تحقیق در عملیات

۱- مقدار بهینه تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر کدام است؟

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t} \\ &\quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) 3

۲) 0

۳) $\frac{11}{3}$

۴) $-\infty$

۲ـ اگر یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دارای یک متغیر آزاد در علامت باشد و توسط رابطه $\begin{matrix} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j, x''_j \geq 0 \end{matrix}$ مقید شود، چنانچه در جدول نهایی سیمپلکس این مسئله، یکی از متغیرهای جانشین شده با این متغیر (x'_j یا x''_j) در پایه باشد آنگاه:

۱) مسئله حتماً جواب تباهیده دارد.

۲) مسئله حتماً دارای جواب بیکران است.

۳) مسئله حتماً دارای جواب بهینه چندگانه است.

۴) مسئله دارای جواب بهینه منحصر به فرد است.

۳ ـ حل نهایی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به سه محدودیت به فرم کوچک‌تر مساوی مطابق جدول زیر است، که در آن متغیرهای (x_4, x_5, x_6) از نوع شناوری (Slack) می‌باشند.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	-1	θ	0	1	β	γ
1	α	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
1	4	2	0	0	2	

۱) اگر $\gamma > 0$ آن‌گاه محدودیت دوم یک محدودیت فعال خواهد بود.

۲) اگر $\theta, \beta > 0$ و $\gamma > 0$ آن‌گاه محدودیت دوم محدودیت زائد می‌باشد.

۳) اگر $\theta, \beta < 0$ و $\gamma > 0$ آن‌گاه محدودیت دوم یک محدودیت زائد است.

۴) اگر $\theta, \beta = 0$ و $\gamma = 0$ آن‌گاه محدودیت دوم یک محدودیت زائد است.

۴ـ مسئله زیر را در نظر بگیرید. در صورتی که در مرحله نهایی متغیرهای پایه‌ای (x_2, x_1) باشند و مسئله دارای جواب بهینه چندگانه باشد، مقدار صحیح c_1 کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max}\, z &= c_1 x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۵

۵. مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. جواب بهینه مسئله برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{Min}\, Z &= -4x_1 - 14x_2 \\ \text{s.t}\quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

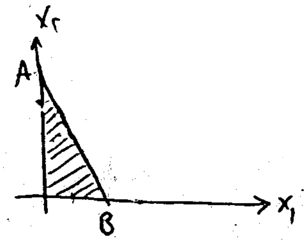
۱) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(1-\lambda) \\ \frac{1}{3}(14-\lambda) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

۲) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(1+\lambda) \\ \frac{1}{3}(7-2\lambda) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

۳) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(1-\lambda) \\ \frac{1}{3}(7+2\lambda) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

۴) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(1+\lambda) \\ \frac{1}{3}(2+\lambda) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

۶ـ فضای حل یک مسئله Lp با تابع هدف $\text{Max}\, z = 5x_1 + 9x_2$ به صورت زیر است: بردار گرادیان محدودیت مربوطه به صورت $\underline{a}^i = (2,4)$ می‌باشد.



۱) گوشه A نقطه بهینه مسئله است.

۲) ضریب x_2 در سطر z در جدول سیمپلکس نقطه A مثبت است.

۳) ضریب x_1 در سطر z در جدول سیمپلکس نقطه A مثبت است.

۴) ضریب x_1 در سطر z در جدول سیمپلکس نقطه A منفی است.

۷ـ مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max}\ Z &= Cx \\ Ax &= b \quad A_{m\times n} \end{aligned}$$

حداقل تعداد متغیرهای نامنفی برای مقید کردن متغیرهای مسئله چه تعداد می‌باشد؟

۱) $2n$ ۲) $n+1$ ۳) n ۴) $n-1$

۸ـ جدول زیر مربوط به یکی از مراحل روش سیمپلکس برای حل یک مسئله ماکزیمم‌سازی می‌باشد. کدام گزینه صحیح است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	۰	-3	-2	۱	-1	۲
x_1	۱	۴	-3	۰	۱	۴

۱) تابع هدف $z = x_1 + 2x_2 - 3x_4$ روی ناحیه شدنی مسئله نامتناهی است.

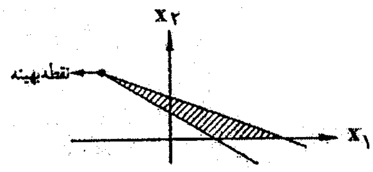
۲) تابع هدف $z = 2x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5$ روی ناحیه شدنی مسئله متناهی است.

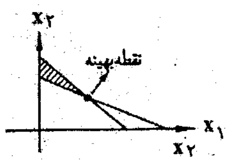
۳) تابع هدف $z = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5$ روی ناحیه شدنی مسئله نامتناهی است.

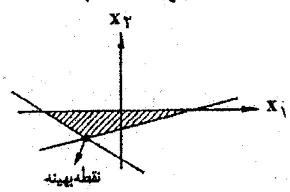
۴) تابع هدف $z = 2x_2 - x_3 - x_4$ روی ناحیه شدنی متناهی است.

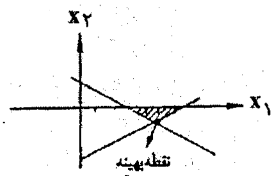
۹ـ جدول نهایی سیمپلکس یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با دو متغیر نامقید که متغیرهای نامقید آن توسط رابطه $x_j = x'_j - x''_j$ ، $x'_j, x''_j \geq 0$ مقید شده‌اند، مطابق جدول زیر می‌باشد. کدام گزینه نمایش هندسی جواب بهینه می‌باشد؟

	x'_1	x''_1	x'_2	x''_2	s_1	s_2	RHS
x'_1	۱	۱-	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
x''_2	۰	۰	۱-	۱	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Z	۰	۰	۰	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	۲۱

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰ـ جواب بهینه مسئله زیر چقدر است؟

$$\text{Min } z = \text{Max}\{2x_1 - 1, 3 - x_1\}$$
s.t
$$0 \leq w_1 \leq 2$$

۱) $-\frac{5}{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $-\frac{4}{3}$

۱۱ـ جدول زیر مربوط به یکی از تکرارهای یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم ماکزیمم‌سازی می‌باشد. برای حل مسئله جهت جلوگیری از بوجود آمدن پدیده دوری، از قاعده بلاند استفاده می‌شود. مقدار تابع هدف در جدول بعدی چقدر خواهد بود؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	۰	۱	۰	۱-	۱	۱	۱	۲
x_1	۱	۰	۰	۲	۲	۰	۱-	۴
x_3	۰	۰	۱	۲	۰	۲-	۳	۶
z	۰	۰	۰	۳	۲-	۵-	۳-	۱۴

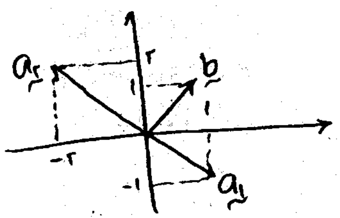
۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۱۸
۴) ۱۶

۱۲ـ مقدار بهینه تابع هدف مسئله Lp زیر چقدر است؟

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5$$
s.t
$$2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 \geq 100$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۷۵
۴) ۴۰

۱۳ـ فضای ایجاب یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد.



۱) سیستم معادلات بی‌نهایت جواب دارد.
۲) سیستم معادلات جواب منحصر به فرد دارد.
۳) سیستم معادلات ناسازگار است.
۴) سیستم معادلات جواب شدنی ندارد.

۱۴ـ جدول نهایی یک مسئله ماکزیمم سازی به صورت زیر است. در جوابی که مقدار متغیر x_2 برابر ۱۰است، مقدار متغیرهای x_1, x_3 و تابع هدف چقدر است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	۰	۱	۰	−۱	−۲	۱	۲
x_1	۱	۰	۰	۳	−۱	۰	۴
x_3	۰	۰	۱	۲	۰	−۲	۶
z	۰	۰	۰	۴	−۲	۳	۱۲

۱) $x_1 = 8 ,\ x_2 = 8 ,\ z = 20$

۲) $x_1 = 4 ,\ x_3 = 8 ,\ z = 4$

۳) $x_1 = 14 ,\ x_3 = 6 ,\ z = 8$

۴) $x_1 = 8 ,\ x_2 = 6 ,\ z = 20$

۱۵ـ زمان مورد نیاز برای تولید هر واحد از محصول اول نیم‌برابر محصول دوم و دو برابر محصول سوم است اگر تمام نیروی انسانی صرف تولید محصول دوم شود، جمعاً می‌توان ۳۰۰ واحد از محصول دوم تولید کرد محدودیت مربوطه کدام است؟

۱) $x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 600$

۲) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 600$

۳) $2x_1 + x_2 + x_3 \le 300$

۴) $x_1 + 1x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 300$

۱۶ـ ورود کدام متغیر به پایه موجب افزایش بیشتری در تابع هدف مسئله خواهد شد؟

پایه	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
z	−۳	−۴	−۳	−۶	۰	۰	۰
s_1	۱	۲	۱	۴	۱	۰	۴
s_2	۱	۳	۴	۶	۰	۱	۱۲

۱) x_2

۲) x_4

۳) x_1

۴) x_3

۱۷ـ کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) اگر طی یک تکرار، محورگیری ناتباهیده باشد حتماً حل در مرحله بعد ناتباهیده خواهد بود.

۲) اگر طی یک تکرار، متغیر کاندید خروج از پایه منحصر به فرد باشد حتماً حل در مرحله بعد ناتباهیده خواهد بود.

۳) مقدار تابع هدف طی یک محورگیری ناتباهیده، حتماً تغییر خواهد کرد.

۴) چنانچه حل یک تکرار، محورگیری ناتباهیده باشد و متغیر کاندید خروج از پایه منحصر به فرد باشد ممکن است حل در مرحله بعد تباهیده باشد.

۱۸ـ مسئله زیر را می‌خواهیم با روش M بزرگ حل کنیم.

$$P : \text{Min } z = x_1 - x_2$$
$$\text{s.t}$$
$$0/01\, x_1 - x_2 \ge 0/01$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

حداقل مقدار M چقدر باشد تا مسئله بدون بروز هیچ مشکلی حل شده و به ناحیه شدنی مسئله P رسیده و جواب بهینه را پیدا نماییم.

۱) $M \ge 100$ ۲) $M > 10$ ۳) $M > 100$ ۴) $M \ge 10$

۱۹ـ در انتهای فاز I روش سیمپلکس دوفازی، اگر تمام متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شده باشند، آنگاه ضرایب سطر هدف متغیرهای غیرپایه‌ای غیر مصنوعی x_j و متغیرهای غیرپایه‌ای مصنوعی R_i به ترکیب چقدر خواهد بود؟

۱) صفر و ۱− ۲) ۱− و ۱− ۳) ۱− و صفر ۴) صفر و هر عدد منفی

۲۰ـ کدام گزینه جهت برای ناحیه زیر نمی‌باشد؟

$$x_۱ - x_۲ + x_۳ \leq ۱$$
$$۲x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ \leq ۴$$
$$x_۱ - ۳x_۲ + ۳x_۳ \leq ۵$$

۱) $d = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{pmatrix}$

۲) $d = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} \\ ۰ \\ \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$

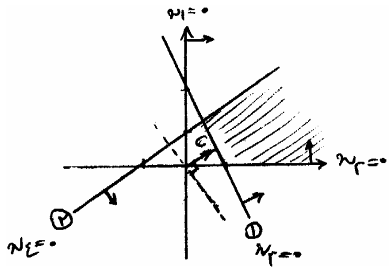
۳) $d = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$

۴) $d = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \\ ۰ \end{pmatrix}$

تحقیق در عملیات

۱ - گزینه ۱ درست است.

با حذف متغیرهای نامنفی $x_۳$ و $x_۴$ (در نظرگیری آن‌ها به عنوان متغیرهای کمکی) مسئله به روش ترسیمی قابل حل خواهد بود.



$$\begin{aligned} \operatorname{Min} z &= ۳x_۱ + ۲x_۲ \\ ۲x_۱ + x_۲ &\geq ۲ \\ -x_۱ + x_۲ &\leq ۱ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه شیب گرادیان تابع هدف از شیب بردار گرادیان محدودیت اول کمتر است لذا نقطه $(x_۱ = ۱, x_۲ = ۰)$ جواب بهینه مسئله خواهد بود.

$z^* = ۳$

۲ - گزینه ۳ درست است.

چون بردارهای ستونی متناظر با متغیرهای x'_i و x''_i به هم وابسته‌اند و مستقل خطی نیستند لذا امکان ندارد که هر دو با هم همزمان در پایه باشند و چنانچه یکی از آن‌ها پایه‌ای باشند دیگری قط ًا غیرپایه‌ای است.

ثانیاً به دلیل قرینه بودن عناصر بردارهای $\underline{a}'_i$ و $\underline{a}''_i$: همواره در جدول در هر تکرار ستون‌های این دو متغیر قرینه یکدیگر می‌باشند.

	x'_j	x''_j
	۰	۰
x'_j	۱	-۱
	۰	۰
	۰	۰

مستقل از مقادیر سمت راست مسئله دارای جواب بهینه چندگانه از نوع ش اع بهینه خواهد بود.

۳ - گزینه ۱ درست است.

م ادله محدودیت دوم عبارت است از $-x_۲ + \theta x_۳ + x_۵ + \beta x_۶ = \gamma$ و در واقع $-x_۲ + \theta x_۳ + \beta x_۶ \leq \gamma$ و چنانچه مقادیر $\theta, \beta < ۰$ و $\gamma > ۰$ باشند ی نی محدودیت دوم همواره یک محدودیت زائد هندسی خواهد بود.

۴ - گزینه ۳ درست است.

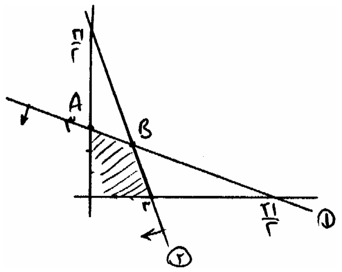
$$x_B = (x_۲, x_۱) \qquad B = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} \qquad B^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{}{۳} & \frac{}{۳} \end{pmatrix}$$

$$C_B B^{-1} = \left(\ , C_1 \right) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{}{3} & \frac{}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{2 - C_1}{}, \frac{2C_1 - 1}{} \right)$$

$$Z_3 - C_3 = C_B B^{-1} a_3 - C_3 = \left(\frac{2 - C_1}{3}, \frac{2C_1 - 1}{3} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = \frac{C_1 - 2}{3}$$

اگر مسئله بخواهد جواب چندگانه داشته باشد باید $Z_j - C_j$ متغیر غیرپایه‌ای صفر باشد. به ازای $C_1 = 2$ این مورد رخ خواهد داد.

۵ـ گزینه ۳ درست است.



باتوجه به توازی تابع هدف با محدودیت اول، جواب مسئله بهینه چندگانه خواهد بود و تمام نقاط واقع بر پاره خط AB نقاط بهینه مسئله می‌باشند.

م ادله یال بهینه محدود AB به صورت زیر می‌باشد.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{یال واصل } B, A = \lambda A + (1 - \lambda) B \quad 0 \le \lambda \le 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(1 - \lambda) \\ \frac{1}{3}(7 + 2\lambda) \end{pmatrix}$$

$0 \le \lambda \le 1$

۶ـ گزینه ۴ درست است.

با توجه به اندازه شیب تابع هدف که برابر $-\frac{}{9}$ بوده و شیب محدودیت مربوطه که مقدار آن برابر $-\frac{}{2}$ می‌باشد لذا نقطه A نقطه بهینه مسئله نخواهد بود و B نقطه بهینه مسئله است.

چنانچه از نقطه A به B حرکت کنیم متغیر x_1 وارد پایه خواهد شد و متغیر x_2 از پایه خارج خواهد شد. پس در جدول سیمپلکس متناظر با نقطه A، متغیر x_1 شرط ورود به پایه برای بهبود تابع هدف را داراست و درواقع $z_1 - c_1 < 0$

۷ـ گزینه ۲ درست است.

می‌توانیم به جای تمام متغیرهای x_i'' متغیر جدید x'' که به فرم زیر می‌باشد را جایگذاری کنیم.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - x_1'' \\ x_2 &= x_2' - x_2'' \\ &\vdots \\ x_j &= x_j' - x_j'' \\ &\vdots \\ x_k &= x_k' - x_k'' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad x'' = \underset{j=1 \cdots k}{\text{Max}} \{x_j''\} \quad , \quad x_j'' \ge 0$$

و با جایگزینی بدین‌صورت

$$x_j = x_j' - x''$$
$$x_j' \ge 0$$
$$x'' \ge 0$$

با استفاده از $n+1$ متغیر تمام متغیرهای مسئله را مقید نماییم.

۸- گزینه ۳ درست است.

ناحیه شدنی مسئله در راستای متغیر x_3 بیکران است. یـ نی تنها جهت دورشونده این مسئله عبارتست از:

$$d_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

در گزینه ۱، $c.d_3 = (1,2,0,-3,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 < 0$ مسئله جواب متناهی دارد.

در گزینه ۲، $c.d_3 > 0$ جواب نامتناهی و بیکران است.

در گزینه ۳، $c.d_3 > 0$ و مسئله جواب نامتناهی دارد.

در گزینه ۲، $c.d_3 < 0$ مسئله جواب متناهی دارد.

۹- گزینه ۴ درست است.

چون $x_1 = \frac{}{3}$ و $x_2 = -\frac{}{3}$ پس جواب در ربع چهارم واقع شده است.

۱۰- گزینه ۳ درست است.

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = x_2 \\ \quad x_2 \geq 2x_1 - 1 \\ \quad x_2 \geq 3 - x_1 \\ \quad 0 \leq x_1 \leq 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Min } z = x_2 \\ \quad 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 3 \\ \quad 0 \leq x_1 \leq 2 \end{array}$$

با حل مسئله به روش ترسیمی جواب بهینه عبارتست از $z^* = \frac{}{3}$ $x_2^* = \frac{}{3}$ $x_1^* = \frac{}{3}$

۱۱- گزینه ۳ درست است.

طبق قاعده بلاند متغیر x_5 وارد پایه خواهد شد و متغیر x_1 از پایه خارج می‌شود.

$$\Delta z = 2 \times 2 = 4 \quad z_2 - 14 = 4 \quad z_2 = 18$$

۱۲- گزینه ۱ درست است.

بهتر است در حل بهینه متغیر مقدار داشته باشد که ضریب تابع هدف کم و ضریب محدودیت بیشتری داشته باشیم و درواقع کمیت $\frac{c\downarrow}{a\uparrow}$ آن کوچک‌تر باشد.

$$x_2^* = 25 \quad z^* = 50$$

۱۳- گزینه ۳ درست است.

دو بردار وابسته خطی هستند و با داشتن ۲ بردار وابسته و درواقع ۱ بردار مستقل فقط راستای آن بردار را می‌توان ساخت، پس b هرگز توسط این بردار ساخته نخواهد شد.

۱۴- گزینه ۴ درست است.

مسئله در راستای متغیر $x_۵$ نامحدود و جواب بیکران دارد، م ادله نامحدود به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \\ x_۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۶ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} ۴+\lambda \\ ۲+۲\lambda \\ ۶ \\ ۰ \\ \lambda \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$x_۲ = ۱۰$ به ازای $\lambda = ۴$ رخ می‌دهد.

$$\begin{matrix} x_۱ = ۸ \\ x_۲ = ۱۰ \\ x_۳ = ۶ \\ x_۴ = ۸ \end{matrix} \quad z = z_۰ - (z_۲ - c_۲)x_۵ = ۱۲ + ۲x_۵ = ۲۰$$

۱۵- گزینه ۱ درست است.

محصول	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
زمان مورد نیاز (واحد زمان)	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$

$$\rightarrow x_۱ + ۲x_۲ + \frac{۱}{۲}x_۳ \le ۶۰۰$$

$$x_۲ \le ۳۰۰$$

۱۶- گزینه ۳ درست است.

ورود $x_۱$ بر پایه $\Delta z = ۳ \times ۴ = ۱۲$

ورود $x_۲$ بر پایه $\Delta z = ۴ \times ۲ = ۸$

ورود $x_۳$ بر پایه $\Delta z = ۳ \times ۳ = ۹$

ورود $x_۴$ بر پایه $\Delta z = ۶ \times ۱ = ۶$

۱۷- گزینه ۴ درست است.

۱۸- گزینه ۳ درست است.

$$\text{Min } z = x_۱ - x_۲ + MR$$
$$۰/۰۱x_۱ - x_۲ - S + R = ۰/۰۱$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \quad S \ge ۰ \quad R \ge ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	S	R	
R	۰/۰۱	−۱	−۱	۱	۰/۰۱
z	−۱	۱	۰	−M	۰

$\rightarrow$

	$x_۱$	$x_۲$	S	R	
R	۰/۰۱	−۱	−۱	۱	۰/۰۱
	−۱+۰/۰۱M	۱−M	M	۰	۰/۰۱M

باید M مقداری باشد که متغیری وارد پایه شده و متغیر مصنوعی R از پایه خارج شود تا بر ناحیه شدنی مسئله اصلی برسیم.

$$-۱ + ۰/۰۱M > ۰ \quad \rightarrow \quad M > ۱۰۰$$

۱۹- گزینه ۱ درست است.

