

۱- کدام گزینه حدپائینی دنباله $\left\{\frac{n}{n+2} : n \in N\right\}$ است؟

۱. $\frac{n}{n+2}$ ۲. ۱ ۳. $\frac{1}{3}$ ۴. $\frac{1}{2}$

۲- برای دنباله $\left\{A_n = \left[n, n + \frac{1}{n}\right] : n \in N\right\}$ مقدار $\lim A_n$ برابر کدام گزینه است؟

۱. \emptyset ۲. $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ ۳. $\left[\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ ۴. $(1, +\infty)$

۳- کوچکترین σ - میدان روی Ω کدام گزینه است؟

۱. $\{\Omega\}$ ۲. $\{\emptyset\}$ ۳. $\{\emptyset, \Omega\}$ ۴. $P(\Omega)$

۴- اگر \mathfrak{I} یک σ - میدان ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\Omega \in \mathfrak{I}$ ۲. $\bigcap_i A_i \in \mathfrak{I}, A_i \in \mathfrak{I}, i=1,2,\dots$ ۳. $A - B \in \mathfrak{I}, A, B \in \mathfrak{I}$ ۴. $A \cup B \in \mathfrak{I}, \forall B \subset \Omega$

۵- اگر $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}^*$ به طوری که \mathfrak{I} و \mathfrak{I}^* توپولوژی‌هایی روی Ω باشند، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

۱. هر مجموعه از \mathfrak{I}^* تحت \mathfrak{I} باز است.
۲. Ω و \emptyset تحت \mathfrak{I}^* باز هستند.
۳. $O_1 \in \mathfrak{I}$ و $O_2 \in \mathfrak{I}^*$ آنگاه $O_1 - O_2$ تحت \mathfrak{I}^* باز است.
۴. $O_1 \in \mathfrak{I}$ و $O_2 \in \mathfrak{I}^*$ آنگاه $O_1 - O_2$ تحت \mathfrak{I} باز است.

۶- شرط آنکه زوج مرتب (Ω, \mathcal{F}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد کدام گزینه است؟

۱. \mathcal{F} یک مجموعه توپولوژی باشد.
۲. \mathcal{F} نسبت به اشتراک و اجتماع متناهی بسته باشد.
۳. \mathcal{F} یک σ - میدان باشد.
۴. هر زیرمجموعه از Ω درون \mathcal{F} باشد.

۷- اگر در فضای سه‌تایی (Ω, τ, μ) اندازه مجموعه‌ای اندازه‌پذیری با اندازه متناهی وجود داشته باشد، آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. $\mu(A) < \infty, \forall A \in \tau$ ۲. $\mu(\emptyset) = c > 0$ ۳. $\mu(\emptyset) = 0$ ۴. $\mu(\Omega) = \infty$

۸- برای تابع نشانگر و دنباله $\{A_n : n \in N\}$ کدام گزینه برقرار نیست؟

۱. $I_{\lim A_n} \times I_{\lim A_n} = 0$.
 ۲. $\overline{\lim} I_{A_n} - \underline{\lim} I_{A_n} = I_{\overline{\lim} A_n - \underline{\lim} A_n}$.
 ۳. $\underline{\lim} I_{A_n} = \overline{\lim} I_{A_n}$.
 ۴. $\overline{\lim} I_{A_n} = I_{\overline{\lim} A_n}$.

۹- تعداد σ -میدان روی $\Omega = \{1, 2, 3\}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. ۸ .
 ۲. ۶ .
 ۳. ۵ .
 ۴. ۴ .

۱۰- اگر در دنباله $\{A_n : n \in N\}$ برای n های زوج $A_n = \{1, 2, 3\}$ و برای n های فرد $A_n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تعریف شود، آنگاه کدام گزینه برابر با $\underline{\lim} A_n$ است؟

۱. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 ۲. $\{1, 2, 3\}$.
 ۳. $\{4, 5\}$.
 ۴. $\{3\}$.

۱۱- فرض کنید \mathcal{F} ، یک σ -میدانی در Ω و $A \subset \Omega$ باشد، کدام گزینه برابر با \mathcal{F}_A است؟

۱. $\{A \cap B \mid B \in \Omega\}$.
 ۲. $\{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$.
 ۳. $\{A \cap B \mid B \subset \Omega\}$.
 ۴. $\{A \cap B \mid B \subset \mathcal{F}\}$.

۱۲- برای کوچکترین σ -میدان روی Ω یعنی $\{\emptyset, \Omega\}$ کدام توابع اندازه پذیر هستند؟

۱. ثابت .
 ۲. خطی .
 ۳. نمایی .
 ۴. لگاریتمی .

۱۳- در نمایش (A, B, C) کدام یک باید یک تابع احتمال باشد؟

۱. A .
 ۲. B .
 ۳. C .
 ۴. A, C .

۱۴- برای $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathcal{S} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ ، تابع P با ضابطه $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ را در نظر بگیرید.

کدام گزینه درست است؟

۱. (Ω, \mathcal{S}, P) فضای احتمال نیست.
 ۲. $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$.
 ۳. $P(\Omega) = 1$.
 ۴. $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{3}$.

www.nashr-estekhdam.ir

۱۵- برای دنباله صعودی $\{A_n : n \in N\}$ از پیشامدها، کدام گزینه برقرار است؟

۱. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
 ۲. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
 ۳. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
 ۴. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

۱۶- دنباله پیشامدها از بازه $(0, 1)$ به ازای $n \in N$ به صورت $A_n = \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ را در نظر بگیرید. اگر مدل یکنواخت احتمال روی بازه $(0, 1)$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. صفر ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. یک ۴. حد ندارد

۱۷- عبارت $(A_n : i.o.)$ با کدام گزینه معادل نیست؟

۱. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ ۲. (از جایی به بعد تمام A_n ها رخ دهند)
۳. (تعداد نامتناهی از A_n ها رخ دهند) ۴. $\overline{\lim} A_n$

۱۸- برای $\{A_n : n \in N\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) مقدار احتمال $P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ تعریف می‌شود. مقدار $P(A_n : i.o.)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. صفر ۲. یک ۳. $\frac{1}{3}$ ۴. $\frac{2}{9}$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۹- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) < P(A)$ ۲. $\underline{\lim} P(A_n) < P(A)$ ۳. $\overline{\lim} P(A_n) > P(A)$ ۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$

۲۰- سه تایی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) با پیشامدهای A_1, \dots, A_n را در نظر بگیرید. کدام گزینه برقرار است؟

۱. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1)$ ۲. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - n$
۳. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i^c) - n$ ۴. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \left(\frac{n-1}{n}\right)$

۲۱- برابری $\lim_{n,m \rightarrow \infty} P\{w : |X_n(w) - X_m(w)| \rightarrow 0\} = 1$ چه نامیده می‌شود؟

۱. شرط کوشی ۲. شرط برل ۳. شرط همگرایی ۴. شرط لیپانوف

۲۲- با برقراری نامساوی $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}} \leq \frac{1}{N^{\gamma-1}}$ ، کدام گزینه نتیجه می شود؟

$$1. \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n \geq N} \{X_k - 1 > \varepsilon\}\right) = 1$$

$$2. X_n \xrightarrow{P} 1$$

$$3. X_n \xrightarrow{d.s.} 1$$

۲۳- متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال $x = 0, 1$; $P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$ است. کدام گزینه معادل

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

است؟

$$2. \frac{1}{2}$$

$$3. 1-p$$

$$4. E(F(X))$$

$$5. E(X)$$

۲۴- اگر $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$1. E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$$

$$2. E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$$

$$3. E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$$

$$4. E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$$

۲۵- کدام گزینه یک تابع محدب است؟

$$1. -x^2, \quad x \in R$$

$$2. e^x, \quad x \in R$$

$$3. x^{-2}, \quad x < 0$$

$$4. \ln(x), \quad x > 0$$

ج	1
الف	2
ج	3
د	4
ج	5
ج	6
ج	7
الف	8
ج	9
ب	10
ب	11
الف	12
ج	13
الف	14
ج	15
ج	16
د	17
الف	18
د	19
الف	20
الف	21
ج	22
الف	23
د	24
ب	25

۱- به ازای $n \in N$ فرض کنید $A_n = \left[n, n + \frac{1}{n} \right)$. مقدار $\lim A_n$ برابر کدام گزینه است؟

۱. \emptyset ۲. $\left[1, \frac{3}{2} \right)$ ۳. $(1, +\infty)$ ۴. $(0, +\infty)$

۲- تحت کدام گزینه رابطه‌ی $\overline{\lim A_n} \subseteq \lim A_n$ برقرار است؟

۱. $A_n \downarrow$ ۲. $A_n \uparrow$ ۳. $\overline{\lim A_n} \supseteq \lim A_n$ ۴. $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ موجود باشد.

۳- کدام گزینه علت اینکه مجموعه‌ی $\tau = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}\}$ بر مجموعه‌ی یک توپولوژی نیست را بیان می‌کند؟

۱. τ یک σ -میدان نیست. ۲. τ نسبت به اشتراک بسته نیست. ۳. τ نسبت به اجتماع بسته نیست. ۴. τ با مجموعه توانی Ω یکی نیست.

