برداری V ، I

$\boxed{3}$



$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

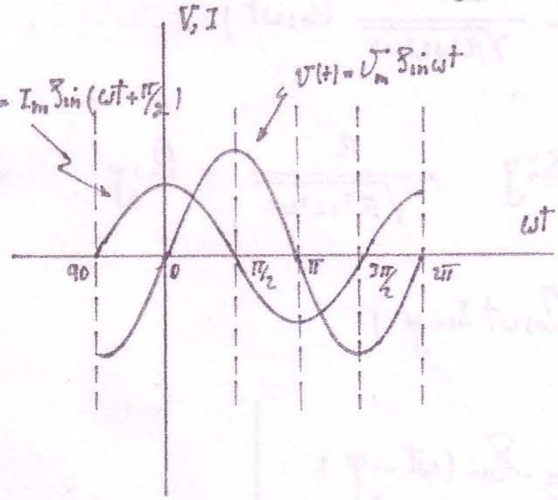
$$v(t) = \frac{1}{c}\int I(t)\,dt \longrightarrow \underline{I(t) = c\,\frac{dv}{dt}} \longrightarrow$$

$$I(t) = c \cdot \frac{d}{dt}\left(V_m \sin \omega t\right) = c\omega \cdot V_m \cos \omega t = \frac{V_m}{1/c\omega} \cos \omega t$$

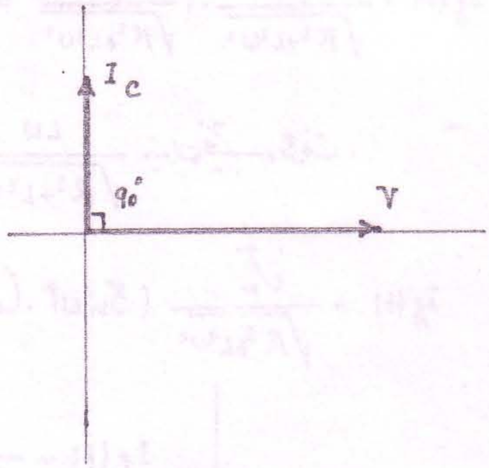
$$I(t) = \frac{V_m}{1/c\omega} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

امپدانس مدار C خالص.

$$\underline{Z = \frac{1}{c\omega}}$$

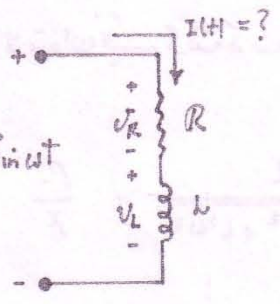


نمودار زمانی $i(t)$ ، $v(t)$



نمودار برداری V، I

$\boxed{4}$



$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

$$v(t) = v_R + v_L \longrightarrow V_m \sin \omega t = R\,I(t) + L\,\frac{dI}{dt}$$

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I(t) = V_m \sin \omega t$$ <u>معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول</u>

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی بالا بصورت $\underline{I(t) = K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t}$ میباشد. که در آن K_1 ، K_2 با

قرار دادن پاسخ فوق در معادله دیفرانسیل محاسبه میشود.

$$L\left(K_1 \omega \cos \omega t - K_2 \omega \sin \omega t\right) + R\left(K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t\right) = V_m \sin \omega t$$

$$\left(K_1 R - K_2 L\omega\right) \sin \omega t + \left(K_2 R + K_1 L\omega\right) \cos \omega t = V_m \sin \omega t$$

برای اینکه طرف اول تساوی بالا بازاء جمیع مقادیر ωt برقرار باشد باید:

<u>1 معادله</u> $K_1 R - K_2 L\omega = V_m$ ، <u>2 معادله</u> $K_2 R + K_1 L\omega = 0.$

$$\begin{matrix} R \\ L\omega \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} K_1 R - K_2 L\omega = V_m \\ K_2 R + K_1 L\omega = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{از حل معادلات}} \left\{\begin{array}{l} K_1 = \dfrac{R}{R^2+L^2\omega^2} V_m \\ K_2 = -\dfrac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2} V_m \end{array}\right.$$

$$I_f(t) = K_1 \sin\omega t + K_2 \cos\omega t \longrightarrow I_f(t) = \frac{R V_m}{R^2+L^2\omega^2} \sin\omega t - \frac{L\omega V_m}{R^2+L^2\omega^2} \cdot \cos\omega t$$

$$I_f(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \sin\omega t - \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cos\omega t \right)$$

با فرض $\dfrac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \cos\varphi$ ، $\dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \sin\varphi$ میتوان نتیجه گرفت.

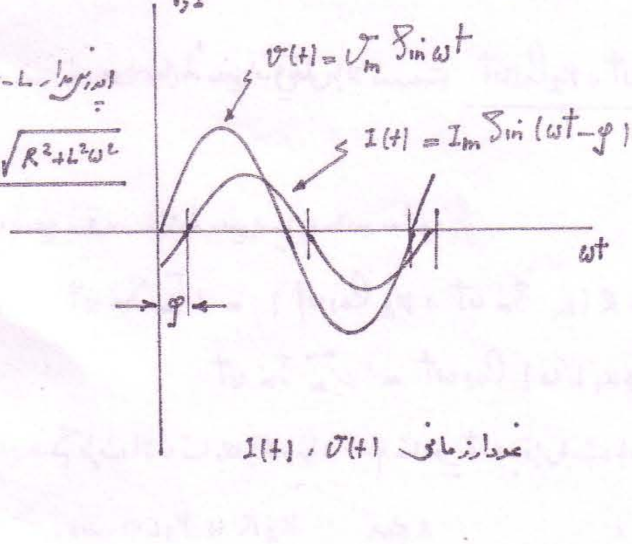
$$I_f(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \left(\sin\omega t \cdot \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi \right)$$

$$\boxed{I_f(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

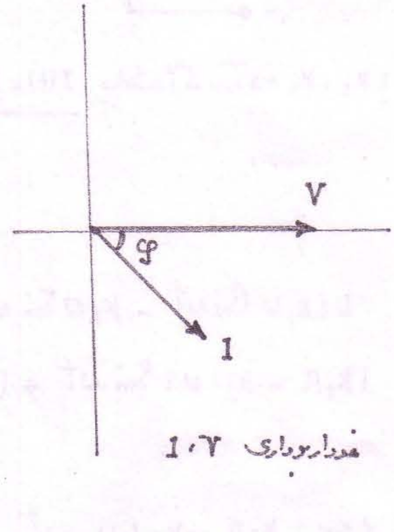
از رابطه بالا میتوان نتیجه گرفت که در مدار R-L سری شدت جریان مدار نسبت به $v(t)$ باندازه φ پس فاز باشد، $\cos\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \dfrac{R}{Z}$

امپدانس مدار R-L سری:

$Z = \sqrt{R^2+L^2\omega^2}$

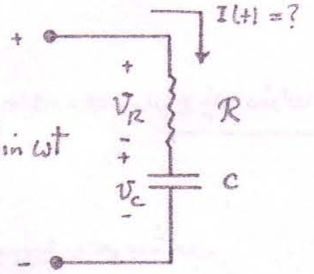


نمودار زمانی $v(t)$ ، $I(t)$



نمودار برداری V ، I

5



$$V(t) = V_R + V_C \longrightarrow V_m \sin \omega t = R\,I(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt$$

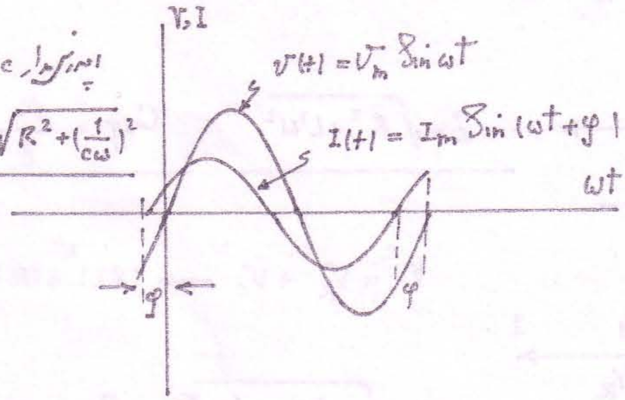
جواب خصوصی معادلهٔ بالا $I(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t$ باشد که با

قرار دادن آن در معادلهٔ بالا مقدار $I(t)$ بصورت زیر تعیین میشود.

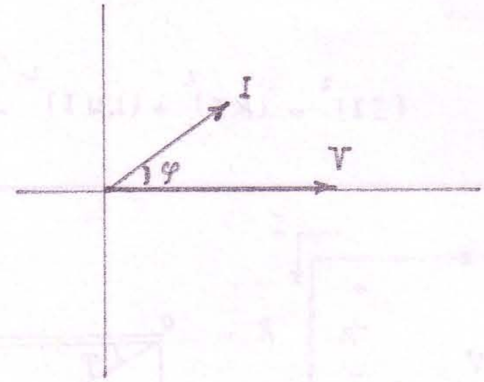
$$\boxed{I_p(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi)}$$

امپدانس مدار R-C

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

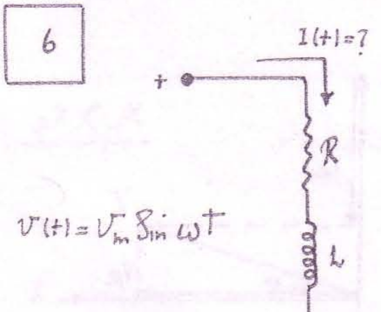


مقدار زمانی $I(t)$ ، $V(t)$



مقدار برداری I ، V

6



$$V(t) = V_R + V_L + V_C \longrightarrow V_m \sin \omega t = R\,I(t) + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt$$

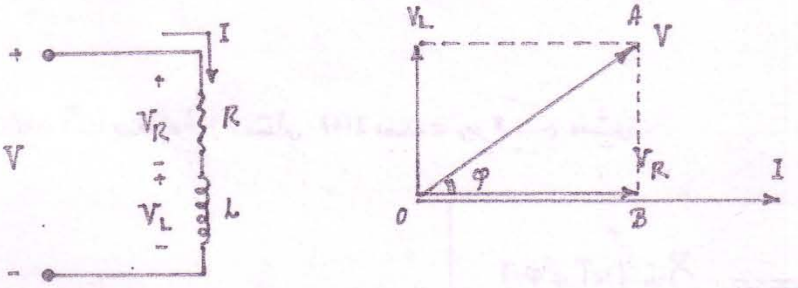
$$\boxed{I_p(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t \pm \varphi)}$$

در مدارهای RLC اگر $X_L > X_C$ باشد جریان نسبت به ولتاژ پس فاز، اگر $X_L < X_C$ باشد جریان نسبت به ولتاژ پیش فاز خواهد بود

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \dfrac{R}{Z} \\[2ex] Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{cases}$$

رسم دیاگرام برداری مدارهای $R-L-C$ ، $R-C$ ، $R-L$ سری و موازی و محاسبهٔ امپدانس مربوط به آنها :

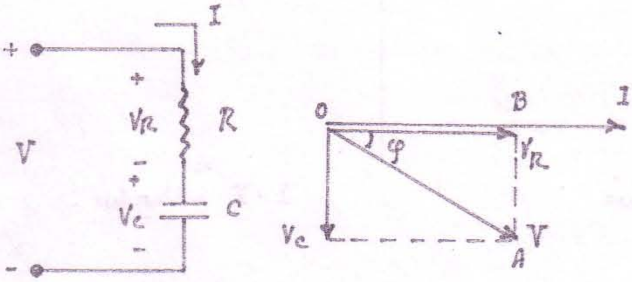
در مدارهای سری بردار جریان بعنوان بردار مبنا در نظر گرفته میشود و بردار افت ولتاژ عناصر تشکیل دهنده شبکه نسبت به بردار مبنا رسم میشود.



در مثلث OAB :

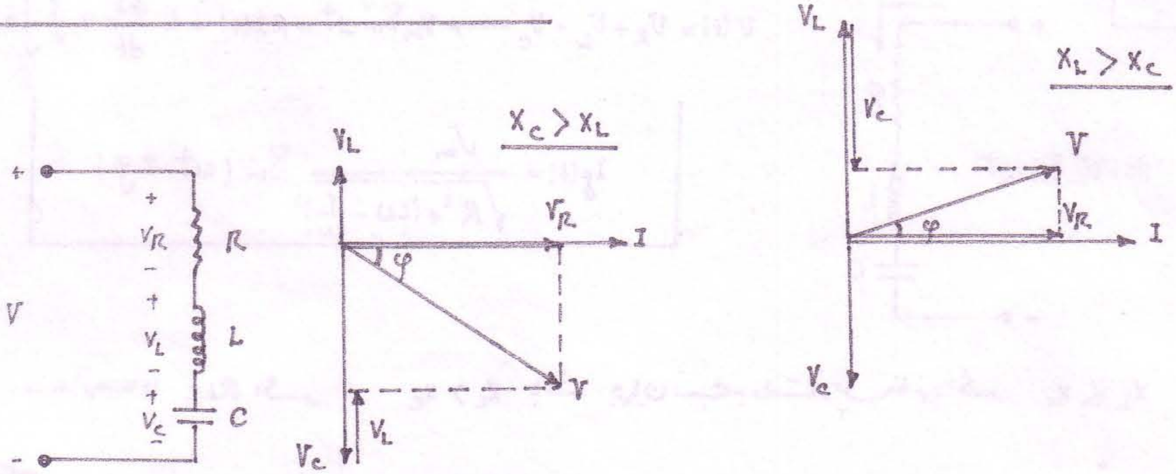
$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \longrightarrow V^2 = V_R^2 + V_L^2 \longrightarrow$$

$$(ZI)^2 = (RI)^2 + (L\omega I)^2 \longrightarrow Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$



$$V^2 = V_R^2 + V_c^2 \longrightarrow (ZI)^2 = (RI)^2 + \left(\frac{I}{c\omega}\right)^2$$

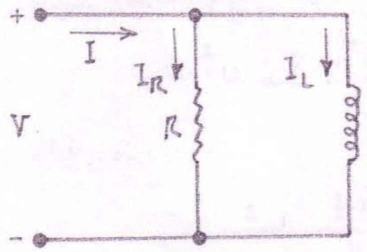
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{c\omega}\right)^2} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

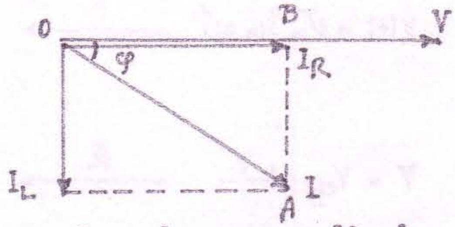


$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_c)^2 \longrightarrow (ZI)^2 = (RI)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

درمدارهای موازی بردار ولتاژ بعنوان بردار مبنا منظور گرفته میشود . و بردار جریانهای عناصر موازی تشکیل دهندهٔ مدار نسبت به آن ترسیم میشود .

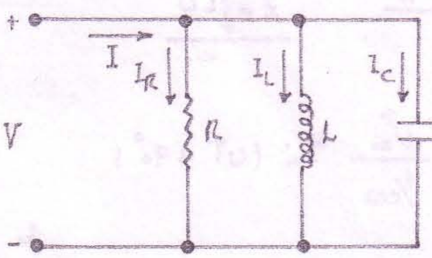




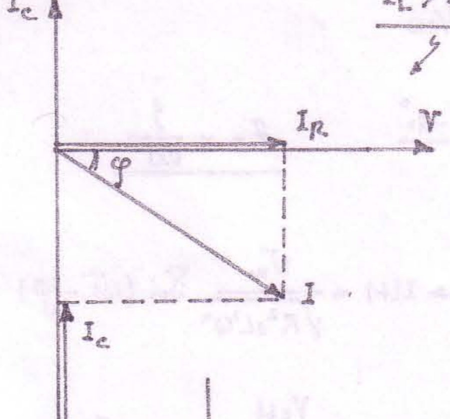
$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \longrightarrow I^2 = I_R^2 + I_L^2 \longrightarrow \left(\frac{V}{Z}\right)^2 = \left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{L\omega}\right)^2$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2} \qquad \boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}}}$$

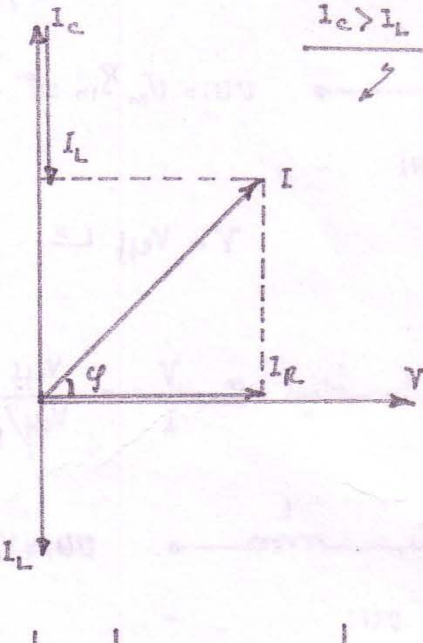
مثلث OAB :
$$\cos\varphi = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{I_R}{I} = \frac{V/R}{V/Z} = Z/R \qquad \boxed{\cos\varphi = Z/R}$$



به ازاء $I_L > I_c$



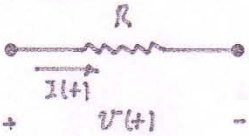
به ازاء $I_c > I_L$



$$\boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}} \quad ، \quad \boxed{\cos\varphi = \frac{Z}{R}}$$

ب- مطالعهٔ شبکه‌های جریان متناوب سینوسی Ac در حوزهٔ اعداد مختلط (حوزهٔ فرکانسی $j\omega$):

قبلاً آموخته‌ایم:

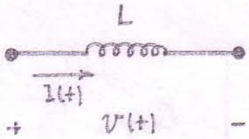


$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{R} I(t) = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$$

و یا:

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{R} I = \frac{V_{eff}}{R} \angle 0$$

امپدانس مدار $\quad Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{eff} \angle 0}{\frac{V_{eff}}{R} \angle 0} = R \angle 0 \qquad \underline{Z = R}$

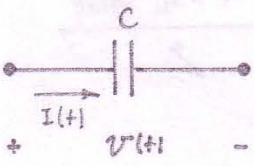


$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{L} I(t) = \frac{V_m}{L\omega} \sin (\omega t - 90^\circ)$$

یا

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{L} I = \frac{V_{eff}}{L\omega} \angle -90^\circ$$

امپدانس مدار $\quad Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{eff} \angle 0}{V_{eff}/L\omega \ \angle -90^\circ} = L\omega \angle 90^\circ \qquad \underline{Z = jL\omega}$

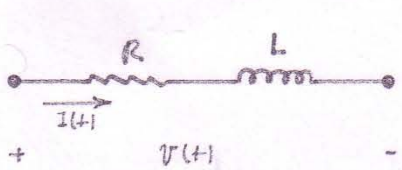


$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{C} I(t) = \frac{V_m}{1/C\omega} \sin (\omega t + 90^\circ)$$

یا

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{C} I = \frac{V_{eff}}{1/C\omega} \angle +90^\circ$$

امپدانس مدار $\quad Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{eff} \angle 0}{V_{eff}/\frac{1}{C\omega} \ \angle +90} = \frac{1}{C\omega} \angle -90^\circ \qquad \underline{Z = -\frac{j}{C\omega}}$

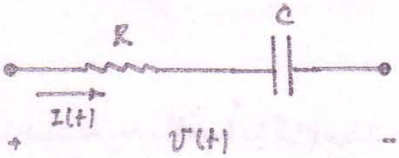


$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow[R-L]{\text{سری}} I(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin (\omega t - \varphi)$$

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow[R-L]{\text{سری}} I = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \angle -\varphi$$

امپدانس مدار $\quad Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \angle +\varphi \qquad \underline{Z = R + jL\omega}$

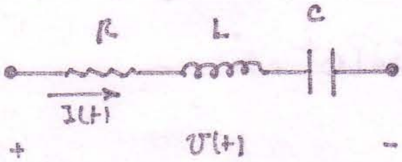
و بطریق مشابه میتوان نشان داد.