در تابع هدف مسئله فاز I تنها متغیرهای مصنوعی حضور دارند. باتوجه به اینکه در انتهای فاز تمام متغیرهای مصنوعی خارج از پایه هستند پس داریم:

$$C_B = (۰, ۰, \dots, ۰) \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{C}_B = \underset{\sim}{۰}$$

برای متغیرهای غیرپایه‌ای غیرمصنوعی نظیر x_i

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = 0 - 0 = 0$$

برای متغیرهای غیرپایه‌ای مصنوعی نظیر R_i

$$z_i - c_i = c_B B^{-1} a_i - c_i = 0 - 1 = -1$$

۲۰- گزینه ۲ درست است.

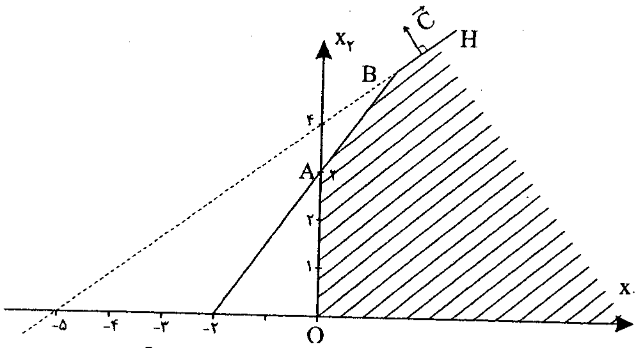
دستگاه همگن مسئله به صورت زیر است:

$$d_1 - d_2 + d_3 \le 0$$
$$2d_1 - d_2 + 2d_3 \le 0$$
$$d_1 - 3d_2 + 3d_3 \le 0$$

گزینه ۲ در دستگاه همگن صدق نمی‌کند.

ناحیه شدنی هاشور زده شده، ناحیه شدنی LP زیر می‌باشد:

$$\max Z = Cx$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$



بردار $\vec{C}$ عمود بر BH می‌باشد و $\|\vec{C}\| = \sqrt{41}$ است. به ۵ سوال بعد پاسخ دهید.

۱- محدودیتهای مساله کدام است؟

۱) $-5x_1 + 4x_2 \le 20$ ، $-2x_1 + 4x_2 \le 6$ ، $x_1, x_2 \ge 0$

۲) $-4x_1 + 5x_2 \le 20$ ، $-3x_1 + 2x_2 \le 6$ ، $x_1, x_2 \ge 0$

۳) $-x_1 + x_2 \le 5$ ، $-2x_1 + 3x_2 \le 6$ ، $x_1, x_2 \ge 0$

۴) $-4x_1 + 5x_2 \le 20$ ، $-x_1 + x_2 \le 6$ ، $x_1, x_2 \ge 0$

۲- بردار C کدام است؟

۱) $C = (5, -4)$ ۲) $C = (4, -5)$ ۳) $C = (-5, 4)$ ۴) $C = (-4, 5)$

۳- مسأله دارای چه حالت خاصی از جواب می‌باشد؟

۱) جواب بهینه یکتا ۲) جواب بهینه چندگانه ۳) جواب بهینه نامتناهی ۴) مسأله ناموجه است

۴- دوگان این مسأله کدام یک از مسائل زیر می‌باشد؟

۱)
$$\min 20w_1 + 6w_2$$
$$\text{s.t.} \quad -4w_1 - 3w_2 \ge -4$$
$$5w_1 + 2w_2 \ge 5$$
$$w_1, w_2 \ge 0$$

۲)
$$\min 20w_1 + 6w_2$$
$$\text{s.t.} \quad 4w_1 + 3w_2 \ge 4$$
$$5w_1 + 2w_2 \ge 5$$
$$w_1, w_2 \ge 0$$

۳)
$$\min 6w_1 + 20w_2$$
$$\text{s.t.} \quad -4w_1 - 3w_2 \ge -4$$
$$5w_1 + 2w_2 \ge 5$$
$$w_1, w_2 \ge 0$$

۴) این مسأله دوگان ندارد.

۵- دوگان این مسأله دارای چه حالت خاصی از جواب می‌باشد؟

۱) چندگانه ۲) تباهیده ۳) جواب نامحدود ۴) ناموجه

۶- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

نقطه رأسی $(0, 0, 0)$ را در نظر بگیرید. از این نقطه عمودی بر تابع هدف وارد کنید و در جهت آن حرکت کنید تا به یک ابرصفحه (یا بیشتر) برخورد کنید. این نقطه چه نقطه‌ای از ناحیه می‌باشد؟

۱) رأسی ۲) روی یال ۳) روی وجه دوبعدی ۴) درونی

جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
x_1	۱	۰	۰	۰	α	β	γ	δ	۱۰
x_2	۰	۱	۰	۰	α'	β'	γ'	δ'	۱۲
x_3	۰	۰	۱	۰	α''	β''	γ''	δ''	۱۴
x_4	۰	۰	۰	۱	α'''	β'''	γ'''	δ'''	۱۶
$c_j - z_j$	۰	۰	۰	۰	a	b	c	d	

که در آن متغیرهای x_5 و x_6 و x_7 و x_8 متغیرهای کمکی قیود $\le$ می‌باشند. به ۴ سوال بعد پاسخ دهید.

۷- چه شرایطی روی پارامترها بگذاریم که a_5 (ستون ضرایب متغیر x_5) در زیر فضای تولید شده به وسیله a_1 و a_2 قرار گیرد؟

۱) $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' > 0$

۲) $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \ge 0$

۳) $\alpha, \alpha' > 0 , \alpha'' = \alpha''' = 0$

۴) $\alpha, \alpha' = 0 , \alpha'' = \alpha''' > 0$

۸- چه شرایطی روی پارامترها بگذاریم تا a_8 در امتداد a_1 قرار گیرد؟

۱) $\delta''' = \delta'' = \delta' = \delta = 0$

۲) $\delta' = \delta'' = \delta''' = 0 , \delta > 0$

۳) $\delta \ge 0$

۴) $\delta \le 0$

۹- چه شرایطی روی پارامترها قرار دهیم، تا قید اول زائد شود؟

۱) $\alpha = \beta = \gamma = \delta \le 0$

۲) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

۳) $\alpha = \beta = \gamma = \delta \ge 0$

۴) شرایط زائد شدن قید در مسأله وجود ندارد.

۱۰- اگر ماتریس B^{-1} جدول (معکوس ماتریس پایه) یک ماتریس قطری مربعی باشد و تمام عناصر روی قطر برابر $B_{ij}^{-1} = i + j$ باشد. آنگاه a_1 ستون مربوط به متغیر x_1 کدام است؟

۱) $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

۲) $a_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

۳) $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

۴) $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱۱- مسأله برنامه‌ریزی صفر و یک زیر را در نظر بگیرید:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j = \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$0 \le c_1 \le c_2 \le \dots \le c_n$$

فرض کنید با استفاده از الگوریتم شاخه و کران یک جواب جزئی به صورت $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ موجود باشد. (N متغیر اول آن مشخص شده است.) کدام یک از روابط زیر بیانگر آن است که بهترین جواب زیر مجموعه به دست آمده است؟

۱) به ازای حداقل یک i، $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + a_{i,N+1}(1 - x_N) \ge b_i$

۲) به ازای حداقل یک i، $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + a_{i,N+1} x_N \ge b_i$

۳) $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + a_{i,N+1} x_N \ge b_i \quad i = 1, \dots, m$

۴) $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + a_{i,N+1}(1 - x_N) \ge b_i \quad i = 1, \dots, m$

۱۲- مقدار بهینه تابع هدف مدل زیر چقدر است؟

$$\max Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 8x_4 - 9x_5$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \geq -1 \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \geq -1 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 \leq -2 \\ & x_j = \{0,1\} \qquad j = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

۱) ۸- ۲) ۱۳- ۳) ۱۴- ۴) ۷-

۱۳- جدول بازده زیر مربوط به سیاست‌های تجاری دو شرکت "الف" و "ب" می‌باشد. که برای شرکت "الف" تنظیم شده است. در این جدول سیاست‌های افقی مربوط به شرکت "الف" و سیاست‌های عمودی مربوط به شرکت "ب" می‌باشد. با استفاده از تکنیک بازی دو نفره مجموع صفر و در نظر گرفتن حالت "سیاست مغلوب" ارزش بازی عبارتست از:

الف \ ب	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۴
۲	۱	۰	۵
۳	۰	۱	۱-

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۱۴- دو نفر A و B همزمان با هم اعداد ۱ و ۲ را به زبان می‌آورند. اگر جمع اعداد گفته شده زوج باشد، B همان مقدار پول رایج کشور به هزار تومان را به A پرداخت می‌کند. اگر جمع اعداد فرد باشد، A به B پرداخت می‌کند. بهترین استراتژی برای A و B چقدر است؟

۱) A و B با احتمال یکسان $\frac{1}{2}$ هر یک از اعداد را خواهند گفت.

۲) A و B هر دو عدد یک را با احتمال $\frac{5}{12}$ خواهند گفت.

۳) A عدد یک و B هم عدد یک را خواهد گفت.

۴) A و B هر دو با احتمال $\frac{7}{12}$ عدد یک و با احتمال $\frac{5}{12}$ عدد ۲ را خواهند گفت.

۱۵- فرض کنید می‌خواهیم مسأله تخصیص منبع زیر را با برنامه‌ریزی پویا با حرکت به جلو حل کنیم:

$$\max J = \prod \left(1 + Ku(k)\right)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{3} u(k) = 5$$
$$0 \leq u(k) \leq 3 \text{ و } u(k) \text{ عدد صحیح}$$

وقتی که k متغیر مرحله، $u(k)$ متغیر تصمیم، $x(k)$ متغیر حالت و $J_k(x(k))$، حداکثر تابع هدف در مرحله $1,2,\dots,k$ و U فضای تصمیم قابل قبول است. معادله تکراری عبارتست از:

۱) $$J_k(x(k)) = \max_{u(k) \in U} \left\{ [1 + ku(k)] \times J_{k-1}(x(k) + u(k)) \right\}$$

۲) $$J_k(x(k)) = \max_{x(k) \in U} \left\{ [1 + ku(k)] + J_{k-1}(x(k) - u(k)) \right\}$$

۳) $$J_k(x(k)) = \max_{x(k) \in U} \left\{ [1 + ku(k)] \times J_{k-1}(x(k) - u(k)) \right\}$$

۴) $$J_k(x(k)) = \max_{x(k) \in U} \left\{ [1 + ku(k)] \times J_{k+1}(x(k) - u(k)) \right\}$$

۱۶-روش تکراری زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$$

وقتی عدد a عدد حقیقی ثابت و مثبتی است.

۱) این روش حاصل کاربرد روش سریع‌ترین نزول برای حداقل کردن تابع $f(x)=x^2-a$ می‌باشد.

۲) این روش حاصل کاربرد روش نیوتن رافسون برای حداقل کردن $f(x)=x^2-a$ است.

۳) این روش حاصل کاربرد روش نیوتن- رافسون برای حل معادله $f(x)=x^2-a=0$ می‌باشد.

۴) این روش حاصل از کاربرد روش سریع‌ترین نزول برای حداقل کردن تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax$ است.

۱۷-در سوال قبل روش تکراری عددی به سمت x^* همگرا می‌باشد. x^* چقدر است؟

۱) x^* در رابطه $\frac{1}{3}x^{*3}-ax^*=0$ صدق می‌کند.

۲) بدون توجه به شرط اولیه x_0، $x^*=\sqrt{a}$ می‌باشد.

۳) $x^*=a$ است.

۴) اگر شرط اولیه x_0 مثبت باشد، $x^*=\sqrt{a}$ و اگر x_0 منفی باشد $x^*=-\sqrt{a}$ می‌باشد.

۱۸-مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min Z &= -x_1^2-x_2^2-x_3^2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1+2x_2+3x_3\le 14 \\ & 3x_1-x_2+2x_3\le 7 \\ & x_1, x_2, x_3\ge 0 \end{aligned}$$

حداقل مقدار Z چقدر است؟

۱) ۱۷-   ۲) ۴۱-   ۳) ۶۱-   ۴) ۴۹-

۱۹-در مسأله TSP (فروشنده دوره‌گرد) شرط وجود جواب کدام است؟

۱) وجود یک مدار منحصر به فرد

۲) وجود یک مدار اویلری

۳) وجود یک مدار همیلتونی

۴) مسأله فروشنده دوره‌گرد همواره دارای جواب می‌باشد.

۲۰- در رفتن نیوتن- رافسون برای $\min f(x)$ با شرط $x\in R^n$ مقدار کاهش متغیرها در هر مرحله چقدر است؟

۱) $\left[-\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1}\nabla f(x_k)$

۲) $-\frac{1}{2}\nabla^2 f(x_k)\nabla f(x_k)$

۳) $-\frac{1}{2}\nabla f^t(x_k)\left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1}\nabla f(x_k)$

۴) $-\nabla f^t(x_k)\left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1}\nabla f(x_k)$

پاسخ

۱ -گزینه «۲» صحیح است.

خطی که از AB می‌گذرد از نقاط $(۰,۳)$ و $(-۲,۰)$ عبور کرده است پس تنها خطی که در این نقاط فعال (تساوی) می‌شود خط $-۳x_۱+۲x_۲=۶$ می‌باشد و خطی که از BH عبور می‌کند از نقاط $(۰,۴)$ و $(-۵,۰)$ عبور می‌کند که خطی که در این نقاط فعال می‌شود خط $-۴x_۱+۵x_۲=۲۰$ می‌باشد. پس محدودیت‌ها به فرم $-۴x_۱+۵x_۲\leq ۲۰$ می‌باشد.

$$-۳x_۱+۲x_۲\leq ۶$$

$$x_۱\,,\,x_۲\geq ۰$$

۲ - **گزینه «۴» صحیح است.**

چون $\vec{C}$ به BH عمود می‌باشد پس بردار $\vec{C}$ موازی بردار گرادیان محدودیت $-۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۲۰$ می‌باشد. بنابراین

$$\alpha(-۴, ۵) = (c_۱, c_۲)$$

از طرفی چون $\|\vec{C}\| = ۴۱$ می‌باشد پس $C = (-۴, ۵)$ می‌باشد یعنی $\alpha = ۱$ است زیرا

$$\sqrt{(-۴)^۲ + (۵)^۲} = ۴۱$$

۳- **گزینه «۲» صحیح است.**

از آنجایی که $\vec{C}$ بر BH عمود می‌باشد با حرکت در جهت بردار $\vec{C}$ نیم خط BH آخرین جایی از ناحیه می‌باشد که تابع هدف از آن خارج می‌شود پس BH بهینه می‌باشد و جواب بهینه چندگانه داریم.

۴ - **گزینه «۱» صحیح است.**

$$\begin{aligned}
P: \max Z &= -۴x_۱ + ۵x_۲ \\
\text{s.t.} \quad & -۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۲۰ \\
& -۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D: \min ۲۰w_۱ &+ ۶w_۲ \\
\text{s.t.} \quad & -۴w_۱ - ۳w_۲ \geq -۴ \\
& ۵w_۱ + ۲w_۲ \geq ۵ \\
& w_۱, w_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

۵ - **گزینه «۲» صحیح است.**

چون اولیه جواب بهینه چندگانه دارد بنابراین دوگان جواب بهینه تباهیده دارد.

۶ - **گزینه «۳» صحیح است.**

عمود بر تابع هدف یعنی در جهت بردار $\vec{C}$ در ناحیه حرکت می‌کنیم.

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳\theta \\ ۲\theta \\ \theta \end{pmatrix}$$

حال این $x(\theta)$ را در محدودیت‌ها قرار می‌دهیم و حداکثر θ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲(۳\theta) - ۳(۲\theta) + ۲\theta \leq ۳ \\ -(۳\theta) + (۲\theta) + (\theta) \leq ۵ \\ ۳\theta \geq ۰, ۲\theta \geq ۰, \theta \geq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\theta \leq ۳ \\ ۰ \leq ۵ \\ \theta \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow ۰ \leq \theta \leq \frac{۳}{۲}$$

پس حداکثر حرکت $\theta = \frac{۳}{۲}$ خواهد بود که داریم:

$$x(\theta = \frac{۳}{۲}) = \begin{pmatrix} \frac{۹}{۲} \\ ۳ \\ \frac{۳}{۲} \end{pmatrix} = \text{نقطه به دست آمده}$$

حال این نقطه را در محدودیت‌ها قرار می‌دهیم که بررسی کنیم کدام یک از محدودیت‌ها فعال خواهد شد:

$$۲ \times (\frac{۹}{۲}) - ۳ \times ۳ + ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$$

$$-(\frac{۹}{۲}) + ۳ + \frac{۳}{۲} < ۵$$

$$\frac{۹}{۲} > ۰, ۳ > ۰, \frac{۳}{۲} > ۰$$

پس فقط قید اول در این نقطه جدید فعال می‌باشد پس روی یک وجه دوبعدی (صفحه) قرار دارد.

۷- گزینه «۳» صحیح است.

$$y_۵ = B^{-۱}a_۵ \Rightarrow a_۵ = By_۵ \Rightarrow a_۵ = [a_۱, a_۲, a_۳, a_۴]\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha''' \end{bmatrix}$$

$$a_۵ = \alpha a_۱ + \alpha' a_۲ + \alpha'' a_۳ + \alpha''' a_۴$$

حال اگر $\alpha'' = \alpha''' = ۰$ و $\alpha, \alpha' > ۰$ باشد آنگاه داریم:

$$a_۵ = \alpha a_۱ + \alpha' a_۲$$

که یعنی $a_۵$ فقط توسط $a_۱$ و $a_۲$ پایه ساخته می‌شود.

۸- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل داریم:

$$a_۸ = \delta a_۱ + \delta' a_۲ + \delta'' a_۳ + \delta''' a_۴$$

حال اگر $\delta' = \delta'' = \delta''' = ۰$ و $\delta > ۰$ باشد داریم:

$$\boxed{a_۸ = \delta a_۱}$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

در صورتی که $\alpha = \beta = \gamma = \delta = ۰$ باشد در این حالت سطر اول تبدیل به $x_۱ = ۱۰$ خواهد شد که این نشان می‌دهد که $x_۱$ در همه جای مسأله مقدارش ۱۰ می‌باشد و سطر اول را می‌توان حذف کرد و همچنین ستون متغیر $x_۱$.

۱۰-گزینه «۲» صحیح است.

$$B^{-۱}a_۱ = y_۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{۳۱} \\ a_{۴۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\begin{cases} ۲a_{۱۱} = ۱ \\ ۴a_{۲۱} = ۰ \\ ۶a_{۳۱} = ۰ \\ ۸a_{۴۱} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = a_۱$$

۱۱-گزینه «۴» صحیح است.

در صورتی که N متغیر اول مقدارش مشخص شده باشد (چون مسأله حداقل سازی است و ضرایب تابع هدف صعودی می‌باشند برای انتخاب شاخه از متغیر با کوچک‌ترین اندیس یعنی کوچک‌ترین ضریب تابع هدف شروع می‌کنیم). برای آنکه توقف کنیم کافی است در یک مرحله تمام محدودیت‌ها برقرار شوند. یقیناً جواب بهینه به دست خواهد آمد چون از کوچک‌ترین ضریب تابع هدف شروع به حل کرده‌ایم.

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.

در صورتی که قرار دهیم $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = ۰$ و $x_۳ = ۱$ و $x_۴ = ۰$ و $x_۵ = ۰$ آنگاه $Z = -۷$ و بیشترین مقدار خواهد شد.

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

نیازی نمی‌باشد که حتماً با سیاست مغلوب مسأله را حل کنیم:

A \ B	۱	۲	۳	min
۱	$\boxed{۱}$	۲	۴	۱
۲	۱	۰	۵	۰
۳	۰	۱	-۱	-۱
max	۱	۲	۵	//

max ۱

min

۱۴ حیح است.

ه را تشکیل می‌دهیم:

A \ B	۱	۲	
۱	+۲	-۳	$\Rightarrow 2y_1 - 3y_2$
۲	-۳	۴	$\Rightarrow -3y_1 + 4y_2$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
	$2x_1 - 3x_2$	$-3x_1 + 4x_2$	

$$\text{بازیکن A} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -3x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{12} \Rightarrow \text{احتمال گفتن ۱} \\ x_2 = \frac{5}{12} \Rightarrow \text{احتمال گفتن ۲} \end{cases}$$

$$\text{بازیکن B} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = -3y_1 + 4y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{7}{12} \Rightarrow \text{احتمال گفتن ۱} \\ y_2 = \frac{5}{12} \Rightarrow \text{احتمال گفتن ۲} \end{cases}$$

۱۵ حیح است.

ر صورت سوال ذکر شده که به حالت حرکت به جلو (پیشرو) مسأله حل می‌شود.

۱۶ حیح است.

، نیوتن- رافسون جهت یافتن ریشه معادله $f(x) = x^2 - a$ می‌باشد.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$$

۱۷ حیح است.