۴- تحت کدام عملیات مجموعه‌ای، روی σ -میدان‌ها، حاصلش یک σ -میدان است؟

۱. اجتماع ۲. متمم‌گیری ۳. اشتراک ۴. تفاضل متقارن

۵- تابع P با ضابطه‌ی $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ و $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۱. $P(\Omega) = 1$ ۲. تابع احتمال نداریم. ۳. $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ ۴. $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{3}$

۶- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. $\underline{\lim} P(A_n) < P(A)$ ۲. $\overline{\lim} P(A_n) > P(A)$ ۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ ۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) < P(A)$

۷- برای $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P\{w: |X_n(w) - X_m(w)| \rightarrow 0\} = 1$ را چه می‌نامیم؟

www.nashr-estekhdam.ir

۱. شرط کوشی ۲. شرط مارکف ۳. همگرایی تقریباً همه جا ۴. همگرایی در احتمال

۸- متغیر تصادفی ساده، متغیری است که مجموعه مقادیر آن باشد.

۱. متناهی ۲. فقط یک عضو داشته ۳. دو عضو داشته ۴. اعداد طبیعی

نمایش متغیر تصادفی به صورت $X(w) = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(w)$ برای چه نوع متغیری قابل انجام است؟

۱. متغیر تصادفی گسسته
۲. متغیر تصادفی ساده
۳. متغیر تصادفی نامنفی
۴. به ازای هر افرازی روی Ω شدنی است.

۱۰- در لم فاتو برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی که به متغیر تصادفی X میل می‌کند، داریم

$$E(X) \leq \lim E(X_n)$$

کدام گزینه در اثبات این لم برقرار هست؟

۱. $E(X_n) \geq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon$
۲. $E(X_n) \geq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) + \varepsilon$
۳. $E(X_n) \leq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) + \varepsilon$
۴. $E(X_n) \leq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon$

۱۱- اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد، آنگاه:

۱. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$
۲. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$
۳. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$
۴. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$

۱۲- ترکیب دو تابع محدب، است.

۱. تابع درجه دو
۲. مقعر
۳. محدب
۴. ثابت

www.nashr-estekhdam.ir

۱۳- کدام رابطه نادرست است؟

۱. $E^2(X) \leq E(X^2)$
۲. $e^{E(X)} \leq E(e^X)$
۳. $E(\ln(X)) \leq \ln(E(X))$
۴. $E\left(\frac{1}{X^2}\right) \leq \frac{1}{E(X^2)}$

۱۴- اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) تعریف شده باشد، آنگاه مقدار $E(X | \Omega)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. Ω
۲. X
۳. $E(X)$
۴. $E(\Omega | X)$

۱۵- اگر امیدریاضی X متناهی باشد. کدام گزینه درست است؟

۱. $E(e^{-(E(X)-X)}) \geq 1$
۲. $E(e^{-(E(X)-X)}) \leq 1$
۳. $E(e^{E(X)-X}) \leq 1$
۴. $E(e^{E(X)-X}) \geq 1$

۱۶- یکنایی حد وقتی رخ می‌دهد که نوع همگرایی از کدام گزینه باشد؟

۱. در احتمال ۲. توزیع ۳. تقریباً مطمئن ۴. همواره یکتا است.

۱۷- براساس متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ ، دنباله‌ی $\left\{ \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right\}$ ساخته شده است. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left(\frac{1 \cdot |\bar{X}_n - \mu|}{5 + |\bar{X}_n - \mu|} \right)$$

برابر کدام گزینه است؟

۱. یک ۲. صفر ۳. نیم ۴. دو

۱۸- تحت کدام گزینه انواع همگرایی‌ها یکسان می‌شوند؟

۱. حدگیری از متغیرهای مستقل باشند. ۲. حدگیری از متغیرهای هم‌توزیع باشند.
۳. حدگیری از نمونه‌ی تصادفی باشند. ۴. مقدار حد عددی ثابت باشد.

۱۹- در چه صورت همگرایی‌های در احتمال، تقریباً مطمئن و در توزیع یکسان می‌شوند؟

۱. دنباله‌ای از متغیرهای مستقل باشند. ۲. دنباله‌ای از متغیرهای هم‌توزیع باشند.
۳. دنباله‌ای از نمونه‌ی تصادفی باشند. ۴. حد همگرایی دنباله‌ای به عددی ثابت باشد.

۲۰- فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی نامنفی $\{X_n\}$ چنان باشند که $E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) < \infty$ آنگاه در همگرایی

تقریباً مطمئن کدام گزینه برقرار است؟

۱. $P \left(\sum_{i=1}^n X_i = \infty \right) = 1$ ۲. $P \left(\sum_{i=1}^n X_i = \infty \right) = 0$

۳. $P \left(\sum_{i=1}^n X_i < \infty \right) = 0$ ۴. $P \left(\sum_{i=1}^n X_i < \infty \right) = 1$

1	الف
2	د
3	ج
4	ج
5	ب
6	ج
7	الف
8	الف
9	ب
10	الف
11	الف
12	ج
13	د
14	ب
15	الف
16	د
17	ب
18	د
19	د
20	د

۱- اگر Ω متناهی و دارای n عضو باشد آنگاه $P(\Omega)$ دارای عضو است.

۱. 2^n ۲. $\frac{1}{2^n}$ ۳. 2 ۴. n

۲- اگر f و g دو تابع اندازه‌پذیر بر (Ω, \mathcal{F}) باشند، در این صورت کدام گزینه، توابع اندازه‌پذیر است؟

۱. $f \pm g$ ۲. $f \times g$ ۳. $\frac{f}{g}; g \neq 0$ ۴. همه موارد

۳- فرض کنید $A_n = (0, n)$ در این صورت $\overline{\lim} A_n$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $+\infty$ ۲. ϕ ۳. $(0, \infty)$ ۴. Ω

۴- فرض کنید $A_n = (n, n+1)$ در این صورت به ازای هر $n \geq 0$ $\underline{\lim} A_n$ برابر کدام گزینه است؟

۱. Ω ۲. ϕ ۳. $(0, \infty)$ ۴. $+\infty$

۵- اگر $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $D = \{\{1\}\}$ آنگاه کوچکترین سیگما میدان تولیدشده توسط D کدام گزینه است؟

۱. $\{\phi, \Omega, \{2, 3\}\}$ ۲. $\{\phi, \Omega, \{1\}\}$ ۳. $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ۴. $\{\{1\}, \{2, 3\}, \phi, \Omega\}$

۶- شرط لازم و کافی برای آن که I_A اندازه‌پذیر باشد آن است که :

۱. $I_A = 1$ ۲. $A = \Omega$ ۳. $I_A = 0$ ۴. A اندازه‌پذیر باشد.

۷- فرض کنید f_n دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر (Ω, \mathcal{F}) باشد، کدام گزینه در صورت وجود یک تابع اندازه‌پذیر می‌شود؟

۱. $\underline{\lim} f_n$ ۲. $\overline{\lim} f_n$ ۳. $\sup_n f_n$ ۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

۸- اگر $A \subset C$ باشد آنگاه $P(C - A | B)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $P(C | B) - P(A | B)$ ۲. $P(C \cap B | B) - P(A \cap B | B)$ ۳. $P(C | B) - P(A)$ ۴. $P(C) - P(A | B)$

۹- در گزینه‌ها، کدام خاصیت تابع احتمال هم‌ارز جابجایی حد و تابع است؟

www.nashr-estekhdam.ir

۱. منحصر به فرد بودن (یکتایی) ۲. پیوستگی
۳. انتگرال‌پذیری ۴. مشتق‌پذیری

۱۰- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subset A$ و $F \subset B$ آنگاه استقلال E و F

۱. نیز برقرار است. ۲. استقلال دو پیشامد اولیه را نتیجه می‌دهد.

۳. بستگی به تعریف پیشامدها دارد. ۴. بستگی به اندازه احتمال دارد.

۱۱- فرض کنید A_1, \dots, A_n و A_n' پیشامدهایی مستقل باشند در این صورت $P(A_1' \cap \dots \cap A_n')$

$$\begin{aligned} 1. & \quad - \sum_{i=1}^n P(A_i') \leq e \\ 2. & \quad \sum_{i=1}^n P(A_i') \leq e \\ 3. & \quad - \sum_{i=1}^n P(A_i) \leq e \\ 4. & \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \leq e \end{aligned}$$

۱۲- فرض کنید A_1 و A_2, \dots پیشامدهایی باشند که $\lambda_i > 0$ $i = 1, 2, \dots$ $P(A_i) = e^{-\lambda_i}$ که در آن $\lambda_i = i \lambda$ در این صورت مقدار $P(A_n : i.0)$ برابر کدام گزینه است؟

$$1. e^{-\lambda} \quad 2. \text{ صفر} \quad 3. 1 \quad 4. 0/5$$

۱۳- کدام عبارت همواره درست است؟

$$\begin{aligned} 1. & \quad P(\lim A_n) \leq P(\lim A_n) \leq \lim P(A_n) \leq \overline{\lim P(A_n)} \leq P(\overline{\lim A_n}) \\ 2. & \quad P(\lim A_n) \leq \lim P(A_n) \leq \overline{\lim P(A_n)} \leq P(\overline{\lim A_n}) \\ 3. & \quad \lim P(A_n) \leq \overline{\lim P(A_n)} \leq P(\lim A_n) \leq P(\overline{\lim A_n}) \\ 4. & \quad \lim P(A_n) < \overline{\lim P(A_n)} \leq P(\lim A_n) < P(\overline{\lim A_n}) \end{aligned}$$