$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{\text{سری } R-C} I(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{\text{سری } R-C} I = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \angle +\varphi$$

امپدانس مدار $\quad Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \angle -\varphi \qquad \underline{Z = R - \frac{j}{C\omega}}$



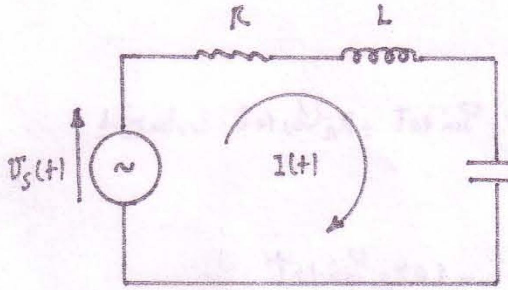
$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{\text{مدار } RLC \text{ سری}} I(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \sin(\omega t \pm \varphi)$$

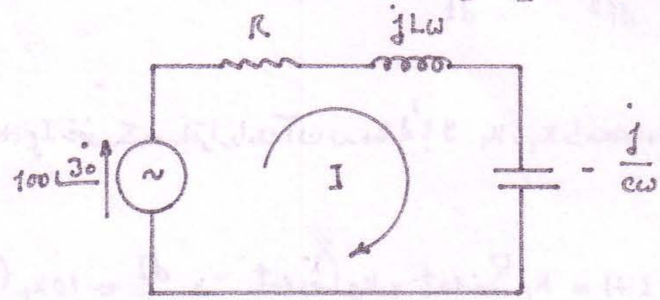
$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{\text{مدار } RLC \text{ سری}} I = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \angle \pm\varphi$$

امپدانس مدار $\quad Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \angle \pm\varphi \qquad \underline{Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$

از مطالعه مطالب بالا میتوان نتیجه گرفت که مدار معادل یک شبکه RLC در حوزه زمانی بصورت زیر در حوزه $j\omega$

(حوزه فرکانسی) تعریف میشود.





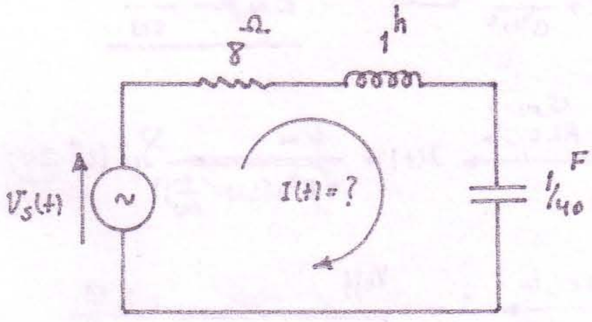
$$V_s(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 30°)$$

حال اگر در حوزه زمانی $R = 3^{\Omega}$ ، $L = 70^{mH}$ ، $C = \frac{1}{3}^{mF}$ باشد مقادیر آنها در حوزه $j\omega$

برابر خواهد بود با:

$\underline{R = 3^{\Omega}} \qquad \underline{jL\omega = j7^{\Omega}} \qquad \underline{-\frac{j}{C\omega} = -j3^{\Omega}}$

مثال ۱- مدار RLC سری شکل زیر در حوزهٔ زمانی مفروض است. اولاً شدت جریان $I(t)$ را در حوزهٔ زمانی محاسبه کنید. ثانیاً دیاگرام برداری مدار را رسم کرده و Z ، $\cos\varphi$ ، I را بکمک دیاگرام برداری محاسبه کنید، ثالثاً مدار معادل شبکه را در حوزهٔ $j\omega$ رسم کرده و شدت جریان مدار را در حوزهٔ $j\omega$ بدست آورید. ثالثاً نمودار فازی I و V ، Z را رسم کنید.



$$V_s(t) = 10\sqrt{2}\ \sin(10t + 90^\circ)$$

تحلیل شبکه :

حالت ۱) تحلیل شبکه محاسبه $I(t)$ در حوزهٔ زمانی :

$$V_s(t) = V_R + V_L + V_C \qquad 10\sqrt{2}\ \sin(10t + 90^\circ) = 8I(t) + \frac{dI}{dt} + 40\int I(t)\,dt$$

$$10\sqrt{2} \times 10\ \cos(10t + 90^\circ) = 8\frac{dI}{dt} + \frac{d^2I}{dt^2} + 40\ I(t)$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 8\frac{dI}{dt} + 40\ I(t) = 100\sqrt{2}\ \cos(10t + 90^\circ) = 100\sqrt{2}\ (-\sin 10t) = -100\sqrt{2}\ \sin 10t$$

پاسخ مدار را $I_f(t) = K_1 \sin 10t + K_2 \cos 10t$ فرض کرده و با قرار دادن آن در معادلهٔ بالا K_1 ، K_2 را محاسبه میکنیم.

$$I(t) = K_1 \sin 10t + K_2 \cos 10t \quad , \quad \frac{dI}{dt} = 10K_1 \cos 10t - 10K_2 \sin 10t \quad ,$$

$$\frac{d^2I}{dt} = -100K_1 \sin 10t - 100K_2 \cos 10t$$

$$(-100K_1 \sin 10t - 100K_2 \cos 10t) + (80K_1 \cos 10t - 80K_2 \sin 10t) + (40K_1 \sin 10t$$

$$+ 40K_2 \cos 10t) = -100\sqrt{2}\ \sin 10t$$

$$-(60K_1+80K_2)\sin 10t+(80K_1-60K_2)\cos 10t=-100\sqrt{2}\sin 10t$$

برای اینکه تساوی بالا بازاء جمیع مقادیر K_1، K_2 برقرار باشد باید:

$$\begin{array}{l} 3 \\ \\ 4 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 60K_1+80K_2=100\sqrt{2} \\ \\ 80K_1-60K_2=0. \end{array}\right. \quad +$$

$$500K_1=300\sqrt{2} \qquad \underline{K_1=0{,}6\sqrt{2}} \qquad \underline{K_2=0{,}8\sqrt{2}}$$

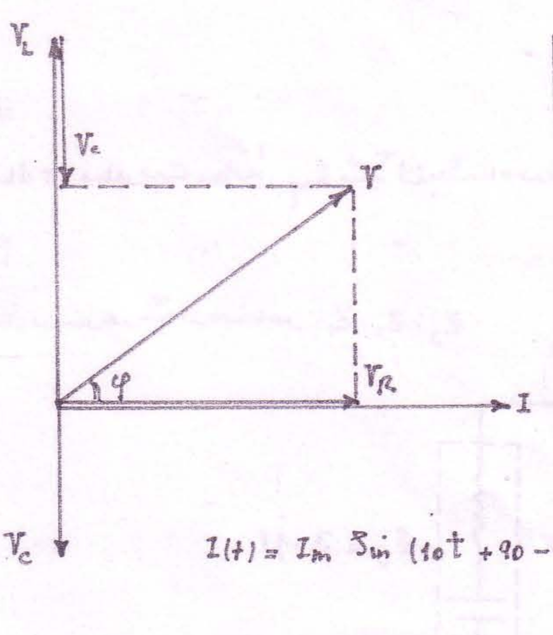
$$I(t)=K_1\sin 10t+K_2\cos 10t \qquad I(t)=0{,}6\sqrt{2}\sin 10t+0{,}8\sqrt{2}\cos 10t$$

$$I(t)=\sqrt{2}\,(0{,}6\sin 10t+0{,}8\cos 10t)=\sqrt{2}\sin(10t+53{,}1^\circ)\ \text{Amp}$$

$$\boxed{I(t)=\sqrt{2}\sin(10t+53{,}1^\circ)\ \text{Amp}}$$

حالت II: تحلیل شبکه توسط دیاگرام برداری:

$$R=8^{\Omega} \qquad X_L=L\omega=10^{\Omega} \qquad X_c=\frac{1}{C\omega}=4^{\Omega}$$



$$V_{eff}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=10^{\text{Volt}}$$

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{8^2+(10-4)^2}=10^{\Omega}$$

$$I_{eff}=\frac{V_{eff}}{Z}=\frac{10}{10}=1^{\text{Amp}} \qquad I_m=\sqrt{2}$$

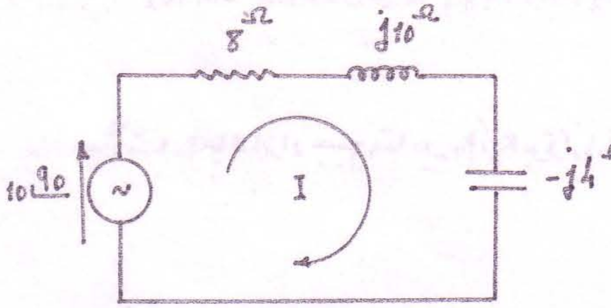
$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=0{,}8$$

$$\varphi=36{,}9^\circ$$

$$I(t)=I_m\sin(10t+90-\varphi)$$

$$\underline{I(t)=\sqrt{2}\sin(10t+53{,}1^\circ)\ \text{Amp}}$$

حالت III تحلیل شبکه در حوزه فرکانس $j\omega$:



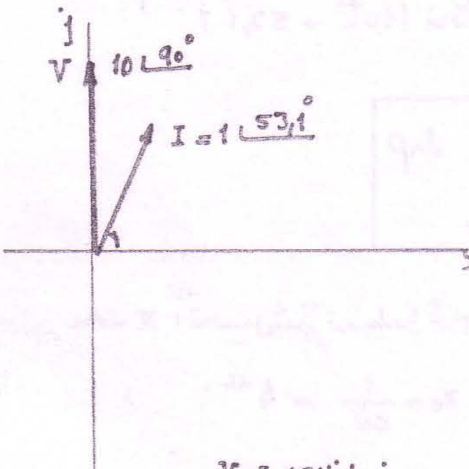
$$jL\omega = j\,1\times 10 = j10^{\Omega}$$

$$-\frac{j}{C\omega} = -\frac{j}{\frac{1}{40}\times 10} = -j4^{\Omega}$$

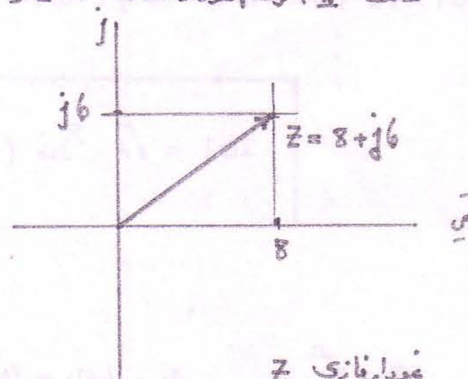
$$I = \frac{10\angle 90^\circ}{8+j10-j4} = \frac{10\angle 90^\circ}{8+j6} = \frac{10\angle 90}{10\angle 36{,}9^\circ} = 1\angle 53{,}1^\circ \ \text{Amp}$$

$$\boxed{I(t) = 1\times\sqrt{2}\,\sin(10t + 53{,}1^\circ)\ \text{Amp}}$$

حالت IV رسم نمودار فازی V، I و Z

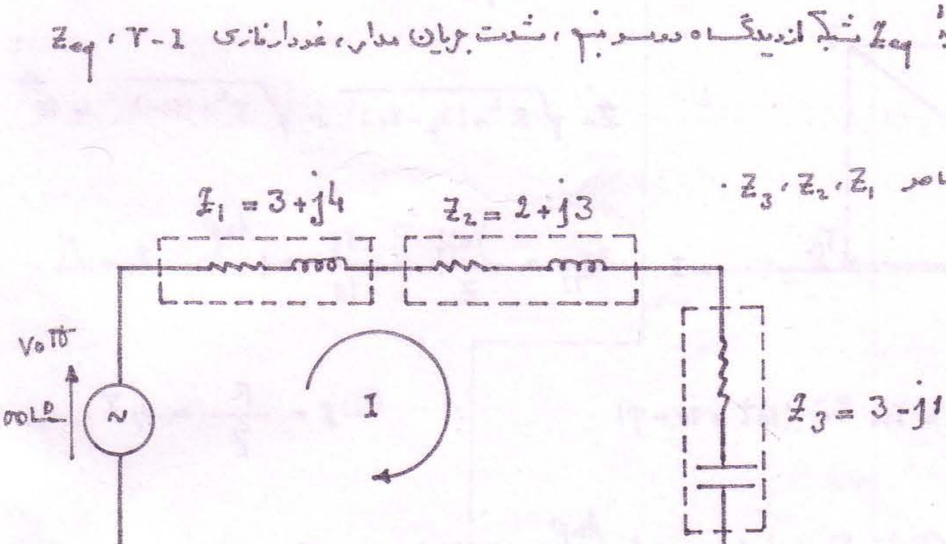


نمودار فازی V-I



نمودار فازی Z

مثال ۲- مطلوبست محاسبه Z_{eq} شبکه از دیدگاه منبع، شدت جریان مدار، نمودار فازی V-I، Z_{eq} و افت ولتاژ دو سر هریک از عناصر Z_1، Z_2، Z_3.



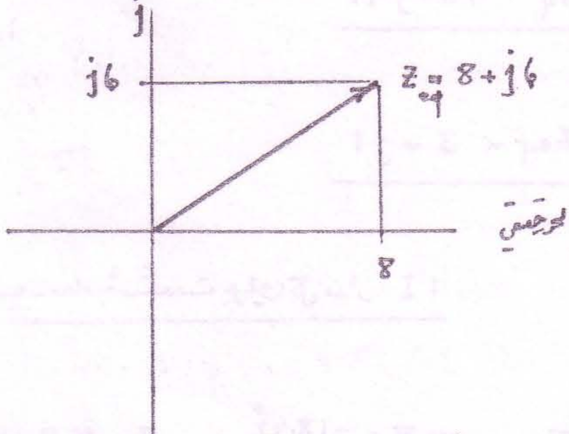
—— تحلیل مدار: الف- محاسبه Z_{eq} از دیدگاه دو سر منبع:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = (3 + j4) + (2 + j3) + (3 - j1) = 8 + j6$$

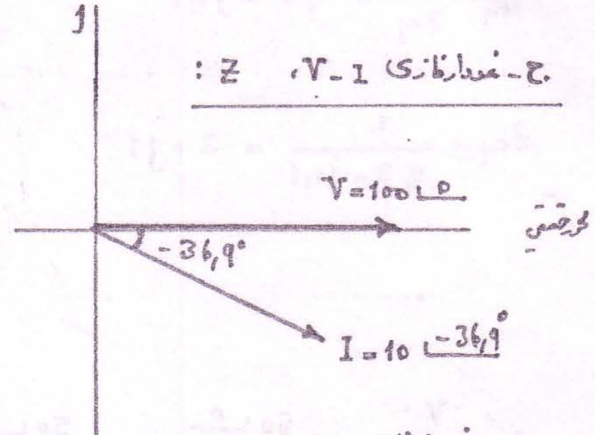
ب- محاسبه شدت جریان مدار:

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{8 + j6} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle 36{,}9} = 10 \angle -36{,}9^\circ$$

ج- نمودار فازی $V-I$ ، Z:



نمودار فازی Z_{eq}



نمودار فازی $V-I$

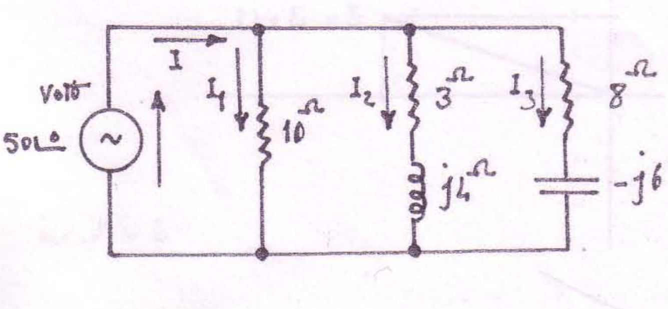
د- محاسبه افت ولتاژ دو سر امپدانس ها:

$$V_1 = Z_1 \cdot I = (3 + j4)(10 \angle -36{,}9^\circ) = 5 \angle 53{,}1^\circ \times 10 \angle -36{,}9^\circ = 50 \angle +16{,}2^\circ \text{ Volt}$$

$$V_2 = Z_2 \cdot I = (2 + j3)(10 \angle -36{,}9^\circ) = 3{,}61 \angle 56{,}3^\circ \times 10 \angle -36{,}9^\circ = 36{,}1 \angle 19{,}4^\circ \text{ Volt}$$

$$V_3 = Z_3 \cdot I = (3 - j1)(10 \angle -36{,}9^\circ) = 3{,}16 \angle -18{,}4^\circ \times 10 \angle -36{,}9^\circ = 31{,}6 \angle -55{,}3^\circ \text{ Volt}$$

●●● مثال 3- مطلوبست محاسبه امپدانس کل شکل، شدت جریان کل و شدت جریان هریک از شاخه ها، رسم نمودارهای فازی $V-I$ ، Z_{eq}.



— تحلیل مدار: الف- محاسبه Z_{eq} :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{8-j6}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{3-j4}{25} + \frac{8+j6}{100} = (0,1+j0) + (0,12 - j0,16) + (0,08+j0,06)$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}} = 0,3 - j0,1 \qquad \underline{Y_{eq} = 0,3 - j0,1}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{0,3 - j0,1} = 3 + j1 \qquad \underline{Z_{eq} = 3 + j1}$$

ب- محاسبهٔ شدت جریان کل مدار I :

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{50\angle 0}{3+j1} = \frac{50\angle 0}{3,16\angle 18,43} = 16,8\angle -18,43^\circ \qquad \underline{I = 16,8\angle -18,43^\circ}$$

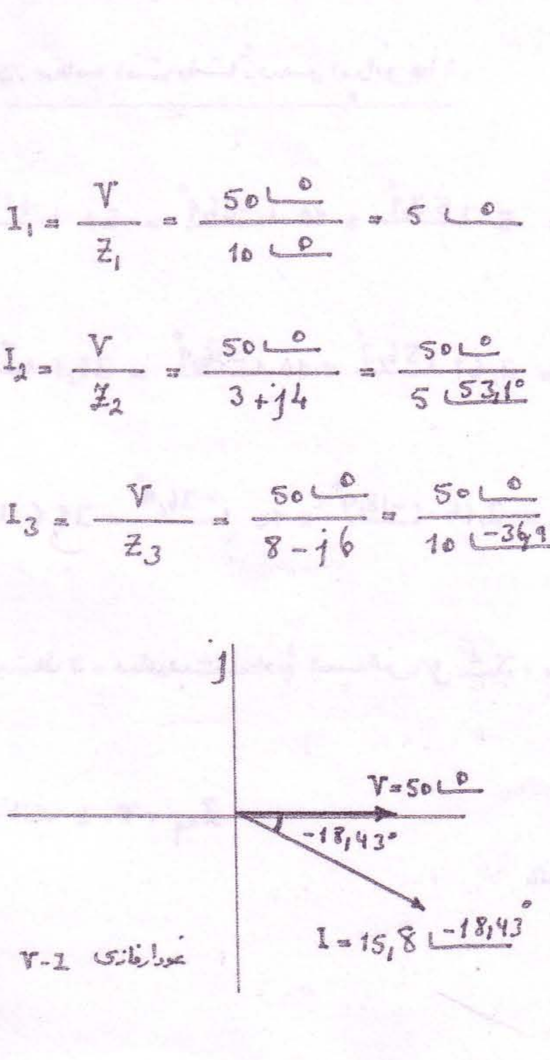
ج- شدت جریان شاخه ها :

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{50\angle 0}{10\angle 0} = 5\angle 0 \text{ Amp}$$