$f(x) = x^2 - a$ در سوال قبل $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ می‌باشد که رابطه تکراری آن با روش نیوتن برای هر دوی آن‌ها همان رابطه ذکر شده ی‌باشد. فقط با انتخاب x_0 اولیه مناسب به سمت هر کدام از آن‌ها همگرا خواهد شد. اگر $x_0 > 0$ آنگاه به سمت $\sqrt{a}$ و اگر $x_0 < 0$ $\sqrt{a}$ هد شد.

۱۸

ی‌تواند تابع هدف به خود بگیرد برابر است با بیشترین مقداری که متغیرها به خود می‌گیرند. اگر بگیریم $x_1 = 0$ و $Z^* =$ خواهد شد.

۱۹

شد که تمام گره‌ها را طی کند بدون تکرار، که در مسأله TSP به دنبال یک مدار همیلتونی با حداقل مسافت

۲۰

بسط تیلر را برای $\nabla f(x)$ حول نقطه x_k می‌نویسیم:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) = 0$$

خواهد آمد:

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\nabla^2 f(x_k) x_{k+1} = \nabla^2 f(x_k) x_k - \nabla f(x_k)$$

ضرب می‌کنیم:

$$x_{k+1} = x_k - \left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k)$$

۱- مسأله پارامتریک ماکزیمم‌سازی زیر به ازای چه مقدار θ بهینه خواهد بود؟ $(\theta \geq ۰)$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	
Z	۰	$۹-۲\theta$	۰	$۱۱-۲\theta$	$۲-\frac{۱}{۳}\theta$	$۲۴۰-۳۶\theta$
$x_۱$	۱	۶	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۶}$	۶
$x_۳$	۰	۱-	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱۲

۱) $۰ \leq \theta \leq \frac{۹}{۲}$ ۲) $۰ \leq \theta \leq \frac{۱۱}{۲}$ ۳) $۰ \leq \theta \leq \frac{۲۰}{۳}$ ۴) $۰ \leq \theta \leq ۹$

۲-مدل استفاده برای فرموله کردن توزیع گندم‌های وارداتی از طریق بنادر به سیلوها و از سیلوها به کارخانجات آردسازی چیست؟

۱) برنامه‌ریزی خطی ۲) حمل و نقل ساده
۳) حمل و نقل مرکب ۴) حمل و نقل مرکب و برنامه‌ریزی خطی

۳-جواب بهینه مسأله تخصیص زیر کدام است؟

فرد \ شغل	A	B	C	D
۱	۱	۰	۰	۱
۲	۱	۰	۲	۰
۳	۱	۱	۰	۰
۴	۰	۰	۲	۰

۱) $۱ \to B$، $۲ \to D$، $۳ \to C$، $۴ \to A$
۲) $۱ \to C$، $۲ \to B$، $۳ \to D$، $۴ \to A$
۳) $۱ \to C$، $۳ \to D$، $۲ \to B$، $۴ \to A$
۴) همه موارد

۴-محدودیت‌های فعال در نقطه بهینه در مسأله حداکثرسازی با علامت $\leq$، محدودیت‌هایی هستند که دارای قیمت‌های سایه‌ای ....

۱) صفر باشند. ۲) کوچک‌تر یا مساوی صفر باشند.
۳) مثبت باشند. ۴) بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند.

۵-یک مدل حمل و نقل متوازن را در نظر بگیرید.

۱) اگر حداقل یکی از $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها مثبت باشد، به بهینگی رسیده‌ایم.
۲) اگر تمام $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها مثبت یا صفر باشند، به بهینگی رسیده‌ایم.
۳) اگر تمام $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها منفی یا صفر باشند، به بهینگی رسیده‌ایم.
۴) اگر حداقل یکی از $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها منفی باشد، به بهینگی رسیده‌ایم.

جدول اول و نهایی یک مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد و تابع هدف به صورت max و محدودیت‌ها به فرم $\leq$ هستند. متغیرهای کمکی x_3 و x_4 می‌باشند. به ۵ سوال بعد پاسخ دهید.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	-30	-10	0	0	0
x_3	2	1	1	0	4
x_4	2	2	0	1	6

جدول اول

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	0	5	15	0	60
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_4	0	1	-1	1	2

جدول نهایی

۶- حداقل افزایش در ضریب x_2 در تابع هدف چقدر باشد تا این فعالیت مقرون به صرفه گردیده و وارد پایه شود؟

۱) ۷ ۲) ۱۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۷- مقدار سمت راست محدودیت دوم چقدر می‌تواند کاهش یا افزایش یابد تا جواب فعلی قابل قبول باقی بماند؟

۱) کاهش ۱ واحد، افزایش ۱۰ واحد
۲) کاهش ۲ واحد، افزایش ∞
۳) کاهش ∞ واحد، افزایش ۵ واحد
۴) کاهش ∞ واحد، افزایش ۲ واحد

۸- با توجه به جدول نهایی داده شده به ازای هر واحد افزایش مقدار سمت راست محدودیت اول چقدر به تابع هدف اضافه می‌شود؟

۱) ۱۰ واحد ۲) ۱۲ واحد ۳) ۲۰ واحد ۴) ۱۵ واحد

۹- با توجه به جدول نهایی داده شده اگر اضافه کردن محدودیت جدید $4x_1 + x_2 = 4$ روی مدل اصلی چیست؟

۱) موثر است و جواب جدید $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{8}{3}$
۲) موثر است و جواب جدید $x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{8}{3}$
۳) موثر است و جواب جدید $x_1^* = \frac{1}{4}, x_2^* = \frac{10}{3}$
۴) بدون اثر است.

۱۰- با توجه به جدول نهایی داده شده در صورتی که x_3, x_4 میزان منابع باقی مانده را نشان دهند، اگر قیمت هر واحد از منبع اول در بازار ۱۷ و منبع دوم ۱۴ باشد:

۱) خرید منبع اول و دوم به صرفه است.
۲) فقط خرید منبع دوم به صرفه است.
۳) فقط خرید منبع اول به صرفه است.
۴) خرید هیچ کدام از منابع به صرفه نیست.

۱۱- مسأله برنامه‌ریزی پویای زیر را در نظر بگیرید.

$$\max Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ و صحیح}$$

اگر در مرحله سوم حالت برابر ۷ و تصمیم برابر ۲ باشد مقدار تابع هدف چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) چنین چیزی وجود ندارد.

۱۲- در سوال قبل تعداد حالت‌ها و تصمیم‌ها در مرحله دوم چند است؟

۱) حالت = ۹ ، تصمیم = ۵ ۲) حالت = ۸ ، تصمیم = ۴ ۳) حالت = ۴ ، تصمیم = ۴ ۴) حالت = ۴ ، تصمیم = ۵

۱۳- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \sum_{i=1}^{3} P(i,s_i,x_i)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$
$$x_i \geq 0 \text{ , صحیح } i = 1,2,3$$

در صورت حل مسأله با برنامه‌ریزی پویای پسرو در مرحله **n** ام روند حل کدام است؟

۱) $f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i,s_i,x_i)$

۲) $\begin{cases} f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i,s_i,x_i) \\ \sum_{i=n}^{3} x_i = S_n \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) \times \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i,s_i,x_i) \\ \sum_{i=n}^{3} x_i = S_n \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + \sum_{i=n+1}^{3} p(i,s_i,x_i) \\ \prod_{i=n}^{3} x_i = S_n \end{cases}$

۱۴- در حل یک مسأله **ILP** با برنامه‌ریزی پویا تعداد متغیرهای حالت ....

۱) به تعداد متغیرها ربط دارد. ۲) به تعداد محدودیت‌ها ربط دارد.

۳) به تعداد محدودیت‌ها بعلاوه تعداد متغیرها ربط دارد. ۴) به تعداد درجه متغیرها در تابع هدف ربط دارد.

۱۵- در یک مسأله برنامه‌ریزی آرمانی فرض کنید یکی از اهداف به صورت $f_1(x) = c^1x$ باشد و آرمان آن Z_1 باشد متغیرهای انحراف آن‌ها هم d_1^+ و d_1^- باشد به صورت زیر:

$$c^1x + d_1^- - d_1^+ = Z_1$$

در صورتی که هدف آن باشد که c^1x بیشتر از Z_1 باشد کدام متغیر انحراف باید در تابع هدف قرار داده شود؟

۱) d_1^+ ۲) d_1^- ۳) d_1^-, d_1^+ ۴) هیچ کدام

۱۶- در سوال قبل در صورتی که بخواهیم c^1x تا حد ممکن به Z_1 نزدیک شود کدام متغیر انحراف باید در تابع هدف قرار بگیرد.

۱) d_1^+ ۲) d_1^- ۳) d_1^+, d_1^- ۴) هیچ کدام

۱۷-یک مسأله حداکثر جریان را در نظر بگیرید که در آن u_{ij} ظرفیت هر کدام از کمان‌ها می‌باشد و f جریانی است که از گره ابتدا به گره انتها ارسال می‌شود. برش $\alpha\beta$ را در نظر بگیرید که در آن X مجموعه گره‌هایی است که با گره ابتدا در یک طرف برش می‌باشند. آنگاه کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) $f \le \sum_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij}$
۲) $f \ge \sum_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij}$
۳) $f = \sum_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij}$
۴) $f - \sum_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij} = ۲f$

۱۸-بازی دونفره زیر را در نظر بگیرید:

A \ B	۱	۲	۳
۱	۳	-۱	-۳
۲	-۳	۳	-۱
۳	-۴	-۳	۳

نقطه زینی این مسأله کدام است؟

۱) (۳ , ۳-)
۲) (۳- , ۳)
۳) (۱ , ۱)
۴) نقطه زینی ندارد.

۱۹-ماتریس بازده $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید که بازیکن A استراتژی (x,y) و بازیکن B استراتژی (u,v) را انتخاب می‌کنند که

$$x + y = u + v = ۱ \qquad x, y, u, v \ge ۰$$

برقرار است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) افزودن مقدار ثابت $k > ۰$ به هر یک از عناصر ماتریس بازده به اندازه k واحد به ارزش بهینه اضافه می‌شود.
۲) با ضرب هر یک از عناصر ماتریس بازده در عدد ثابت $k > ۰$، ارزش بهینه در k ضرب می‌شود.
۳) در گزینه‌های ۱و۲ استراتژی‌های بهینه هیچ تغییری نمی‌کنند.
۴) تمام گزینه‌ها

۲۰- جدول بازی ۴×۲ زیر را در نظر بگیرید:

A \ B	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۲	۳	-۱
۲	۴	۳	۲	۶

استراتژی بهینه بازیکن A کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$
۲) $(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴})$
۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$
۴) $(\frac{۵}{۶}, \frac{۱}{۶})$

پاسخ

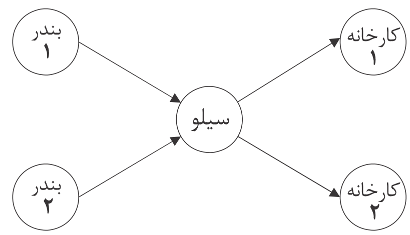
۱ -گزینه «۱» صحیح است.

شرایط بهینگی در max سازی $z_j - c_j \geq ۰$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} ۹-۲\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq \frac{۹}{۲} \\ ۱۱-۲\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq \frac{۱۱}{۲} \\ ۲-\frac{۱}{۳}\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۰ \leq \theta \leq \frac{۹}{۲}$$

۲- گزینه «۴» صحیح است.

یک مسأله با ۲ بندر، یک سیلو و ۲ کارخانه را در نظر بگیرید:



ملاحظه می‌شود که این مسأله یک حمل و نقل مرکب می‌باشد، زیرا گره سیلو می‌تواند هم نقش مبدأ و هم نقش مقصد را داشته باشد. در ضمن هر مسأله حمل و نقل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی هم می‌باشد.

۳- گزینه «۴» صحیح است.

چون مسأله هیچ صفر مستقل ندارد پس حتماً جواب بهینه چندگانه دارد. که تمام جواب‌های موجود در گزینه‌ها بهینه می‌باشند. برای چک کردن گزینه‌ها فقط توجه شود که صفر انتخاب شده باشد و یک کار به دو فرد و یا یک فرد به ۲ کار داده نشده باشد.

۴- گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که مسأله max سازی و قیود $\le$ می‌باشند پس تمام متغیرهای دوگان $w_i \ge ۰$ می‌باشند (چون فرم کانونی max است) و چون قیود فعال می‌باشند بنابراین $S_i = ۰$ می‌باشد که متغیر دوگان آن می‌تواند مثبت و یا حتی صفر هم بشود (در صورت تباهیدگی دوگان).

۵- گزینه «۲» صحیح است.

شرایط بهینگی $\Rightarrow z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le ۰$

پس اگر $c_{ij} - (u_i + v_j) \ge ۰$ باشند به بهینگی رسیده‌ایم.

۶- گزینه «۳» صحیح است.

چون $x_۲$ غیرپایه‌ای می‌باشد می‌نویسیم:

$$(Z_۲ - C_۲)_{\text{جدید}} = (Z_۲ - C_۲)_{\text{قدیم}} + \left(C_۲ - (C_۲ + \Delta)\right) \le ۰$$
$$\Rightarrow ۵ + (-\Delta) \le ۰ \Rightarrow \Delta \ge ۵$$

۷- گزینه «۲» صحیح است.

$$B^{-۱}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ + \Delta_۲ \end{bmatrix} \ge ۰ \Rightarrow B^{-۱}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} + B^{-۱}\begin{bmatrix} ۰ \\ \Delta_۲ \end{bmatrix} \ge ۰$$
$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ \Delta_۲ \end{bmatrix} \ge ۰ \Rightarrow \Delta_۲ \ge -۲$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$\Delta Z = \Delta b_۱ w_۱ \Rightarrow \Delta Z = (+۱)(۱۵) = +۱۵$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

نقطه بهینه مسأله $x^* = (۲,۰)$ می‌باشد که در قید جدید صدق نمی‌کند. پس محدودیت جدید برای نقطه بهینه موثر می‌باشد.

نقطه بهینه جدید پس از اضافه کردن محدودیت جدید و حل آن با DS باید حتماً روی قید جدید قرار داشته باشد که فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد زیرا:

$$۴ \times \frac{۱}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

۱۰-گزینه «۳» صحیح است.

چون $x_۴ > ۰$ داخل پایه می‌باشد پس منبع دوم اضافه داریم و خرید از آن اصلاً با هر قیمتی صرف ندارد. فقط از منبع اول می‌توانیم خرید کنیم آن هم با قیمت حداکثر ۱۵ زیرا قیمت سایه آن ۱۵ می‌باشد.

۱۱-گزینه «۴» صحیح است.

اگر حالت برابر ۷ باشد یعنی باقی مانده از سمت راست محدودیت برابر ۷ است یعنی $s_۳ = ۷$ می‌باشد. محدودیت را در مرحله سوم در نظر بگیرید.

$$۴x_۳ \le s_۳ = ۷$$

در این حالت $x_۳ = ۲$ نمی‌تواند باشد یعنی تصمیم برابر ۲ نخواهد شد.

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

s_3 \ x_3	۰	۱	۲	۳	۴
۰					
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					
۶					
۷					
۸					

$\left.\right\}$ باقی‌مانده از سمت راست محدودیت را حالت می‌گیریم

محدودیت به صورت $2x_2 \leq s_2$ می‌باشد که اگر در نهایت $s_2 = 8$ باشد مقادیری که x_2 می‌تواند به خودش بگیرد ۴ یا ۳ یا ۲ یا ۱ یا $x_2 = 0$ می‌باشد. پس در مرحله دوم تعداد تصمیم‌ها برابر ۵ می‌باشد.

۱۳- گزینه «۲» صحیح است.

$$f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + f^*(n+1\,,\,s_{n+1})$$

$$f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i,s_i,x_i)$$

که در آن $s_n = 5 - \sum_{i=1}^{n-1} x$ می‌باشد پس داریم $\sum_{i=n}^{3} x_i = s_n$

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

در مسائل LP، ILP و NLP با برنامه‌ریزی پویا، تعداد متغیرهای حالت به تعداد محدودیت‌ها ربط دارد زیرا s_i متغیر حالت i ام را تعریف می‌کنیم مقدار باقی مانده از سمت راست محدودیت i ام.

۱۵- گزینه «۲» صحیح است.

چون هدف آن است که c^1x بیشتر از آرمان خودش باشد پس مقدار گرفتن d_1^+ هیچ اشکالی ندارد ولی مقدار گرفتن d_1^- یعنی c^1x کمتر از Z_1 می‌باشد زیرا $c^1x + d_1^- = Z$ خواهد شد.

۱۶- گزینه «۳» صحیح است.

در این حالت d_1^- و d_1^+ هر دو باید به سمت صفر میل کنند تا $c^1x = Z_1$ شود پس d_1^- و d_1^+ هر دو داخل تابع هدف قرار خواهند گرفت.

۱۷- گزینه «۱» صحیح است.

در مسأله حداکثر جریان هیچ گاه جریان f از ظرفیت برش هیچ کدام از محدودیت‌ها بیشتر نخواهد شد زیرا حداکثر جریان با حداقل برش یکسان می‌باشد.

۱۸- گزینه «۴» صحیح است.

A \ B	۱	۲	۳	min
۱	۳	-۱	-۳	-۳
۲	-۳	۳	-۱	-۳
۳	-۴	-۳	۳	-۴
max	۳	۳	۳	

$\xrightarrow{\min}$ $\quad 3 \neq -3$ $\quad \downarrow \max$

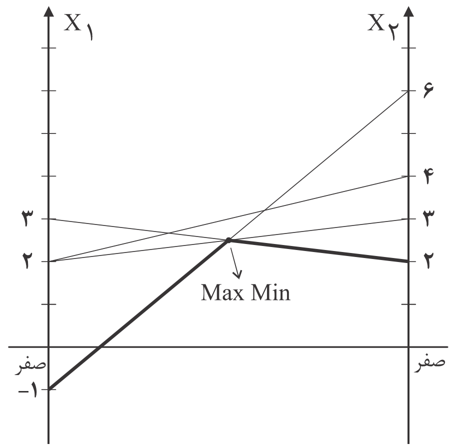
پس مسأله نقطه زینی ندارد.

۱۹- گزینه «۴» صحیح است.

با افزودن یک مقدار ثابت به تمام عناصر ماتریس بازده در یک مسأله بازی‌ها استراتژی بهینه هیچ تغییری نمی‌کند ولی به ارزش بهینه (تابع هدف بهینه) k واحد اضافه می‌شود. به همین ترتیب اگر $k > 0$ در تابع هدف ضرب شود.

۲۰-گزینه «۳» صحیح است.

شکل مربوط به بازیکن A را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} -x_۱ + ۶x_۲ = ۳x_۱ + ۲x_۲ \\ x_۱ + \ \ x_۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲} \\ x_۲ = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱- اگر در یک مسأله بهینه سازی تابع هدف غیرخطی باشد و ناحیه شدنی خطی و محدب، در این صورت:

۱) مسأله تنها یک نقطه بهینه خواهد داشت.

۲) مسأله چند نقطه بهینه موضعی دارد.

۳) قطعاً نقاط بهینه مطلق آن روی نقاط مرزی فضای جواب می‌باشد.

۴) نقطه بهینه کلی مسأله می‌تواند، گوشه‌ای، مرزی و یا حتی درونی باشد.

۲- اگر بدانیم در جواب بهینه متغیر کمکی قید دوم در پایه قرار دارد، مقدار بهینه تابع هدف چقدر می‌باشد؟

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 30 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \le 70 \\ & x_1, \dots, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) ۹۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۱۴۰

۳- مسأله $Z = \max\min\{f(y_1), f(y_2)\}$ با فرض $f(y_1) = y_1 + 2$ و $f(y_2) = -3y_2 + 4$ با شرط $y_1 + y_2 = 5$ و $y_1, y_2 \ge 0$ آنگاه مقدار Z^* چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۴- یک مسأله با ۳ متغیر تصمیم و قیود نامساوی را در نظر بگیرید. فرض کنید این مسأله دارای جواب بهینه چندگانه باشد. در این صورت حداکثر نقاط گوشه‌ای بهینه که این مسأله می‌تواند داشته باشد چه تعداد می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشخص نمی‌باشد.