۱۴- فرض کنید به ازای هر ε ، نابرابری $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ برقرار باشد در این صورت کدام گزینه برقرار است؟

$$1. \quad X_n \xrightarrow{P} X \quad 2. \quad X_n \xrightarrow{a.s} X \quad 3. \quad X_n \xrightarrow{D} X \quad 4. \quad \{X_n\} \text{ همگرا نیست.}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۵- کدام خاصیت تابع توزیع نمی‌باشد؟

$$1. \quad \lim_{t \rightarrow x} F_X(t) = F_X(x) \quad 2. \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad 3. \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 \quad 4. \quad \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t) = F_X(x)$$

۱۶- فرض کنید X متغیر تصادفی با امید متناهی باشد و $G_2 \subseteq G_1$ در زیر σ - میدان باشند. در این صورت $E(E(X|G_1)|G_2)$ برابر کدام گزینه نیست؟

$$1. \quad E(X|G_1) \quad 2. \quad E(X|G_2) \quad 3. \quad E(E(X|G_2)|G_1) \quad 4. \quad E(E(X|G_1)|G_2)$$

۱۷- کدام گزینه، نوع همگرایی قانون ضعیف اعداد بزرگ است؟

$$1. \quad \text{همگرایی در توزیع} \quad 2. \quad \text{همگرایی } L^p \quad 3. \quad \text{همگرایی در احتمال} \quad 4. \quad \text{تقریباً مطمئن}$$

۱۸- فرض کنید دنباله‌ی $\{X_n\}$ از توزیع زیر تبعیت می‌کنند. در این صورت X_n در توزیع به کدام توزیع همگراست؟

x	0	$\frac{1}{n}$...	$\frac{n}{n}$
$P(X_n = x)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$...	$\frac{1}{n+1}$

۱. نرمال ۲. یکنواخت ۳. نمائی ۴. پواسن

۱۹- فرض کنید X متغیر تصادفی $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر بورل باشد و همچنین فرض کنید X و $g(X)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند. در این صورت $g(\cdot)$ یک تابع است.

۱. از راست کراندار ۲. مشتق‌پذیر ۳. ثابت ۴. پیوسته

۲۰- کدام رابطه همواره برقرار است؟

۱. $\lim X_n \geq \overline{\lim} X_n$ ۲. $\overline{\lim} X_n = \underline{\lim} X_n = \lim X_n$
 ۳. $\lim X_n \leq \overline{\lim} X_n$ ۴. $\overline{\lim} X_n = \underline{\lim} X_n$

۲۱- فرض کنید A و B دو پیشامد باشند و $A_n = \begin{cases} A & n \text{ فرد} \\ B & n \text{ زوج} \end{cases}$ در این صورت $\underline{\lim} A_n$ برابر کدام گزینه است؟

۱. Ω ۲. \emptyset ۳. $A \cup B$ ۴. $A \cap B$

www.nashr-estekhdam.ir

۲۲- در لم فاتو، کدام گزینه لزومی به برقراری آن شرط را نداریم؟

۱. دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد.
 ۲. حد دنباله موجود باشد.
 ۳. امیدریاضی متغیرهای دنباله موجود باشند.
 ۴. امیدریاضی حد دنباله موجود باشد.

۲۳- فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد در این صورت وقوع تعداد نامتناهی از A_n ها برابر کدام گزینه نیست؟

۱. $A_n: i \in \mathbb{N}$ ۲. $\overline{\lim} A_n$ ۳. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$ ۴. $\underline{\lim} A_n$

۲۴- اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد در این صورت $\{S_n = \sum_{i=1}^n X_i\}$ دنباله‌ای نازولی از متغیرهای

تصادفی نامنفی است. برابری $E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(S_n)$ براساس کدام گزینه برقرار است؟

۱. قضیه همگرایی یکنوا ۲. لم فاتو ۳. قضیه حد مرکزی ۴. همواره برقرار است.

۲۵- هرگاه $X \xrightarrow{d} X_n$; $Y \xrightarrow{d} X_n$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۲. X با Y برابر است.

۱. X با Y هم توزیع است.

۴. چنین شرایطی اتفاق نمی افتد.

۳. X با Y در حد برابر یا در حد هم توزیع است.

1	الف
2	د
3	ج
4	ب
5	د
6	د
7	د
8	الف
9	ب
10	د
11	ج
12	ج
13	ب
14	ب
15	الف
16	ب
17	ج
18	ب
19	ج
20	ج
21	د
22	د
23	د
24	الف
25	الف

۱- در دنباله‌ی $\{b_n : n \in N\}$ ، کدام گزینه تعریف حد پایینی است؟

۱. $\sup_n \inf \{b_n : h \geq n\}$ ۲. $\sup_n \inf \{b_n : h > n\}$ ۳. $\inf_n \sup \{b_n : h > n\}$ ۴. $\inf_n \sup \{b_n : h \geq n\}$

۲- حد بالایی دنباله‌ی $A_n = \left(\frac{n}{n+5}, \frac{n}{n+2} \right); n \in N$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\left(0, \frac{1}{2} \right]$ ۲. \emptyset ۳. $\{1\}$ ۴. $(0, 1]$

۳- به ازای $n \in N$ فرض کنید $A_n = \left[n, n + \frac{1}{n} \right)$. مقدار $\lim A_n$ برابر کدام گزینه است؟

۱. \emptyset ۲. $\left[1, \frac{3}{2} \right)$ ۳. $[1, +\infty)$ ۴. $[1, +\infty)$

۴- اگر دنباله $A_n = (L_n, U_n)$ به طوری که $L_n < U_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - L_n) = 0$ آنگاه.....

۱. دنباله A_n نزولی است. ۲. دنباله A_n صعودی است.

۳. $\lim A_n = \overline{\lim A_n} = \{a\}$ ۴. $\lim A_n = \overline{\lim A_n} = \emptyset$

۵- کوچکترین σ -میدان ناتهی روی Ω کدام گزینه است؟

۱. $\{\emptyset\}$ ۲. $\{\emptyset, \Omega\}$ ۳. $\{\Omega\}$ ۴. $P(\Omega)$

۶- برای $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A = \{1\}$ کدام گزینه σ -میدان نیست؟

۱. $\mathfrak{I}_1 = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$ ۲. $\mathfrak{I}_2 = \{A, \{1, 2\}, A^c, \{3, 4\}, \Omega, \emptyset\}$

۳. $\mathfrak{I}_3 = \{A, A^c, \emptyset, \Omega, \{3\}, \{1, 2, 4\}\}$ ۴. $\mathfrak{I}_4 = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}\}$

۷- کدام گزینه تحت مجموعه $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ یک مجموعه‌ی توپولوژی است؟ www.nashr-estekhdam.ir

۱. $\mathfrak{I}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ ۲. $\mathfrak{I}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}\}$

۳. $\mathfrak{I}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$ ۴. $\mathfrak{I}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{3, 4\}\}$

۸- کدام اندازه براساس تعداد عناصر مجموعه تعریف می شود؟

۱. مثبت ۲. گسسته ۳. متناهی ۴. شمارشی

۹- تحت کدام گزینه رابطه‌ی $\overline{\lim} A_n \subseteq \underline{\lim} A_n$ برقرار است؟

۱. $A_n \downarrow$
 ۲. $A_n \uparrow$
 ۳. $\overline{\lim} A_n \supseteq \underline{\lim} A_n$
 ۴. $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ موجود باشد.

۱۰- کدام دنباله نزولی است؟

۱. $\left(n, n + \frac{1}{2}\right)$
 ۲. (n, n^2)
 ۳. $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$
 ۴. $\left(0, \frac{1}{n}\right)$

۱۱- کدام گزینه علت اینکه مجموعه‌ی $\tau = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}\}$ بر مجموعه‌ی یک توپولوژی نیست را بیان می‌کند؟

۱. τ یک σ -میدان نیست.
 ۲. τ نسبت به اشتراک بسته نیست.
 ۳. τ نسبت به اجتماع بسته نیست.
 ۴. τ با مجموعه توانی Ω یکی نیست.

۱۲- بزرگترین σ -میدانی که روی $D \subseteq \Omega$ ساخته می‌شود معادل کدام گزینه است؟

۱. $P(\Omega)$
 ۲. $\sigma(D)$
 ۳. $\{D, \emptyset\}$
 ۴. $\{D, \emptyset, \Omega\}$

۱۳- تحت کدام گزینه زوج مرتب (Ω, \mathcal{F}) یک فضای اندازه‌پذیر است؟

۱. \mathcal{F} یک σ -میدان باشد.
 ۲. \mathcal{F} یک مجموعه‌ی توپولوژی باشد.
 ۳. هر زیرمجموعه از Ω درون \mathcal{F} باشد.
 ۴. \mathcal{F} نسبت به اشتراک و اجتماع متناهی بسته باشد.

۱۴- تحت کدام عملیات مجموعه‌ای، روی σ -میدان‌ها، حاصلش یک σ -میدان است؟ www.nashr-estekhdam.ir

۱. اجتماع
 ۲. متمم‌گیری
 ۳. اشتراک
 ۴. تفاضل متقارن

۱۵- فرض کنید \mathcal{F} ، یک σ -میدانی در Ω و $A \subset \Omega$ باشد، کدام گزینه برابر با \mathcal{F}_A است؟

۱. $\{A \cap B \mid B \in \Omega\}$
 ۲. $\{A \cap B \mid B \subset \Omega\}$
 ۳. $\{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$
 ۴. $\{A \cap B \mid B \subset \mathcal{F}\}$

۱۶- تابع P با ضابطه‌ی $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ و $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ را در نظر بگیرید.