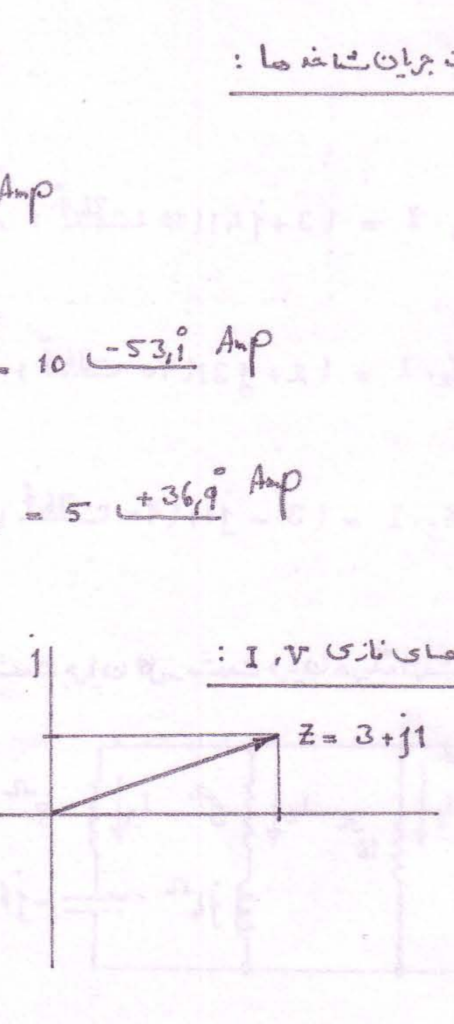
$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{50\angle 0}{3+j4} = \frac{50\angle 0}{5\angle 53,1^\circ} = 10\angle -53,1^\circ \text{ Amp}$$

$$I_3 = \frac{V}{Z_3} = \frac{50\angle 0}{8-j6} = \frac{50\angle 0}{10\angle -36,9^\circ} = 5\angle +36,9^\circ \text{ Amp}$$

د- نمودارهای فازی V، I :

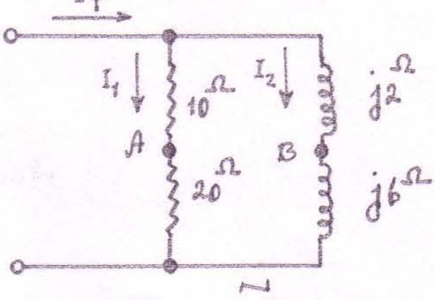


نمودار فازی V-I



نمودار فازی Z

●●● مثال 4- مطلوبست محاسبهٔ ولتاژ V_{AB} در مدار شکل زیر: ($I_T = 18\angle 45^\circ$)



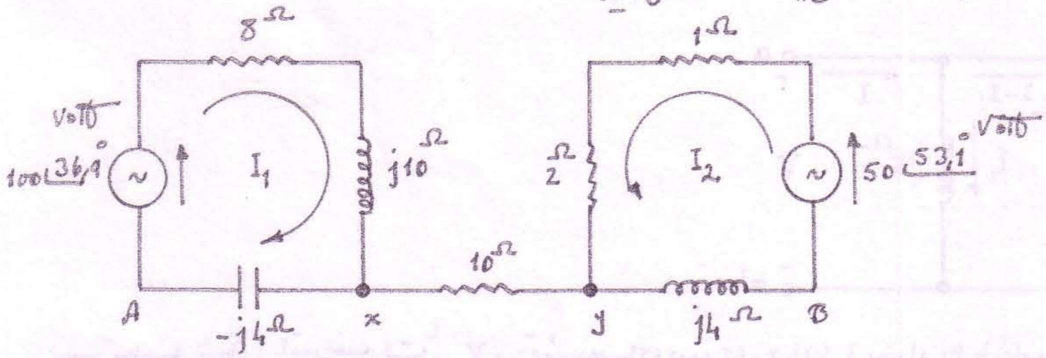
تحلیل شکل:

$$I_1 = 18\angle 45^\circ \times \frac{j8}{30+j8} = 18\angle 45^\circ \times \frac{8\angle 90^\circ}{} = 4.66\angle 120^\circ \ \text{Amp}$$

$$I_2 = 18\angle 45^\circ \times \frac{30}{30+j8} = 18\angle 45 \times \frac{30\angle 0}{} = 17{,}5\angle 30^\circ \ \text{Amp}$$

$$V_{AB} = V_{AN} + V_{NB} = 20(4{,}66\angle 120^\circ) + j6(-17{,}5\angle 30^\circ) = 11{,}8\angle -60 \ \text{Volt}$$

●●● مثال 5 - مطلوبست محاسبهٔ ولتاژ V_{AB} در مدار شکل زیر:



تحلیل مدار:

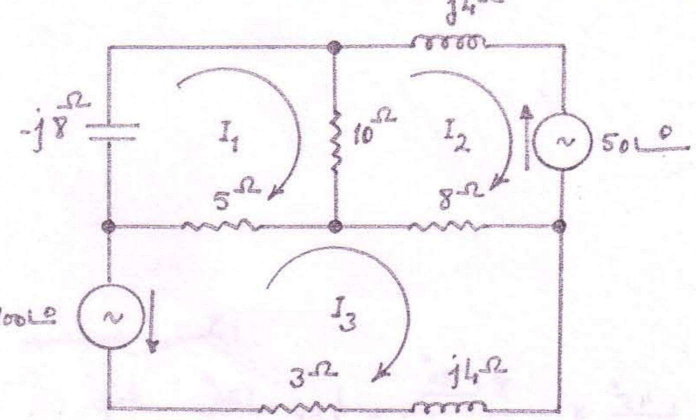
$$V_{AB} = V_{Ax} + V_{xy} + V_{yB} \qquad (I_{xy} = 0 \to V_{xy} = 0 \quad \text{چرا؟})$$

$$I_1 = \frac{100\angle 36{,}9^\circ}{8+j6} = 10\angle 0 \ \text{Amp} \qquad , \qquad I_2 = \frac{50\angle 53{,}1^\circ}{3+j4} = 10\angle 0 \ \text{Amp}$$

$$V_{AB} = (-j4)(-10\angle 0) + 0 + (j4)(10\angle 0)$$

$$V_{AB} = 4\angle 90 \times 10\angle 0 + 4\angle 90 \times 10\angle 0 \qquad \underline{V_{AB} = 80\angle 90^\circ \ \text{Volt}}$$

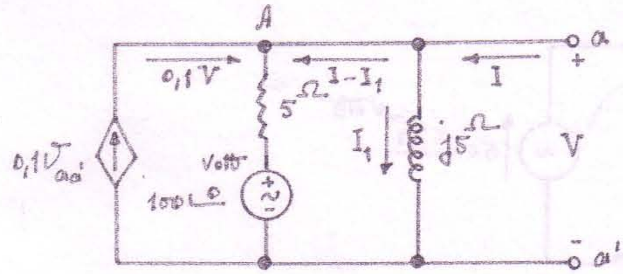
مثال ۶ - فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه مدار را تشکیل دهید.



فرم ماتریسی معادلات KVL :

$$\begin{bmatrix} (15-j8) & -10 & -5 \\ -10 & (18+j4) & -8 \\ -5 & -8 & (16+j4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50\angle 0^\circ \\ -10\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

مثال ۷ - مدار معادل تونن و نورتن شبکه شکل زیر را بدست آورید.



تحلیل شبکه: با تعریف ولتاژ V در ترمینال های ورودی و جریان I بعنوان جریان ورودی میتوان نوشت.

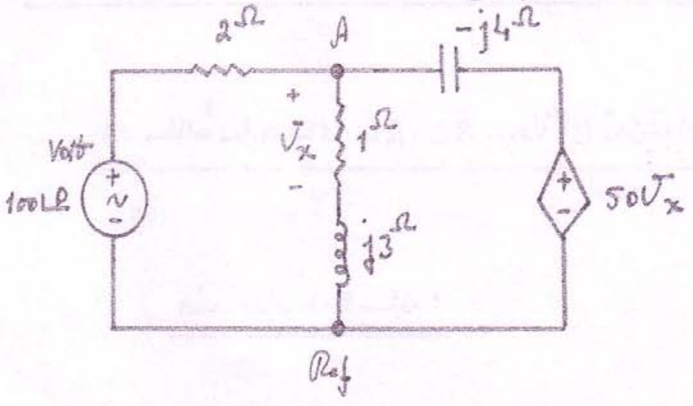
$$KCL\ A: \quad 0{,}1\,V + (I - I_1) = \frac{V - 100\angle 0^\circ}{5} \quad , \quad I_1 = \frac{V}{j5}$$

$$\frac{1}{10} V + I - \frac{V}{j5} = \frac{V}{5} - 20\angle 0^\circ$$

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{j5}\right) V = I + 20\angle 0^\circ \longrightarrow (0{,}1 - j0{,}2)\,V = I + 20\angle 0^\circ$$

$$V = \frac{1}{0{,}1 - j0{,}2} I + \frac{20\angle 0^\circ}{0{,}1 - j0{,}2} \qquad V = \overbrace{(2+j4)}^{Z_{th}} I + \overbrace{89{,}4\angle 63{,}4^\circ}^{V_{th}}$$

مثال 8- با استفاده از روش تحلیل گره ولتاژ V_x را محاسبه کنید.



معادله KCL را در گره A تشکیل میدهیم.

$$\text{KCL A:}\quad \frac{V_A - 100\angle 0}{2} + \frac{V_A}{1+j3} + \frac{V_A - 50V_x}{-j4} = 0.$$

از طرف دیگر میتوان در شاخه $(1+j3)$ نوشت.

$$V_A = V_x + j3V_x = (1+j3)V_x$$

بنابراین:

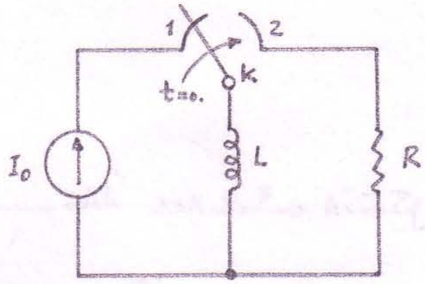
$$\frac{(1+j3)V_x - 100\angle 0}{2} + V_x + \frac{(1+j3)V_x - 50V_x}{-j4} = 0.$$

$$(0{,}5 + j1{,}5 + 1 + j0{,}25 - 0{,}75 - j12{,}5)V_x = 50$$

$$(0{,}75 - j10{,}75)V_x = 50 \qquad \boxed{V_x = \frac{50}{0{,}75 - j10{,}75} =}$$

I - مطالعهٔ مدارهای RL ، RC بدون تابع تحریک (ورودی صفر):

الف - مدار R-L ساده:



فرض میکنیم که کلید k در لحظهٔ t=0. تغییر وضعیت داده و سلف

شارژ شده را به دو سر مقاومت اهمی R وصل کند. میخواهیم جریان $I(t)$ را که در t>0. در مدار R-L برقرار میشود

محاسبه کنیم.

$$KVL: \quad V_R + V_L = 0. \longrightarrow R\,I(t) + L\frac{dI}{dt} = 0.$$

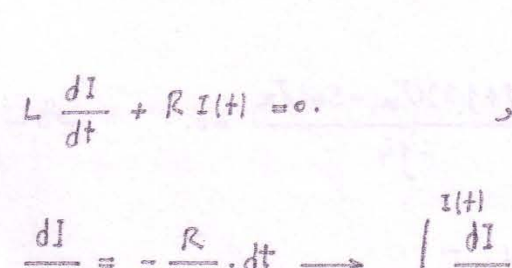
معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با طرف ثانی صفر

$$L\frac{dI}{dt} + R\,I(t) = 0.$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\cdot dt \longrightarrow \int_{I(0^+)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_{0^+}^{t} -\frac{R}{L}\cdot dt \longrightarrow \ln I(t) - \ln I(0^+) = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln\frac{I(t)}{I(0^+)} = -\frac{R}{L}t \longrightarrow \underline{I(t) = I(0^+)\, e^{-R/L\, t}}$$

پاسخ $I(t)$ را پاسخ طبیعی مدار R-L و یا پاسخ ورودی صفر می نامند و با توجه باینکه پاسخ فوق ماهیتاً میرا شونده

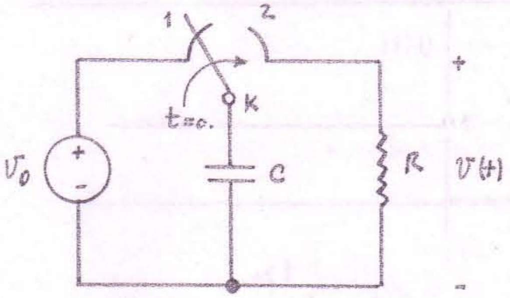


است، آنرا پاسخ گذرا نیز می نامند.

ثابت زمانی $\tau = \frac{L}{R}$: ثابت زمانی τ مدت زمانی است که پس از گذشت آن سلف ٪63,2 جریان اولیهٔ

خود را از دست میدهد و طبق محاسبه 5τ طول میکشد تا سلف ٪99 انرژی اولیهٔ خود را از دست بدهد.

ب- مدار RC ساده:



فرض میکنیم که کلید K در لحظه $t=0$ تغییر وضعیت داده و خازن شارژ شده را به دوسر مقاومت اهمی R وصل کند.

میخواهیم ولتاژ دوسر مقاومت R را بازاء $t>0$ محاسبه نمائیم.

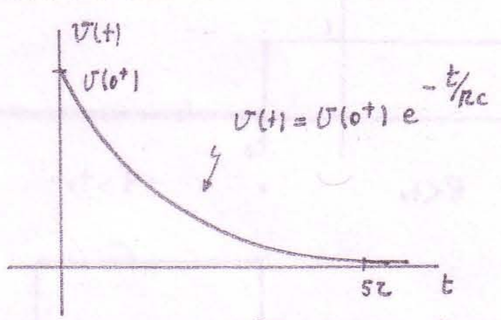
$$\text{KCL}: \quad I_R + I_C = 0 \longrightarrow \frac{v(t)}{R} + C\frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v(t) = 0$$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با طرف ثانی صفر

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}\,.dt \longrightarrow \int_{v(0^+)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_{0^+}^{t} -\frac{1}{RC}\,.dt \longrightarrow \ln v(t) - \ln v(0^+) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\frac{v(t)}{v(0^+)} = -\frac{t}{RC} \qquad \underline{v(t) = v(0^+)\,e^{-t/RC}}$$

پاسخ $v(t)$ را پاسخ طبیعی یا پاسخ ورودی صفر و بنا بر ماهیت نیرویی میراشونده اش پاسخ گذرای مدار R-C می نامند.

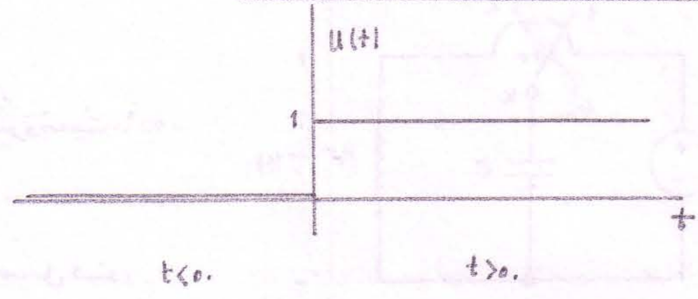


در مدارهای RC، ثابت زمانی $\tau = RC$ مدت زمانی است که پس از گذشت آن خازن 63,2٪ ولتاژ اولیه خود را از دست میدهد و طبق محاسبه مدت 5τ طول میکشد تا خازن 99٪ ولتاژ اولیه خود را از دست بدهد.

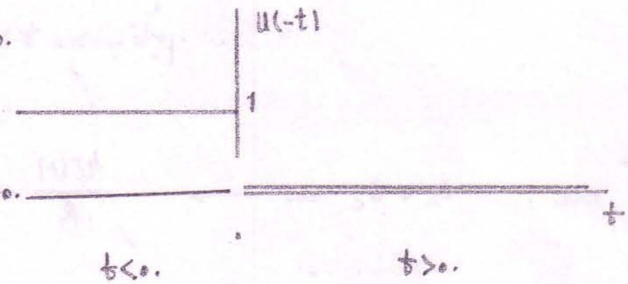
در مدارهای RL و RC بترتیب $S_1 = -\frac{R}{L}$ ، $S_2 = -\frac{1}{RC}$ را فرکانس های طبیعی مدارهای RL ، RC می نامند.

تابع پله‌ای واحد و کاربرد آن در مدارها:

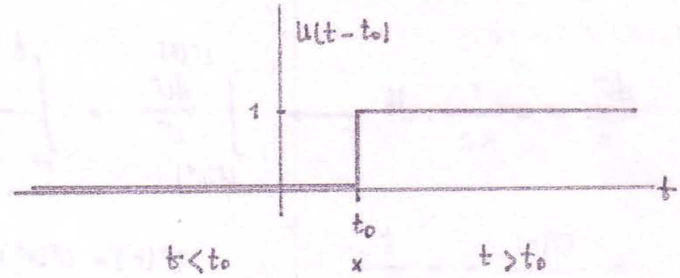
$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



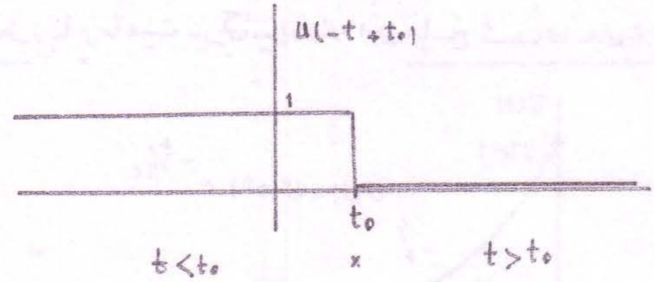
$$u(-t)=\begin{cases}1 & -t>0 \rightarrow t<0\\ 0 & -t<0 \rightarrow t>0\end{cases}$$