۵- بر اثر افزایش مهارت کارکنان، زمان ساخت یک قطعه رو به کاهش است. این مسأله با این محدودیت، چه نوع برنامه‌ریزی محسوب می‌شود؟

۱) غیرخطی ۲) تصادفی ۳) برنامه‌ریزی خطی ۴) برنامه‌ریزی آرمانی

۶- مسأله دودوئی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 &\le 25 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_3 &\le x_1 \\ x_4 &\le x_2 \\ x_j = \{0, 1\} \qquad j &= 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

اگر تابع هدف به صورت $\max Z = 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$ باشد، مقدار بهینه تابع هدف چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۹

۷- در سوال قبل حد بالای تابع هدف با کدام یک از جواب‌ها ساخته می‌شود؟

۱) جواب $x = (1,1,1,1)$ با تابع هدف ۱۹ حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۲) جواب $x = (0,1,0,1)$ با تابع هدف ۸ حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۳) جواب $x = (1,0,1,0)$ با تابع هدف ۱۱ حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۴) جواب $x = (0,0,0,0)$ با تابع هدف صفر حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۸-فرض کنید $x = ۰,۲,۴,۶$ باشد. کدام یک از محدودیت‌های زیر نمایش مقادیری است که x به خود می‌گیرد؟

۱) $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ \leq ۱$ و $y_i = ۰$ یا ۱

۲) $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$ و $y_۲ + y_۳ + y_۴ \leq ۱$ و $y_i = ۰$ یا ۱

۳) $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ \geq ۱$ و $y_i = ۰$ یا ۱

۴) $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ \geq ۲$ و $y_i = ۰$ یا ۱

۹-ماتریس ضرایب حمل و نقل متوازن با m مبدأ و n مقصد را در نظر بگیرید:

۱) ۲mn عنصر یک دارد.

۲) $mn(m+n-۲)$ عنصر صفر دارد.

۳) mn عنصر یک دارد.

۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۱۰- مسأله حمل و نقل متوازن با m مبدأ و n مقصد را در نظر بگیرید که در آن s_iها عرضه و d_jها تقاضاها می‌باشند و $\sum_i s_i = \sum_j d_j = d$ است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $x_{ij} = \frac{s_i d_j}{d}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۲) $x_{ij} = \frac{d}{s_i d_j}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۳) $x_{ij} = \frac{s_i}{d d_j}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۴) $x_{ij} = \frac{d_j}{s_i d}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۱۱- مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{aligned}
\min f(x) &= -۶x_۱ - ۴x_۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad & -x_۱ + x_۲ \leq ۲ \\
& x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\
& x_۱ \leq ۵ \\
& -x_۲ \leq ۰ \\
& -x_۱ \leq -۱
\end{aligned}$$

۱) ۱۳-

۲) ۱۲-

۳) ۱۴-

۴) ۱۵-

۱۲- در سوال قبل در نقطه بهینه $x_۱$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۵

۱۳-کدام یک از مسائل زیر تفکیک پذیر نمی‌باشد؟

۱) $f(x_۱,x_۲) = x_۱^۳ - ۲x_۱^۲ + x_۱ + x_۲^۴ - x_۲$

۲)
$$\begin{aligned}
f(x_۱,x_۲) &= ۳x_۱ + ۲x_۲ \\
\text{s.t.} \quad & ۴x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱۶ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

۳)
$$\begin{aligned}
f(x_۱,x_۲) &= ۳x_۱^۲ + ۲x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad & |۴x_۱ - x_۲| \leq ۲ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

۴)
$$\begin{aligned}
f(x_۱,x_۲) &= ۴x_۱^۲ + ۳x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad & |x_۱ + x_۲| \geq ۴ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

۱۴-مسأله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= -4x_1 - 10x_2 + x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad g_1(x) &= -x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\ g_2(x) &= x_1 + x_2 - 6 \le 0 \\ g_3(x) &= x_1 - 5 \le 0 \\ g_4(x) &= -x_2 \le 0 \\ g_5(x) &= -x_1 + 1 \le 0 \end{aligned}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) $-\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_1(x)$ و $g_2(x)$ قرار می‌گیرد که در آن نقطه x° حاصل از برخورد $g_1(x)=0$ با $g_2(x)=0$ می‌باشد.

۲) $\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_1(x)$ و $g_2(x)$ قرار می‌گیرد که در آن نقطه x° حاصل از برخورد $g_1(x)=0$ با $g_2(x)=0$ می‌باشد.

۳) $-\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_1(x)$ و $g_5(x)$ قرار می‌گیرد که در آن x° نقطه حاصل از برخورد $g_1(x)=0$ با $g_5(x)=0$ می‌باشد.

۴) $\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_1(x)$ و $g_5(x)$ قرار می‌گیرد که در آن x° نقطه حاصل از برخورد $g_1(x)=0$ با $g_5(x)=0$ می‌باشد.

۱۵-مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.t.} \quad g_i(x) \le b_i \qquad i=1,\dots,m \\ &\qquad\ x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر بگیریم $B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$

اگر x^* نقطه بهینه مسأله اصلی باشد (که مجهول است) و به جای آن $\bar{x}$ انتخاب شود و حداکثر خطای تابع هدف را برابر $rB(x)$ بگیریم در روش SUMT شرط توقف کدام است؟

۱) $f(\bar{x}) \le f(x^*) \le f(\bar{x}) + rB(\bar{x})$

۲) $f(\bar{x}) = r(B\bar{x})$

۳) $f(x^*) \le f(\bar{x}) \le f(x^*) + rB(\bar{x})$

۴) $f(x^*) = rB(\bar{x})$

۱۶-در برنامه‌ریزی غیرمحدب کدام یک از روش‌های تکراری برای به دست آوردن نقطه بهینه پیشنهاد می‌شود؟

۱) فرانک- ولف ۲) SUMT ۳) جستجوی گرادیان ۴) نیوتن- رافسون

۱۷-مسأله زیر را در نظر بگیرید که می‌خواهیم آن را با پویای پسرو حل کنیم:

$$\begin{aligned} &\min y = \max\{f(y_1), f(y_2), f(y_3)\} \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{3} y_i = 10 \\ &\qquad\ y_i \ge 0 \end{aligned}$$

$f(y_1) = y_1 - 3$ و $f(y_2) = 5y_2 + 3$ و $f(y_3) = y_3 + 5$ می‌باشد. R_n را بگیرید میزان باقی‌مانده از سمت راست محدودیت مسأله فوق، در ابتدای مرحله n ام مقدار y_2 در مرحله دوم کدام است؟

۱) صفر ۲) R_2 ۳) $R_2 + 2$ ۴) $\frac{R_2 + 2}{6}$

۱۸-جدول یک مسأله LP آزاد شده از مسأله ILP با فرض صحیح بودن تمام متغیرها را در نظر بگیرید. برش مربوط به $x_۲$ در جدول کدام است؟

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۷}$
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۵}{۲}$

۱) $-\frac{۱}{۳}S_۱-\frac{۱}{۶}S_۲\leq-\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}S_۱+\frac{۱}{۶}S_۲\leq\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}S_۱+\frac{۱}{۳}S_۲\leq\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۶}S_۱-\frac{۱}{۳}S_۲\leq-\frac{۱}{۲}$

۱۹-مسأله غیرخطی را در نظر بگیرید که تابع هدف آن $\min f(x)$ و بدون محدودیت می‌باشد. برای حل با روش جستجوی گرادیان کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f\left(x'-t^*\nabla f(x')\right)=\max_{t\geq۰} f\left(x'-t\nabla f(x')\right)$

۲) $f\left(x'-t^*\nabla f(x')\right)=\min_{t\geq۰} f\left(x'-t\nabla f(x')\right)$

۳) $f\left(x'+t^*\nabla f(x')\right)=\max_{t\geq۰} f\left(x'+t\nabla f(x')\right)$

۴) $f\left(x'+t^*\nabla f(x')\right)=\min_{t\geq۰} f\left(x'+t\nabla f(x')\right)$

۲۰- جدول بازده یک بازی دو نفره مجموع صفر را در نظر بگیرید:

A \ B	۱	۲	۳
۱	۰	-۲	۲
۲	۵	۴	-۳

کدام گزینه صحیح است؟

۱) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۶}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۵}{۱۱}$ می‌باشد.

۲) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۷}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۴}{۱۱}$ می‌باشد.

۳) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۴}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۷}{۱۱}$ می‌باشد.

۴) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۵}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۶}{۱۱}$ می‌باشد.

پاسخ

۱ - گزینه «۴» صحیح است.

در یک مسأله غیرخطی نقطه بهینه می‌تواند یکی از نقاط گوشه‌ای یا مرزی یا درونی باشد.

۲ - گزینه «۱» صحیح است.

چون متغیر کمکی قید دوم پایه‌ای می‌باشد پس متغیر دوم دوگان در بهینگی صفر می‌باشد پس به راحتی می‌توان دوگان را بدون متغیر دوم نوشت.

$$\min 30w_1$$

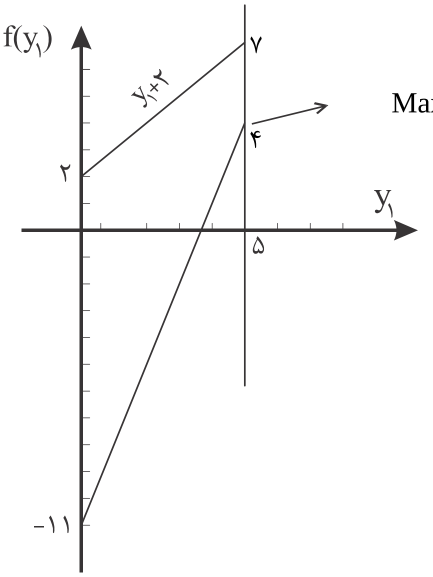
$$\left.\begin{array}{ll} w_1 \ge 1 & \Rightarrow w_1 \ge 1 \\ 2w_1 \ge 2 & \Rightarrow w_1 \ge 1 \\ w_1 \ge -3 & \Rightarrow w_1 \ge -3 \\ 3w_1 \ge 4 & \Rightarrow w_1 \ge \frac{4}{3} \\ 2w_1 \ge 6 & \Rightarrow w_1 \ge 3 \end{array}\right\} \Rightarrow w_1 \ge 3 \Rightarrow \min 30w_1 = 30 \times 3 = 90$$

۳ - گزینه «۴» صحیح است.

$$f(y_1) = y_1 + 2$$

$$\begin{cases} f(y_2) = -3y_2 + 4 \\ y_2 = 5 - y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(y_1) = -3(5 - y_1) + 4 = 3y_1 - 11 \\ 0 \le y_1 \le 5 \end{cases}$$

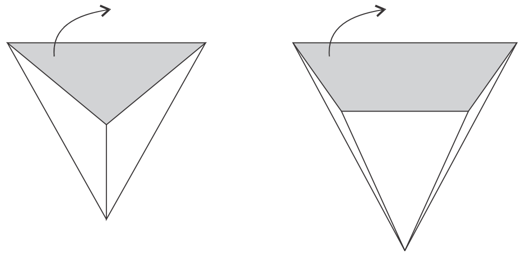
تابع $f(y_1)$ را با فرض $0 \le y_1 \le 5$ رسم می‌کنیم:



$$\mathrm{MaxMin}\left(y_1 + 2 \,,\, 3y_1 - 11\right) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Z^* = 4$$

۴ - گزینه «۴» صحیح است.

چون فضای جواب حداکثر می‌تواند ۳ بعدی باشد و وجهی که بهینه می‌شود معلوم نیست که چند نقطه گوشه‌ای دارد بنـابراین نمـی‌تـوان اظهـار نظـر کرد.



و همینطور با تعداد نقاط راسی بیشتر ●●●

۵ - گزینه «۱» صحیح است.

چون نسبت مهارت کارکنان با زمان رابطه خطی ندارد، پس فرض تناسب در مسأله رعایت نمی‌شود.

۶ - گزینه «۲» صحیح است.

قرار دهید $x = (0,1,0,1)$ مقدار تابع هدف $Z = 8$ خواهد شد که این جواب موجه با بیشترین مقدار است.

۷ – گزینه «۱» صحیح است.

جواب $x=(1,1,1,1)$ با $Z=19$ حد بالای تابع هدف می‌باشد که هر چند این جواب موجه نمی‌باشد ولی مقدار تابع هدف تمام جواب‌های مسأله از ۱۹ بیشتر نخواهد شد.

۸ – گزینه «۲» صحیح است.

چون برای $x=0$ هم یک متغیر y_1 در نظر گرفته شده پس $y_1+y_2+y_3+y_4=1$ و $y_i=0$ یا ۱ می‌باشند. که می‌توان آن را $y_2+y_3+y_4 \quad 1$ هم نوشت زیرا ضریب y_1 صفر می‌باشد.

۹ – گزینه «۴» صحیح است.

ماتریس ضرایب حمل و نقل متوازن کالا دارای $(m+n)mn$ عنصر، $2mn$ عنصر یک و $mn(m+n-2)$ عنصر صفر می‌باشد.

۱۰– گزینه «۱» صحیح است.

در هر مسأله حمل و نقل متوازن همواره $x_{ij}=\frac{s_i d_j}{d}$ که در آن $d=\sum_i s_i=\sum_j d_j$ می‌باشد یک جواب شدنی است.

۱۱-گزینه «۱» صحیح است.

$$f(x)=(x_1^2-6x_1+9)+(x_2^2-4x_2+4)-9-4$$
$$f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13$$

با توجه به تابع به دست آمده واضح است که حداقل مقدار تابع زمانی اتفاق می‌افتد که $x_1=3$ و $x_2=2$ باشد که $f^*(x)=-13$ خواهد شد. توجه شود که $x=(3,2)$ یک جواب موجه هم برای مسأله می‌باشد.

۱۲– گزینه «۱» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل گزینه (۱) صحیح است.

۱۳– گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که ناحیه گزینه (۴) محدب نمی‌باشد پس مسأله تفکیک پذیر نمی‌باشد.

۱۴– گزینه «۱» صحیح است.

هدف سوال به دست آوردن نقطه بهینه می‌باشد.

$$g_2(x) \text{ و } g_1(x) \text{ نقطه محل برخورد } \Rightarrow \begin{cases} -x_1+x_2=2 \\ x_1+x_2=6 \end{cases} \Rightarrow x=(2,4) \Rightarrow f(2,4)=-28$$

$$g_5(x) \text{ و } g_1(x) \text{ نقطه محل برخورد } \Rightarrow \begin{cases} -x_1+x_2=2 \\ -x_1 \qquad =-1 \end{cases} \Rightarrow x=(1,3) \Rightarrow f(1,3)=-21$$

پس چون $f(2,4)<f(1,3)$ می‌باشد بنابراین نقطه $x=(2,4)$ مقدار تابع هدفش بهتر می‌باشد و از آنجایی که تابع هدف حداقل سازی می‌باشد پس با شرط K.K.T. داریم:

$$\nabla f(x)=\sum_{i=1}^{5}\lambda_i \nabla g_i(x)$$
$$\lambda_i \le 0$$
$$\boxed{\begin{matrix} -\nabla f(x)=\sum \mu_i \nabla g_i(x) \\ \mu_i \ge 0 \end{matrix}}$$

و چون نقطه محل برخورد $g_1(x)$ و $g_2(x)$ بهینه می‌باشد پس داریم:

$$-\nabla f(x)=\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)$$
$$\mu_1,\mu_2 \ge 0$$

۱۵– گزینه «۱» صحیح است.

اگر x^* جواب بهینه مسأله اصلی باشد، لذا چنانچه به جای x^* مقدار $\overline{x}$ انتخاب شود حداکثر خطای تابع هدف برابر است با $rB(\overline{x})$ و ادامه کار باعث تقلیل خطا می‌شود. پس:

$$f(\overline{x}) \le f(x^*) \le f(\overline{x})+rB(\overline{x})$$

۱۶– گزینه «۲» صحیح است.

روش SUMT روشی است برای مسائل غیرخطی غیرمحدب.

۱۷- گزینه «۴» صحیح است.

تابع در مرحله سوم $f(۳, R_۳, y_۳) = y_۳ + ۵$ و $f^*(۳, R_۳) = R_۳ + ۵$ می‌باشد.

تابع مرحله دوم:

$$f(۲, R_۲, y_۲) = \min\max\{۵y_۲ + ۳ , R_۲ - y_۲ + ۵\}$$

$$۵y_۲ + ۳ = R_۲ - y_۲ + ۵ \Rightarrow y_۲ = \frac{R_۲ + ۲}{۶}$$

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$\bar{b}_۲ = \frac{۵}{۲} \quad y_{۲۳} = \frac{۱}{۳} \quad y_{۲۴} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$f_۲ = \frac{۱}{۲} \quad f_{۲۳} = \frac{۱}{۳} \quad f_{۲۴} = \frac{۱}{۶}$$

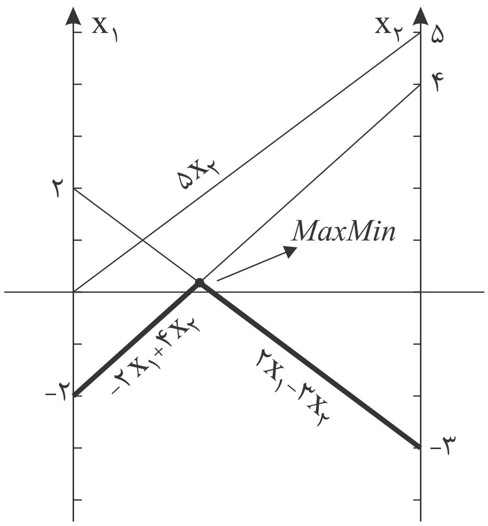
$$f_۲ - (f_{۲۳}S_۱ + f_{۲۴}S_۲) \le ۰$$

$$\frac{۱}{۲} - (\frac{۱}{۳}S_۱ + \frac{۱}{۶}S_۲) \le ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}S_۱ - \frac{۱}{۶}S_۲ \le -\frac{۱}{۲}$$

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

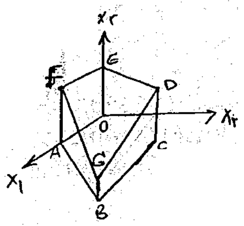
از آنجایی که تابع هدف می‌نیمم می‌باشد بنابراین خلاف جهت گرادیان حرکت خواهیم کرد و توجه شود که در تمام گزینه‌ها $t \ge ۰$ نوشته شده است.

۲۰- گزینه «۲» صحیح است.



$$\begin{cases} -۲x_۱ + ۴x_۲ = ۲x_۱ - ۳x_۲ \\ x_۱ + x_۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۷}{۱۱} \\ x_۲ = \frac{۴}{۱۱} \end{cases}$$

۱ ـ شکل زیر مجموعه جواب‌های شدنی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد. جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی تولید سه محصول، نقطه F می‌باشد. اگر بخواهیم از محصول دوم هم تولید نماییم در این‌صورت: (x_i میزان تولید محصول i ام می‌باشد)



۱) مقدار تولید محصول اول کاهش و تولید محصول سوم افزایش می‌یابد.
۲) مقدار تولید محصول اول افزایش و تولید محصول سوم کاهش می‌یابد.
۳) مقدار تولید محصول اول افزایش و تولید محصول سوم تغییری نمی‌کند.
۴) تأثیری بر میزان تولید محصولات اول و سوم نخواهد بود داشت.

۲ ـ مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = Cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

برای یک جواب پایه‌ای شدنی با پایه B کدام گزینه صحیح است؟ (R مجموعه اندیس متغیرهای غیرپایه‌ای به ازای این پایه می‌باشد.)

۱)
$$\text{Min} \quad \left(C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (Z_j - C_j) x_j\right)$$
$$\sum_{j \in R} B^{-1} a_j x_j \geq B^{-1} b$$
$$x_j \geq 0 \quad j \in R$$

۲)
$$\text{Min} \quad C_B B^{-1} b + \sum_{j \in R} (Z_j - C_j) x_j$$
$$\sum_{j \in R} B^{-1} a_j \leq x_j \geq B^{-1} b$$
$$x_j \geq 0 \quad j \in R$$

۳)
$$\text{Min} \quad Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (Z_j - C_j) x_j$$
$$\sum_{j \in R} B^{-1} a_j x_j \leq B^{-1} b$$
$$x_j \geq 0 \quad j \in R$$

۴)
$$\text{Min} \quad C_B B^{-1} b + \sum_{j \in R} (Z_j - C_j) x_j$$
$$\sum B^{-1} a_j x_j \geq B^{-1} b$$
$$x_j \geq 0 \quad j \in R$$

۳ ـ یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ماکزیمم‌سازی با نقاط رأسی x_1, x_2, x_3, x_4 در جهت‌های رأسی d_1, d_2, d_3 و با بردار گرادیان C مفروض است بگونه‌ای که $Cx_1 = 5$ ، $Cx_2 = 7$ ، $Cx_3 = 3$ ، $Cx_4 = 7$ ، $Cd_1 = 0$ ، $Cd_2 = -3$ ، $Cd_3 = 0$ در نظر بگیرید:

۱) مسئله دارای جواب بیکران می‌باشد.
۲) مسئله دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.
۳) مسئله دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.
۴) مسئله دارای یک شعاع بهینه می‌باشد.

۴ ـ قیمت سایه‌ای یک منبع که به حد خود رسیده است چقدر می‌باشد؟

۱) صفر می‌باشد.
۲) عددی مثبت می‌باشد.
۳) عددی منفی می‌باشد.
۴) ممکن است صفر باشد.