کدام گزینه درست است؟

۱. $P(\Omega) = 1$
 ۲. تابع احتمال نداریم.
 ۳. $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$
 ۴. $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{3}$

۱۷- برای یک دنباله صعودی $A_n \uparrow$ کدام گزینه نادرست است؟

۲. $P(A_n | B) \downarrow P(\bigcap_n A_n | B)$

۱. $P(A_n | B) \uparrow P(\bigcup_n A_n | B)$

۴. $P(A | B) = 1 - P(A | B^c)$

۳. $P(A | B) + P(A^c | B) = 1$

۱۸- اگر برای دنباله $A_n = \left[0, \frac{2n}{2n+3}\right], n \in \mathbb{N}$ و مدل یکنواخت احتمال روی بازه $(0, 1)$ در نظر بگیریم آنگاه مقدار

$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c)$ برابر کدام گزینه است؟

۴. حد ندارد

۳. ۱

۲. $\frac{1}{2}$

۱. صفر

۱۹- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) < P(A)$

۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$

۲. $\overline{\lim} P(A_n) > P(A)$

۱. $\underline{\lim} P(A_n) < P(A)$

۲۰- کدام گزینه نادرست است؟

۲. $\underline{\lim} X_n = \sup_{k \geq n} \inf X_k$

۱. $\overline{\lim} X_n = \inf_n \sup_{k \geq n} X_k$

۴. $\underline{\lim} X_n \geq \overline{\lim} X_n$

۳. $\underline{\lim} X_n \leq \overline{\lim} X_n$

۲۱- برابری $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P\{w: |X_n(w) - X_m(w)| \rightarrow 0\} = 1$ را چه می نامیم؟

۲. شرط مارکف

۱. شرط کوشی

۴. همگرایی در احتمال

۳. همگرایی تقریباً همه جا

۲۲- شرط لازم و کافی برای آنکه $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ آن است که:

۱. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$

۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$

۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$

۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\}, \quad \forall \varepsilon > 0$

۲۳- اگر $X \sim B(1, p)$ آنگاه مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. p ۲. 1 ۳. $1-p$ ۴. $\frac{1}{2}$

۲۴- با توجه به اینکه $X \sim B(3, \frac{1}{4})$ و $A_i = \{w \in \Omega \mid X(w) = i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ کدام گزینه درست نیست؟

۱. $X(w) = \sum_{i=0}^3 i I_{A_i}(w)$ ۲. $X(w) = \sum_{i=0}^3 I_{A_i}(w)$
 ۳. $X^{-1}(i) = A_i, \quad i = 0, 1, 2, 3$ ۴. $E(X) = \sum_{i=0}^3 i P(A_i)$

۲۵- در لم فاتو برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی که به متغیر تصادفی X میل می‌کند، داریم $E(X) \leq \lim E(X_n)$ کدام گزینه در اثبات این لم برقرار هست؟

۱. $E(X_n) \geq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon$ ۲. $E(X_n) \geq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) + \varepsilon$
 ۳. $E(X_n) \leq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) + \varepsilon$ ۴. $E(X_n) \leq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon$

۲۶- برای دنباله $\{X_n\}$ از متغیرهای تصادفی نامنفی کدام گزینه برقرار است؟

۱. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$ ۲. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$
 ۳. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$ ۴. $E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$

۲۷- تحت کدام گزینه ترتیب حدگیری با امیدریاضی قابل تعویض است؟

۱. قضیه همگرایی یکنوا ۲. لم فاتو
 ۳. قضیه همگرایی پیوسته ۴. در صورت وجود امیدریاضی همواره برقرار است.

www.nashr-estekhdam.ir

۲۸- ترکیب دو تابع محدب، است.

۱. تابع درجه دو ۲. مقعر ۳. محدب ۴. ثابت

۲۹- در اثبات اینکه میانگین هندسی از میانگین حسابی بیشتر نیست، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟

۱. $\varphi(X) \leq X^2$ ۲. $\varphi(X) = e^X$ ۳. $\varphi(X) = \ln(X)$ ۴. $\varphi(X) = -\log(X)$

۳۰- اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ تعریف شده باشد، آنگاه مقدار $E(X | \Omega)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. Ω ۲. X ۳. $E(X)$ ۴. $E(\Omega | X)$

۳۱- فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $\mathfrak{F} = P(\Omega)$ ، $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega, \emptyset\}$ و تابع احتمال بنحوی است که

احتمال پیشامدهای تک عضوی برابر $\frac{1}{4}$ را نسبت می‌دهد. تعریف می‌کنیم $X(\omega) = \omega$ ، $\omega = 1, 2, 3, 4$ کدام

گزینه برابر با $Z = E(X | \mathfrak{K})$ است؟

z	۱	۳
$P(Z = z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

z	α	β
$P(Z = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

z	۱	۳
$P(Z = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

z	α	β
$P(Z = z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۳۲- فرض کنیم X متغیری تصادفی با امید تصادفی بر $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ باشد و $\mathfrak{K}_\gamma \subset \mathfrak{K}_\alpha$ دو زیر σ -میدان از \mathfrak{F} باشند.

کدام گزینه معادل $E(E(X | \mathfrak{K}_\alpha) | \mathfrak{K}_\gamma)$ است؟

۲. $E(X | \mathfrak{K}_\gamma)$

۴. $E(X)$

۱. $E(X | \mathfrak{K}_\alpha)$

۳. $E(X | \mathfrak{K}_\alpha - \mathfrak{K}_\gamma)$

www.nashr-estekhdam.ir

۳۳- اگر امید ریاضی X متناهی باشد. کدام گزینه درست است؟

۲. $E(e^{-(E(X)-X)}) \leq 1$

۴. $E(e^{E(X)-X}) \geq 1$

۱. $E(e^{-(E(X)-X)}) \geq 1$

۳. $E(e^{E(X)-X}) \leq 1$

۳۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد و $E(X) < \infty$. آنگاه $E(X)$ برابر با کدام گزینه است؟

۲. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X I_{X \leq n})$

۴. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(I_{X \geq n})$

۱. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(I_{X \leq n})$

۳. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X I_{X \geq n})$

۳۵- در قضیه‌ی همگرایی یکنوا، شرط لازم برای دنباله‌ی متغیرهای تصادفی کدام گزینه است؟

۱. یکنوا باشد.
۲. مستقل باشد.
۳. در شرایط لم فاتو صدق کنند.
۴. نامنفی و غیرنزولی باشند.

۳۶- یکتایی حد وقتی رخ می‌دهد که نوع همگرایی از کدام گزینه باشد؟

۱. در احتمال
۲. توزیع
۳. تقریباً مطمئن
۴. همواره یکتا است.

۳۷- براساس متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین μ ، دنباله‌ی $\left\{ \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right\}$ ساخته شده است. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left(\frac{10 |\bar{X}_n - \mu|}{5 + |\bar{X}_n - \mu|} \right)$$

۱. یک
۲. صفر
۳. نیم
۴. دو

۳۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله‌ی $\{X_n\}$ در احتمال به X میل کند، است؟

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right] &= 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right] &= 0 \\ E \left[\frac{|X|}{1 + |X|} \right] &= 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \right] &= 0 \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۳۹- تحت کدام گزینه انواع همگرایی‌ها یکسان می‌شوند؟

۱. حدگیری از متغیرهای مستقل باشند.
۲. حدگیری از متغیرهای هم‌توزیع باشند.
۳. حدگیری از نمونه‌ی تصادفی باشند.
۴. مقدار حد عددی ثابت باشد.

۴۰- فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی نامنفی $\{X_n\}$ چنان باشند که $E \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) < \infty$ آنگاه در همگرایی

تقریباً مطمئن کدام گزینه برقرار است؟

$$\begin{aligned} P \left(\sum_{i=1}^n X_i = \infty \right) &= 0 & P \left(\sum_{i=1}^n X_i = \infty \right) &= 1 \\ P \left(\sum_{i=1}^n X_i < \infty \right) &= 1 & P \left(\sum_{i=1}^n X_i < \infty \right) &= 0 \end{aligned}$$

۱	الف
۲	ب
۳	الف
۴	د
۵	ب
۶	ج
۷	ب
۸	د
۹	د
۱۰	د
۱۱	ج
۱۲	الف
۱۳	الف
۱۴	ج
۱۵	ج
۱۶	ب
۱۷	د
۱۸	الف
۱۹	ج
۲۰	د
۲۱	الف
۲۲	الف
۲۳	الف
۲۴	ب
۲۵	الف
۲۶	الف
۲۷	الف
۲۸	ج
۲۹	د
۳۰	ب
۳۱	الف
۳۲	ب
۳۳	الف
۳۴	ب
۳۵	د
۳۶	د
۳۷	ب
۳۸	الف
۳۹	د

۱- حد پایینی دنباله‌ی $A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} \right]$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $[0, 1]$ ۲. $(0, 1)$ ۳. $\{0\}$ ۴. \emptyset

۲- فرض کنید $A_n = (L_n, U_n)$ به طوری که $L_n < U_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - L_n) = 0$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. $A_n \downarrow$ ۲. $A_n \uparrow$
۳. $\lim A_n = \overline{\lim A_n} = \{a\}$ ۴. $\lim A_n = \overline{\lim A_n} = \emptyset$

۳- کوچکترین σ - میدان روی Ω برابر کدام گزینه است؟

۱. $P(\Omega)$ ۲. $\{\emptyset\}$ ۳. $\{\emptyset, \Omega\}$ ۴. \emptyset

۴- اگر τ یک توپولوژی روی Ω باشد و O یک مجموعه‌ی باز، آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. O زیرمجموعه‌ی تمام اعضای τ است. ۲. O زیرمجموعه‌ی تمام اعضای Ω است.
۳. O به τ تعلق دارد. ۴. O به τ تعلق ندارد.