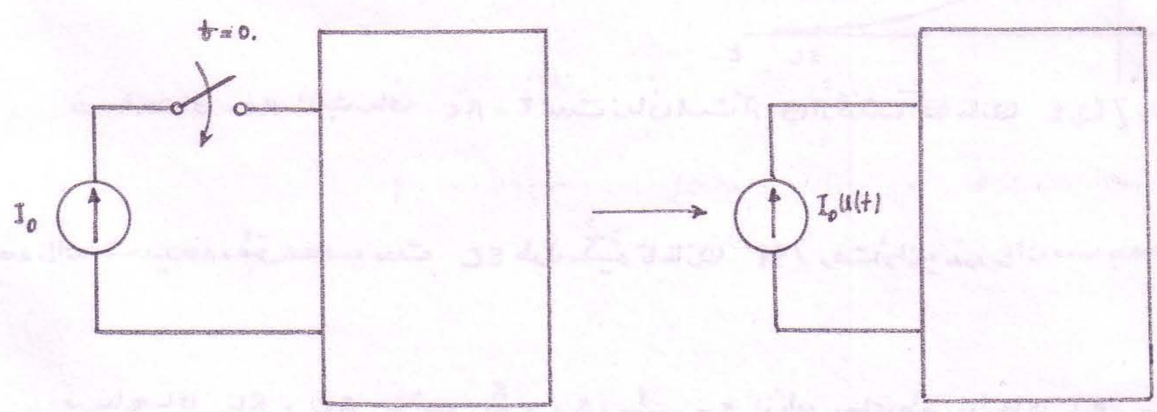


$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

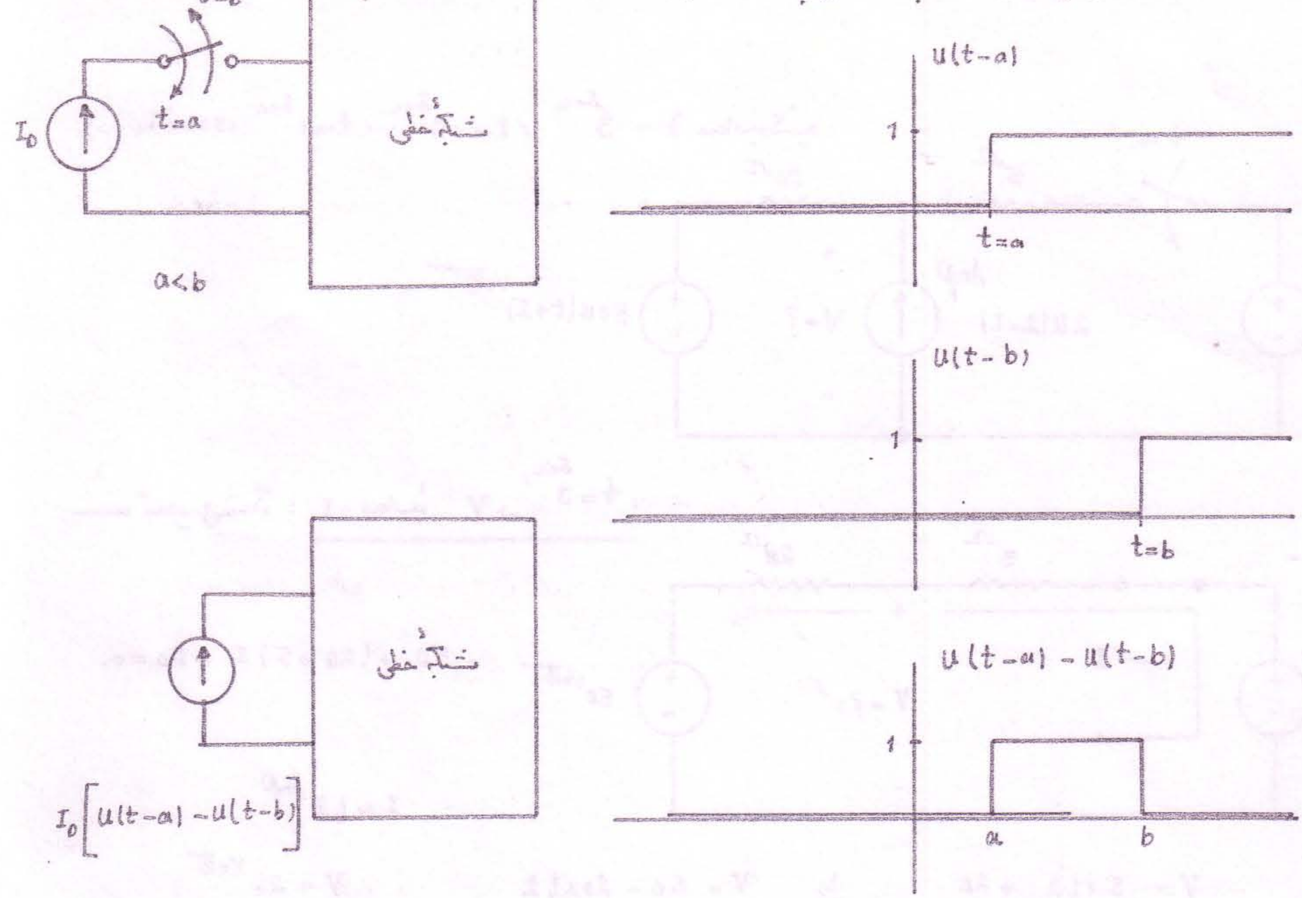


$$u(-t+t_0)=\begin{cases}1 & t<t_0\\ 0 & t>t_0\end{cases}$$

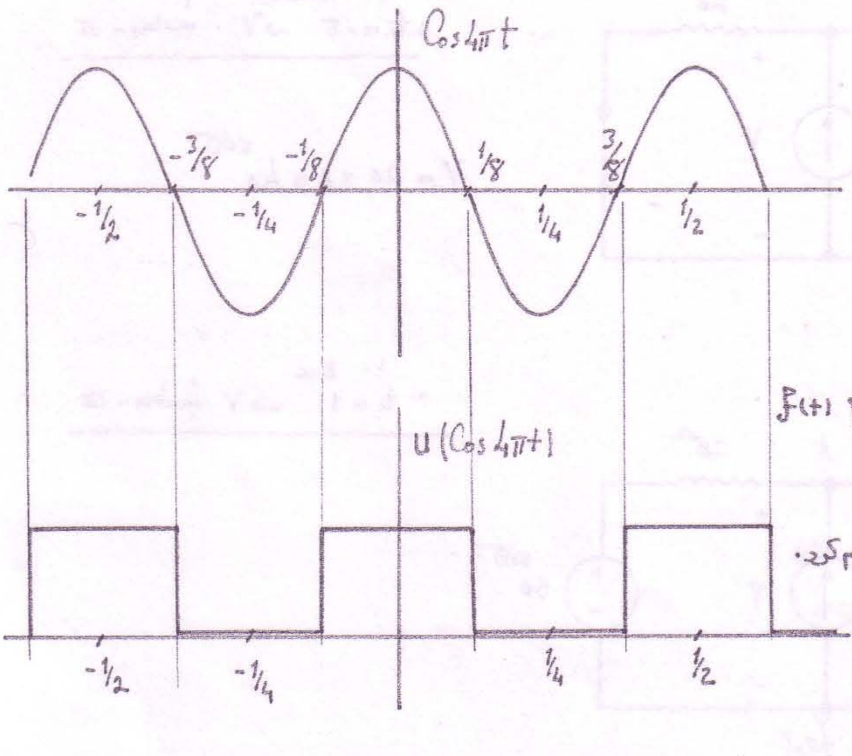




مثال- در مدار شکل زیر کلید K را بصورت تابع پله‌ای واحد بیان کنید.



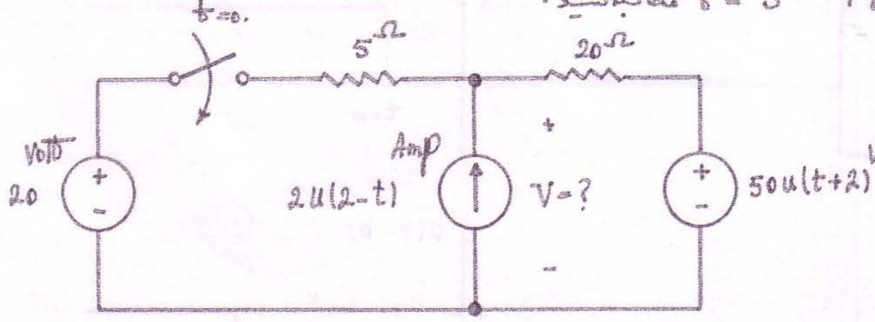
مثال ۲- نمودار تابع پله‌ای $f(t) = u(\cos 4\pi t)$ را رسم نمائید.



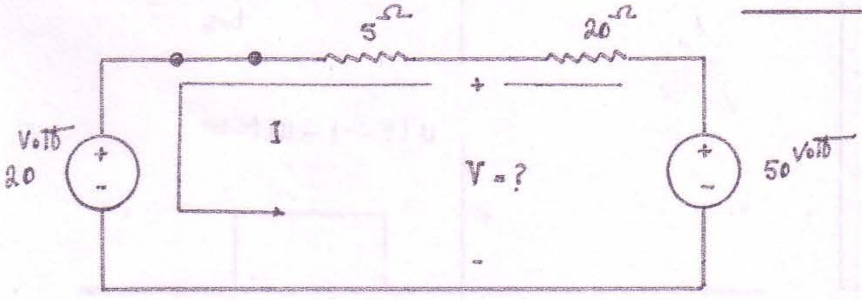
$$u(\cos 4\pi t) = \begin{cases} 1 & \cos 4\pi t > 0 \\ 0 & \cos 4\pi t < 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع پله‌ای میتوان نمودار تابع $f(t)$ را بصورت زیر و بکمک نمودار تابع $\cos 4\pi t$ رسم کرد.

مثال 3 - در مدار شکل زیر کلید k در $t=0$ بسته میشود. با توجه به تعریف تابع پله‌ای واحد مقدار ولتاژ V را در زمانهای $t=1^{sec}$ ، $t=-5^{sec}$ ، $t=3^{sec}$ محاسبه کنید.



ـــ تحلیل نتیجه : I - محاسبه V در $t=3^{sec}$:



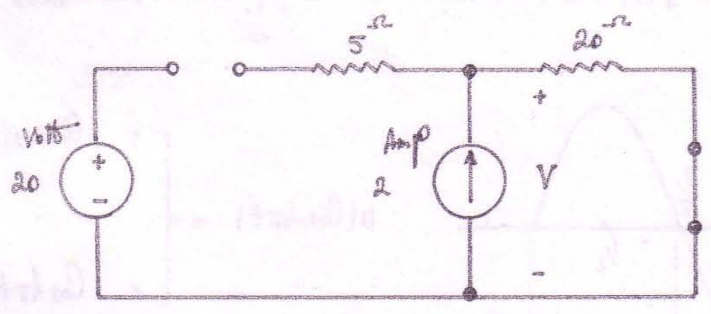
$$-50+(20+5)I+20=0.$$

$$I=1.2^{Amp}$$

$V = 5\times1.2+20$ یا $V=50-20\times1.2$

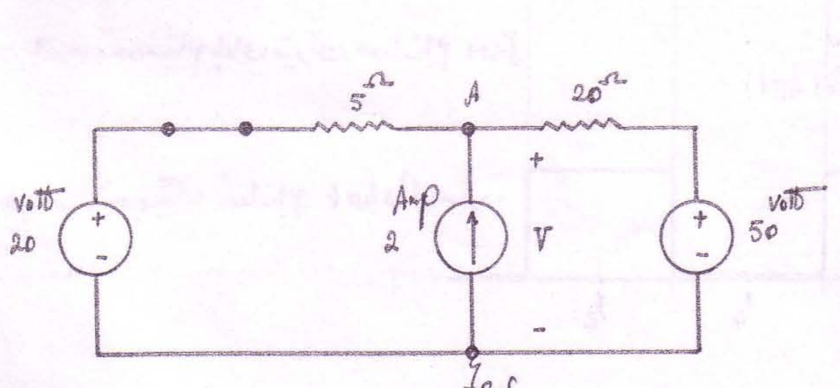
$$\underline{V=26^{Volt}}$$

II - محاسبه V در $t=-5^{sec}$:



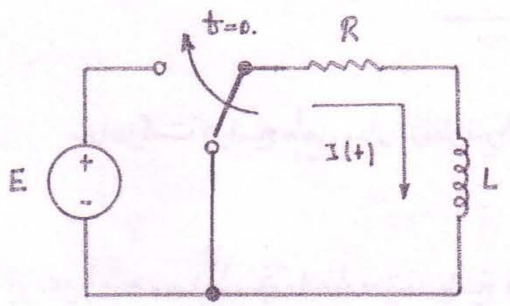
$$V=20\times2=40^{Volt}$$

III - محاسبه V در $t=1^{sec}$:



$$\text{KCL } A:\quad \frac{V-20}{5}-2+\frac{V-50}{20}=0.\qquad \underline{V=34^{Volt}}$$

II- مطالعهٔ مدارهای RC ، RL با تابع تحریک DC (پله‌ای واحد $U(t)$) :

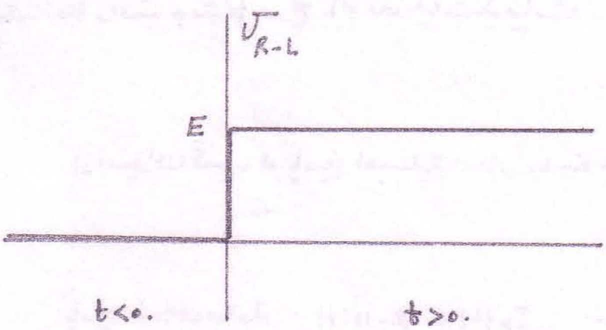


الف - مدار ساده R-L با تابع تحریک DC :

فرض میکنیم در لحظهٔ $t=0.$ کلید K یک مدار ساده R-L را به دو سر منبع ولتاژ مستقل E وصل کند. میخواهیم شدت جریان $I(t)$ را بازاء $t>0.$ محاسبه کنیم.

$$\text{KVL } (I): \quad E = RI(t) + L\frac{dI}{dt} \longrightarrow L\frac{dI}{dt} + RI(t) = E \quad (\text{بازاء } t>0.)$$

با توجه به عملکرد کلید و موقعیت آن در مدار میتوان ولتاژ دو سر مدار R-L را بازاء تمام زمانها بصورت نمودار زیر بیان کرد سپس آنرا بصورت تابع پله‌ای واحد تعریف نمود.



با توجه به تعریف تابع پله‌ای واحد

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t<0. \\ 1 & t>0. \end{cases}$$

میتوان نمودار فوق (ولتاژ دو سر مدار R-L) را بصورت $V_{R-L} = E\cdot U(t)$ بازاء تمام زمانها تعریف کرد.

لذا: معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با طرف ثانی پله‌ای

$$L\frac{dI}{dt} + RI(t) = E\cdot U(t)$$

میتوان نشان داد که معادلهٔ بالا دارای دو نوع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری است. و یا بعبارت دیگر پاسخ کامل $I(t)$ از مجموعهٔ طبیعی و اجباری تشکیل میشود.

$$I(t) = I_f + I_n(t)$$

محاسبه پاسخ طبیعی مدار : پاسخ طبیعی مدار همان پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول بدون طرف ثانی است که آنرا

پاسخ معادله همگن نیز می نامند . بنابراین :

$$L \frac{dI}{dt} + R\,I(t) = 0. \longrightarrow \underline{I_n(t) = A e^{-\frac{R}{L}t}}$$

میتوان گفت که پاسخ طبیعی مدار از نظر فیزیکی همان پاسخ مربوط به عکس العمل مدار (مخالفت L) در مقابل تغییرات

جریان میباشد و همانطوریکه ملاحظه میشود پاسخ فوق فقط تابع مشخصات فیزیکی عناصر غیرفعال شبکه (R ، L) بوده

و کاملاً مستقل از شکل موج تابع تحریک میباشد .

محاسبهٔ پاسخ اجباری مدار : پاسخ اجباری مدار همان پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل شبکه بازاء تابع تحریک پله‌ای بوده

و کاملاً وابسته به شکل موج تابع تحریک شبکه میباشد .

لذا میتوان گفت که پاسخ اجباری مدار R-L بازاء تابع تحریک پله‌ای بصورت پاسخ پله‌ای میباشد . یعنی

$$L \frac{dI}{dt} + R\,I(t) = E \cdot u(t) \longrightarrow \underline{I_f(t) = K \cdot u(t)}$$ پاسخ خصوصی معادله

بازاء $t>0$ میتوان با ترازیابی $I_f(t)$ در معادله دیفرانسیل بالا مقدار ضریب K را محاسبه کرد .

$$L \times 0 + R \cdot K \cdot u(t) = E \cdot u(t) \longrightarrow K = \frac{E}{R} \longrightarrow I_f(t) = \frac{E}{R}\, u(t)$$

پاسخ اجباری مدار که همان پاسخ خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل میباشد ماهیتاً از نظر فیزیکی ماندگار بوده و لذا آنرا در

اکثر موارد پاسخ ماندگار شبکه نیز خواهیم نامید .

محاسبهٔ پاسخ کامل مدار :

$$I(t) = \frac{E}{R}\, u(t) + A e^{-\frac{R}{L}t}$$

اگر مقدار اولیه جریان در مدار R-L در $t<0$ معادل صفر باشد میتوان $I(t)$ را بصورت زیر نتیجه گرفت.

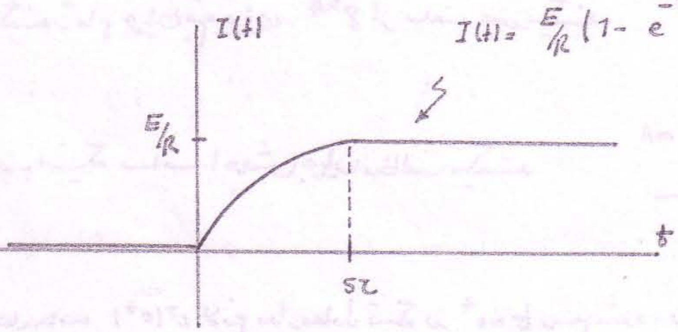
$$I(t) = \frac{E}{R}\,u(t) + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$t=0^+ \longrightarrow I(0^+) = \frac{E}{R} + A \longrightarrow 0 = \frac{E}{R} + A \longrightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$I(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t) \longrightarrow \underline{I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)}$$

$I(t)$ را تحت شرایط بالا پاسخ حالت صفر مدار نیز می‌نامند. (شرایط اولیه مدار صفر باشد)

نمودار جریان $I(t)$: $\quad I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$



$$\underbrace{t<0}_{\text{شرایط اولیه}} \quad \underbrace{0^+ \overset{L}{|}\, 5\tau}_{\substack{\text{پاسخ طبیعی} \\ \text{(گذرا)}}} \quad \underbrace{5\tau \overset{L}{|}\, \infty}_{\text{پاسخ اجباری (ماندگار)}}$$

نمودار بالا نشان میدهد که برای محاسبهٔ پاسخ کامل $I(t)$ در مدار R-L با تحریک DC (پله‌ای واحد) و مدارهای مشابه آن لازم است شکل در محدوده های زمانی زیر مورد مطالعه قرار گیرد.

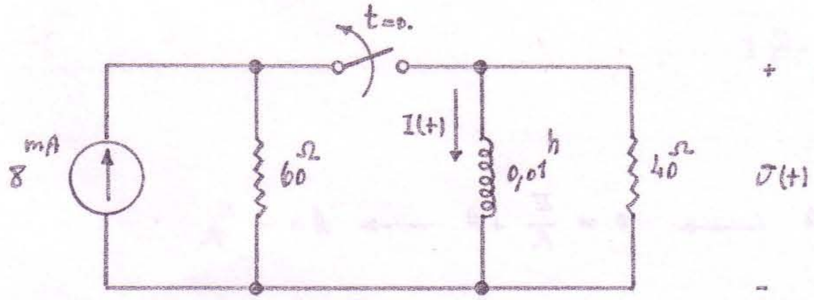
1) $t<0$: حالت آرامش اولیه بمنظور محاسبهٔ $I(0^+)$ ، $V(0^+)$

2) $0^+ \overset{L}{|}\, 5\tau$: حالت غیر آرامش (گذرا) بمنظور محاسبهٔ پاسخ طبیعی

3) $5\tau \overset{L}{|}\, \infty$: حالت آرامش نهایی بمنظور محاسبهٔ پاسخ اجباری

$$\underline{I(t) = I_f + I_n(t)}$$

●●● مثال ۱- در مدار شکل زیر کلید K در $t=0$ باز میشود. مطلوبست محاسبهٔ $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ ، $I(t)$ ، $V(t)$



برای $t>0$.