۵ ـ بخشی از یک جدول بهینه یک مسئله به‌صورت زیر می‌باشد:

	x_1	x_2	S_1	S_2	
S_2		۰	−۲		۵
x_2		۱	۱		۶
		۰	۳		

S_1 و S_2 متغیرهای کمکی محدودیت‌های به فرم $\leq$ هستند، مقدار بهینه مسئله ثانویه چقدر است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۸

۶ ـ در سؤال ۳۵، فرض کنید می‌خواهیم محصول جدیدی مانند X_3 را تولید نماییم به‌طوری که برای تولید یک واحد از آن به‌ترتیب ۴ و ۵ واحد از منابع اول و دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. به ازای کدام مقادیر C_3، تولید این محصول سودآور خواهد بود؟

۱) $C_3 > 9$
۲) $C_3 > 12$
۳) $C_3 > 13$
۴) $C_3 > 4$

۷ـ مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $A^t = A$ و $b^t = C$ می‌باشد. کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) اگر مسئله شدنی باشد، هر دو مسئله دارای جواب بهینه متناهی می‌باشند.

۲) اگر دوگان مسئله شدنی باشد، حتماً جواب نامحدود دارد.

۳) اگر دوگان مسئله شدنی باشد، ممکن است جواب نامحدود داشته باشد.

۴) دوگان این مسئله حتماً شدنی می‌باشد.

۸ـ دو مسئله اولیه و ثانویه را در نظر بگیرید. اگر مسئله دوگان دارای جواب بهینه غیرتباهیده باشد، مسئله اولیه دارای جواب بهینه .... می‌باشد.

۱) چندگانه ۲) نامتناهی ۳) منحصر به فرد ۴) تبهگن

جدول زیر را در نظر بگیرید: S_1 متغیر کمبود محدودیت اول، S_2 متغیر مازاد محدودیت دوم و R_2 متغیر مصنوعی محدودیت اول می‌باشد. به دو سؤال متوالی و مستقل زیر پاسخ دهید:

پایه	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	RHS
Z	۰	۱-	۰	e	M+۳	d
S_1	۰	$\frac{1}{2}$	۱	f	$\frac{1}{2}$	۸
X_1	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۲

۹ـ مقدار f چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱- ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۰ـ مقدار d کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۱ـ مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = Cx \\ & Ax \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

۱) دوگان مسئله حتماً شدنی است.

۲) دوگان مسئله می‌تواند ناموجه باشد.

۳) در صورتی که دوگان موجه باشد می‌تواند جواب بیکران داشته باشد.

۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۱۲ـ در مسئله زیر ارزش سایه‌ای منابع به‌ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,0)$

۳) $(0,2)$ ۴) $(2,2)$

۱۳ـ مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 4x_1 + Cx_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 \quad\quad + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

در جدول بهینه متغیرهای پایه‌ای به‌صورت (x_1, x_2) می‌باشد در صورتی‌که t_3^* متغیر مازاد سومین محدودیت مسئله ثانویه با مقدار ۷ باشد ($t_3^* = 7$) مقدار صحیح برای C کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴ـ جدول بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر می‌باشد:

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$S_۴$	
$S_۱$	۰	۰	۱	۲	۰	۰	۱
$S_۲$	۰	۰	۰	۱	۱	-۱	۲
$X_۱$	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
$X_۲$	۰	۱	۰	-۱	۰	۱	۳
Z	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۴}$	

اگر افزایش منبع چهارم، ۳ واحد پولی هزینه ایجاد کند و در اثر این افزایش ترکیب بهینه تغییر نکند، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) هزینه اضافی قابل توجیه است. ۲) سود تغییر نمی‌کند.

۳) سود کاهش نمی‌یابد. ۴) هزینه اضافی قابل توجیه نیست.

۱۵ـ مسئله برنامه‌ریزی خطی و جدول بهینه آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min } & Z=-۴X_۱-۶X_۲-۱۸X_۳ \\ \text{s.t } & \\ & ۲X_۱+۳X_۳\geq ۳ \\ & ۳X_۲+۲X_۳\geq ۵ \\ & X_۱,X_۲,X_۳\geq ۰ \end{aligned}$$

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$X_۴$	$X_۵$	
$X_۱$	۱	۰	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۲}$
$X_۲$	۰	۱	$\frac{۲۰}{۳}$	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$
	۰	۰	-۸	-۲	-۲	-۱۶

اگر قرار بود بین افزایش یا کاهش سمت راست اولین محدودیت یا دومین محدودیت یکی را انتخاب کنید تا بیشترین بهبود را در تابع هدف داشته باشید، کدام محدودیت را انتخاب می‌کردید و مقدار این تغییر چقدر بود؟

۱) کاهش در محدودیت اول به اندازه، ۳ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد

۲) کاهش در محدودیت دوم به اندازه، ۲ واحد با بهتر شدن تابع هدف به ازای ۱۰ واحد

۳) افزایش در محدودیت دوم به اندازه، ۳ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد

۴) کاهش در محدودیت اول به اندازه ۲ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } & Z=x_۱ \\ & ۲x_۱-x_۲\geq ۰ \\ & -۲x_۱+۳x_۲\geq -۶ \\ & x_۱,x_۲\geq ۰ \end{aligned}$$

جواب پایه‌ای شدنی با متغیرهای پایه‌ای $X_۱$ و $S_۲$ را در نظر بگیرید و به سؤالات متوالی و مستقل زیر پاسخ دهید.

۱۶ـ نقطه دوگان متناظر با این پایه:

۱) موجه هست ولی بهینه نیست. ۲) موجه نیست ولی بهینه هست.

۳) موجه و بهینه است. ۴) ناموجه و نابهین است.

۱۷ـ حساسیت تابع هدف بهینه مسئله نسبت به ارزش یک واحد سمت راست محدویت اول چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۱۸ ـ حساسیت متغیر $X_۱$ نسبت به افزایش یک واحد سمت راست محدودیت اول چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۱۹ـ مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max} \quad Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 28$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 32$$
$$2x_1 - x_2 \le 16$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

اگر جواب بهینه مسئله دوگان به‌صورت $(y_1, y_2, y_3) = (2, 0, 3)$ باشد، جواب بهینه (x_1, x_2) کدام است؟

۱) $(8,3)$ ۲) $(9,2)$ ۳) $(9,4)$ ۴) $(4,4)$

۲۰ـ برنامه‌ریزی تولید سه محصول توسط دو منبع را در نظر بگیرید. جدول بهینه سیمپلکس برای آن به قرار زیر است:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
S_1	-3	-1	0	1	-2	20
X_3	2	2	1	0	1	40
Z	12	2	0	0	7	280

کدام‌یک از تغییرات زیر باعث می‌شود، تولید محصول اول اقتصادی گردد؟

۱) سود هر واحد محصول اول ۱۰ واحد اضافه شود.

۲) میزان مصرف از منبع اول برای هر واحد محصول اول ۵ واحد کم شود.

۳) میزان مصرف ازمنبع دوم برای هر واحد از محصول اول ۲ واحد کم شود.

۴) میزان مصرف از مثبع برای هر واحد محصول اول، ۳ واحد کم شود.

تحقیق در عملیات

۱ـ گزینه ۲ درست است.

در حل ف لی مقدار $x_2^* = 0$ (نقطه F) و چنانچه بخواهیم متغیر X_2 مقدار مثبت بگیرید باید به سمت رأس G حرکت کنیم.
واضح است که متغیر x_3 کاهش یافته ولی متغیر x_1 افزایش می‌یابد.

۲ـ گزینه ۳ درست است.

$$Ax = b \quad \to \quad BX_B + NX_N = b \quad \to \quad X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$\text{Min} \quad Z = C_B B^{-1}b - \sum_{j\in R}\left(C_B B^{-1}Z_j - C_j\right)x_j$$

$$IX_B + \sum_{j\in R} B^{-1}a_j x_j = B^{-1}b$$

$$X_B \ge 0 \qquad x_j \ge 0 \qquad j \in R$$

مسئله م ادل است با:

$$\text{Min} \qquad Z = C_B B^{-1}b - \sum_{j\in R}\left(Z_j - C_j\right)x_j$$

$$\sum_{j\in R} B^{-1}a_j x_j \le B^{-1}b$$

$$x_j \ge 0 \quad j \in R$$

۳ـ گزینه ۲ درست است.

d_2 جهت رأسی دورشونده مسئله می‌باشد ولی چون $Cd_2 > 0$ مسئله جواب بیکران نخواهد داد.
چون مقدار تابع هدف در دو نقطه رأسی x_2 و x_4 برابر می‌باشد پس یال واصل آن‌ها هم بهینه و مسئله دارای بی‌نهایت جواب بهینه می‌باشد.

۴ـ گزینه ۴ درست است.

$$S_i = 0 \quad \to \quad W_i \ge 0$$

۵ـ گزینه ۴ درست است.

$$W = C_B B^{-1} = (۳,۰)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۵ \\ ۶ \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \\ ۱۷ \end{pmatrix}$$

مقدار بهینه شده ثانویه $W = C_B B^{-1}b = (۳,۰)\begin{pmatrix} ۶ \\ ۱۷ \end{pmatrix} = ۱۸$

۶ـ گزینه ۲ درست است.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} - & \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$C_B B^{-1} = (۳,۰) \qquad Z_۳ - C_۳ = C_B B^{-1}a_۳ - C_۳ = (۳,۰)\begin{pmatrix} ۴ \\ ۵ \end{pmatrix} - C_۳ = ۱۲ - C_۳ < ۰$$

به ازای $C_۳ > ۱۲$، تولید $X_۳$ صرفه اقتصادی خواهد داشت.

۷ـ گزینه ۱ درست است.

$$P: \text{Min} \quad Z = Cx \qquad D: \text{Max} \quad wb^t$$
$$Ax = b \qquad WA^t \le C^t$$
$$x \ge ۰ \qquad W \text{ آزاد}$$

$$\xrightarrow[A^t = A]{b^t = C} \quad C^t = b$$

$$\rightarrow \quad D: \max \quad Cw$$
$$Aw \le b$$

این مسئله چنانچه شدنی باشد، دوگان آن هم حتماً شدنی بوده و در نتیجه هر دو مسئله دارای جواب بهینه متناهی می‌باشد.

۸ـ گزینه ۳ درست است.

اگر مسئله P چندگانه باشد، D جواب تبهگن دارد.

اگر اگر P غیرتباهیده باشد، D غیرچندگانه (منحصر به فرد) خواهد بود.

۹ـ گزینه ۳ درست است.

ستون‌های متغیرهای مازاد مصنوعی یک محدودیت همواره قرینه یگدیگرند.

$$f = -\frac{}{۲}$$

۱۰ـ گزینه ۱ درست است.

$$W = C_B B^{-1} = (۰,۳)$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸ \\ ۲ \end{pmatrix} \qquad b_۱ + \frac{b_۲}{۲} = ۸$$

$$\frac{b_۲}{۲} = ۲$$
$$b_۱ = ۶$$
$$b_۲ = ۴$$

$$d = C_B B^{-1}b = (۰,۳)\begin{pmatrix} ۶ \\ ۴ \end{pmatrix} = ۱۲$$

۱۱ـ گزینه ۲ درست است.

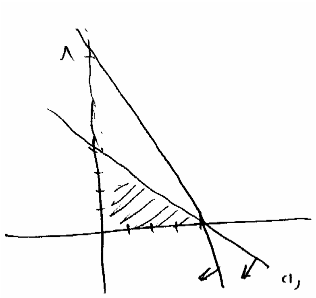
این مسئله حتماً شدنی است(مبدأ، جواب بدیهی دستگاه ناهمگن می‌باشد)

پس دوگان این مسئله هرگز بیکران نخواهد بود.

دوگان می‌تواند شدنی یا نشدنی باشد.

۱۲ـ گزینه ۱ درست است.

ابتدا باید جواب بهینه به‌دست می‌آید تا جواب‌های دوگان شدنی باشد (قیمت سایه‌ای $\frac{\partial z}{\partial b_i}=w_i$



جواب بهینه $x_{۱}^{*}=۴$ $\quad x_{۲}^{*}=۰ \quad z^{*}=۸$

$x_{۱}=۴ \;,\; x_{۲}=۰ \quad S_{۱}=۰ \quad S_{۲}=۰$

طبق قضیه مکمل زائد $t_{۱}=۰$ (متغیر کمکی محدودیت اول دوگان)

$y_{۱}+۲y_{۲}=۲$ محدوت اول دوگان

تنها گزینه ۱ در این م ادله صدق می‌کند.

۱۳ـ گزینه ۱ درست است.

$$X_B=(X_{۱},X_{۲}) \qquad X_{۳}=۰ \;\rightarrow\; \begin{cases} X_{۱}-X_{۲}=۶ \\ X_{۱}\qquad =۸ \end{cases}$$

جواب بهینه $\rightarrow \;(X_{۱}=۸ \quad X_{۲}=۲ \quad X_{۳}=۰ \quad S_{۱}=۰ \quad S_{۲}=۰)$

طبقه قضیه مکمل زائد

محدودیت‌های مسئله ثانویه

$t_{۱}=t_{۲}=۰$

$$\begin{aligned} y_{۱}+y_{۲}-t_{۱}&=۴ \\ -y_{۱}\qquad -t_{۲}&=C \\ y_{۱}+۲y_{۲}-t_{۳}&=۱ \end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned} y_{۱}&= \\ y_{۲}&=۴ \end{aligned}$$

$C=۰$

۱۴ـ گزینه ۴ درست است.

قیمت سایه‌ای منبع چهارم برابر $\frac{}{۴}$ است و خرید از این منبع تا سقف $\frac{}{۴}$ مقرون به صرفه خواهد بود.

۱۵ـ گزینه ۱ درست است.

دقت شود که باید $W_{۱}\geq ۰$ و $W_{۲}\geq ۰$

$W=(۲,۲)$

گزینه ۱: $\Delta Z=W_{۱}\Delta b_{۱}=۲(-۳)=-۶$

گزینه ۲: $\Delta Z=W_{۲}\Delta b_{۲}=۲(-۲)=-۴$

گزینه ۳: $\Delta Z=W_{۲}\Delta b_{۲}=۲(+۳)=+۶$

گزینه ۴: $\Delta Z=W_{۱}\Delta b_{۱}=۲(-۲)=-۴$

۱۶ـ گزینه ۳ درست است.

$X_B=(X_{۱},S_{۲})$

$$B=\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{pmatrix} \qquad B^{-۱}=\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix} \;\rightarrow\; B^{-۱}b=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۶ \end{pmatrix}$$

چون این پایه موجه است پس جواب متناظر در دوگان بهینه می‌باشد.

$$Z_{۲}-C_{۲}=C_BB^{-۱}a_{۲}-C_{۲}=-\frac{}{۲}$$

$$Z_{S_{۱}}-C_{S_{۱}}=C_BB^{-۱}a_{S_{۱}}-C_{S_{۱}}=-\frac{}{۲}$$

$$Z_{S_{۲}}-C_{S_{۲}}=C_BB^{-۱}a_{S_{۲}}-C_{S_{۲}}=۰$$

پایه بهینه است پس پایه متناظر در دوگان شدنی می‌باشد.

۱۷ـ گزینه ۲ درست است.

$$\frac{\partial z}{\partial b_۱} = \left(C_B B^{-۱}\right)_۱ = \frac{}{۲}$$

۱۸ـ گزینه ۱ درست است.

$\frac{\partial x_۱}{\partial b_۱} = B^{-۱}$ مؤلفه موجود در سطر اول و ستون اول ماتریس $= \frac{}{۲}$

۱۹ـ گزینه ۲ درست است.

$$(y_۱, y_۲, y_۳) = (۲, ۰, ۳) \xrightarrow{\text{شرط مکمل زائد}} S_۱ = ۰ \quad S_۳ = ۰$$

$$۲x_۱ + ۵x_۲ = ۲۸$$
$$۲x_۱ - x_۲ = ۱۶$$
$$x_۲ =$$
$$x_۱ = ۹$$

۲۰ـ گزینه ۳ درست است.

$$Y_۱ = B^{-۱}a_۱ \qquad \begin{pmatrix} -۳ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \end{pmatrix} \rightarrow a_۱ = \begin{pmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$
$$Z_۱ - C_۱ = ۱۲$$
$$C_۱ = ۲$$

گزینه ۱ $(Z_۱ - C_۱)' = ۱۲ - \Delta C = ۱۲ - ۱۰ = ۲$

گزینه ۲ $(Z_۱ - C_۱)' = C_B B^{-۱} a_۱ - C_۱ = (۰, ۷)\begin{pmatrix} ۱-۵ \\ ۲ \end{pmatrix} - ۲ = ۱۲$

گزینه ۳ $(Z_۱ - C_۱)' = C_B B^{-۱} a_۱ - C_۱ = (۰, ۷)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲-۲ \end{pmatrix} - ۲ = -۲$

گزینه ۴ $(Z_۱ - C_۱)' = (۰, ۷)\begin{pmatrix} ۱-۳ \\ ۲ \end{pmatrix} - ۲ = ۱۲$

۱ - مسأله زیر را در نظر بگیرید که در آن u و v متغیرهای نامقید می‌باشند:

$$\text{Max}\ \theta = 3u$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.t.} & 3v = 1 & 3u \le 3v \\ & u \le 2v & 3u \le 4v \\ & 2u \le 3v & 2u \le 5v \\ & 4u \le 5v & 5u \le 8v \\ & 3u \le 6v & \end{array}$$

آنگاه θ در بهینگی کدام است؟

۱) یک　　۲) کمتر از یک　　۳) سه　　۴) دو

مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}\ Z = y$$

$$10x_1 + x_2 = 1$$

$$\begin{array}{llll} (A) & y \le 4x_1 + 3x_2 & y \le 7x_1 + 3x_2 & (D) \\ (B) & y \le 8x_1 + x_2 & y \le 4x_1 + 2x_2 & (E) \\ (C) & y \le 2x_1 + 4x_2 & y \le 10x_1 + x_2 & (F) \end{array}$$

اگر بدانیم که $x_1, x_2 \ge 0$, $y > 0$ می‌باشد آنگاه به ۲ سوال بعد پاسخ دهید:

۲ - مقدار بهینه Z کدام است؟

۱) یک　　۲) کمتر از یک　　۳) بین یک و دو　　۴) دو

۳-در بهینگی کدام یک از محدودیت‌ها فعال می‌باشند؟

۱) A,D　　۲) C　　۳) B,F　　۴) D

۴-جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	a	c	e	g
x_2	0	0	1	b	d	f	h
Z	1	0	0	i	j	k	

این جدول مربوط به یک مسأله حداکثرسازی می‌باشد. اگر $g = 0$, $h > 0$ باشد، جدول تباهیده خواهد شد. در صورتی که $a, c, e > 0$ باشند و جدول هم بهینه نباشد، آنگاه:

۱) تباهیدگی جدول در جدول بعد رفع نخواهد شد.

۲) تباهیدگی در جدول بعد رفع خواهد شد و مقدار تابع هدف تغییر می‌کند.

۳) تباهیدگی در جدول بعد رفع خواهد شد ولی مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۴) اظهار نظر با اطلاعات داده شده در جدول، برای جدول بعدی امکان پذیر نیست.

۵-مقدار تابع هدف بهینه مسأله زیر کدام است؟

$$\text{Min } Z=\sum_{j=۱}^{۱۳۹۲} j^{۲}x_j$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=۱}^{۱۳۹۲} x_j = ۱۹$$

$$۰ \le x_j \le ۱ \qquad j=۱,\dots,۱۳۹۲$$

۱) ۱۹۱ ۲) ۱۲۳۵ ۳) ۲۴۷۰ ۴) ۳۸۰

۶-چند وجهی $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b\ ,\ x\ge ۰\}$ با ماتریس رتبه سطری کامل A به طوری که در آن $A=(m\times n)$ است را در نظر بگیرید. حال یک برنامه ریزی خطی داریم که ناحیه شدنی آن P می‌باشد؛ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر چندین جواب بهینه داشتیم، آنگاه حداقل دو جواب پایه‌ای شدنی بهینه خواهیم داشت.

۲) به ازای هر جواب بهینه بیش از m متغیر مثبت وجود نخواهد داشت.

۳) همواره یک جواب بهینه پایه‌ای وجود دارد.

۴) اگر بیش از یک جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه جواب‌های بهینه نا شمار است.

۷-مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax \le ۰$$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_j \le ۱$$

$$x_j \ge ۰ \qquad j=۱,\dots,n$$

که در آن $x\in\mathbb{R}^n$ می‌باشد. در صورتی که تابع هدف مسأله به صورت $\text{Max } Z=\sum_{j=۱}^{n} x_j$ باشد، آنگاه مقدار بهینه تابع هدف کدام است؟

۱) یک ۲) صفر ۳) دو ۴) یا صفر است و یا یک

۸-در سؤال قبل اگر شرط $\sum_{j=۱}^{n} x_j \le ۱$ را حذف کنیم آنگاه حداکثر مقدار Z کدام خواهد بود؟

۱) صفر ۲) یک ۳) بی نهایت ۴) صفر یا بی نهایت

۹-دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را که جواب دارد در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+a_{۱۳}x_۳=b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲+a_{۲۳}x_۳=b_۲ \\ a_{۳۱}x_۱+a_{۳۲}x_۲+a_{۳۳}x_۳=b_۳ \end{cases}$$

در صورتی که معادله سوم یک معادله زائد باشد و در صورتی که $b_۳$ را تبدیل کنیم به $b_۳+\Delta$ که در آن $\Delta>۰$ و صحیح می‌باشد. آنگاه کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) چون محدودیت سوم زائد بود، بنابراین تغییر در سمت راست آن هیچ تأثیری به جواب نخواهد داشت.