۵- اگر τ یک توپولوژی از Ω باشد، آنگاه کدام گزینه تشکیل یک فضای توپولوژی می‌دهد؟

۱. (Ω, τ, P) ۲. (τ, P) ۳. (Ω, τ) ۴. (τ, Ω)

۶- فرض کنید \mathcal{S} و \mathcal{S}^* توپولوژی‌هایی روی Ω باشند به طوری که $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

۱. هر مجموعه عضو \mathcal{S}^* تحت \mathcal{S} باز است.
۲. Ω و \emptyset تحت \mathcal{S}^* باز هستند.
۳. $O_1 \in \mathcal{S}$ و $O_2 \in \mathcal{S}^*$ آنگاه $O_2 - O_1$ تحت \mathcal{S}^* باز است.
۴. $O_1 \in \mathcal{S}$ و $O_2 \in \mathcal{S}^*$ آنگاه $O_2 - O_1$ تحت \mathcal{S} باز است.

www.nashr-estekhdam.ir

۷- کدام گزینه تابع اندازه‌ای شمارشی است؟

۱. مقدار آن براساس تعداد اعضای مجموعه تعیین شود.
۲. روی مجموعه‌های گسسته تعریف شود.
۳. براساس افرازشای Ω اندازه‌گیری می‌کند.
۴. افزودن شماری از اعضا بر مقدار آن تاثیری ندارد.

۸- تعداد σ -میدان که از روی $\Omega = \{1, 2, 3\}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. 5 ۲. 8 ۳. 4 ۴. 6

۹- کدام گزینه با انجام عملیات مجموعه‌ای تشکیل یک سیگما-میدان نمی‌دهد؟

۱. اجتماع سیگما-میدان‌ها ۲. اشتراک سیگما-میدان‌ها
۳. مجموعه‌ی توانی $P(\Omega)$ ۴. $\{\phi, \Omega\}$

۱۰- کدام گزینه از توابع بر فضای Ω نسبت به سیگما-میدان $\{\phi, \Omega\}$ اندازه‌پذیرند؟

۱. ثابت ۲. خطی ۳. چندجمله‌ای ۴. تمامی توابع

۱۱- کدام گزینه در سه تایی (A, B, C) باید تابع احتمال باشد؟

۱. A ۲. B ۳. C ۴. A, C

۱۲- مجموعه‌های $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathfrak{S} = \{\phi, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ را در نظر بگیرید. اگر مقدار $P(A)$ براساس تعداد اعضای مجموعه تقسیم

بر سه روی تمامی زیرمجموعه‌های $\Omega = \{1, 2, 3\}$ تعریف شود، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱. $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{3}$ ۲. $P(\Omega) = 1$
۳. $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ ۴. $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ فضای احتمال نیست.

۱۳- برای دنباله‌ی صعودی $\{A_n\}$ کدام یک از موارد زیر درست است.

۱. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ ۲. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$
۳. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ۴. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

۱۴- برای دنباله‌ی صعودی $A_n \uparrow$ داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. کدام گزینه نادرست است؟

۱. $P(A_n | B) \uparrow P(\bigcup_n A_n | B)$ ۲. $P(A_n | B) \downarrow P(\bigcap_n A_n | B)$
۳. $P(A | B) + P(A^c | B) = 1$ ۴. $P(A | B) = 1 - P(A | B^c)$

۱۵- مفهوم $\overline{\lim} A_n$ با کدام گزینه یکی نیست؟

۱. $(A_n : i.o.)$

۲. (تعداد نامتناهی از A_n ها رخ دهند)

۴. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

۳. (از جایی به بعد تمام A_n ها رخ دهند)

۱۶- شرط $\lim_{n,m \rightarrow \infty} P\{w : |X_n(w) - X_m(w)| \rightarrow 0\} = 1$ چه نامیده می شود؟

۱. شرط کوشی

۲. شرط همگرایی

۳. شرط لیپانوف

۴. شرط مارکوف

۱۷- شرط لازم و کافی برای آنکه $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ معادل کدام گزینه است؟

۱. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$

۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$

۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$

۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\}, \quad \forall \varepsilon > 0$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۸- توابع I_A و I_B به ترتیب تابع نشانگر پیشامدهای A و B هستند.

شرط لازم و کافی برای آنکه I_B و I_A از هم مستقل باشند، برابر کدام گزینه است؟

۱. I_B و I_A ناهمبسته باشند.

۲. $I_{A \cup B} = I_A + I_B$

۳. $I_{A \cap B} = I_A I_B$

۴. $A \cap B = \emptyset$

۱۹- فرض کنید $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ از رابطه فوق کدام گزینه نتیجه می شود؟

۱. $X_n \xrightarrow{a.s.} 1$

۲. $\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n \geq N} \{|X_k - 1| > \varepsilon\}\right) = 1$

۴. $X_n \xrightarrow{P} 1$

۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} \{|X_k - 1| > \varepsilon\}\right) = 1$

۲۰- قضیه «توسیع کاراتئوری دوری» بیانگر کدام گزینه است؟

۱. یکنوایی تابع توزیع

۲. یکتایی تابع توزیع روی برل

۳. وجود یکتا تابع چگالی احتمال از تابع توزیع

۴. ارتباط بین هر متغیر تصادفی و تابع توزیع

۲۱- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال $x = 0, 1$; $P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$:

مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$ برابر با :

۱. p ۲. $1-p$ ۳. 1 ۴. $\frac{1}{2}$

۲۲- انتگرال X یا $\int_{\Omega} X dP$ به صورت حد عبارت $\sum_i X(w_i) P(A_i)$ تعریف می‌شود. با شرط اینکه :

۱. A_i ها پیشامد بوده و افرازی از Ω هستند.

۲. A_i ها زیرمجموعه‌های Ω هستند.

۳. A_i ها افرازی از Ω هستند.

۴. A_i ها پیشامدهایی هستند که w_i ها به آنها تعلق دارد.

۲۳- فرض کنید مجموعه $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ و $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega, \emptyset\}$ با مدل احتمال $P(\{1\}) = P(\{2, 3, 4\}) = \frac{1}{4}$ و

$$X(i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ 1 & i \neq 1 \end{cases} \text{ تعریف شده باشند.}$$

www.nashr-estekhdam.ir

مقدار $\sum_i X(w_i) P(A_i)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{3}{2}$ ۲. 3 ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. مقدار یکتایی ندارد.

۲۴- متغیر تصادفی ساده، متغیری است که مجموعه مقادیر آن باشد.

۱. متناهی ۲. فقط یک عضو داشته ۳. دو عضو داشته ۴. اعداد طبیعی

۲۵- نمایش متغیر تصادفی به صورت $X(w) = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(w)$ برای چه نوع متغیری قابل انجام است؟

۱. متغیر تصادفی گسسته ۲. متغیر تصادفی ساده
۳. متغیر تصادفی نامنفی ۴. به ازای هر افرازی روی Ω شدنی است.

۲۶- در لم فاتو برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی که متغیر تصادفی X میل می‌کند، داریم $E(X) \leq \lim E(X_n)$. کدام گزینه در اثبات این لم برقرار هست؟

$$E(X_n) \geq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) + \varepsilon \quad ۲ \quad E(X_n) \geq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon \quad ۱$$

$$E(X_n) \leq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon \quad ۴ \quad E(X_n) \leq E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) + \varepsilon \quad ۳$$

۲۷- اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد، آنگاه:

$$E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n) \quad ۲ \quad E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n) \quad ۱$$

$$E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n) \quad ۴ \quad E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n) \quad ۳$$

۲۸- در قضیه همگرایی یکنوا، برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی و صعودی بر فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) ، کدام گزینه درست است؟

۱. عملیات حدگیری با امیدریاضی قابل تعویض است.

۲. عملیات حدگیری با انتگرال قابل تعویض است.

۳. امیدریاضی با انتگرال تعویض می‌شود.

۴. وجود امیدریاضی تضمین می‌شود.