ـــ تحلیل شکل: الف- مطالعهٔ مدار در $t<0$ بمنظور محاسبه $v(0^+)$ ، $I(0^+)$:

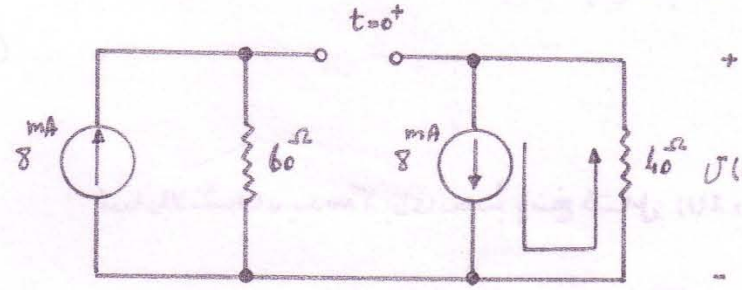
در $t<0$ کلید K بسته است و چون از مدتها قبل کلید K در این وضعیت قرار دارد لذا سلف بمثابهٔ اتصال

کوتاه عمل میکند و تمام جریان منبع جریان 8^{mA} از سلف عبور میکند. $I(t<0) = 8^{mA}$

باتوجه به اینکه سلف با جهش جریان مخالفت میکند $\underline{I(0^+) = I(0^-) = I(t<0) = 8^{mA}}$

برای محاسبه $v(0^+)$ لازم مدار معادل شبکه در $t=0^+$ رسم شود. در این لحظه سلف به منبع جریانی با مقدار $I(0^+)$

تبدیل میشود و بعلت بازشدن کلید K تمام انرژی ذخیره شدهٔ خود را روی مقاومت 40^{Ω} دشارژ میکند.



$$\underline{v(0^+) = 40 \times (-8^{mA}) = -320^{mVolt}}$$

مدار معادل در $t=0^+$

توجه داشته باشید که $v(0^-) = v(t<0) = 0$. و دیگر $\underline{v(0^+) \neq v(0^-)}$ دیادر

مقاومت 60^{Ω} : $I'(0^-) = I(t<0) = 0$. ، $I'(0^+) = 8^{mA}$ زیرا: $\underline{I'(0^+) \neq I'(0^-)}$

ب - مطالعه مدار در $t>0$: در $t>0$ کلید K باز بوده و اولاً منبع فعال 8^{mA} از مدار R-L خارج میشود ثانیاً سلف انرژی ذخیره شده را در مقاومت 40^{Ω} تخلیه میکند. لذا

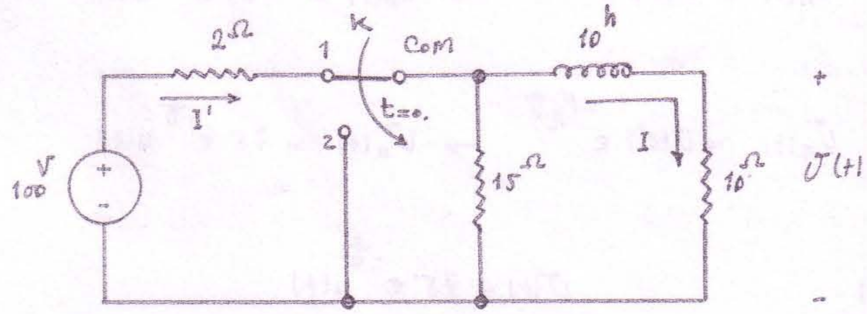
$$I_f = 0 \quad , \quad V_f = 0$$

$$I_n(t) = I(0^+)\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \underline{I_n(t) = 8\, e^{-4000t}} \qquad t>0 \quad \text{پس}$$

$$V_n(t) = V(0^+)\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \underline{V_n(t) = -320\, e^{-4000t}} \qquad t>0 \quad \text{پس}$$

$$\underline{I(t) = 8\, e^{-4000t}\, u(t) \quad , \quad V(t) = -320\, e^{-4000t}\, u(t)}$$

مثال 2 - مطلوبست محاسبهٔ $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ ، $I(t)$ ، $V(t)$ برای $t>0$:



تحلیل شکل: مطالعه مدار در $t<0$ و محاسبه $I(0^+)$ ، $V(0^+)$: در $t<0$ کلید K در وضعیت 1 قرار دارد.

سلف بعنوان اتصال کوتاه عمل میکند.

$$I'(t<0) = \frac{100}{2 + \frac{10 \times 15}{10+15}} = 12.5$$

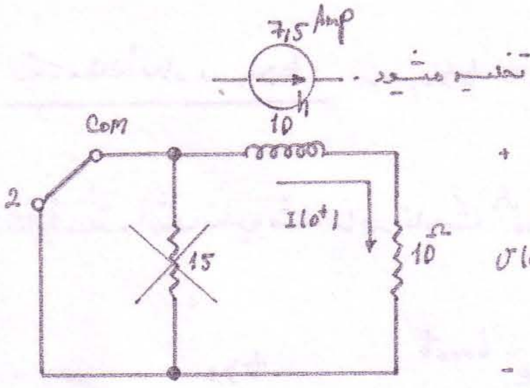
$$I(0^-) = 12.5 \quad , \quad I(t<0) = \frac{15}{10+15} \times 12.5 = 7.5^{Amp} \qquad I(0^-) = 7.5^{Amp}$$

سلف با جهش جریان مخالفت میکند لذا:

$$I(0^+) = I(0^-) = I(t<0) = 7.5^{Amp}$$

محاسبه $V(0^+)$: در لحظه $t=0^+$ کلید در وضعیت (2) قرار میگیرد و مقاومت 15^{Ω} از طریق کلید اتصال کوتاه میشود

سلف به منبع جریان $7,5^{A}$ تبدیل و سپس روی مقاومت 10^{Ω} تخلیه میشود.



(مدار معادل در $t=0^+$)

$$v(0^+) = 10 \times 7,5 = 75 \ \text{volt}$$

محاسبه $v(t)$ ، $I(t)$ در $t>0$:

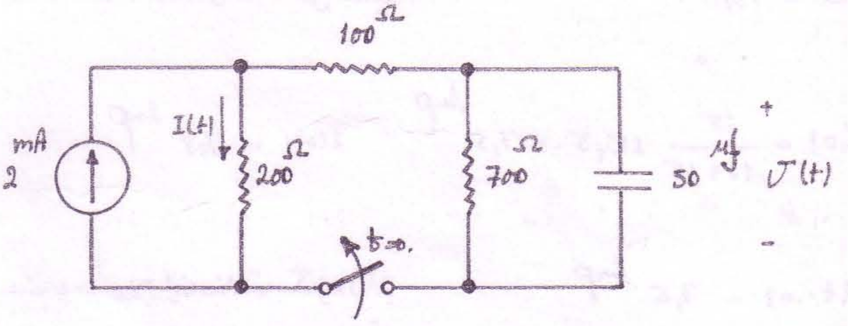
در $t>0$ منبع ولتاژ 100^{V} و مقاومت 2^{Ω} از طریق کلید از مدار خارج شده و مقاومت 15^{Ω} نیز توسط کلید اتصال کوتاه میشود. بنابراین سلف 10^{h} فقط روی مقاومت 10^{Ω} دشارژ میشود ، $R/L = 1 \ ^{1/s}$

$$I_f = 0 \ , \ v_f = 0 \qquad I_n(t) = I(0^+)\, e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow I_n(t) = 7,5\, e^{-t}\, u(t)$$

$$v_n(t) = v(0^+)\, e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow v_n(t) = 75\, e^{-t}\, u(t)$$

$$I(t) = 7,5\, e^{-t}\, u(t) \qquad v(t) = 75\, e^{-t}\, u(t)$$

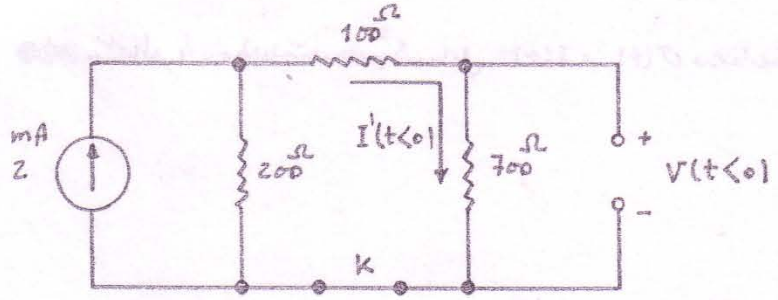
مثال 3 - در شبکه شکل زیر کلید K در لحظه $t=0$ باز میشود $v(0^+)$ ، $I(0^+)$ ، $v(t)$ ، $I(t)$ را برای $t>0$ محاسبه کنید.



تحلیل مدار - الف - مطالعه مدار در $t<0$:

[redacted]

در $t<0$ کلید K بسته است و ولتاژ دو سر خازن برابر است با :



مدار معادل در $t<0$ ،

$$I'(t<0) = \frac{200}{200+(100+700)} \times 2^{mA}$$

$$I'(t<0) = 0{,}4^{mA}$$

$$V(t<0) = 700 \times 0{,}4 = 280^{mVolt}$$

$$V(0^-) = V(t<0) = 280^{mVolt}$$

خازن با جهش ولتاژ مخالفت می‌کند.

$$V(0^+) = V(0^-) = 280^{mVolt}$$

محاسبه $I(0^+)$ با استفاده از مدار معادل در $t=0^+$: در $t=0^+$ کلید K باز می‌شود، مقاومت 200^{Ω} مستقیماً به دو سر منبع 2^{mA} وصل می‌گردد. لذا:

$$I(0^+) = 2^{mA}$$

محاسبه $V(t), I(t)$ در $t>0$:

در $t>0$ مدار خازن $50^{\mu f}$ فقط توسط مقاومت 700^{Ω} بسته می‌شود و لذا:

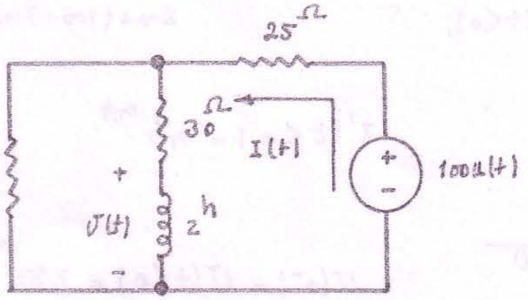
$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{700 \times 50 \times 10^{-6}} = 28{,}6^{\,1/sec} \longrightarrow v_n(t) = V(0^+)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V(t) = 280\, e^{-28{,}6t}\, u(t) \quad mVolt$$

با توجه به اینکه جریان $I(t)$ در $t>0$ فقط توسط منبع 2^{mA} برقرار می‌شود و هیچ ارتباطی با خازن و اثری مربوط به آن ندارد لذا:

$$I(t) = 2^{mA} \quad t>0 \quad \text{یا} \quad I(t) = 2u(t)^{mA}$$

مثال ۴ـ مطلوبست محاسبهٔ کامل $I(t)$ ، $v(t)$ در مدار شکل زیر:

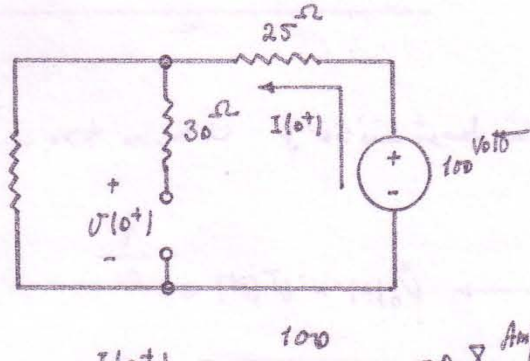


I/ مطالعهٔ مدار در $t<0$ بمنظور محاسبهٔ $v(0^+)$ ، $I(0^+)$ (شرایط اولیه):

در $t<0$ شبکه غیرفعال بوده ولذا $I_L(t<0)=0.$ میباشد و با توجه بانکه سلف با جهش جریان مخالفت میکند

$$I_L(0^+) = I_L(0^-) = I_L(t<0) = 0. \qquad \underline{I_L(0^+) = 0.}$$

برای محاسبه $I(0^+)$ ، $v(0^+)$ مدار معادل را در $t=0^+$ درنظر میگیریم. در این لحظه سلف بعنوان منبع جریان صفر آمپری (مدار باز) عمل میکند.



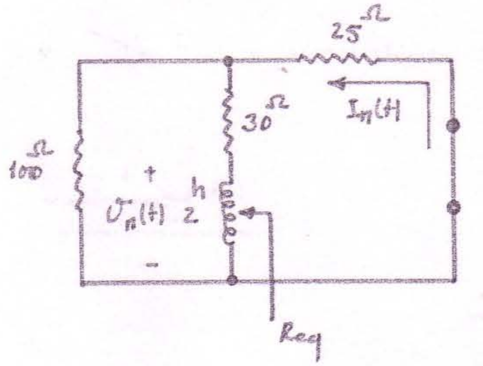
$$V(0^+) = ? \qquad , \qquad I(0^+) = ?$$

$$I(0^+) = \frac{100}{100+25} = 0{,}8^{\,Amp} \qquad v(0^+) = 100 \times 0{,}8 = 80^{\,Volt}$$

$$\underline{I(0^+) = 0{,}8^{\,Amp}} \qquad , \qquad \underline{v(0^+) = 80^{\,Volt}}$$

II/ مطالعهٔ مدار در فاصلهٔ زمانی $0^+ \leq t \leq \infty$ بعلت حضور منابع فعال بمنظور محاسبهٔ پاسخ طبیعی یا پاسخ گذرای مدار:

مدار معادل شبکه را بعلت حضور منبع 100^{Volt} در فاصلهٔ زمانی $0^+ \leq t \leq \infty$ درنظر میگیریم.



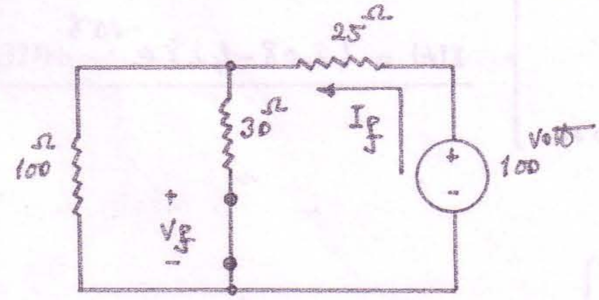
$$R_{eq} = \frac{25 \times 100}{100+25} + 30 = 50^{\Omega}$$

$$\frac{R_{eq}}{L} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\underline{I_n(t) = Ae^{-25t}} \qquad \underline{v_n(t) = Be^{-25t}}$$

$\overline{\text{III}}$) مطالعه مدار در فاصله زمانی $5 \le t < \infty$ بمنظور محاسبه پاسخ اجباری (ماندگار) : حالت آرامش نهایی

در این فاصله زمانی $5 \le t$ از وصل کلید سپری شده و مدار بحالت آرامش نهایی رسیده است لذا سلف در مدار بعنوان اتصال کوتاه عمل میکند. و مدار معادل بصورت زیر میباشد.



$$I_f = \frac{100}{\frac{100 \times 30}{100+30} + 25} = 2{,}08^{Amp}$$

$$V_f = 0.$$

$$\underline{I_f = 2{,}08^{Amp}} \qquad \underline{V_f = 0.}$$

محاسبه پاسخ کامل:

$$v(t) = v_f + v_n(t) = 0 + Be^{-25t}$$

$$I(t) = I_f + I_n(t) = 2{,}08 + Ae^{-25t}$$

$$I(t) = 2{,}08 + Ae^{-25t}$$

محاسبه ضرائب A ، B توسط $v(0^+)$ ، $I(0^+)$:

$$t = 0^+ \longrightarrow I(0^+) = 2{,}08 + A \longrightarrow 0{,}8 = 2{,}08 + A \longrightarrow A = -1{,}28$$

$$I(t) = 2{,}08 - 1{,}28\, e^{-25t} \qquad t>0$$

محاسبه ضریب B:

$$v(t) = B e^{-25t}$$

$$t=0^+ \longrightarrow v(0^+) = B \longrightarrow B = 80^{\text{Volt}}$$

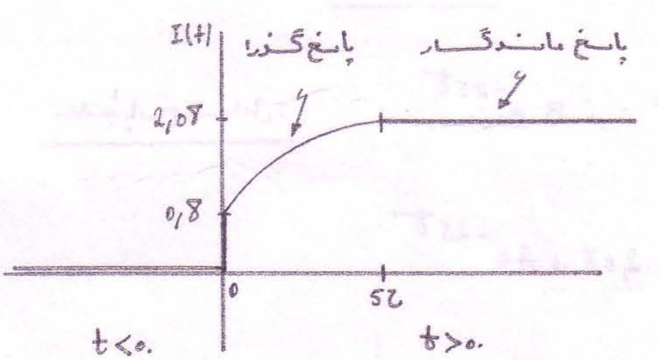
$$v(t) = 80\, e^{-25t} \qquad t>0$$

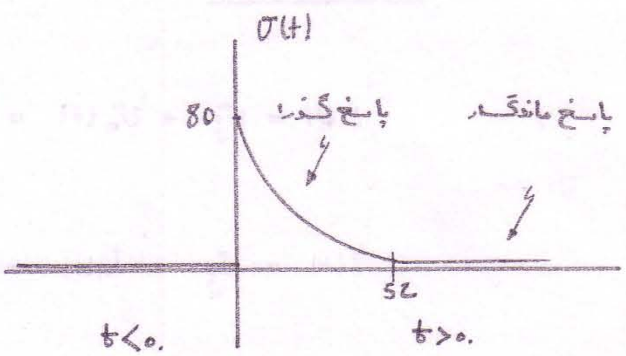
با توجه باینکه مقدار $I(t)$ ، $v(t)$ در $t<0$ صفر و مساوی صفر باشد لذا میتوان $I(t)$ ، $v(t)$ را

بازاء تمام زمانها بصورت زیر نوشت.

$$\left.\begin{array}{ll} I(t) = 0 & t<0 \\ I(t) = 2{,}08 - 1{,}28\, e^{-25t} & t>0 \end{array}\right\} \rightarrow I(t) = (2{,}08 - 1{,}28\, e^{-25t})\, u(t)$$

$$\left.\begin{array}{ll} v(t) = 0 & t<0 \\ v(t) = 80\, e^{-25t} & t>0 \end{array}\right\} \rightarrow v(t) = 80\, e^{-25t}\, u(t)$$

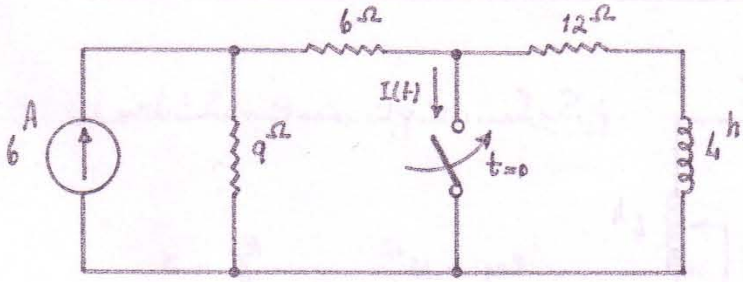




$I(t) = (2{,}08 - 1{,}28\, e^{-25t})\, u(t)$ نمودار

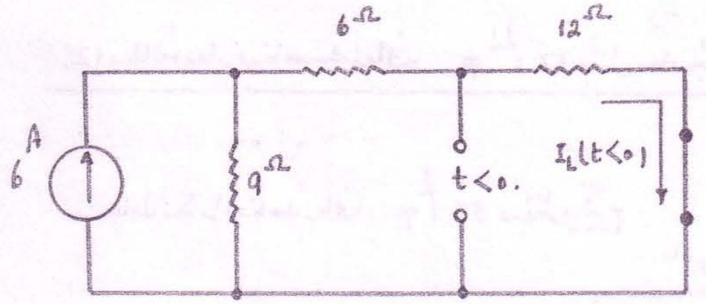
$v(t) = 80\, e^{-25t}\, u(t)$ نمودار

مثال ۵ - در مدار شکل زیر کلید K در $t=0$ بسته میشود. پاسخ کامل $I(t)$ را محاسبه کنید.



تحلیل شکل: I) مطالعه مدار در $t<0$ (حالت آرامش اولیه) بمنظور محاسبه $I(0^+)$:

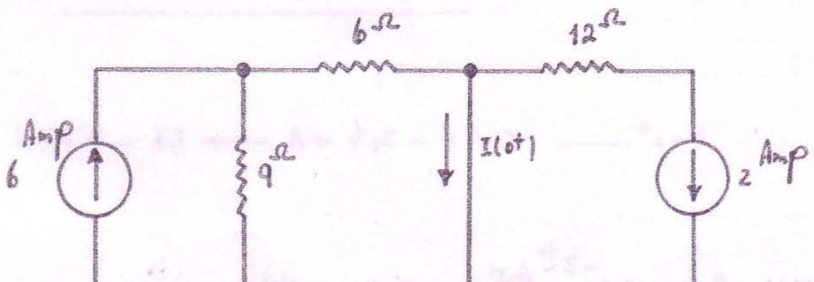
الف- محاسبه $I_L(0^+)$: مدار معادل را در $t<0$ درنظر میگیریم. با توجه باینکه مدار در حالت آرامش است سلف بعنوان اتصال کوتاه عمل میکند.



$$I_L(t<0) = \frac{9}{9+(6+12)} \times 6 = 2 \ Amp$$

$$\underline{I_L(0^+) = 2 \ Amp}$$

ب- محاسبه $I(0^+)$ بکمک مدار معادل شکل در $t=0^+$: مدار معادل را در $t=0^+$ درنظر میگیریم. در این لحظه سلف بعنوان منبع جریان 2^{Amp} عمل میکند.