۲) با این تغییر دستگاه دارای جواب نخواهد بود.

۳) دستگاه جواب بهینه یکتا پیدا خواهد کرد.

۴) دستگاه دارای بی شمار جواب صحیح خواهد شد.

۱۰- دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b \qquad A = (m \times n)\ ,\ \mathrm{Rank}(A) = m$$
$$x \geq ۰$$

حداکثر تعداد کل پایه‌های تباهیده با درجه تباهیدگی (۲) در این مسأله کدام است؟

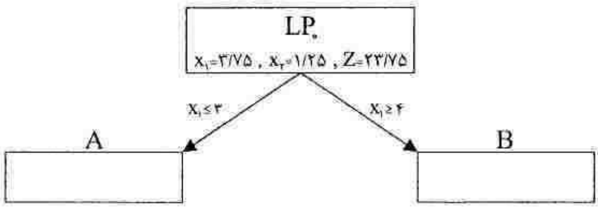
۱) $\binom{m}{۲}$ ۲) $\binom{n}{m}\binom{m}{۲}$ ۳) $۲\binom{n}{m}$ ۴) $\binom{n}{m}^{۲}$

■■■ مسأله برنامه ریزی عدد صحیح محض زیر را در نظر بگیرید:

$$LP_۰:\quad \mathrm{Max}\,Z = ۵x_۱ + ۴x_۲$$
$$\text{s.t.}\qquad x_۱ + x_۲ \leq ۵$$
$$۱۰x_۱ + ۶x_۲ \leq ۴۵$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰\ ,\ \text{عدد صحیح}$$

و به ۳ سوال زیر پاسخ دهید:

۱۱- اگر جواب بهینه $LP_۰$ آزاد شده برابر $x_۱ = ۳/۷۵\ ,\ x_۲ = ۱/۲۵$ با تابع هدف $Z = ۲۳/۷۵$ باشد، آنگاه جواب در شاخه A کدام است؟



۱) $x_۱ = ۲\ ,\ x_۲ = ۳$ ۲) $x_۱ = ۳\ ,\ x_۲ = ۲$ ۳) $x_۱ = ۱\ ,\ x_۲ = ۳$ ۴) $x_۱ = ۲\ ,\ x_۲ = ۲$

۱۲-در صورتی که داشته باشیم $(x_۱ \geq ۴) + (x_۲ \geq ۱)$+فضای آزاد شده $LP_۰$، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) جواب بهینه این شاخه $x_۱ = ۴/۵\ ,\ x_۲ = ۰$ است.

۲) جواب بهینه این شاخه $x_۱ = ۳\ ,\ x_۲ = ۲$ است.

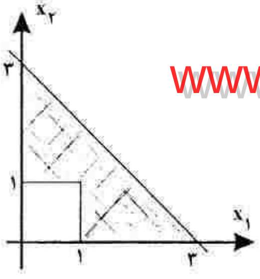
۳) جواب بهینه این شاخه $x_۱ = ۴\ ,\ x_۲ = ۰/۸۳$ است.

۴) مسأله ناموجه می‌باشد.

۱۳-نقطه بهینه مسأله کدام است؟

۱) $x_۱ = ۳\ ,\ x_۲ = ۲$ ۲) $x_۱ = ۴\ ,\ x_۲ = ۰$ ۳) $x_۱ = ۴\ ,\ x_۲ = ۲$ ۴) $x_۱ = ۴\ ,\ x_۲ = ۴$

۱۴-شکل غیر محدب زیر را در نظر بگیرید:



حداقل تعداد محدودیت‌هایی که باید به صورت محدودیت‌های این - یا - آن مدل‌سازی کرد چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵-شرکتی در مرحله تشکیل یک کمیته برای رسیدگی به شکایات دانشجویان است. طبق دستور دریافت شده از اداره کـل، کمیته باید شامل حداقل یک زن، یک مرد، یک دانشجو، یک مدیر و یک عضو هیأت علمی باشد. ۱۰ نفر برای این منظـور کاندید شده‌اند. (برای سادگی با حروف a تا j مشخص شده‌اند.) ترکیب افراد مختلف طبق جدول زیر می‌باشد:

افراد	گروه
a,b,c,d,e	مردان
f,g,h,i,j	زنان
a,b,c,j	دانشجویان
e,f	مدیران
d,g,h,i	هیأت علمی

قرار است کوچک‌ترین کمیته با نمایندگی از ۵ گروه تشکیل شود. مدل این مسأله به صورت یک مسأله دودویی دارای چند محدودیت می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۶-در سوال قبل، چند متغیر دودویی خواهیم داشت؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۱۲

۱۷-تابع $f(x) = ۲x_۱^۲ + ۲x_۲^۲ + ۳x_۳^۲ + ۲x_۱x_۲ + ۲x_۲x_۳ + x_۱ - ۳x_۲ - ۵x_۳$:

۱) یک تابع کوآدراتیک و مقعر است.
۲) یک تابع غیر کوآدراتیک و مقعر است.
۳) یک تابع کوآدراتیک و محدب است.
۴) یک تابع غیر کوآدراتیک و محدب است.

۱۸-حداکثر مقدار تابع هدف در مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -(۲x_۱ - ۵)^۲ - (۲x_۲ - ۱)^۲ \\ \text{s.t.} \quad & x_۱ + ۲x_۲ \le ۲ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۲- ۴) ۲۵-

۱۹-در تابع $f(x_۱, x_۲, x_۳) = ۲x_۱x_۲x_۳ - ۴x_۱x_۳ - ۲x_۲x_۳ + x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ - ۲x_۱ - ۴x_۲ + ۴x_۳$ کدامیک از نقاط زیر نقطه ساکن برای مسأله نمی‌باشد؟

۱) $(۲,۳,-۱)$ ۲) $(۲,۱,۱)$ ۳) $(۱,۲,۰)$ ۴) $(۱,۱,۱)$

۲۰- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(x) \\ &g_۱(x) \ge ۰ \\ &g_۲(x) = ۰ \\ &g_۳(x) \le ۰ \end{aligned}$$

اگر به ترتیب $\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳$ را ضرایب لاگرانژ به ترتیب محدودیت‌های اول، دوم و سوم بگیریم، آنگـاه کـدام گزینـه صحیح است؟

۱) $\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳ \ge ۰$
۲) $\lambda_۱ \ge ۰ \ , \ \lambda_۲, \lambda_۳ \le ۰$
۳) $\lambda_۱, \lambda_۳ \ge ۰ \ , \ \lambda_۲$ آزاد
۴) $\lambda_۱ \le ۰ \ , \ \lambda_۳ \ge ۰ \ , \ \lambda_۲$ آزاد

پاسخ

۱ - گزینه «۱» صحیح است.

قرار می‌دهیم $v = \frac{۱}{۳}$ و آن‌را در تمام محدودیت‌ها قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{lll} u \le \frac{۲}{۳} & \left.\begin{array}{l} ۳u \le \frac{۳}{۳} \\ ۳u \le \frac{۴}{۳} \\ ۲u \le \frac{۵}{۳} \\ ۵u \le \frac{۸}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u \le \frac{۲}{۳} \\ u \le \frac{۱}{۲} \\ u \le \frac{۵}{۱۲} \\ u \le \frac{۲}{۳} \end{array} & \begin{array}{l} u \le \frac{۱}{۳} \\ u \le \frac{۴}{۹} \\ u \le \frac{۵}{۶} \\ u \le \frac{۸}{۱۵} \end{array} \\ ۲u \le \frac{۳}{۳} & & \\ ۴u \le \frac{۵}{۳} & & \\ ۳u \le \frac{۶}{۳} & & \end{array}$$

که از رابطه‌های فوق نتیجه می‌شود: $u^* = \frac{۱}{۳} \quad , \quad \theta^* = ۳ \times \frac{۱}{۳} = ۱$

۲- گزینه «۱» صحیح است.

طرفین رابطه را تقسیم بر $y\neq 0$ می‌کنیم و $\text{Max}\,y$ را می‌نویسیم $\text{Min}\frac{1}{y}$

$$\text{Min}\frac{1}{y}$$

$$10\frac{x_1}{y}+\frac{x_2}{y}=\frac{1}{y}$$

$$4\frac{x_1}{y}+3\frac{x_2}{y}\geq 1 \qquad 7\frac{x_1}{y}+3\frac{x_2}{y}\geq 1$$

$$8\frac{x_1}{y}+\frac{x_2}{y}\geq 1 \qquad 4\frac{x_1}{y}+2\frac{x_2}{y}\geq 1$$

$$2\frac{x_1}{y}+4\frac{x_2}{y}\geq 1 \qquad 10\frac{x_1}{y}+\frac{x_2}{y}\geq 1$$

اگر بگیریم $\frac{x_1}{y}=t_1$, $\frac{x_2}{y}=t_2$ و قرار دهیم $\frac{1}{y}=10t_1+t_2$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\ 10t_1+t_2\\
&4t_1+3t_2\geq 1 \quad (A)\\
&8t_1+t_2\geq 1 \quad (B)\\
&2t_1+4t_2\geq 1 \quad (C)\\
&7t_1+3t_2\geq 1 \quad (D)\\
&4t_1+2t_2\geq 1 \quad (E)\\
&10t_1+t_2\geq 1 \quad (F)\\
&t_1,t_2\geq 0
\end{aligned}$$

حال ملاحظه می‌کنید که محدودیت آخر موازی تابع هدف می‌باشد و $t_2=1\,,\,t_1=0$ یک جواب شدنی می‌باشد که $10t_1+t_2=1$ می‌شود و چون حداقل مقدار تابع هدف یک می‌باشد زیرا $10t_1+t_2\geq 1$ است بنابراین $\frac{1}{y}=1\ \Rightarrow y=1$ خواهد شد؛ که نشان می هد $y^*=1$ است.

۳- گزینه «۳» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل در بهینگی محدودیت‌های مربوط به B و F در نقطه $t_2=1\ ,\ t_1=0$ فعال خواهند شد یعنی آن‌ها تساوی می‌شوند.

۴- گزینه «۱» صحیح است.

از آنجایی که جدول بهینه نمی‌باشد پس یکی از متغیرهای x_3 یا x_4 یا x_5 وارد شونده می‌باشند:

$0=$ تست مینیمم $\Rightarrow x_3$ وارد شونده

$0=$ تست مینیمم $\Rightarrow x_4$ وارد شونده

$0=$ تست مینیمم $\Rightarrow x_5$ وارد شونده

۵- گزینه «۳» صحیح است.

از آنجایی که تابع هدف حداقل سازی است پس بهتر است x_1 تا x_{19} را برابر یک قرار دهیم و بقیه x_j ها را صفر قرار دهیم تا محدودیت $\sum_j x_j=19$ برآورده شود که تابع هدف به صورت

$$Z=\sum_{j=1}^{19} j^2=\frac{19(20)(39)}{6}=2470$$

تبدیل خواهد شد که این عدد برابر است با ۲۴۷۰.

توجه!!: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۶ - گزینه «۴» صحیح است.

بررسی تک تک گزینه‌ها:

گزینه (۱): اگر چندین جواب بهینه داشته باشیم قطعاًجواب بهینه چندگانه داریم و اگر مجموعه جواب بهینه نیم خط باشد آنگاه فقط یک جواب پایه‌ای (نقطه گوشه‌ای) بهینه داریم.

گزینه (۲): اگر جواب بهینه چندگانه داشته باشیم می‌توانیم بیش از m مؤلفه اکیداًمثبت داشته باشیم.

گزینه (۳): اگر جواب نامتناهی شود اصلاًهیچ نقطه بهینه‌ای موجود نمی‌باشد.

گزینه (۴): اگر بیش از یک نقطه بهینه داشته باشیم، بی نهایت نقطه بهینه داریم.

۷- گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که شکل حاصل از $Ax \le ۰$ یک مخروط می‌باشد بنابراین تنها ۲ حالت وجود خواهد داشت: یا شکل حاصل از آن فقط مبدأ مختصات می‌باشد که در شرط $\sum_j x_j \le ۱$ هم صدق می‌کند و مقدار تابع هدف حتماً برابر صفر خواهد شد و یا حداکثر مقدار تابع هدف همان یک خواهد بود زیرا $Z = \sum_j x_j \le ۱$ می‌باشد.

۸- گزینه «۴» صحیح است.

به توضیحات سوال قبل دقت شود.

۹- گزینه «۲» صحیح است.

از آنجایی که محدودیت سوم یک معادله زائد است، پس از تحویل ماتریس ضرایب و دستگاه داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & a & \bar{b}_۱ \\ ۰ & ۱ & b & \bar{b}_۲ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \Rightarrow \text{سطر سوم زائد است}$$

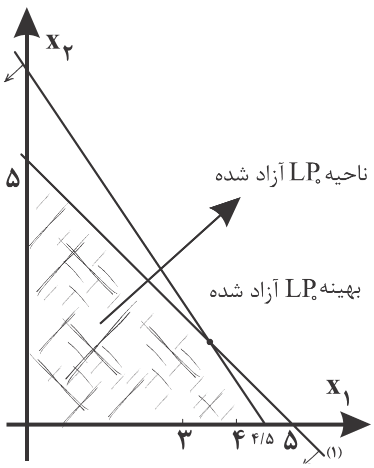
حال اگر $b_۳ \to b_۳ + \Delta$ آنگاه پس از تبدیل مقدماتی داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & a & \bar{b}_۱ \\ ۰ & ۱ & b & \bar{b}_۲ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ & \Delta > ۰ \end{array}\right] \Rightarrow \text{دستگاه جواب ندارد}$$

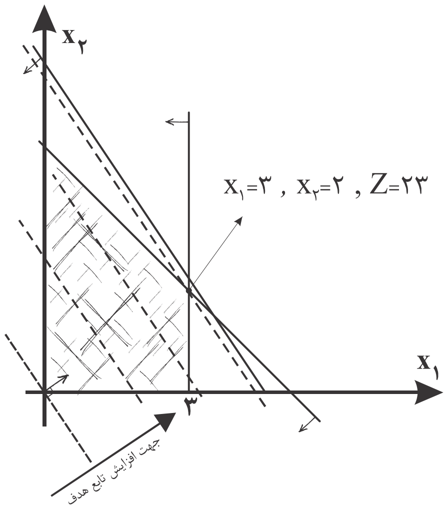
۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

حداکثر تعداد کل پایه‌ها $\binom{n}{m}$ می‌باشد و کل حالات تباهیدگی با درجه (۲) در یک پایه برابر است با $\binom{m}{۲}$ پس کل حالات تباهیدگی با درجه تباهیدگی (۲) برابر $\binom{m}{۲}\binom{n}{m}$ می‌باشد.

۱۱- گزینه «۲» صحیح است.



پس از افزودن محدودیت $x_۱ \le ۳$ خواهیم داشت:



۱۲- گزینه «۴» صحیح است.

ناحیه شدنی $LP_۰$ آزاد شده را در نظر بگیرید. محدودیت‌های $x_۲ \geq ۱$, $x_۱ \geq ۴$ را به آن اضافه می‌کنیم. واضح است که این محدودیت‌ها با محدودیت دوم مسأله یعنی $۱۰x_۱ + ۶x_۲ \leq ۴۵$ در تناقض است.

$$x_۱ \geq ۴ \;\Rightarrow\; ۱۰x_۱ \geq ۴۰$$

$$x_۲ \geq ۱ \;\Rightarrow\; ۶x_۲ \geq ۶$$

$$\text{جمع} \qquad \overline{۱۰x_۱ + ۶x_۲ \geq ۴۶}$$

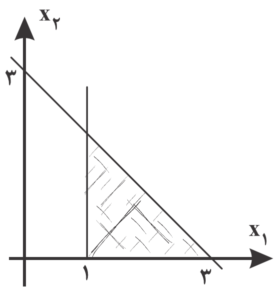
که با فرض $۱۰x_۱ + ۶x_۲ \leq ۴۵$ (قید دوم) در تناقض می‌باشد. توجه شود که می‌توانیم با ترسیم مسأله هم به این موضوع دست پیدا کنیم.

۱۳- گزینه «۱» صحیح است.

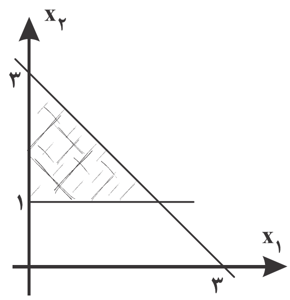
از آنجایی که حداکثر مقدار $Z = ۲۳/۷۵$ می‌باشد و مقدار تابع هدف در شاخه A در ۲ سوال قبل $Z = ۲۳$ می‌باشد که این تابع مربوط به یک جواب صحیح می‌باشد و از آنجایی که بین ۲۳ تا ۲۳/۷۵ هیچ مقدار صحیح برای تابع هدف بهتر از ۲۳ وجود ندارد، بنابراین جواب بهینه $x_۱^* = ۳$, $x_۲^* = ۲$ با تابع هدف $Z^* = ۲۳$ می‌باشد. توجه شود که ضرایب تابع هدف صحیح می‌باشد و با صحیح شدن متغیرها، تابع هدف هم صحیح خواهد شد.

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

$$S_۱ : \begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ x_۱ \geq ۱ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{cases}$$



$$S_۲ : \begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ x_۲ \geq ۱ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{cases}$$



که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ & \left.\begin{aligned} x_۱ &\geq ۱ - My \\ x_۲ &\geq ۱ - M(۱-y) \end{aligned}\right\} \text{دو محدودیت این - یا - آن دارد.} \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰ \qquad y = \{۰, ۱\} \end{aligned}$$

۱۵- گزینه «۲» صحیح است.

$y_۱ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد a

$y_۲ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد b

$y_۳ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد c

$y_۴ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد d

$y_۵ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد e

$y_۶ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد f

$y_۷ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد g

$y_۸ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد h

$y_۹ = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد i

$y_{۱۰} = ۰ \text{ or } ۱ \Rightarrow$ فرد j

$$\text{Min} \sum_{i=۱}^{۱۰} y_i$$

$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ \geq ۱$ ⇐ محدودیت وجود حداقل یک مرد

$y_۶ + y_۷ + y_۸ + y_۹ + y_{۱۰} \geq ۱$ ⇐ محدودیت وجود حداقل یک زن

$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_{۱۰} \geq ۱$ ⇐ محدودیت وجود حداقل یک دانشجو

$y_۵ + y_۶ \geq ۱$ ⇐ محدودیت وجود حداقل یک مدیر

$y_۴ + y_۷ + y_۸ + y_۹ \geq ۱$ ⇐ محدودیت وجود حداقل یک هیأت علمی

ملاحظه می‌شود که مسأله دارای ۵ محدودیت می‌باشد.

۱۶- گزینه «۱» صحیح است.

مسأله دارای ۱۰ متغیر صفر و یک می‌باشد یعنی برای هر فرد یک متغیر صفر و یک.

۱۷- گزینه «۳» صحیح است.

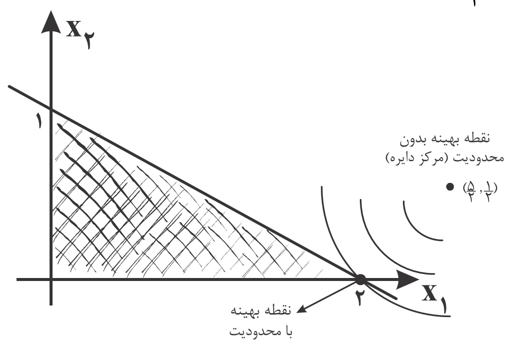
از آنجایی که در تابع هدف $x_j^۲$, $(i \neq j)x_i x_j$ داریم بنابراین تابع مسأله یک تابع کوآدراتیک می‌باشد. برای تشخیص محدب یا مقعر بودن باید H_x را بدست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_۱} = ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۱ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_۲} = ۴x_۲ + ۲x_۱ + ۲x_۳ - ۳ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_۳} = ۶x_۳ + ۲x_۲ - ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow H_x = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

ماتریس H_x معین مثبت می‌باشد که نشان دهنده آن است که تابع محدب است.

۱۸- گزینه «۳» صحیح است.

نقطه بهینه بدون محدودیت $x_۱ = \frac{۵}{۲}$, $x_۲ = \frac{۱}{۲}$ مرکز دایره تابع هدف می‌باشد:



۱۹- گزینه «۴» صحیح است.

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱} = ۲x_۲x_۳ - ۴x_۳ + ۲x_۱ - ۲ = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_۲} = ۲x_۱x_۳ - ۲x_۳ + ۲x_۲ - ۴ = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_۳} = ۲x_۱x_۲ - ۴x_۱ - ۲x_۲ + ۲x_۳ + ۴ = ۰$$

نقاط موجود در گزینه‌ها باید در شرط لازم بهینگی فوق صدق کند. در صورتی که صدق کرد این نقطه را نقطه ساکن می‌نامیم.