۲۹- کدام تابع محدب است؟

$$-x^2, x \in R \quad ۱ \quad \ln(x), x > 0 \quad ۲ \quad e^x, x \in R \quad ۳ \quad x^{-2}, x < 0 \quad ۴$$

www.nashr-estekhdam.ir

۳۰- کدام رابطه نادرست است؟

$$E^2(X) \leq E(X^2) \quad ۱ \quad e^{E(X)} \leq E(e^X) \quad ۲$$

$$E(\ln(X)) \leq \ln(E(X)) \quad ۳ \quad E\left(\frac{1}{X^2}\right) \leq \frac{1}{E(X^2)} \quad ۴$$

۳۱- برای تابعی نامنفی f و X متغیری تصادفی، با $a > 0$ ، کدام گزینه درست است؟

$$P(f(X) \geq a) \leq \frac{E(f(X))}{a} \quad ۱ \quad P(f(X) \geq a) \geq \frac{E(f(X))}{a} \quad ۲$$

$$P(f(X) \geq a) > \frac{E(f(X))}{a} \quad ۳ \quad P(f(X) \geq a) < \frac{E(f(X))}{a} \quad ۴$$

۳۲- اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) تعریف شده باشد، آنگاه مقدار $E(X | \Omega)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. Ω ۲. X ۳. $E(X)$ ۴. $E(X | \Omega)$

۳۳- اگر $\mathcal{K} = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}$ و X نسبت به (Ω, \mathcal{F}, P) تعریف شده باشد، آنگاه $E(X | \mathcal{K})$ برابر کدام گزینه است؟

۱. X ۲. یک ۳. $E(X)$ ۴. صفر

۳۴- فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $\mathcal{F} = P(\Omega)$ ، $\mathcal{K} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega, \emptyset\}$ و تابع احتمال بنحوی است که

احتمال پیشامدهای تک عضوی برابر $\frac{1}{4}$ را نسبت می‌دهد.

تعریف می‌کنیم $X(\omega) = \omega$ ، $\omega = 1, 2, 3, 4$. آنگاه کدام گزینه برابر با $Z = E(X | \mathcal{K})$ است؟

z	۱	۳
$P(Z = z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

z	۱	۳
$P(Z = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

z	α	β
$P(Z = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

z	α	β
$P(Z = z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۳۵- فرض کنیم X متغیری تصادفی با امید تصادفی بر (Ω, \mathcal{F}, P) باشد و $\mathcal{K}_\gamma \subset \mathcal{K}_\alpha$ دو زیر-میدان از \mathcal{F} باشند.

کدام گزینه معادل $E(E(X | \mathcal{K}_\alpha) | \mathcal{K}_\gamma)$ است؟

www.nashr-estekhdam.ir

۱. $E(X | \mathcal{K}_\alpha)$ ۲. $E(X | \mathcal{K}_\gamma)$

۳. $E(X | \mathcal{K}_\alpha - \mathcal{K}_\gamma)$ ۴. $E(X)$

۳۶- فرض کنید X متغیر تصادفی با امید ریاضی متناهی باشد. کدام گزینه درست است؟

۱. $E(e^{-(E(X) - X)}) \geq 1$ ۲. $E(e^{-(E(X) - X)}) \leq 1$

۳. $E(e^{E(X) - X}) \leq 1$ ۴. $E(e^{E(X) - X}) \geq 1$

۳۷- دنباله‌ی $\left\{ \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right\}$ ساخته شده از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین μ در نظربگیرید.

مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left(\frac{|\bar{X}_n - \mu|}{1 + |\bar{X}_n - \mu|} \right)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. یک ۲. صفر ۳. نیم ۴. بی‌نهایت

۳۸- فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی نامنفی $\{X_n\}$ چنان باشند که $E \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) < \infty$ آنگاه در همگرایی

تقریباً مطمئن داریم:

$$P \left(\sum_{i=1}^n X_i = \infty \right) = 0 \quad .2 \quad P \left(\sum_{i=1}^n X_i = \infty \right) = 1 \quad .1$$

$$P \left(\sum_{i=1}^n X_i < \infty \right) = 1 \quad .4 \quad P \left(\sum_{i=1}^n X_i < \infty \right) = 0 \quad .3$$

www.nashr-estekhdam.ir

۳۹- در چه صورت همگرایی‌های در احتمال، تقریباً مطمئن و در توزیع یکسان می‌شوند؟

۱. دنباله‌ای از متغیرهای مستقل باشند.
۲. دنباله‌ای از متغیرهای هم‌توزیع باشند.
۳. دنباله‌ای از نمونه‌ی تصادفی باشند.
۴. حد همگرایی دنباله‌ای به عددی ثابت باشد.

۴۰- فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی با

پارامتر $\frac{1}{n}$ باشد. اگر $E_n = \{X_n \geq 1\}$ ، آنگاه $P(\limsup E_n)$ برابر با:

۱. 1 ۲. 0.5 ۳. صفر ۴. 0.1

1	پ
2	د
3	پ
4	ج
5	ج
6	ج
7	الف
8	الف
9	الف
10	الف
11	ج
12	د
13	پ
14	د
15	الف
16	الف
17	الف
18	الف
19	الف
20	پ
21	الف
22	ل
23	ج
24	الف
25	پ
26	الف
27	الف
28	الف
29	ج
30	د
31	الف
32	پ
33	ج
34	الف
35	پ
36	الف
37	پ
38	د
39	د
40	ج

۱- فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی بر فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد. اگر تقریباً مطمئن $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ ، آنگاه کدام گزینه را داریم؟

$$E(X) \geq \underline{\lim} E(X_n) \quad .2$$

$$E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \quad .1$$

$$E(X) \leq \underline{\lim} E(X_n) \quad .4$$

$$E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \quad .3$$

۲- فرض کنید دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ به ترتیب به X و Y تقریباً مطمئن همگرا باشند و $f: R \rightarrow R$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست می‌باشد؟

$$\{X_n + Y_n\} \text{ تقریباً مطمئن به } X+Y \text{ میل می‌کند.} \quad .1$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\{X_n\} \text{ تقریباً مطمئن در شرط کوشی صدق می‌کند.} \quad .2$$

$$\text{تقریباً مطمئن } f(X_n) \text{ به } f(X) \text{ میل می‌کند.} \quad .3$$

$$\text{اگر دنباله } \{X_n\} \text{ تقریباً مطمئن به } X' \text{ میل کند، آنگاه تقریباً مطمئن } X' \neq X. \quad .4$$

۳- شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله $\{X_n\}$ در احتمال به X میل کند آن است که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} = 0 \quad .2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \frac{1 - |X_n - X|}{|X_n - X|} = 0 \quad .1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{1 + |X_n - X|}{|X_n - X|} = 0 \quad .4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{1 + |X_n - X|}{1 - |X_n - X|} = 0 \quad .3$$

۴- می‌دانیم: اگر X دارای توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ باشد، آنگاه $1 - X$ نیز دارای توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ است. اگر دنباله‌ای وجود داشته باشد به طوری که $X_n \xrightarrow{d} X$ ، آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

$$|X_n - X| \xrightarrow{p} 0 \quad .4$$

$$1 - X_n \xrightarrow{d} X \quad .3$$

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad .2$$

$$X_n \xrightarrow{d} 1 - X \quad .1$$

۵- اگر $X_n \xrightarrow{d} X$ و $X_n \xrightarrow{d} Y$ ، در این صورت X و Y ،
 ۱. برابر می باشند.
 ۲. به جزء روی مجموعه ای که شانس آن صفر است، هم توزیع اند.
 ۳. هم توزیع نیستند.
 ۴. برابر و هم توزیع هستند.

www.nashr-estekhdam.ir

۶- اگر $X_n \xrightarrow{d} X$ و $Y_n \xrightarrow{p} c$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟
 ۱. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
 ۲. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} c$
 ۳. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X$
 ۴. $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X$

۷- فرض کنید $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دو دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی باشند که به ترتیب به X و Y همگرا هستند. کدام گزینه درست است؟
 ۱. X و Y مستقل اند.
 ۲. X و Y هم توزیع اند.
 ۳. X و Y وابسته اند.
 ۴. X و Y دارای توزیع نرمال هستند.

۸- فرض کنید $\Omega = R$ و به ازای هر $n \geq 1$ تعریف کنید $A_n = (n, n+2]$. اگر $C_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ باشد، آنگاه:
 ۱. $C_n = \emptyset, n > 1$
 ۲. $C_n = \emptyset, n \geq 1$
 ۳. $C_n = \emptyset, n > 2$
 ۴. $C_n = \emptyset, n \geq 2$

۹- اگر A_1, A_2, \dots دنباله ای از زیرمجموعه های Ω باشند، آنگاه:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Lim}} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k & \underline{\text{Lim}} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} A_k \\ \underline{\text{Lim}} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k & \overline{\text{Lim}} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \end{aligned}$$

۱۰- فرض کنید $A_n = (n, n + \frac{1}{n})$ ، کدام گزینه درست است؟

۱. $\underline{\text{Lim}} A_n = (0, \infty)$ ۲. $\overline{\text{Lim}} A_n = (0, \infty)$ ۳. $\overline{\text{Lim}} A_n = \phi$ ۴. $\overline{\text{Lim}} A_n = n$

۱۱- اگر دنباله $A_n = (0, n)$ باشد، آنگاه:

۱. $\underline{\text{Lim}} A_n = [0, \infty)$ ۲. $\underline{\text{Lim}} A_n = \overline{\text{Lim}} A_n = (0, \infty)$

۳. $\underline{\text{Lim}} A_n = \phi$ ۴. $\overline{\text{Lim}} A_n = \phi$

۱۲- فرض کنید $A_n \downarrow$ ، در این صورت کدام گزینه برقرار است؟

۱. $\underline{\text{Lim}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ۲. $\overline{\text{Lim}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

۳. $\underline{\text{Lim}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ۴. $A_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۳- اگر Ω متناهی و دارای ۳ عضو باشد، آنگاه $P(\Omega)$ دارای عضو است.