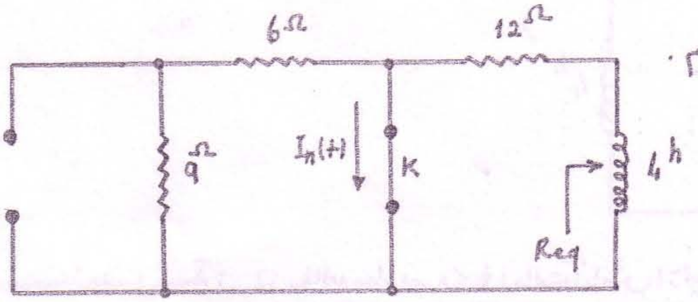
$$I(0^+) = I'(0^+)\Big|_{6^A \text{ توسط}} + I''(0^+)\Big|_{2^A \text{ توسط}}$$

$$I'(0^+) = \frac{9}{9+6} \times 6 = 3{,}6 \ Amp \qquad I''(0^+) = -2 \ Amp$$

$$\underline{I(0^+) = 1{,}6 \ Amp}$$

II) مطالعهٔ مدار در فاصلهٔ زمانی $0^+ \le t \le 5\tau$ بمنظور محاسبهٔ پاسخ طبیعی مدار :

مدار معادل شبکه را بدون حضور منابع فعال در نظر میگیریم .

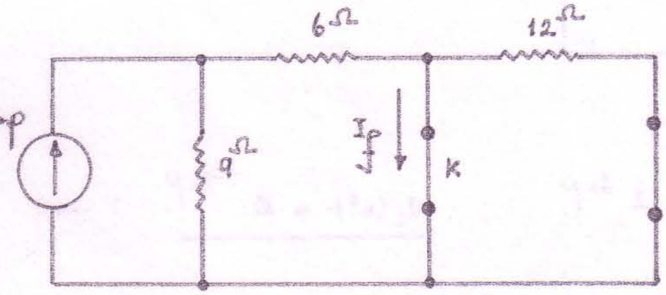


$$R_{eq} = 12^{\Omega} \qquad R/L = 3$$

$$\underline{I_n(t) = A e^{-3t}}$$

III) مطالعهٔ مدار در فاصلهٔ زمانی $5\tau \le t \le \infty$ بمنظور محاسبهٔ پاسخ اجباری : حالت آرامش نهایی

مدار معادل شبکه را در فاصلهٔ زمانی $5\tau \le t \le \infty$ در نظر میگیریم .



$$I_f = \frac{9}{9+6} \times 6 = 3{,}6^{\ Amp}$$

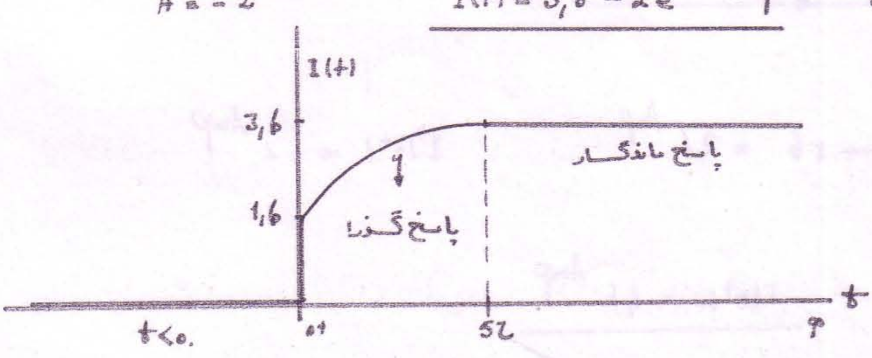
$$\underline{I_f = 3{,}6^{\ Amp}}$$

محاسبهٔ پاسخ کامل : $I(t)$

$$I(t) = I_f + I_n(t)$$

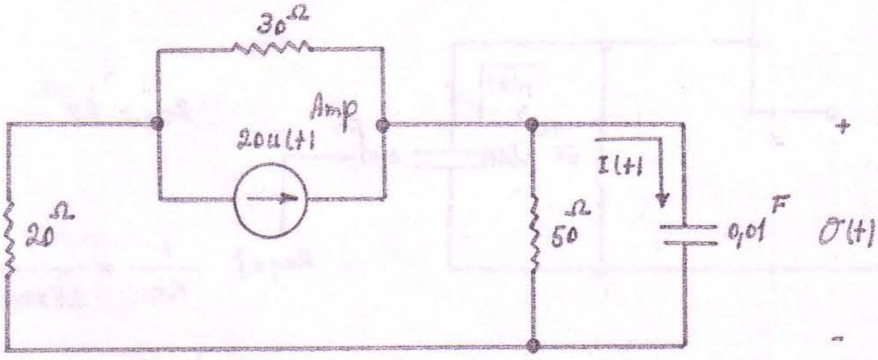
$$I(t) = 3{,}6 + Ae^{-3t} \qquad t = 0^+ \longrightarrow I(0^+) = 3{,}6 + A \longrightarrow 1{,}6 = 3{,}6 + A$$

$$A = -2 \qquad \underline{I(t) = 3{,}6 - 2e^{-3t}\ Amp} \quad t > 0. \text{ بازاء}$$



$$\underline{I(t) = (3{,}6 - 2e^{-3t})u(t)}$$

مثال ۶- مطلوبست محاسبهٔ $V(0^+)$ ، $I(0^+)$ و پاسخ کامل $v(t)$ ، $I(t)$ در مدار شکل زیر:



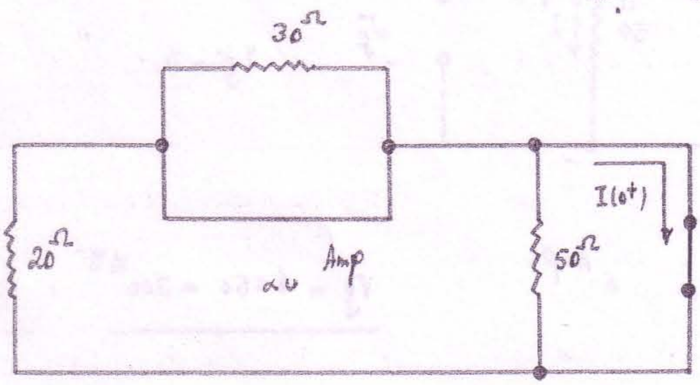
تحلیل شبکه: I- مطالعه مدار در $t<0$ (حالت آرامش اولیه) جهت محاسبهٔ $V(0^+)$ ، $I(0^+)$:

در $t<0$ مدار غیرفعال است. $V(t<0) = 0.$

و چون خازن با جهش ولتاژ مخالفت میکند. $V(0^+) = V(0^-) = V(t<0) = 0.$

و اما برای محاسبهٔ $I(0^+)$ مدار معادل را در $t = 0^+$ در نظر میگیریم و در این لحظه خازن بعنوان منبع ولتاژ صفر ولت عمل

میکند و بنابراین مدار معادل شبکه بصورت زیر خواهد بود.



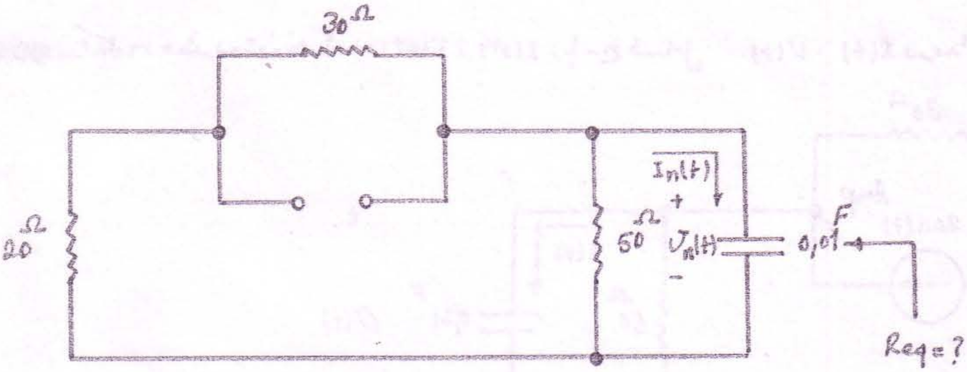
$$I(0^+) = \frac{30}{20+30} \times 20 = 12^{Amp}$$

$$I(0^+) = 12^{Amp}$$

$V(0^+) = 0.$ ، $I(0^+) = 12^{Amp}$

II) مطالعه مدار در فاصلهٔ زمانی $0^+ \leq t \leq \infty$ جهت محاسبهٔ پاسخ گذرا (پاسخ ورودی صفر):

مدار معادل شبکه را بعلت حضور منابع فعال (بازاء ورودی صفر) در نظر میگیریم.



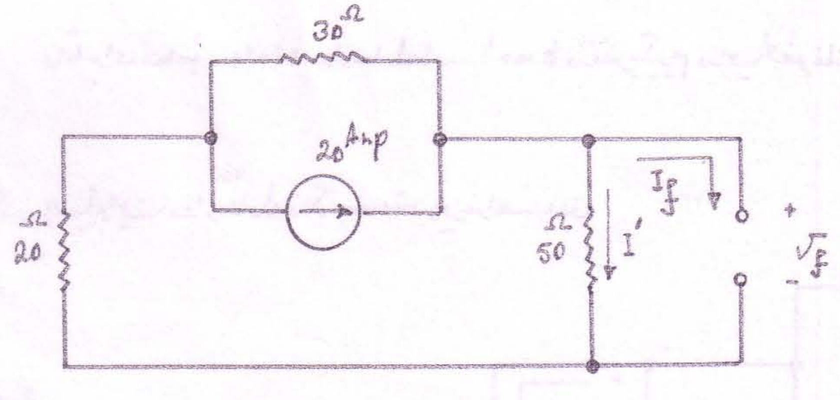
$Req = 25^{\Omega}$

$Req = ?\quad \frac{1}{RC} = \frac{1}{25 \times 0{,}01} = 4$

$V_n(t) = Ae^{-4t}$ ، $I_n(t) = Be^{-4t}$

III) مطالعهٔ مدار در فاصلهٔ زمانی $0 \leq t \leq 5$ (حالت آرامش نهایی) جهت محاسبهٔ پاسخ اجباری (ماندگار):

مدار معادل نتیجه را پس از ختم حالت گذرا و استقرار حالت آرامش نهایی منظور میکنیم.



$V_f = ?$

$I_f = ?$

$I' = 20 \times \frac{30}{30 + (20+50)} \times \quad 6^{Amp}$

$V_f = 6 \times 50 = 300^{Volt}$ ، $I_f = 0.$

محاسبهٔ پاسخ کامل:

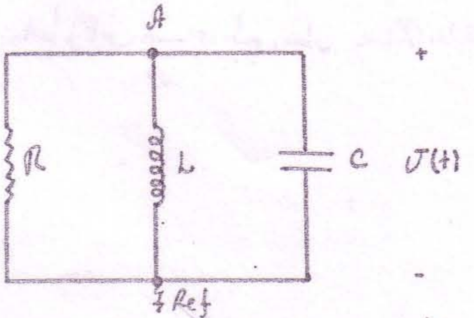
$V(t) = V_f + V_n(t) = 300 + Ae^{-4t} \qquad t > 0.$

$t = 0^+ \longrightarrow V(t)\big|_{t=0^+} = 300 + A \longrightarrow 0 = 300 + A \longrightarrow A = -300 \qquad V(t) = 300 - 300e^{-4t}$

$I(t) = I_f + I_n(t) = Be^{-4t} \longrightarrow I(0^+) = B \longrightarrow B = 12 \qquad I(t) = 0 + 12e^{-4t}$

I - مطالعهٔ مدارهای RLC بدون تابع تحریک (بازاء ورودی صفر) :

الف - بازاء ورودی صفر :



فرض میکنیم مدار RLC موازی مطابق شکل مفروض است.

حال تجزیه و تحلیل این مدار را تحت شرایطی بررسی میکنیم که قبلاً مقداری انرژی ذخیره شده در سیم‌پیچ و یا خازن و یا در هر دو آنها وجود داشته باشد. برای محاسبه $v(t)$ معادله kcl را در گره A تشکیل میدهیم.

$$kcl\ A: \quad I_R + I_C + I_L = 0. \qquad \frac{v(t)}{R} + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int v(t)\,dt = 0.$$

برای تبدیل معادله بالا به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با طرف ثانی صفر از طرفین معادله نسبت به زمان مشتق میگیریم.

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{L}v(t) = 0.$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v(t) = 0.$$ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با طرف ثانی صفر

معادله بالا فقط دارای پاسخ عمومی یا همگن بوده و صورت کلی پاسخ معادله بصورت $v(t) = Ae^{st}$ باشد.

که در آن s فرکانس طبیعی مدار بوده و مقدار آن با قرار دادن جواب معادله در معادله دیفرانسیل محاسبه میشود.

$$v(t) = Ae^{st} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = Ase^{st} \longrightarrow \frac{d^2v}{dt^2} = As^2e^{st}$$

$$C(As^2 e^{st}) + \frac{1}{R}(As e^{st}) + \frac{1}{L}(A e^{st}) = 0$$

معادلهٔ مشخصه معادله دیفرانسیل یا معادلهٔ مشخصه شبکه :
$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$$

معادلهٔ فرکانس های طبیعی مدار RLC موازی :

$$s_1 , s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

حال اگر Δ معادلهٔ مشخصه مثبت باشد. ($\Delta > 0$) معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی بوده و معادلهٔ دیفرانسیل و یا شبکه دارای جواب زیر باشد.

حالت فوق میرایی
$$v_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد. معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشهٔ مضاعف منفی بوده و پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل و شبکه را می‌توان بصورت زیر نوشت. $(s = s_1 = s_2)$

حالت میرایی بحرانی
$$v_n(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{st}$$

اگر $\Delta < 0$ باشد. معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشهٔ مختلط بوده و پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل و یا شبکه بصورت زیر بیان می‌شود.

حالت زیرمیرایی (میرای نوسانی)
$$v_n(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)\, e^{\sigma t}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} \quad , \quad \sigma = \frac{1}{2RC}$$

در روابط بالا $\sigma = \frac{1}{2RC}$ را فرکانس نپری یا Neper - frequency یا ضریب های میرایی می نامند و در حقیقت

این ضریب نشان میدهد که پاسخ مدار با چه سرعتی رو به خاموشی میرود. و همچنین در روابط بالا $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را

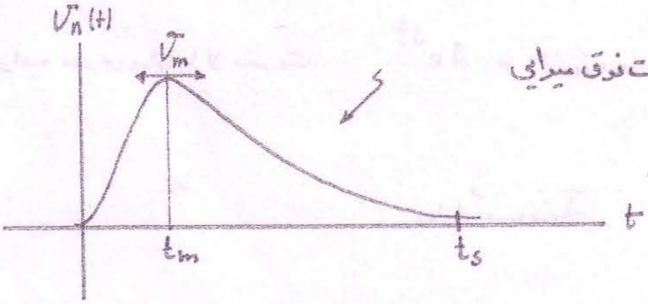
فرکانس همنوایی یا فرکانس رزنانس می نامند و فرکانس های s_1 , s_2 را فرکانس های مختلط می نامند.

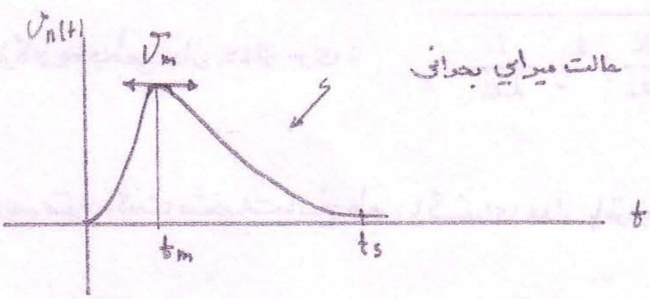
$$s_1 , s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \longrightarrow s_1 , s_2 = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$$

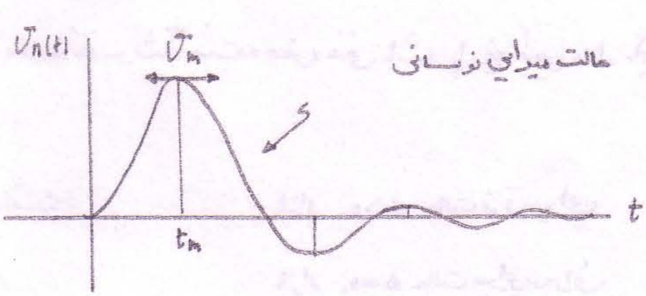
محاسبات بالا نشان میدهد که پاسخ طبیعی و گذرای مدار تابع مقادیر R , L , C بوده و می تواند تحت شرایطی

بازاء زمانهای طولانی (حالت فوق میرایی) و یا بازاء کوتاهترین زمان ممکن (حالت میرایی بحرانی) و بالاخره بصورت

نوسانی میرا شود.



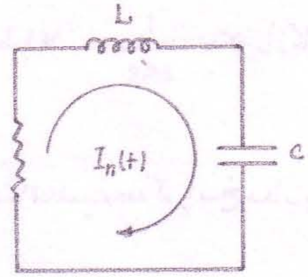




زمان t_s را زمان استقرار پاسخ هایی یا زمان استقرار حالت آرامش مدار می گویند.

t_s = Setting Time

ب- مدار RLC سری بازاء ورودی صفر:



در مدار RLC سری همانند مدار موازی فرض میکنیم که قبلاً مقداری

انرژی ذخیره شده در سلف یا خازن یا هر دو وجود داشته باشد حال میخواهیم جریان $I(t)$ را در مدار فوق محاسبه کنیم.

$$KVL \; I : \quad V_R + V_L + V_C = 0 \longrightarrow R I(t) + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{c}\int I(t)\,dt = 0$$

$$R\cdot\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{c}I(t) = 0$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{c}I(t) = 0$$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با طرف ثانی صفر

جواب عمومی معادله بالا بصورت $I_n(t) = Ae^{st}$ است که با قرار دادن آن در معادله مقدار S محاسبه میشود.

$$LS^2 + RS + \frac{1}{c} = 0$$ معادله مشخصه

فرکانس های طبیعی مدار RLC سری:
$$S_1, S_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

باز هم میتوان گفت مشخصات پاسخ طبیعی یا گذرای مدار با توجه به مقادیر R، L، C محاسبه میشود بر حسب اینکه

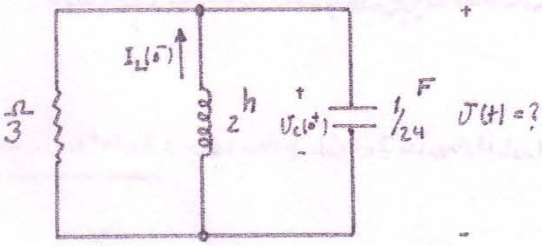
دلتای معادله مشخصه مثبت، صفر، منفی باشد پاسخ طبیعی مدار یکی از حالات فوق میرایی، میرایی بحرانی، زیر میرایی را

خواهد داشت:

$$\begin{cases} I_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} & \text{بازاء } \Delta>0 \text{ حالت فوق میرایی} \\ I_n(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{st} & \text{بازاء } \Delta=0 \text{ حالت میرایی بحرانی} \\ I_n(t) = (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)\, e^{\sigma t} & \text{بازاء } \Delta<0 \text{ حالت میرایی نوسانی} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$$

●●● مثال ۱ - مدار RLC موازی مطابق شکل زیر مفروض است. هرگاه $I_L(0^-) = 10\,Amp$ ، $V_c(0^-) = 0$ باشد. مطلوبست محاسبهٔ $V(t)$ برای $t>0$.



—— تحلیل شبکه: معادلهٔ دیفرانسیل شبکه را تشکیل میدهیم.

$$C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}V(t) = 0.$$

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\cdot V(t) = 0.$$

معادلهٔ مفسر شبکه (معادله دیفرانسیل) را تشکیل میدهیم.

$$\frac{1}{24}S^2 + \frac{1}{3}S + \frac{1}{2} = 0. \qquad S^2 + 8S + 12 = 0.$$

محاسبهٔ فرکانس های طبیعی مدار:

$$(S+2)(S+6) = 0. \qquad S_1 = -2 \;,\; S_2 = -6$$

حالت مدار و محاسبهٔ پاسخ طبیعی (گذرای مدار): چون $\Delta>0$ است مدار در حالت فوق میرایی است.

$$V_n(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t} \qquad t>0.$$

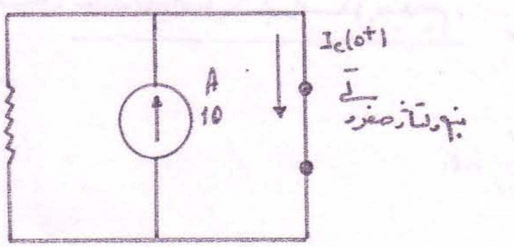
محاسبهٔ ضرائب A_2 , A_1:

در مدارهای RLC موازی ضرائب A_2 , A_1 بکمک $V_c(0^+)$ ، $I_L(0^+)$ محاسبه میشود.