۲۰- گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{array}{ll} \text{Max } f(x) & \\ \quad g_۱(x) \geq ۰ & \lambda_۱ \\ \quad g_۲(x) = ۰ & \lambda_۲ \\ \quad g_۳(x) \leq ۰ & \lambda_۳ \end{array}$$

چون تابع به صورت Max و قید اول ≥ ۰ می‌باشد، پس $\lambda_۱ \leq ۰$ است و چون قید دوم $= ۰$ است بنابراین $\lambda_۲$ آزاد در علامت و چون قید سوم ≤ ۰ است بنابراین $\lambda_۳ \geq ۰$ می‌باشد.

۱ - جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید:

	$d_1=5$	$d\ =15$	$d_3=15$	$d_4=15$
$s_1=15$	۱۰	۲	۲۰	۱۱
$s_2=25$	۱۲	۷	۹	۲۰
$s_3=10$	۴	۱۴	۱۶	۱۸

اگر مقدار تابع هدف جدول حاصل از گوشه شمالغربی را $\bar{Z}$ و جدول حاصل از کم‌ترین هزینه ماتریس را $\hat{Z}$ بنـامیم، $\bar{Z}-\hat{Z}$ چقدر است؟

۱) ۴۵   ۲) ۵۴   ۳) ۸۵   ۴) ۵۸

۲-در جدول سوال قبل اولین خانه‌ای که با روش وگل پر خواهد شد، کدام است؟

۱) x_{34} ۲) x_{22} ۳) x_{32} ۴) x_{31}

۳-در ۲ سوال قبل اگر جدول را با گوشه شمالغربی پر کنیم، متغیر وارد شونده کدام است؟

۱) x_{31} ۲) x_{32} ۳) x_{21} ۴) x_{13}

۴-در سوال قبل با ورود متغیر به پایه میزان تغییر تابع هدف چقدر خواهد بود؟

۱) ۴۵   ۲) ۵۰   ۳) ۴۵-   ۴) ۵۰-

۵-مسأله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min}\sum_{i}\sum_{j}c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad \forall i,j$$

کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) $\sum_{i}a_i\le\sum_{j}b_j$ ۲) $\sum_{i}a_i=\sum_{j}b_j$

۳) $\sum_{i}a_i\ge\sum_{j}b_j$ ۴) $\sum_{i}a_i-\sum_{j}b_j=1$

۶-جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید:

	۱۰	۲۰	۲۰
۱۰	۱۰		
۴۰		۲۰	۲۰

جدول صفحه قبل تباهیده است. فرض کنید مضارب مربوط به جدول برابر $u_1=1$, $u_2=-1$, $v_1=2$, $v_2=2$ و $v_3=5$ که هزینه‌های متغیرهای صفر توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c_{ij}=i+j\theta \qquad -\infty<\theta<+\infty$$

مقدار تابع هدف چقدر است؟

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۶۰

۷ - در سوال قبل، اگر خانه x_{12} هم پایه ای باشد، θ چقدر است؟

۱) $\theta=1$ ۲) $\theta=3$ ۳) $\theta=2$ ۴) $\theta=4$

جدول سیمپلکس دوگان زیر را در نظر بگیرید:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	0	1	0	a	c	-3
x_2	0	0	1	b	d	4
Z	1	0	0	-2	-3	

این جدول مربوط به یک مسأله حداقل سازی می‌باشد. به ۲ سوال بعد پاسخ دهید.

۸ -اگر x_4 متغیر واردشونده باشد و میزان تغییر تابع هدف برابر ۹ باشد، آنگاه c کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۱+ ۳) ۴ ۴) ۱-

۹ -اگر $a,c\geq 0$ باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

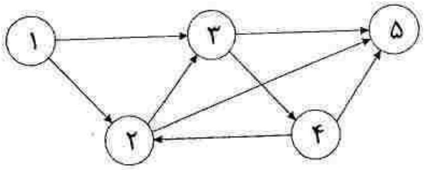
۱) مسأله اولیه ناموجه می‌باشد. ۲) مسأله ثانویه جواب نامتناهی دارد.

۳) مسأله ثانویه ناموجه است. ۴) دوگان موجه می‌باشد.

۱۰ - با کدام یک از روش‌های زیر می‌توان مسأله تخصیص را حل کرد؟

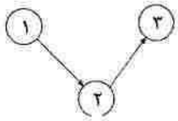
۱) برنامه ریزی خطی ۲) مدل حمل و نقل ۳) روش انشعاب و تحدید ۴) تمام موارد

۱۱- گراف زیر را در نظر بگیرید:

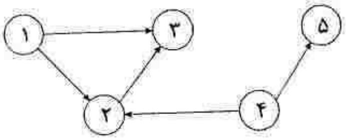


کدام یک از اشکال زیر یک درخت فراگیر (spanning tree) برای شکل فوق می‌باشد؟

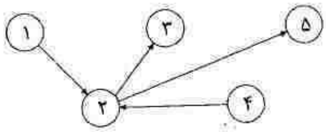
۱)



۲)

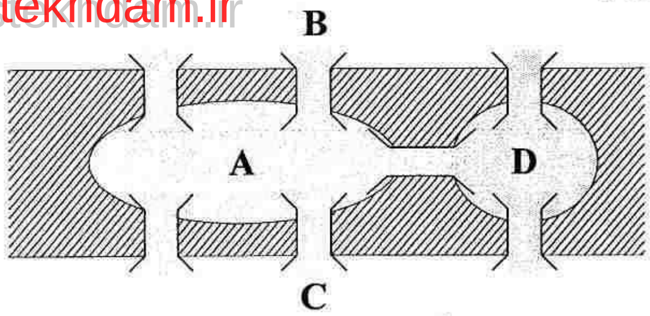


۳)



۴) گزینه‌های ۱ و ۳

۱۲- رودخانه‌ای که کینگسبرگ را به ۴ قسمت A، B، C، D تقسیم می‌کند را در نظر بگیرید، این قسمت‌های شهر با ۷ پـل به یکدیگر وصل می‌شوند:



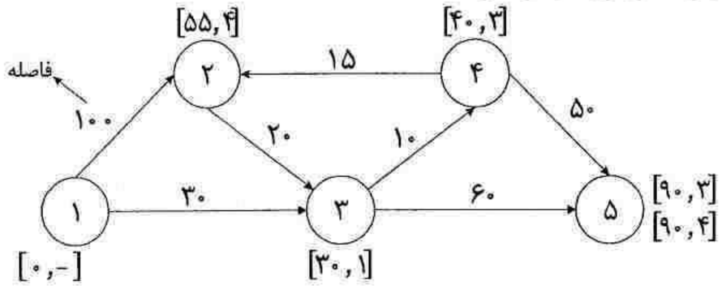
گراف مربوط به این شهر برای مردم ساکن این شهر که بتوانند به قسمت‌های مختلف شهر دسترسی داشته باشند، چند کمان و چند گره دارد؟

۱) ۴ گره و ۴ کمان ۲) ۳ گره و ۷ کمان ۳) ۷ گره و ۴ کمان ۴) ۴ گره و ۷ کمان

۱۳- در سوال قبل مجموع درجه گره‌ها چند می‌باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۴

۱۴- مسأله کوتاه‌ترین مسیر زیر را در نظر بگیرید:



اعدادی که روی هر کدام از کمان‌ها نوشته شده است، نمایانگر مطلب زیر می‌باشد:

[شماره گره قبلی ,کوتاه‌ترین فاصله گره ۱ تا گره مورد نظر] = [a,b]

کوتاه‌ترین فاصله گره ۱ تا ۲ کدام است؟

۱) ۲→۱ ۲) ۲→۴→۳→۱

۳) ۲→۳→۱ ۴) ۵→۳→۱

۱۵- در سوال قبل برای حل با الگوریتم دایجسترا تعداد مراحل الگوریتم چقدر است؟

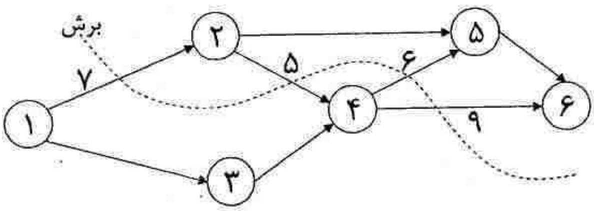
۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۶

۱۶ - در ۲ سوال قبل محدودیت مربوط به گره ۵ در مدل خطی آن کدام است؟

۱) $X_{۴۵} + X_{۳۵} = ۱$ ۲) $-X_{۴۵} - X_{۳۵} = ۱$ ۳) $X_{۴۵} - X_{۳۵} = -۱$ ۴) $-X_{۴۵} + X_{۳۵} = -۱$

۱۷-در شکل زیر کدام صحیح است؟



۱) حداکثر جریان ۲۲ می‌باشد.

۲) حداکثر جریان از ۲۲ بیشتر نمی‌باشد.

۳) حداقل جریان ۲۷ می‌باشد.

۴) حداکثر جریان از ۲۷ بیشتر نمی‌باشد.

۱۸-در یک بازی دو نفره - دو انگشتی، هر بازیکن یک یا دو انگشت را نشان می‌دهد و به طور هم‌زمان تعداد انگشتان نشان داده توسط حریف را حدس می‌زند. بازیکنی که حدس صحیح را ارائه کند مبلغی معادل مجموع تعداد انگشتان نمایش داده شده دریافت می‌نماید؛ در غیر این صورت بازی بدون امتیاز می‌باشد. مسأله را به صورت یک بازی دو نفره مجموع صفر فرموله کرده‌ایم. امید برد بازیکن A چقدر است اگر B یک انگشت را نشان دهد و دو انگشت طرف مقابلش یعنی A را حدس بزند، کدام است؟

۱) $2x_1 - 3x_4$

۲) $-2x_1 + 3x_4$

۳) $2x_1 - 3x_2$

۴) $-2x_1 + 3x_2$

۱۹-در سوال قبل تعداد استراتژی‌های هر کدام از بازیکنان چقدر است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۳

۲۰- در یک مسأله Game Theory برنامه ریزی خطی مربوط به بازیکن A را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } M\\
&3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \ge M\\
&-x_1 + 4x_2 - 6x_3 \ge M\\
&-3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge M\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

امید برد بازیکن A نسبت به بازی اول B کدام است؟

۱) $3x_1 - 2x_2 - 5x_3$

۲) $3x_1 - x_2 - 3x_3$

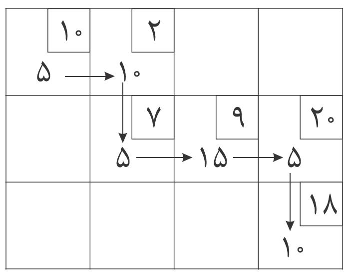
۳) $-x_1 + 4x_2 - 6x_3$

۴) قابل تشخیص نیست.

پاسخ

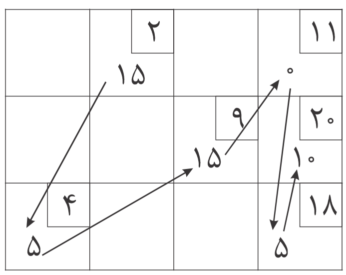
۱ -گزینه «۱» صحیح است.

در صورتی که جدول را با گوشه شمالغربی پر کنیم، داریم:



$$\bar{Z}=10\times5+2\times10+7\times5+9\times15+20\times5+18\times10=520$$

و در صورتی که جدول را با کم‌ترین هزینه پر کنیم، داریم:



$$\hat{Z}=۲\times۱۵+۴\times۵+۹\times۱۵+۱۱\times۰+۲۰\times۱۰+۱۸\times۵=۴۷۵$$

پس خواهیم داشت:

$$\bar{Z}-\hat{Z}=۴۵$$

۲- گزینه «۴» صحیح است.

				جریمه
۱۰	۲	۲۰	۱۱	۱۰−۲=۸
۱۲	۷	۹	۲۰	۹−۷=۲
۴ (۵)	۱۴	۱۶	۱۸	بیشترین جریمه = $\boxed{۱۰}$=۱۴−۴
۱۰−۴=۶	۷−۲=۵	۱۶−۹=۷	۱۸−۱۱=۷	

کمترین هزینه

۳- گزینه «۱» صحیح است.

۱۰ (۵)	۲ (۱۰)	۲۰	۱۱
۱۲	۷ (۵)	۹ (۱۵)	۲۰ (۵)
۴	۱۴	۱۶	۱۸ (۱۰)

با استفاده از روش چرخشی $z_{ij}-c_{ij}$ ها را بدست می‌آوریم:

$$z_{۱۳}-c_{۱۳}=-۲۰+۹-۷+۲=-۱۶$$
$$z_{۱۴}-c_{۱۴}=-۱۱+۲۰-۷+۲=۴$$
$$z_{۲۱}-c_{۲۱}=-۱۲+۷-۲+۱۰=۳$$
$$z_{۳۱}-c_{۳۱}=-۴+۱۸-۲۰+۷-۲+۱۰=۹\Rightarrow \text{متغیر وارد شونده}$$
$$z_{۳۲}-c_{۳۲}=-۱۴+۱۸-۲۰+۷=-۹$$
$$z_{۳۳}-c_{۳۳}=-۱۶+۱۸-۲۰+۹=-۹$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\Delta Z=-(۹)(۵)=-۴۵$$

۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}\le a_i \Rightarrow \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}\le\sum_{i=۱}^{m}a_i$$
$$\sum_{i=۱}^{m}x_{ij}=b_j \Rightarrow \sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m}x_{ij}=\sum_{j=۱}^{n}b_j$$

از دو رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$\sum_{j=۱}^{n}b_j\le\sum_{i=۱}^{m}a_i$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\text{بهینه}=Z=\sum_i s_iu_i+\sum_j d_jv_j=۱۰\times۱+۴۰\times(-۱)+۱۰\times۲+۲۰\times۲+۲۰\times۵=۱۳۰$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

چون متغیر $x_{۱۲}$ هم متغیر پایه ای چهارم جدول در نظر گرفته شده است بنابراین $z_{۱۲}-c_{۱۲}=۰$ است.

$$z_{۱۲}-c_{۱۲}=u_۱+v_۲-c_{۱۲}=۰$$
$$\Rightarrow ۱+۲-(۱+۲\theta)=۰$$
$$\Rightarrow ۱+۲-۱-۲\theta=۰ \Rightarrow \theta=۱$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

با توجه به آنکه در این جدول متغیر $x_۱$ خارج شونده از پایه می‌باشد با ورود $x_۴$ به پایه تست Min نسبت برابر $\frac{۳}{c}$ می‌باشد (DS مسأله حل می‌شود.)

$$\Delta Z = -(-۳)\left(\frac{-۳}{c}\right) = ۹ \Rightarrow c = -۱$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

چون $a, c \geq ۰$ می‌باشند، پس سطر اول جدول تمام عناصرش بزرگ‌تر مساوی صفر بوده و سمت راست آن منفی است؛ پس اولیه ناموجه می‌باشد:

$$\boxed{\geqslant ۰} = \boxed{< ۰}$$

و چون DS حل می‌شود، دوگان همواره موجه است. (زیرا جدول اولیه بهینه است) پس دوگان جواب نامتناهی دارد.

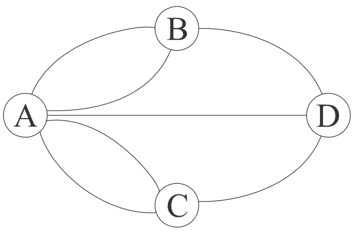
۱۰-گزینه «۴» صحیح است.

مسأله تخصیص یک مسأله LP و یا می‌تواند ILP باشد. همچنین این مسأله یک حالت خاص مدل حمل و نقل نیز می‌باشد.

۱۱-گزینه «۳» صحیح است.

درخت فراگیر درختی می‌باشد که تمام گره‌ها را هم در بر می‌گیرد.

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.



توجه شود که هر منطقه نشان دهنده یک گره و هر پل نشان دهنده یک کمان می‌باشد که هر کدام از مناطق را به یکدیگر وصل می‌کند.

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

درجه هر کدام از گره‌های B، C و D، ۳ می‌باشد و درجه گره A، ۵ می‌باشد بنابراین مجموع درجه گره‌ها ۱۴ است.

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

اعدادی که روی گره ۲ نوشته شده $[۵۵, ۴]$ می‌باشد یعنی کوتاه‌ترین فاصله از گره ۱ به ۲، ۵۵ می‌باشد و برای رسیدن به گره ۲ از ۴ آمده‌ایم و برای رسیدن به ۴ از ۳ و سپس ۱ آمده‌ایم.

۱۵- گزینه «۱» صحیح است.

چون تعداد گره‌ها ۵ می‌باشد، پس تعداد تکرارهای الگوریتم ۴=۱-۵ می‌باشد.

۱۶- گزینه «۱» صحیح است.

محدودیت مربوط به گره ۵ که گره پایانی می‌باشد $-x_{۳۵} - x_{۴۵} = -۱$ یا $+x_{۳۵} + x_{۴۵} = +۱$ است.

۱۷- گزینه «۲» صحیح است.

ظرفیت برش مورد نظر ۲۲ می‌باشد:

$$X = \{۱, ۳, ۴\}$$
$$\overline{X} = \{۲, ۵, ۶\}$$
$$U_{\text{برش}} = \sum_{\substack{i \in x \\ j \in \overline{x}}} u_{ij} = u_{۱۲} + u_{۴۵} + u_{۴۶} = ۷ + ۶ + ۹ = ۲۲$$

پس حداکثر جریان از ۲۲ بیشتر نخواهد شد.

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

انگشتی که حدس می‌زند

انگشتی که نشان می‌دهد

A \ B	[۱,۱]	[۲,۱]	[۱,۲]	[۲,۲]
[۱,۱]	۰	-۳	+۲	۰
[۲,۱]	۳	۰	۰	-۴
[۱,۲]	-۲	۰	۰	+۳
[۲,۲]	۰	+۴	-۳	۰

امید برد بازیکن A $\rightarrow ۲x_۱ - ۳x_۴$

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل گزینه ۲ صحیح است.

۲۰-گزینه «۱» صحیح است.

با توجه به مدل خطی مسأله امید برد بازیکن A به صورت:

$$E_۱^A = ۳x_۱ - ۲x_۲ - ۵x_۳$$

۱ - مسأله حداکثر سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\
& x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le 40 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

متغیر مصنوعی x_4 و متغیر کمکی x_5 را به مسأله داده تا مسأله را با روش M بزرگ حل کنیم. پس از قرار دادن M=۱۰۰ و حل آن توسط سیمپلکس، جدول بهینه به صورت زیر می‌باشد:

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solution
Z	0	23	7	105	0	150
x_1	1	5	2	1	0	30
x_5	0	−10	−8	−1	1	10

مقدار متغیرهای دوگان کدام است؟

۱) $(w_1, w_2) = (105, 0)$
۲) $(w_1, w_2) = (-105, 0)$
۳) $(w_1, w_2) = (5, 0)$
۴) $(w_1, w_2) = (-5, 0)$

۲ -در سوال قبل اگر بخواهیم موجودی انبار دوم را به صفر برسانیم ....

۱) باید تولید محصول دوم را شروع کنیم.
۲) باید تولید محصول سوم را شروع کنیم.
۳) باید تولید محصول اول کاهش یابد.
۴) چنین حالتی امکان پذیر نمی باشد.

۳-مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

جدول بهینه آن به صورت زیر می‌باشد:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	1	2	0	0	3	16
x_3	0	0.75	0	1	−0.25	2
x_2	0	0.25	1	0	0.25	2

مقدار متغیر اول دوگان کدام است؟

۱) صفر
۲) ۴
۳) ۳
۴) -۴

۴-در سوال قبل ضریب x_1 در تابع هدف چقدر باشد تا تولید آن صرفه اقتصادی پیدا کند؟

۱) حداقل ۴
۲) حداکثر ۴
۳) حداقل ۳
۴) حداکثر ۳

مسأله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le b_1$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

با یک b_2, b_1 خاص جدول بهینه به صورت زیر می‌باشد:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S
x_1	0	1	b	2	1	0	30
x_5	0	0	c	−8	−1	1	10
Z	1	0	a	7	d	e	150

به ۳ سوال بعد پاسخ دهید:

۵- اگر b_2 را به $b_2 + \Delta b_2$ تغییر دهیم، بازه تغییرات Δb_2 چقدر باشد که جدول موجه بماند؟

۱) $0 \le \Delta b_2 \le 10$
۲) $\Delta b_2 \ge 10$
۳) $\Delta b_2 \ge -10$
۴) $\Delta b_2 \le 10$

۶- اگر c_1 را به $c_1 + \Delta c_1$ تغییر دهیم، Δc_1 چقدر باشد که جدول بهینگی خودش را حفظ کند؟

۱) $\Delta c_1 \ge -6$
۲) $\Delta c_1 \ge \frac{-23}{5}$
۳) $\Delta c_1 \ge -5$
۴) $\Delta c_1 \ge \frac{-7}{2}$

۷- $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$
$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$
$$x_1 + 4x_2 \le 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

جدول بهینه آن به صورت زیر می‌باشد:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R.H.S
Z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	−2	1	1	20

به ۲ سوال بعد پاسخ دهید:

۸- اگر محدودیت جدید $2x_1+3x_2+x_3\le 500$ به مسأله اضافه شود، جواب بهینه جدید ....