۱. ۴ ۲. ۹ ۳. ۶ ۴. ۸

۱۴- فرض کنید \mathfrak{S} ، σ - میدان ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد. در این صورت کدام گزینه نا درست است؟

۱. اگر $A, B \in \mathfrak{S}$ آنگاه $A \cap B = \phi$ ۲. $\phi, \Omega \in \mathfrak{S}$

۳. اگر $A, B \in \mathfrak{S}$ آنگاه $A - B \in \mathfrak{S}$ ۴. اگر $A_i \in \mathfrak{S}$ ، $i = 1, 2, \dots$ ، آنگاه $\bigcap_i A_i \in \mathfrak{S}$

۱۵- فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3\}$ باشد، در این صورت کدام یک از مجموعه‌های زیر یک توپولوژی روی Ω نیست؟

۱. $\{\phi, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ ۲. $\{\phi, \Omega, \{1\}\}$ ۳. $\{\phi, \Omega\}$ ۴. $P(\Omega)$

۱۶- فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\{\phi, \Omega, \{1\}, \{1, 2\}\}$ یک توپولوژی روی آن باشد، آنگاه کدام گزینه، یک مجموعه نه باز و نه بسته است؟

۱. $\{2\}$ ۲. $\{3\}$ ۳. $\{2 \text{ و } 3\}$ ۴. ϕ

۱۷- فرض کنید τ یک توپولوژی روی Ω باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱. اجتماع دلخواهی از مجموعه‌های باز، باز است.
۲. اشتراک نامتناهی از مجموعه‌های باز، باز است.
۳. اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.
۴. الف و ج

۱۸- فرض کنید Ω مجموعه دلخواه و $D \subset P(\Omega)$ ، در این صورت \mathfrak{I} را کوچکترین σ -میدان شامل D گوییم هرگاه:

۱. $D \subset \mathfrak{I}$
 ۲. اگر G, σ -میدانی باشد که $D \subset G$ آنگاه $\mathfrak{I} \subset G$.
 ۳. $D \subset \mathfrak{I}$ و اگر G, σ -میدان دیگری باشد که $D \subset G$ آنگاه $\mathfrak{I} \subset G$.
 ۴. $D \subset \mathfrak{I}$ و اگر G, σ -میدان دیگری باشد که $D \subset G$ آنگاه $G \subset \mathfrak{I}$.
- www.nashr-estekhdam.ir

۱۹- اگر $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $D = \{\{1\}\}$ باشد، آنگاه:

۱. $\sigma(D) = \{\phi, \Omega, \{1\}\}$
۲. $\sigma(D) = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{1, 2\}\}$
۳. $\sigma(D) = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$
۴. $\sigma(D) = \{\phi, \Omega, \{2, 3\}\}$

۲۰- فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathfrak{I}_0 = \{\phi, \Omega\}$ ، $\mathfrak{I}_1 = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ و $\mathfrak{I}_2 = P(\Omega)$ باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر فضای اندازه‌پذیر نیست؟

۱. (Ω, \mathfrak{I}_0)
۲. $(\Omega, \{\phi, \{1\}, \{2, 3\}\})$
۳. (Ω, \mathfrak{I}_1)
۴. (Ω, \mathfrak{I}_2)

۲۱- اگر $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathfrak{I} = P(\Omega)$ باشد، تابع اندازه μ بر \mathfrak{I} را به صورت $\mu: \mathfrak{I} \rightarrow [0, \infty]$ با ضابطه‌ی (تعداد اعضای A) $\mu(A) = |A|$ تعریف می‌کنیم. در این صورت کدام گزینه برابر با ۳ است؟

۱. $\mu(\{1, 2, 3\})$
۲. $\mu(\phi)$
۳. $\mu(\{3\})$
۴. $\mu(\{1, 2, 3\})$

۲۲- فضای اندازه $(R, B(R))$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A = [0, 1]$ ، در این صورت کدام گزینه σ -میدانی از زیر مجموعه‌های $[0, 1]$ است؟

۱. $\{([0, 1] \cup B \mid B \in B(R))\}$
۲. $\{([0, 1] \cap B \mid B \in B(R))\}$
۳. $\{([0, 1] \cup B \mid B \in B(R))\}$
۴. $\{([0, 1] \cap B \mid B \in B(R))\}$

۲۳- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sin x$ داده شده باشد، در این صورت:

۱. $f^{-1}(-\infty, -1) = \mathbb{R}$ ۲. $f^{-1}(-\infty, -1) = \emptyset$
 ۳. $f^{-1}(-\infty, -1) = [-1, 0)$ ۴. $f^{-1}(-\infty, -1) = [0, 1)$

۲۴- کدام یک از گزینه‌های زیر از ویژگی‌های تابع نشانگر نیست؟

۱. $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$ ۲. $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$
 ۳. $I_{A \cap B} = I_A + I_B$ ۴. $I_\emptyset \equiv 0$

۲۵- کدام گزینه صورت کانونی تابع $f(x) = {}^2I_{(-1,2)}(x) - {}^3I_{[2,5)}(x)$ را نشان می‌دهد؟

۱. ${}^2I_{(-1,2)}(x) - I_{[2,2]}(x) + {}^3I_{[3,5)}(x)$ ۲. ${}^2I_{(-1,2)}(x) - I_{[2,2]}(x) - {}^3I_{(3,5)}(x)$
 ۳. ${}^2I_{(-1,2)}(x) - I_{[2,2]}(x) - {}^3I_{(3,5)}(x)$ ۴. ${}^2I_{(-1,2)}(x) - {}^2I_{[2,2]}(x) - {}^3I_{(3,5)}(x)$

۲۶- فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه و I_A و I_B به ترتیب توابع نشانگر آنها باشند. در این صورت:

۱. $\text{Min}\{I_A, I_B\} = I_{A \cap B}$ ۲. $\text{Max}\{I_A, I_B\} = I_{A \cap B}$
 ۳. $\text{Max}\{I_A, I_B\} = I_{A-B}$ ۴. $\text{Min}\{I_A, I_B\} = I_{A-B}$

۲۷- اگر $A_n \rightarrow A$ آنگاه:

۱. $A_n^c \rightarrow A^c$ ۲. $A_n^c \rightarrow A$ ۳. $A_n \rightarrow A^c$ ۴. $A_n \rightarrow \Omega - A$

۲۸- اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی محدود به متغیری با امید متناهی باشد، آنگاه:

۱. $E(\underline{\text{Lim}} X_n) = \underline{\text{Lim}} E(X_n) < \overline{\text{Lim}} E(X_n) = E(\overline{\text{Lim}} X_n)$
 ۲. $\overline{\text{Lim}} E(X_n) \leq E(\overline{\text{Lim}} X_n) \leq E(\underline{\text{Lim}} X_n) \leq \underline{\text{Lim}} E(X_n)$
 ۳. $E(\underline{\text{Lim}} X_n) \leq \underline{\text{Lim}} E(X_n) \leq \overline{\text{Lim}} E(X_n) \leq E(\overline{\text{Lim}} X_n)$
 ۴. $\overline{\text{Lim}} E(X_n) < E(\overline{\text{Lim}} X_n) = E(\underline{\text{Lim}} X_n) < \underline{\text{Lim}} E(X_n)$

۲۹- اگر X نیم انتگرال پذیر باشد، آنگاه امید ریاضی X برابر با کدام گزینه است؟

۱. $E(X^+) - E(|X|)$ ۲. $E(X^-) - E(X^+)$ ۳. $E(X^+) + E(X^-)$ ۴. $E(X^+) - E(X^-)$

۳۰- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای امید ریاضی متناهی $E(\varphi(X))$ باشد. کدام گزینه نابرابری جنسن را بیان می‌کند؟

۱. به ازای هر تابع محدب φ داریم: $\varphi(E(X)) \geq E(\varphi(X))$
۲. به ازای هر تابع ثابت φ داریم: $\varphi(E(X)) \geq E(\varphi(X))$
۳. به ازای هر تابع محدب φ داریم: $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$
۴. به ازای هر تابع مقعر φ داریم: $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$

۳۱- فرض کنید X و Y و Z سه متغیر تصادفی بر فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ باشند، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $E(E(X|Y)|Y, Z) = E(E(X|Y, Z)|Y)$
۲. $E(E(X|Y)|Y, Z) = E(E(X|Y, Z)|Y)$
۳. $E(E(X|Y, Z)|Y) = E(E(X|X)|Y)$
۴. $E(E(X|Z)|Y, Z) = E(E(X|Y, Z)|Y)$

۳۲- فرض کنید $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \Omega$ و $\mathfrak{S} = P(\Omega)$ باشد. برای هر $A \in \mathfrak{S}$ ، تعریف کنید: $n / \text{تعداد اعضای } A$
 $P(A) =$

اگر $A = \{a_i\}$ آنگاه $P(A)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{n}$
۲. $\frac{1}{n}$
۳. $\frac{1}{n}$
۴. $\frac{1}{n}$

۳۳- فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل در فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ باشند. در این صورت کدام گزینه هم ارز با احکام

دیگر نیست؟

۱. B^c و A مستقل اند.
۲. B^c و A^c مستقل اند.
۳. $P(A|B) = P(A)$
۴. $P(B|A) = P(A)$

۳۴- فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدها از فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد. در این صورت کدام گزینه است؟

۱. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 0$

۲. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 1$

۳. اگر A_n ها مستقل باشند و $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 0$

۴. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 1$

۳۵- در فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) فرض کنید A_i ها و B_i ها پیشامدهایی باشند که به ازای هر i ، $P(A_i) = 1$ و $P(B_i) = 0$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $P(\bigcup_i B_i) = 1$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 0$

۲. $P(\bigcup_i B_i) = 0$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 1$

۳. $P(\bigcup_i B_i) = 1$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 1$

۴. $P(\bigcup_i B_i) = 0$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 0$

۳۶- در فضای زیر مجموعه‌های پیشامدهای با احتمال پیشامداند.