محاسبه شرایط اولیه : $v_c(0^+)$ ، $I_L(0^+)$

خازن با جهش ولتاژ و سلف با جهش جریان مخالفت میکند $I_L(0^+) = I_L(0^-) = 10^{A}$ ، $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0.$

محاسبه $I_c(0^+)$: برای محاسبه $I_c(0^+)$ مدار معادل را در لحظه $t=0^+$ درنظر میگیریم.



$$I_c(0^+) = 10^{Amp}$$

نتیجه: $v_c(0^+) = 0.$ ، $I_c(0^+) = 10^{Amp}$

محاسبه ضرایب : A_2 ، A_1

$$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

$$I_c(t) = c\frac{dv}{dt} = \frac{1}{24}\left(-2A_1 e^{-2t} - 6A_2 e^{-6t}\right)$$

$$t=0^+ \longrightarrow \begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ 10 = \frac{1}{24}(-2A_1 - 6A_2) \end{cases} \longrightarrow A_1 = 60 \;,\; A_2 = -60$$

$$v_n(t) = 60e^{-2t} - 60e^{-6t}$$

$$v(t) = 60e^{-2t} - 60e^{-6t} \quad \text{volt}$$

رسم نمودار ولتاژ در مدار RLC موازی :

با رسم نمودار ولتاژ $v(t)$ در مدار RLC موازی میتوان v_m ، t_m ، t_s را مشخص کرد.

$v(t) = 60e^{-2t} - 60e^{-6t}$ الف- محاسبهٔ t_m ، v_m :

$$\frac{dv}{dt} = 0. \quad 60 \times -2e^{-2t_m} - 60 \times -6\, e^{-6t_m} = 0. \longrightarrow 2e^{-2t_m} = 6\, e^{-6t_m} \longrightarrow$$

$$e^{+4t_m} = 3 \longrightarrow 4t_m = \ln 3 \longrightarrow t_m = \tfrac{1}{4} \ln 3 \longrightarrow \quad \underline{t_m = 0{,}275^{\,sec}}$$

$$v_m = v(t = 0{,}275) = 23{,}16 \qquad \underline{v_m = 23{,}16^{\,Volt}}$$

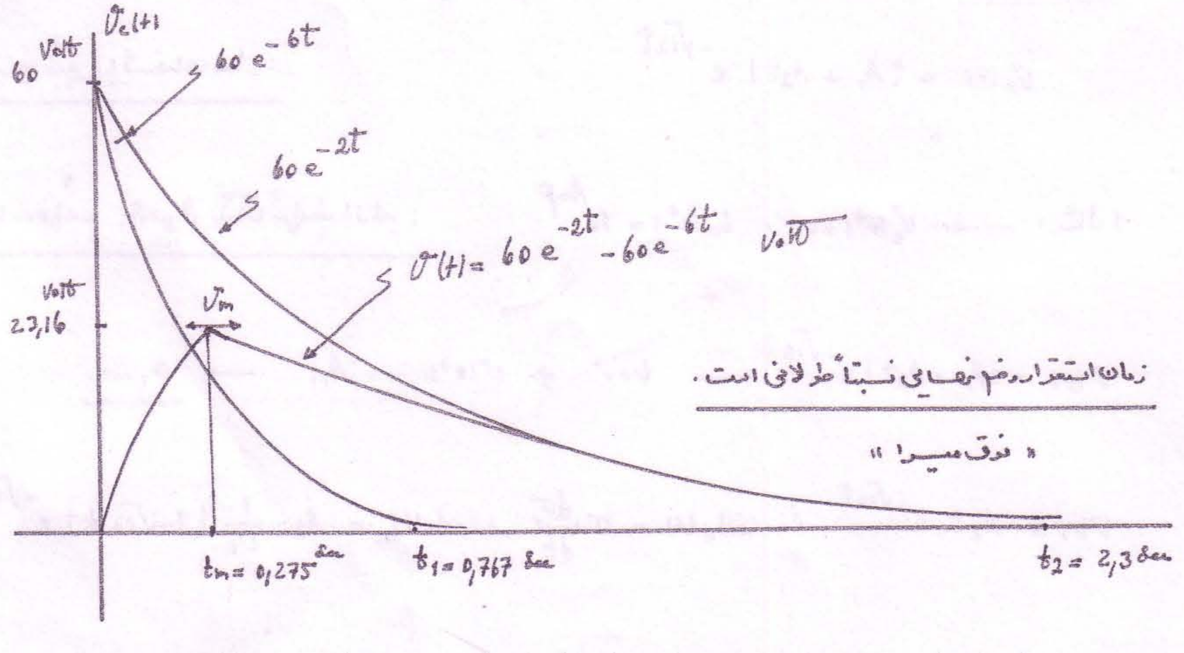
ب- محاسبهٔ t_s : در مدارهای RLC ، t_s مدت زمانی است که پس از گذشت آن پاسخ مدار ۹۹٪ مقدار اولیهٔ (ماکزیمم) خود را از

دست میدهد و به 1٪ مقدار ماکزیمم خود میرسد.

$$v(t) = 60e^{-2t} - 60e^{-6t} \longrightarrow \%1 \times 23{,}16 = 60\, e^{-2t_s} - 60\, e^{-6t_s}$$

$$\underline{0{,}2316 = 60\left(e^{-2t_s} - e^{-6t_s}\right)}$$

معادلهٔ بالا به روش آزمایش و خطا حل میشود. $t_s = 2{,}78^{\,sec}$ زمان استقرار وضع نهایی (حالت آرامش)

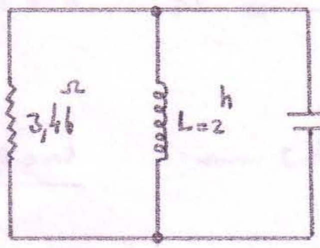


زمان استقرار وضع نهایی نسبتاً طولانی است.

« فوق میرا »

مثال ۲ـ هرگاه در مدار RLC موازی مثال قبل مقدار مقاومت اهمی افزایش داده شود تا به $3,46^{\Omega}$ برسد. حالت مدار و پاسخ $v(t)$ را محاسبه کنید.

پاسخ



تحلیل شبکه: معادله دیفرانسیل شبکه:

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}\,v(t)=0. \qquad 3,46=\sqrt{12}$$

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}\cdot v(t)=0.$$

معادله مشخصه شبکه:

$$\frac{1}{24}s^2+\frac{1}{\sqrt{12}}s+\frac{1}{2}=0. \qquad s^2+2\sqrt{12}\,s+12=0.$$

فرکانس های طبیعی مدار و حالت مدار:

$$(s+\sqrt{12})^2=0. \qquad s_1=s_2=-\sqrt{12}=-3,46$$

چون $\Delta=0.$ است معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف بوده و مدار در حالت میرائی بحرانی است.

پاسخ طبیعی یا گذرای مدار:

$$v_n(t)=(A_1+A_2t)\,e^{-\sqrt{12}t}$$

محاسبه ضرایب A_1، A_2 کمک شرایط اولیه:

$$\text{از مثال 1}\longrightarrow v_c(0^+)=0.\ ,\ I_c(0^+)=10^{Amp}$$

$$v(t)=(A_1+A_2t)\,e^{-\sqrt{12}t}\longrightarrow t=0^+\Rightarrow v(0^+)=A_1\longrightarrow A_1=0.$$

$$v(t)=A_2t\,e^{-\sqrt{12}t} \qquad I_c(t)=C\frac{dv}{dt} \qquad I_c(t)=A_2\cdot\frac{1}{24}(1-\sqrt{12}\,t)\,e^{-\sqrt{12}t}$$

$$t = 0^+ \longrightarrow I_c(0^+) = \frac{1}{24} A_2 \longrightarrow \underline{A_2 = 240}$$

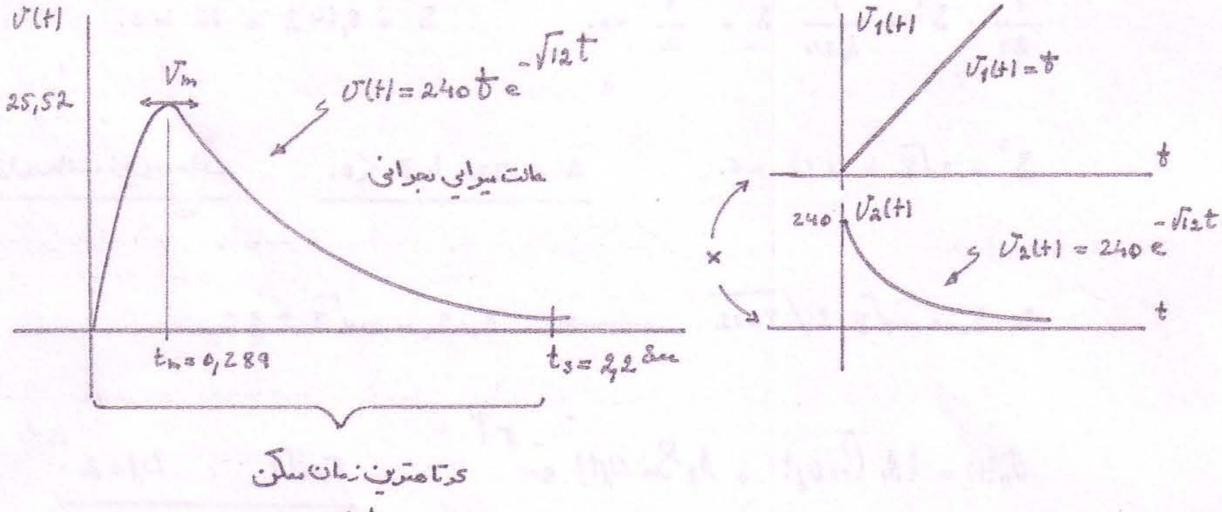
$$\underline{v_n(t) = 240\, t\, e^{-\sqrt{12}t}} \qquad \underline{v_f = 0.}$$

$$\underline{v(t) = 240 t\, e^{-\sqrt{12}t}}$$

<u>مطالعه نمودار $v(t)$:</u> برای رسم نمودار $v(t)$ آن را بصورت حاصلضرب دو تابع $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ در نظر بگیریم.

$$v_1(t) = t \qquad v_2(t) = 240\, e^{-\sqrt{12}t}$$

با رسم نمودارهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و ضرب آنها در هم نمودار $v(t)$ را بدست می‌آوریم.



$$v(t) = 240 t\, e^{-\sqrt{12}t}$$

<u>محاسبه v_m ، t_m ، t_s :</u>

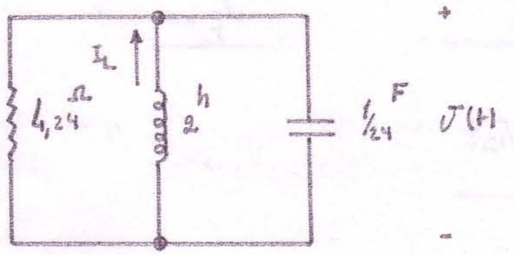
$$\frac{dv}{dt} = 0. \longrightarrow 240\, e^{-\sqrt{12}t_m} - 240 \times \sqrt{12}\, t_m e^{-\sqrt{12}t_m} = 0. \longrightarrow \underline{t_m = 0,289^{\text{sec}}}$$

$$v_m = v(t = 0,289) = 25,52 \qquad \underline{v_m = 25,52^{\text{volt}}}$$

محاسبه t_s (Setting-Time) :

$$\%1 \times 25,52 = 240\, e^{-\sqrt{12}t_s} \xrightarrow{\text{روش آزمایش و خطا}} \underline{t_s = 2,2^{\text{sec}}}$$

مثال ۳- در مدار RLC موازی مثال های (۱)، (۲) اگر مقدار مقاومت اهمی به $4{,}24^{\Omega}$ افزایش داده شود $v(t)$ را برای $t>0$ محاسبه کنید.



تحلیل شکل:

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v(t)=0.$$

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{4{,}24}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}v(t)=0.$$

$$\frac{1}{24}\cdot S^2+\frac{1}{4{,}24}S+\frac{1}{2}=0. \qquad S^2+5{,}64S+12=0.$$

$$S^2+2\sqrt{8}\,S+12=0. \qquad \underline{\Delta=32-48<0.}$$

مدار حالت زیرمیرائی

$$S_1,S_2=-\sqrt{8}\pm\sqrt{8-12} \longrightarrow S_1,S_2=-\sqrt{8}\pm j2$$

$$v_n(t)=(A_1\cos\omega_d t+A_2\sin\omega_d t)\,e^{-\sigma t} \qquad \underline{\sigma=\sqrt{8} \quad , \quad \omega_d=2^{\ rad/s}}$$

$$\underline{v_n(t)=(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t)\,e^{-\sqrt{8}t}} \qquad \underline{v_f=0.}$$

$$v(t)=(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t)\,e^{-\sqrt{8}t}$$

محاسبه ضرائب A_1، A_2 با استفاده از شرایط اولیه:

از مثال های (۱)، (۲) $\longrightarrow$ $v_c(0^+)=0 \quad , \quad I_c(0^+)=10^{Amp}$

$$v(t) = (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)\, e^{-\sqrt{8}t}$$

$$t = 0^+ \longrightarrow v(0^+) = A_1 \longrightarrow \underline{A_1 = 0.} \qquad v(t) = A_2 \sin 2t\, e^{-\sqrt{8}t}$$

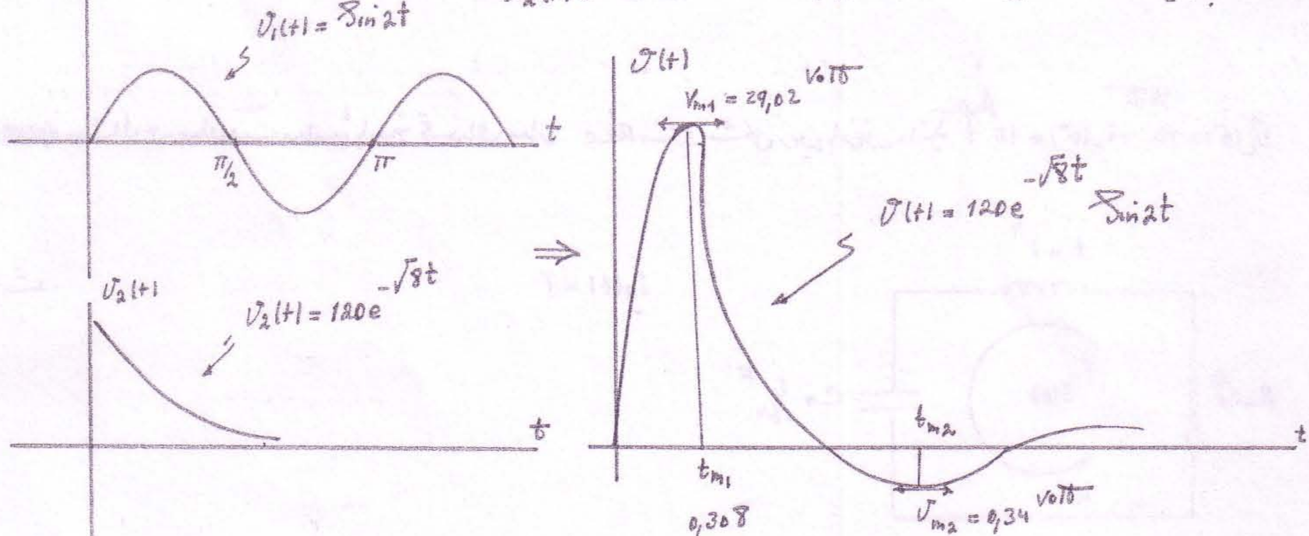
$$I_c(t) = c\frac{dv}{dt} = \frac{1}{24}\left(2A_2 \cos 2t\, e^{-\sqrt{8}t} - \sqrt{8}A_2 \sin 2t\, e^{-\sqrt{8}t}\right)$$

$$t = 0^+ \longrightarrow I_c(0^+) = \frac{1}{24} \times 2A_2 \longrightarrow \underline{A_2 = 120}$$

$$\underline{v(t) = 120 \sin 2t\, e^{-\sqrt{8}t}}$$

<u>رسم نمودار $v(t)$</u>: برای رسم نمودار $v(t)$ می‌توان آن را بصورت حاصلضرب دو تابع $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ در نظر

گرفت یعنی: $\quad v_1(t) = \sin 2t \quad , \quad v_2(t) = 120\, e^{-\sqrt{8}t}$



<u>محاسبه t_m ، v_m</u>:

$$v(t) = 120 \sin 2t\, e^{-\sqrt{8}t} \qquad \frac{dv}{dt} = 0.$$

$$\frac{dv}{dt} = 120\, e^{-\sqrt{8}t}\left(2\cos 2t - \sqrt{8}\sin 2t\right) = 0. \longrightarrow \sin 2t = \frac{2}{\sqrt{8}}\cos 2t \longrightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2t_m = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} 35{,}26 \longrightarrow 2t_m = k\pi + 35{,}26 \longrightarrow \underline{t_m = k\frac{\pi}{2} + 17{,}63^\circ}$$

$$t_m = k\,\pi/2 + 17{,}63^{\circ} \longrightarrow \begin{cases} t_{m_1} = 17{,}63^{\circ} & \underline{t_{m_1} = 0{,}308^{\,sec}} \\ t_{m_2} = 1{,}57 + 0{,}308 & \underline{t_{m_2} = 1{,}88^{\,sec}} \end{cases}$$

$$\underline{t_{m_1} = 0{,}308^{\,sec} \longrightarrow V_{m_1} = V(t = 0{,}308) = 29{,}02^{\,Volt}}$$

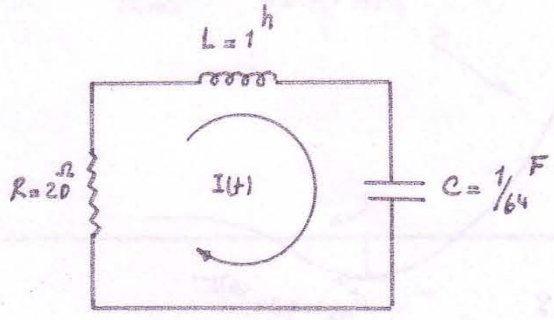
$$\underline{t_{m_2} = 1{,}88^{\,sec} \longrightarrow V_{m_2} = V(t = 1{,}88) = 0{,}34^{\,Volt}}$$

محاسبهٔ زمان استقرار حالت آرامش یا نهایی t_s : Setting time

$$V(t) = 120\, \sin 2t\, e^{-\sqrt{8}t} \qquad \%1 \times 29{,}02 = 120\, \sin 2t_s\, e^{-\sqrt{8}t_s}$$

از حل معادلهٔ بالا بوسیلهٔ آزمایش و خطا t_s محاسبه میشود. $t_s =$

مثال ۴- مطلوبست محاسبهٔ پاسخ گذرای مدار RLC سری شکل زیر با فرض اینکه $I_L(0^-) = 10^{\,Amp}$ ، $V_c(0^-) = 10^{\,Volt}$ باشد.