۱) تغییری نمی‌کند.　　۲) $x_3=230$　$x_2=90$　$x_1=0$

۳) $x_3=200$　$x_2=100$　$x_1=0$　　۴) $x_3=500$　$x_2=0$　$x_1=0$

۹- اگر تابع هدف به صورت $Z=2x_1+3x_2+4x_3$ باشد، متغیرهای جدید دوگان در جدول جاری کدام است؟

۱) $(1,2,0)$　　۲) $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},0\right)$　　۳) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4},0\right)$　　۴) $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{1}{2}\right)$

۱۰- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max}\quad & b^t y - Cx \\ & Ax \ge b \\ & -A^t y \ge -C^t \\ & x\ge 0,\ y\ge 0 \end{aligned}$$

کدام گزینه در مورد آن صحیح می‌باشد؟

۱) مسأله همواره ناموجه است.

۲) از آنجایی که تابع هدف حداکثر سازی است، بنابراین جواب نامحدود خواهد شد.

۳) مسأله یا ناموجه است یا دارای جواب بهینه متناهی با تابع هدف صفر است.

۴) مقدار بهینه تابع هدف همواره محدود و برابر صفر است زیرا مسأله همواره موجه است.

یک شرکت پیمانکار ساختمانی نیروی کار مورد نیاز طی ۵ هفته آینده را به ترتیب ۵، ۷، ۸، ۴ و ۶ تخمین می‌زنـد. نگهداری هر کارگر اضافی باعث ۳۰۰ دلار هزینه در هر هفته می‌شود و استخدام در هر هفته هزینه ثابت ۴۰۰ دلار به عـلاوه ۲۰۰ دلار برای هر کارگر در هفته به پروژه تحمیل می‌کند. داده‌های مسأله به صورت زیر است:

هفته	افراد مورد نیاز در هر هفته
۱	۵
۲	۷
۳	۸
۴	۴
۵	۶

$$C_1(x_i-b_i)=\begin{cases}300(x_i-b_i) & x_i>b_i \\ & i=1,\dots,5 \\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

$$C_2(x_i-x_{i-1})=\begin{cases}400+200(x_i-x_{i-1}) & x_i>x_{i-1} \\ & i=1,\dots,5 \\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

که در آن x_i تعداد کارگرهای موجود در هفته iام و b_i تعداد افراد مورد نیاز در هفته iام می‌باشد. اگر بگیریم $f(6,x_6)=0$ و مسأله را با پویای پسرو حل کنیم به ۲ سوال بعد پاسخ دهید:

۱۱- تابع انتقال وضعیت مسأله در مرحله سوم کدام است؟

۱) $C_1(x_3-8)+C_2(x_3-x_2)+f^*(4,x_3)$　　۲) $C_1(x_3-8)C_2(x_3-x_2)+f^*(4,x_3)$

۳) $C_1(x_3-8)C_2(x_3-x_2)+f^*(4,x_4)$　　۴) $C_1(x_3-8)+C_2(x_3-x_2)+f^*(4,x_4)$

۱۲- در هر مرحله حالت را .... و تصمیم را .... تعریف می‌کنیم.

در جاهای خالی جمله فوق، کدام عبارت صحیح قرار می‌گیرد؟

۱) تعداد کارگران مورد نیاز مرحله i – تعداد کارگران استخدام شده مرحله i

۲) تعداد کارگران موجود در مرحله i-1 – تعداد کارگران در مرحله i ام

۳) تعداد کارگران استخدامی در مرحله i – تعداد کارگران اخراجی در مرحله i

۴) تعداد کارگران استخدام شده در مرحله i-1 – تعداد کارگران موجود در مرحله i

۱۳-مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = y_1 y_2 \dots y_n$$
$$\text{s.t.}$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = C$$
$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

اگر مسأله را به طریق پسرو با پویا حل کنیم کدام گزینه در مورد تابع انتقال وضعیت صحیح است؟

۱) $f(k, R_k, y_k) = y_k f^*(k+1, C - y_1 - y_2 \dots - y_{k-1})$

۲) $f(k, R_k, y_k) = y_k + f^*(k+1, C - y_1 - y_2 \dots - y_{k-1})$

۳) $f(k, R_k, y_k) = y_k + f^*(k+1, C - y_1 - y_2 \dots - y_k)$

۴) $f(k, R_k, y_k) = y_k f^*(k+1, C - y_1 - y_2 \dots - y_k)$

۱۴-مسأله غیرخطی و عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = (y_1 + 2)^3 + y_2 y_3 + (y_4 - 5)^2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 5$$
$$y_i \geq 0 \quad , i = 1, 2, 3, 4$$

برای حل با پویا شروع با کدام متغیر مطلوب می‌باشد؟

۱) y_4 ۲) y_2 ۳) y_3 ۴) گزینه‌های ۲ یا ۳

۱۵-مسأله کوله پشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n$$
$$\text{s.t.} \qquad w_1 m_1 + w_2 m_2 + \dots + w_n m_n \leq W$$
$$m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0 \text{ ، عدد صحیح}$$

اگر بخواهیم آن را با برنامه ریزی پویا حل کنیم تابع انتقال وضعیت مسأله کدام است؟ (x_i را بگیرید متغیر حالت در مرحله iام)

۱) $f_i(x_i) = \text{Max}\{r_i m_i + f^*_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}$
$x_i \leq w \ , \ m_i = 0, 1, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right]$

۲) $f_i(x_i) = \text{Max}\{r_i m_i + f^*_{i+1}(x_i + w_i m_i)\}$
$x_i \leq w \ , \ m_i = 0, 1, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right]$

۳) $f_i(x_i) = \text{Max}\{r_i m_i - f^*_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}$
$x_i \leq w \ , \ m_i = 0, 1, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right]$

۴) $f_i(x_i) = \text{Max}\{r_i m_i - f^*_{i+1}(x_i + w_i m_i)\}$
$x_i \leq w \ , \ m_i = 0, 1, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right]$

۱۶-مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 7x_2$$
$$\text{s.t.} \qquad 2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

تابع هدف در مرحله اول یعنی $f_1(R_{11}, R_{21})$ برای متغیر x_1 کدام است؟

۱) $f_1(R_{11}, R_{21}) = \text{Max}\{8x_1 + 7\text{Min}\{8 - 2x_1, 15 - 5x_1\}\}$

۲) $f_1(R_{11}, R_{21}) = \text{Max}\{8x_1 + 7\text{Min}\{8 - 2x_1, \frac{15 - 5x_1}{2}\}\}$

۳) $f_1(R_{11}, R_{21}) = \text{Max}\{8x_1 + 7\text{Max}\{8 - 2x_1, 15 - 5x_1\}\}$

۴) $f_1(R_{11}, R_{21}) = \text{Max}\{8x_1 + 7\text{Max}\{8 - 2x_1, \frac{15 - 5x_1}{2}\}\}$

۱۷-مسأله برنامه ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= x_1^2 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 8 \\
& -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 - x_2 \le 6 \\
& x_1 = 0 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \\
& x_2 = 0 \text{ or } 1
\end{aligned}
$$

اگر بخواهیم این مسأله را با برنامه ریزی پویای پسرو حل کنیم ....

۱) مسأله دارای ۲ مرحله می‌باشد که در مرحله دوم حالت ۳ و تصمیم ۲ است و در مرحله اول یک حالت و ۳ تصمیم می‌باشد.

۲) مسأله دارای یک مرحله می‌باشد که در مرحله دوم حالت ۳ و تصمیم ۲ است و در مرحله اول یک حالت و ۳ تصمیم می‌باشد.

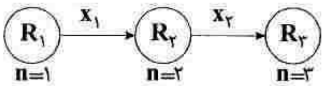
۳) مسأله دارای ۲ مرحله است و در هر مرحله ۳ حالت و ۳ تصمیم داریم.

۴) مسأله دارای ۱ مرحله است و در هر مرحله ۳ حالت و ۳ تصمیم داریم.

۱۸-مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= 6x_1 + 5x_2 + 10x_3 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 19 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \ge 3 \\
& x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

اگر آن‌را با برنامه ریزی پویای پسرو و به صورت زیر حل کنیم:



تابع در مرحله دوم کدام است؟

۱) $f(2,R_2,x_2) = -15x_2 + 10$

۲) $f(2,R_2,x_2) = -15x_2 + 10R_2$

۳) $f(2,R_2,x_2) = 5x_2 + 10R_2$

۴) $f(2,R_2,x_2) = 5x_2 + 10$

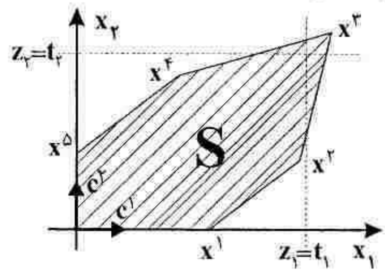
۱۹-در سوال قبل R_2 چقدر می‌باشد؟

۱) $0 \le R_2 \le 11$ ۲) $0 \le R_2 \le 19$ ۳) $2 \le R_2 \le 11$ ۴) $6 \le R_2 \le 11$

۲۰- مسأله برنامه ریزی آرمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\text{Goal } (\text{Max } Z_1 = c^1 x) \qquad z_1 \ge t_1 \\
&\text{Goal } (\text{Max } Z_2 = c^2 x) \qquad z_2 \ge t_2 \\
&\text{s.t.} \qquad x \in S
\end{aligned}
$$

که در آن S مجموعه جواب زیر و c^1, c^2 ضرایب تابع هدف روی شکل نمایش داده شده‌اند:



کدام نقطه در شرایط آرمانی ذکر شده صدق می‌کند؟

۱) x^1 ۲) x^2 ۳) x^4 ۴) x^3

پاسخ

۱ – گزینه «۳» صحیح است.

روش اول: از آنجایی که در شروع حل با روش M بزرگ تابع هدف به صورت $\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ - Mx_۴$ می‌باشد، پس $C_B B^{-۱}$ جدول یعنی متغیرهای دوگان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w = C_B B^{-۱} = (۱۰۵, ۰) + \underbrace{(-M, ۰)}_{\text{ضرایب تابع هدف}} = (۱۰۵ - \cancel{M}^{۱۰۰}, ۰) = (۵, ۰)$$

روش دوم:

$$w = C_B B^{-۱} = (۵\ ,\ ۰)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = (۵\ ,\ ۰)$$

۲ – گزینه «۴» صحیح است.

هیچ کدام از محصولات دوم و سوم با ورود به پایه نمی‌توانند جایگزین $x_۵$ شوند زیرا عنصر محوری در این حالت منفی می‌باشد و تولید محصول اول هم اگر کاهش یابد منبع دوم افزایش می‌یابد.

$$x_۲ \ \text{افزایش} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۱۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix} \overset{\text{افزایش}}{x_۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ \ \text{کاهش} \\ x_۵ \ \text{افزایش} \end{cases}$$

$$x_۳ \ \text{افزایش} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۱۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۸ \end{bmatrix} \overset{\text{افزایش}}{x_۳} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ \ \text{کاهش} \\ x_۵ \ \text{افزایش} \end{cases}$$

روش دوم:

توجه شود که متغیر $x_۵$ که یک متغیر کمکی می‌باشد در سطر دوم پایه قرار دارد و تمام عناصر سطر متناظرش (به غیر از ضریب خودش) منفی می‌باشند و خود متغیر $x_۵$ مثبت اکید است. پس قید دوم زائد هندسی بوده و هیچ گاه $x_۵$ صفر نخواهد شد. چون این محدودیت با ناحیه فاصله دارد.

۳- گزینه «۲» صحیح است.

روش اول:

$$w = C_B B^{-۱} = (۴\,,\,۴)\begin{bmatrix} ۱ & -۰/۲۵ \\ ۰ & ۰/۲۵ \end{bmatrix} = (۴\,,\,۰) \Rightarrow w_۱ = ۴$$

روش دوم:

$$w = C_B B^{-۱} = \underbrace{(۰\,,\,۳)}_{\text{ضرایب سطر هدف}} + \underbrace{(۴\,,-۳)}_{\text{ضرایب تابع هدف}} = (۴\,,\,۰)$$

۴- گزینه «۱» صحیح است.

$x_۱$ متغیر غیر پایه‌ای می‌باشد:

$$(z_۱ - c_۱)_{new} = (z_۱ - c_۱)_{old} + (c_۱ - c'_۱) \le ۰$$
$$\Rightarrow ۲ + (۲ - c'_۱) \le ۰ \Rightarrow c'_۱ \ge ۴$$

۵- گزینه «۳» صحیح است.

چون $x_۵$ (کمکی قید دوم) پایه‌ای با مقدار ۱۰ می‌باشد بنابراین کاهش از سمت راست محدودیت دوم به اندازه ۱۰ واحد مجاز می‌باشد، بنابراین $\Delta b_۲ \ge -۱۰$ است.

۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$(d,e) = C_B B^{-۱} = (۵\,,\,۰)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = (۵\,,\,۰) \Rightarrow \begin{cases} d = ۵ \\ e = ۰ \end{cases}$$

$$a = C_B B^{-۱} a_۲ - c_۲ = \underbrace{(۵\,,\,۰)}_{C_B B^{-۱}}\begin{bmatrix} ۵ \\ -۵ \end{bmatrix} - ۲ = ۲۳$$

$$\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = B^{-۱} a_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $x_۱$ پایه‌ای می‌باشد $\Delta c_۱$ را در سطر $x_۱$ ضرب و با سطر هدف جمع می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta c_۱ \times ۵ + ۲۳ \ge ۰ \Rightarrow \Delta c_۱ \ge \frac{-۲۳}{۵} \\ \Delta c_۱ \times ۲ + ۷ \ge ۰ \Rightarrow \Delta c_۱ \ge \frac{-۷}{۲} \\ \Delta c_۱ \times ۱ + ۵ \ge ۰ \Rightarrow \Delta c_۱ \ge -۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta c_۱ \ge \frac{-۷}{۲}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

۸- گزینه «۲» صحیح است.

چون قید جدید نقطه بهینه در آن صدق نمی‌کند، بنابراین نقطه بهینه تغییر می‌کند.

■ از آنجایی که نقطه بهینه جدید باید روی محدودیت جدید پس از حل باشد و هر ۳ گزینه نقطه جدید روی محدودیت جدید هستند این روش کارساز نمی‌باشد.

■■ برای مسأله اصلی نقطه گزینه ۴ یک نقطه ناموجه می‌باشد.

■■■ پس فقط گزینه‌های ۲و۳ باقی مانده‌اند که تابع هدف گزینه ۲ بهتر از گزینه ۳ می‌باشد.

۹ - گزینه «۳» صحیح است.

$$C_B B^{-1} = (۳\ ,\ ۴\ ,\ ۰)\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \left(\frac{۳}{۲}\ ,\ \frac{۵}{۴}\ ,\ ۰\right)$$

۱۰- گزینه «۳» صحیح است.

با ضرب تابع هدف در منفی داریم:

$$\begin{aligned} &\text{Min}\ \ Cx - b^t y \\ &Ax \geq b \\ &-A^t y \geq -C^t \\ &x, y \geq ۰ \end{aligned}$$

«به حل سوال ۸ صنایع ۸۴ در کتاب ۲۰۰۰ تست جلد دوم مراجعه شود.»

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

مقدار بهینه هدف مرحله چهارم + هزینه استخدام کارگر جدید + هزینه نگهداری کارگر اضافی = $f(۳, s_۳, x_۳)$

$$f(۳, s_۳, x_۳) = C_۱(x_۳ - b_۳) + C_۲(x_۳ - s_۲) + f^*(۴, s_۴)$$

اگر بگیریم $b_۳ = ۸,\ s_۲ = x_۲,\ s_۴ = x_۳$ داریم:

$$f(۳, s_۳, x_۳) = C_۱(x_۳ - ۸) + C_۲(x_۳ - x_۲) + f^*(۴, x_۳)$$

در هر مرحله x_i ها را تعداد کارگران در مرحله iام و s_i را تعداد کارگران در ابتدای مرحله i ام در نظر می‌گیریم (مرحله = هفته) که واضح است که $s_i = x_{i-۱}$ می‌باشد.

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به توضیحات سوال قبل، گزینه «۲» صحیح است.

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

$$f(k, R_k, y_k) = y_k f^*(k+۱, R_{k+۱})$$
$$f(k, R_k, y_k) = y_k f^*\left[k+۱, C - (y_۱ + y_۲ + \ldots + y_k)\right]$$
$$f(k, R_k, y_k) = y_k f^*\left(k+۱, C - y_۱ - y_۲ - \ldots - y_k\right)$$

۱۴- گزینه «۴» صحیح است.

همواره شروع به ضرب اولویت دارد. پس شروع از $y_۲$ یا $y_۳$ مطلوب می‌باشد.

۱۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$f_i(x_i, m_i) = r_i m_i + f^*_{i+۱}(x_{i+۱})$$
$$f_i(x_i, m_i) = r_i m_i + f^*_{i+۱}(x_i - w_i m_i)$$
$$f_i(x_i) = \text{Max}\{r_i m_i + f^*_{i+۱}(x_i - w_i m_i)\}$$

که در آن m_i ها متغیرها، r_i ضرایب تابع هدف، w_i ضرایب محدودیت و x_i هم باقیمانده از سمت راست در مرحله iام می‌باشد.

۱۶- گزینه «۲» صحیح است.

ابتدا تابع در مرحله n=۲ را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} &x_۲ \leq R_{۱۲} \\ &۲x_۲ \leq R_{۲۲} \\ &x_۲ \geq ۰ \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ ۰ \leq x_۲ \leq \text{Min}\{R_{۱۲}, \frac{R_{۲۲}}{۲}\}$$

$$f^*_۲(R_{۱۲}, R_{۲۲}) = ۷\,\text{Min}\{R_{۱۲}, \frac{R_{۲۲}}{۲}\}$$

تابع در مرحله اول به صورت زیر می‌باشد:

$$f_۱(R_{۱۱}, R_{۲۱}, x_۱) = ۸x_۱ + f^*_۲(R_{۱۲}, R_{۲۲})$$

واضح است که $R_{۱۲}=۸-۲x_۱$, $R_{۲۲}=۱۵-۵x_۱$ می‌باشد:

$$f_۱(R_{۱۱},R_{۲۱},x_۱)=۸x_۱+۷\text{Min}\{۸-۲x_۱,\frac{۱۵-۵x_۱}{۲}\}$$

$$f_۱(R_{۱۱},R_{۲۱})=\text{Max}\{۸x_۱+۷\text{Min}\{۸-۲x_۱,\frac{۱۵-۵x_۱}{۲}\}\}$$

۱۷- گزینه «۱» صحیح است.

n=۲

۲ تصمیم

	$s_۲ \backslash x_۲$	$x_۲=۰$	$x_۲=۱$
۳ حالت	(۸,۲,۶)		
	(۴,۶,۲)		
	(۲,۸,۰)		

۳ تصمیم

	$s_۱ \backslash x_۱$	$x_۱=۰$	$x_۱=۴$	$x_۱=۶$
۱ حالت	(۸,۲,۶)			

۱۸- گزینه «۲» صحیح است.

توجه!!: R_i را مقدار باقی مانده از سمت راست قید اول قرار می‌دهیم .

$R_۳ \backslash x_۳$	$۰\le x_۳\le R_۳$	$f^*(۳,R_۳)$	$x_۳^*$
$۰\le R_۳\le ۵$	$۱۰x_۳$	$۱۰R_۳$	$R_۳$

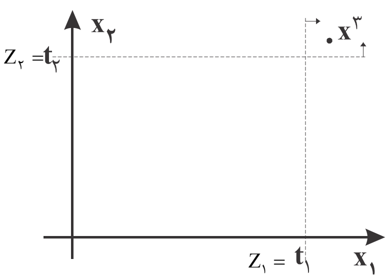
واضح است که $۶\le R_۲\le ۱۱$ خواهد بود. زیرا در مرحله اول حداقل باید $x_۱=۲$ شود که در این حالت $R_۲=۱۹-۴\times۲=۱۱$ خواهد شد و حداقل باید ۶ باشد زیرا $x_۲\ge ۳$ می‌باشد که باید در قید اول صدق کند.

$$f(۲,R_۲,x_۲)=۵x_۲+۱۰(R_۲-۲x_۲)=-۱۵x_۲+۱۰R_۲$$

۱۹- گزینه «۴» صحیح است.

با توجه به سوال قبل و توضیحات جواب آن، $۶\le R_۲\le ۱۱$ خواهد بود.

۲۰- گزینه «۴» صحیح است.



با توجه به شکل فقط نقطه راسی $x^۳$ در شرط $z_۱\ge t_۱$, $z_۲\ge t_۲$ صدق می‌کند. پس تنها نقطه راسی موجود در فضای خیال $z_۱$, $z_۲$ همان نقطه راسی $x^۳$ می‌باشد.