$I_n(t) = ?$

تحلیل شبکه: الف- تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل شبکه:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0. \longrightarrow \frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 64\, I(t) = 0.$$

ب- معادلهٔ مشخصه و محاسبهٔ فرکانس های طبیعی مدار:

$$s^2 + 20s + 64 = 0.$$

$$(S+16)(S+4)=0. \longrightarrow \underline{S_1=-16^{\ 1/sec}} \ , \ \underline{S_2=-4^{\ 1/sec}}$$

ج - حالت مدار محاسبهٔ پاسخ طبیعی مدار: چون $\Delta > 0$. مدار در حالت فوق میرایی است و پاسخ کنندهٔ شبکه بصورت زیر می باشد.

$$I_n(t)=A_1 e^{-16t}+A_2 e^{-4t}$$

محاسبهٔ شرایط اولیه شبکه:

$$I_L(0^-)=10^{Amp} \ , \quad V_c(0^-)=10^{Volt}$$

سلف با جهش جریان و خازن با جهش ولتاژ مخالفت میکند.

$$I_L(0^+)=I_L(0^-)=10^{Amp} \ , \quad V_c(0^+)=V_c(0^-)=10^{Volt}$$

$$I_c(0^+)=I_L(0^+)=10^{Amp}$$

نتیجه:

$$\underline{V_c(0^+)=10^{Volt}} \ , \quad \underline{I_c(0^+)=10^{Amp}}$$

محاسبهٔ ضرایب A_1, A_2 با استفاده از شرایط اولیهٔ شبکه ($I_c(0^+)=10^{Amp}$ ، $V_c(0^+)=10^{Volt}$):

$$\underline{I(t)=A_1 e^{-16t}+A_2 e^{-4t}} \qquad V_c(t)=\frac{1}{c}\int I(t)\,dt$$

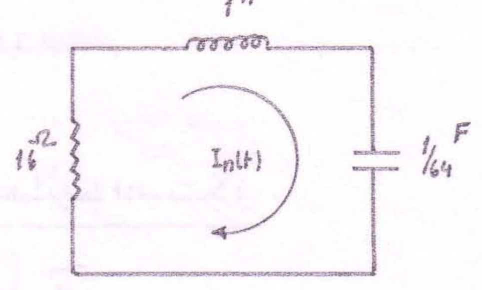
$$V_c(t)=64\int (A_1 e^{-16t}+A_2 e^{-4t})\,dt = -\frac{64}{16}A_1 e^{-16t}-\frac{64}{4}A_2 e^{-4t}$$

$$\underline{V_c(t)=-4A_1 e^{-16t}-16A_2 e^{-4t}}$$

$$t=0^+ \longrightarrow \begin{cases} I(0^+)=A_1+A_2 \\ V_c(0^+)=-4A_1-16A_2 \end{cases} \longrightarrow \underline{A_1=\frac{170}{12} \ , \ A_2=-\frac{50}{12}}$$

$$I_n(t) = \frac{170}{12} e^{-16t} - \frac{50}{12} e^{-4t} \qquad t > 0.$$

مثال ۵- اگر در مدار RLC سری مثال ۴ مقدار مقاومت اهمی از 20^{Ω} به 16^{Ω} کاهش داده شود، حالت مدار و پاسخ گذرای مدار را محاسبه کنید.



ــــ تحلیل شکل:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0.$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 16 \frac{dI}{dt} + 64\, I(t) = 0. \longrightarrow S^2 + 16S + 64 = 0.$$

$$\Delta = 0. \qquad (S + 8)^2 = 0. \qquad S_1 = S_2 = -8$$

$\Delta = 0. \longrightarrow$ مدار در حالت میرایی بحرانی $\longrightarrow$ $\underline{I_n(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-8t}}$

از مثال ۴ $\longrightarrow$ $V_c(0^+) = 10^{Volt}$ ، $I_c(0^+) = 10^{Amp}$

$$I(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-8t} \qquad t = 0^+ \longrightarrow I_c(0^+) = A_1 \longrightarrow A_1 = 10$$

$$I(t) = (10 + A_2 t)\, e^{-8t} \qquad V_c(t) = \frac{1}{C} \int (10 + A_2 t)\, e^{-8t}\, dt$$

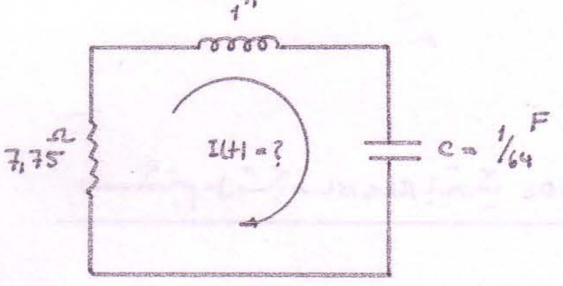
$$V_c(t) = 64 \left[\int 10\, e^{-8t}\, dt + A_2 \int t\, e^{-8t}\, dt \right]$$

$$V_c(t) = 64 \left[-\frac{10}{8} e^{-8t} - A_2 \frac{t}{8} e^{-8t} - \frac{A_2}{64} e^{-8t} \right]$$

$$t=0^+ \longrightarrow v_c(0^+) = 64 \times -\frac{10}{8} - A_2 \longrightarrow A_2 = -90$$

$$\underline{I(t) = (10-90t)\,e^{-8t} \quad t>0.}$$

●●● مثال ۶-۱ اگر در مدار RLC سری مثال ۴- مقدار مقاومت اهمی مدار باز هم کاهش داده شود و به $R = 7{,}75^{\Omega}$ برسد پاسخ گذرای مدار را محاسبه کنید.



تحلیل شبکه:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = 0 \longrightarrow \frac{d^2I}{dt^2} + 7{,}75\frac{dI}{dt} + 64\,I(t) = 0$$

$$S^2 + 7{,}75\,S + 64 = 0$$

$$S_1, S_2 = \frac{-7{,}75 \pm \sqrt{(7{,}75)^2 - 256}}{2} = \frac{-7{,}75 \pm \sqrt{-196}}{2}$$

$$S_1, S_2 = \frac{-7{,}75 \pm j14}{2} \qquad \underline{S_1, S_2 = -3{,}87 \pm j7}$$

$$I_n(t) = (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)\,e^{-\sigma t}$$

$$\underline{I_n(t) = (A_1 \cos 7t + A_2 \sin 7t)\,e^{-3{,}87t}}$$

با استفاده از شرایط اولیه شبکه $V_c(0^+) = 10^{Volt}$ ، $I_c(0^+) = 10^{Amp}$ مقادیر A_1 ، A_2 را بدست میدهد.

$$\underline{I_n(t) = (10\cos 7t - 7\sin 7t)\,e^{-3{,}87t} \qquad t>0.}$$

محاسبهٔ پاسخ کامل در مدارهای RLC با تحریک DC (پله‌ای) :

در این حالت از شبکه‌های RLC، پاسخ کامل جریان یا ولتاژ از جمع جریان‌ها و ولتاژهای طبیعی و اجباری بدست می‌آید.

$$V(t) = V_f + V_n(t)$$

$$I(t) = I_f + I_n(t)$$

الگوریتم حل شبکه‌های RLC با تحریک DC (پله‌ای) بصورت زیر خواهد بود.

۱) مطالعه مدار در $t<0$
- ۱- محاسبهٔ $I_L(t<0)$ ، $V_C(t<0)$
- ۲- محاسبهٔ $I_L(0^+)$ ، $V_C(0^+)$
- ۳- محاسبهٔ $I_C(0^+)$ با استفاده از مدار معادل در $t=0^+$

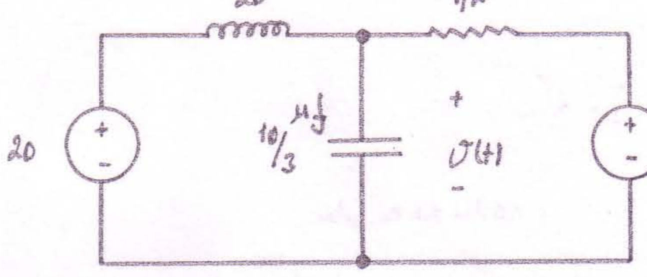
۲) مطالعه مدار در فاصلهٔ زمانی 0^+ تا t_s بعد از تحریک جهت محاسبهٔ پاسخ طبیعی (گذرای) مدار

۳) مطالعه مدار در فاصلهٔ زمانی t_s تا ∞ پس از رفع حالت گذرا و برقراری حالت آرامش نهایی جهت محاسبهٔ پاسخ اجباری (ماندگار) شبکه

۴) محاسبهٔ پاسخ کامل شبکه

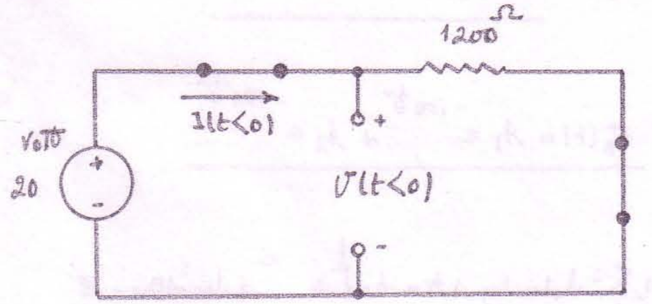
۵) محاسبهٔ ضرایب پاسخ طبیعی $A_1, A_2, \ldots$ با استفاده از شرایط اولیه شبکه.

مثال ۷ - مطلوبست محاسبهٔ پاسخ کامل $v(t)$ در مدار شکل زیر:



تحلیل شکل: I - مطالعهٔ مدار در $t<0$

۱) محاسبهٔ $I_L(t<0)$ ، $v_c(t<0)$: مدار معادل شکل را در $t<0$ در نظر میگیریم. چون مدار از مدتها قبل در این وضعیت قرار دارد لذا مدار در حالت آرامش اولیه بوده و سلف بعنوان اتصال کوتاه و خازن بعنوان مدار باز عمل میکند.



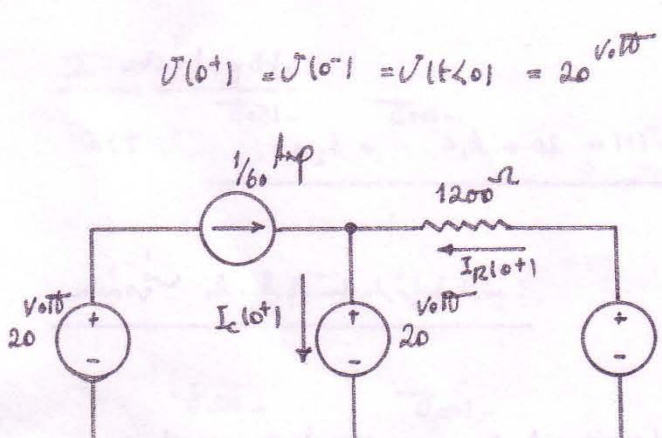
$$I(t<0) = \frac{20}{1200} = \frac{1}{60}^{Amp}$$

$$v(t<0) = 20^{Volt}$$

۲) با توجه به اینکه I جریان سلف و v ولتاژ دو سر خازن باشد لذا:

$$I(0^+) = I(0^-) = I(t<0) = \frac{1}{60}^{Amp} \qquad \underline{I(0^+) = \frac{1}{60}^{Amp}}$$

$$v(0^+) = v(0^-) = v(t<0) = 20^{Volt} \qquad \underline{v(0^+) = 20^{Volt}}$$

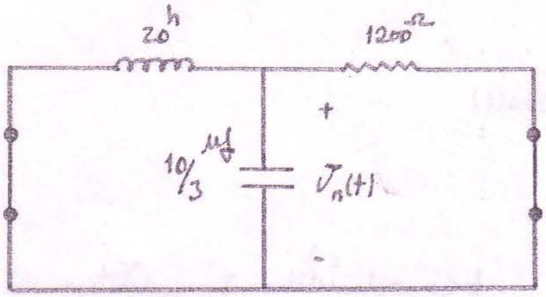


۳) مدار معادل در $t=0^+$ و محاسبهٔ $I_c(0^+)$:

$$I_c(0^+) = \frac{1}{60} + I_R(0^+) = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

$$\underline{I_c(0^+) = \frac{1}{24}^{Amp}}$$

II - مطالعهٔ مدار در $t=0^+$ تا t_s : مدار معادل شکل را بدون منابع تحریک در فاصلهٔ 0^+ تا t_s در نظر میگیریم.



مدار RLC موازی

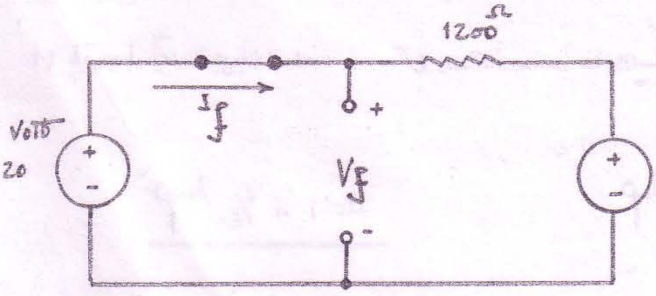
در مدار RLC موازی تشکیل شده پاسخ گذرای مدار را محاسبه میکنیم :

$$c\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}V(t) = 0. \longrightarrow \frac{10}{3}\times10^{-6}\cdot\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{1200}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{1}{20}V(t) = 0.$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 250\frac{dV}{dt} + 15000 = 0. \longrightarrow \underline{s^2 + 250s + 15000 = 0.}$$ معادله مشخصه:

$$\underline{s_1 = -100} \quad , \quad \underline{s_2 = -150} \qquad \underline{V_n(t) = A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-150t}}$$

III - مطالعهٔ مدار در $t = t_s$ تا ∞ : مدار معادل شکل را پس از رفع حالت گذرا و استقرار حالت آرامش نهائی در نظر میگیریم.



$$\underline{V_f = 20^{\text{Volt}}}$$

IV - محاسبهٔ پاسخ کامل:

$$V(t) = V_f + V_n(t) \longrightarrow \underline{V(t) = 20 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-150t}} \quad t>0.$$

$$V(t) = 20 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-150t}$$

محاسبهٔ ضرایب A_2 ، A_1 با استفاده از شرایط اولیه :

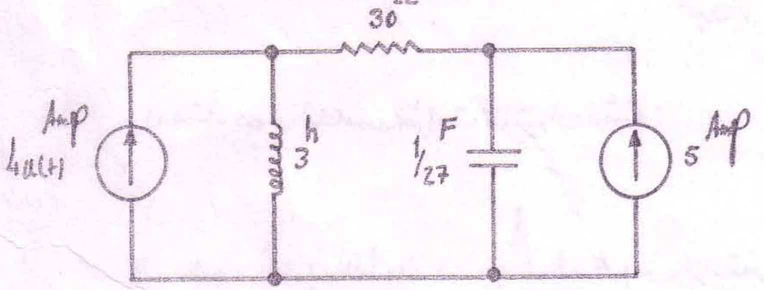
$$I_c(t) = c\frac{dV}{dt} \qquad I_c(t) = \frac{10}{3}\times10^{-6}\left(0 - 100A_1 e^{-100t} - 150A_2 e^{-150t}\right)$$

$$t=0^+ \longrightarrow \begin{cases} V_c(0^+) = 20 + A_1 + A_2 \\ I_c(0^+) = \dfrac{10}{3} \times 10^{-6} (-100 A_1 - 150 A_2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 + 1{,}5 A_2 = -125 \end{cases}$$

$$\underline{A_1 = 250^{\text{Volt}}} \ , \ \underline{A_2 = -250^{\text{Volt}}}$$

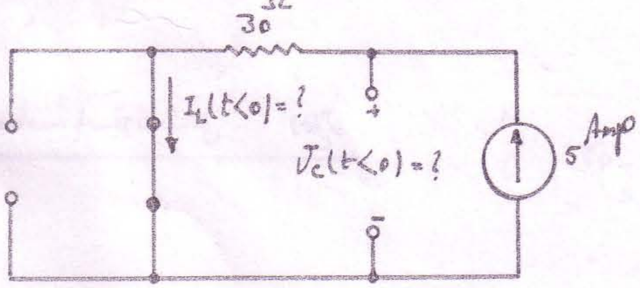
$$\underline{V(t) = 20 + 250\, e^{-100t} - 250\, e^{-150t} \quad t > 0}$$

مثال ۸- مطلوبست محاسبه پاسخ کامل $V_c(t)$ در شبکهٔ شکل زیر:



تحلیل شبکه: I- مطالعه مدار در $t<0$ و محاسبهٔ $V_c(t<0)$ ، $I_L(t<0)$:

مدار معادل شبکه را در $t<0$ (حالت آرامش اولیه) در نظر میگیریم.



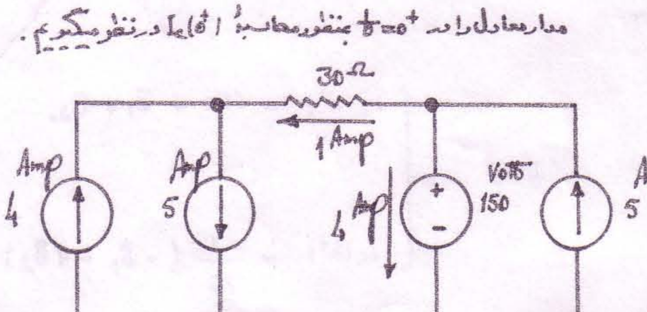
$$I_L(t<0) = 5^{\text{Amp}}$$

$$V_c(t<0) = 30 \times 5 = 150^{\text{Volt}}$$

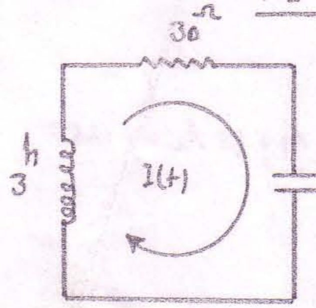
$$\underline{I_L(0^+) = 5^{\text{Amp}} \ , \ V_c(0^+) = 150^{\text{Volt}}}$$

مدار معادل را در $t=0^+$ بمنظور محاسبهٔ $I_c(0^+)$ در نظر میگیریم.

$$\underline{I_c(0^+) = 4^{\text{Amp}}} \xleftarrow{\text{با توجه به شکل شبکه}}$$



II - محاسبه پاسخ طبیعی یا گذرای مدار با مطالعه آن در $t=0^+$ و بدون تابع تحریک :



$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=0.$$

$$3\frac{d^2I}{dt^2}+30\frac{dI}{dt}+27I(t)=0.$$

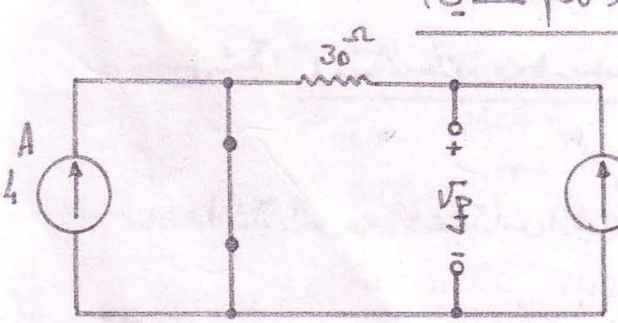
$$3S^2+30S+27=0.\longrightarrow S^2+10S+9=0.\longrightarrow (S+1)(S+9)=0.$$

$$S_1=-1\ ,\ S_2=-9\ \xrightarrow[\text{چون }\Delta>0.]{\text{حالت فوق میرائی}}\ I_n(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-9t}$$

چون ولتاژ دو سر خازن مستقر است لذا میتوان نوشت :

$$V_n(t)=B_1e^{-t}+B_2e^{-9t}$$

III - محاسبه V_f با مطالعه مدار در $t=t_1$ یا $t=\infty$ (پس از استقرار رژیم نهایی)



$$V_f=150\ \text{volt}$$

محاسبه پاسخ کامل $V_c(t)$

$$V_c(t)=150+B_1e^{-t}+B_2e^{-9t}$$

$$i_c(t)=C\frac{dV}{dt}=\frac{1}{27}\left(-B_1e^{-t}-9B_2e^{-9t}\right)$$

$= -13,5$ volt

$$t=0^+\longrightarrow\begin{cases}V_c(0^+)=150+B_1+B_2\\ \\ i_c(0^+)=\frac{1}{27}(-B_1-9B_2)\end{cases}\longrightarrow B_1=13,5\ \text{volt}\ ,\ B_2$$