۱. کامل - ۰

۲. نمونه ای - ۰

۳. کامل - ۱

۴. اندازه پذیر - ۱

www.nashr-estekhdam.ir

۳۷- شرط لازم و کافی برای آنکه $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ آن است که به ازای هر $\varepsilon > 0$:

۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |X_k - X| < \varepsilon) = 0$

۱. $\lim_{N \rightarrow \infty} P(\bigcup_{n \geq N} \{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 0$

۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon) = 0$

۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\inf_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon) = 0$

۳۴- فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدها از فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد. در این صورت کدام گزینه است؟

۱. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 0$

۲. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 1$

۳. اگر A_n ها مستقل باشند و $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 0$

www.nashr-estekhdam.ir

۴. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ آنگاه $P(A_n : i.o.) = 1$

۳۵- در فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) ، فرض کنید A_i ها و B_i ها پیشامدهایی باشند که به ازای هر i ، $P(A_i) = 1$ و $P(B_i) = 0$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $P(\bigcup_i B_i) = 1$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 0$

۲. $P(\bigcup_i B_i) = 0$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 1$

۳. $P(\bigcup_i B_i) = 1$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 1$

۴. $P(\bigcup_i B_i) = 0$ ، $P(\bigcap_i A_i) = 0$

۳۶- در فضای زیر مجموعه‌های پیشامدهای با احتمال پیشامداند.

۱. کامل - ۰

۲. نمونه ای - ۰

۳. کامل - ۱

۴. اندازه پذیر - ۱

۳۷-

شرط لازم و کافی برای آنکه $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ آن است که به ازای هر $\varepsilon > 0$:

۱. $\lim_{N \rightarrow \infty} P(\bigcup_{n \geq N} \{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 0$

۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |X_k - X| < \varepsilon) = 0$

۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\inf_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon) = 0$

۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon) = 0$

۳۸- کدام گزینه از ویژگی‌های تابع توزیع می‌باشد؟

۱. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 1$

۲. $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$

۳. اگر $a < b$ آنگاه $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

۴. $P(X = a) = F(a)$

۳۹- دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گوئیم هرگاه به ازای هر دو مجموعه بورل A و B داشته باشیم:

۱. $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) + P(Y \in B)$

۲. $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cap P(Y \in B)$

۳. $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cup P(Y \in B)$

۴. $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$

۴۰- فرض کنید \mathcal{G} و \mathcal{G} دو σ -میدان مستقل باشند. اگر X نسبت به \mathcal{G} و G متغیر تصادفی باشد، آنگاه X :

۱. تابع نزولی است.

۲. تابع ثابت است.

۳. تابع صعودی است.

۴. تابع محدب است.

1	د
2	د
3	ب
4	ب
5	ب
6	الف
7	الف
8	ج
9	د
10	ج
11	ب
12	ج
13	د
14	الف
15	ب
16	الف
17	ب
18	ج
19	ج
20	ب
21	د
22	د
23	ب
24	ج
25	ب
26	الف
27	الف
28	ج
29	د
30	ج
31	ب
32	ج
33	د
34	الف
35	ب
36	الف
37	د
38	ج
39	ج
40	ب

۱- حد پایینی دنباله‌ی $A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} \right]$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $[0, 1]$ ۲. $(0, 1)$ ۳. $[0, 1)$ ۴. $(0, 1]$

۲- حد بالایی دنباله‌ی $A_n = \left(\frac{n}{n+2}, \frac{n}{n+1} \right)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ ۲. $(0, 1]$ ۳. ϕ ۴. $\{1\}$

۳- اگر $A_n = (L_n, U_n)$ به طوری که $L_n < U_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - L_n) = 0$ آنگاه:

۱. A_n ها یک دنباله‌ی نزولی هستند. ۲. A_n ها یک دنباله‌ی صعودی هستند.

۳. $\lim A_n = \overline{\lim A_n} = \{a\}$ ۴. $\lim A_n = \overline{\lim A_n} = \phi$

۴- کوچکترین σ - میدان روی Ω کدام گزینه است؟

۱. $P(\Omega)$ ۲. $\{\phi\}$ ۳. $\{\phi, \Omega\}$ ۴. $\{\Omega\}$

۵- فرض کنیم $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A = \{\}$ آنگاه کدام گزینه σ - میدان نیست؟

۱. $\mathfrak{I}_1 = \{A, A^c, \phi, \Omega\}$ ۲. $\mathfrak{I}_2 = \{A, \{1, 2\}, A^c, \{3, 4\}, \Omega, \phi\}$

۳. $\mathfrak{I}_3 = \{A, A^c, \phi, \Omega, \{3\}, \{1, 2, 4\}\}$ ۴. $\mathfrak{I}_4 = \{\phi, \{1, 2, 3, 4\}\}$

۶- اگر \mathfrak{I} یک σ - میدان ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\Omega \in \mathfrak{I}$ ۲. $\bigcap_i A_i \in \mathfrak{I}, A_i \in \mathfrak{I}, i = 1, 2, \dots$

۳. $A - B \in \mathfrak{I}, A, B \in \mathfrak{I}$ ۴. $A \cup B \in \mathfrak{I}, \forall B \subset \Omega$

www.nashr-estekhdam.ir

۷- اگر $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ آنگاه کدام گزینه یک مجموعه‌ی توپولوژی است؟

۱. $\mathfrak{I}_1 = \{\phi, \{1\}, \{1, 2\}\}$ ۲. $\mathfrak{I}_2 = \{\phi, \Omega, \{1\}\}$

۳. $\mathfrak{I}_3 = \{\phi, \{1\}, \{2, 3\}\}$ ۴. $\mathfrak{I}_4 = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{3, 4\}\}$

۸- فرض کنید \mathcal{S} و \mathcal{S}^* توپولوژی‌هایی روی Ω باشند به طوری که $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

۱. هر مجموعه از \mathcal{S}^* تحت \mathcal{S} باز است.

۲. Ω و \emptyset تحت \mathcal{S}^* باز هستند.

۳. $O_1 \in \mathcal{S}$ و $O_2 \in \mathcal{S}^*$ آنگاه $O_2 - O_1$ تحت \mathcal{S}^* باز است.

۴. $O_1 \in \mathcal{S}$ و $O_2 \in \mathcal{S}^*$ آنگاه $O_2 - O_1$ تحت \mathcal{S} باز است.

۹- چند سیگما-میدان از روی $\Omega = \{1, 2, 3\}$ می‌توان ساخت؟

۴. ۶

۳. ۴

۲. ۸

۱. ۵

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اجتماع سیگما-میدان‌ها، سیگما میدان است.

۲. اشتراک سیگما-میدان‌ها، سیگما میدان است.

۳. مجموعه‌ی توانی $P(\Omega)$ ، بزرگترین سیگما میدان است.

۴. $\{\emptyset, \Omega\}$ کوچکترین سیگما میدان است.

۱۱- فرض کنید A و B دو پیشامد باشند به طوری که $A \subset B$. دنباله‌ی $\{A_n\}$ از پیشامدها به صورت زیر تعریف می‌شود:

www.nashr-estekhdam.ir

$$A_n = \begin{cases} A & \text{فرد } n \text{ باشد} \\ B & \text{زوج } n \text{ باشد} \end{cases}$$

آنگاه کدام گزینه برابر با $\lim A_n$ است؟

۴. B

۳. A^c

۲. $B - A$

۱. A

۱۲- اگر A و B دو پیشامد باشند، آنگاه مقدار تابع نشانگر $I_{A \Delta B}$ معادل کدام گزینه است؟

۴. $I_A I_B - I_{A \cap B}$

۳. $I_A + I_B - I_{A \cap B}$

۲. $I_A I_{B^c} + I_{A^c} I_B$

۱. $I_A + I_B$

۱۳- کدام توابع بر Ω نسبت به سیگما-میدان $\{\emptyset, \Omega\}$ اندازه‌پذیرند؟

۴. تمامی توابع

۳. چندجمله‌ای

۲. خطی

۱. ثابت

۱۴- فرض کنید $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ افرازی از Ω باشد و $\mathcal{S} = \sigma(D)$. شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

نسبت به \mathcal{S} اندازه‌پذیر باشد آن است که تحدید f روی هر D_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ،

۴. وارون‌پذیر باشد.

۳. یکسان باشد.

۲. اندازه‌پذیر باشد.

۱. ثابت باشد.

۱۵- صورت کانونی تابع بصورت:

۱. توابع ساده که مجموعه های دخیل در آن جدا از هم هستند تعریف می شود.

۲. توابع متناهی ساده که مجموعه های دخیل در آن جدا از هم هستند تعریف می شود.

۳. توابع نامنفی که مجموعه های دخیل در آن جدا از هم هستند تعریف می شود.

۴. توابع ساده که مجموعه های دخیل در آن متناهی هستند تعریف می شود.

۱۶- فرض کنیم $\Omega = \{1, 2, 3\}$ و $\mathfrak{I} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ ، تابع P با ضابطه $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ را در نظر

بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۲. $P(\Omega) = 1$

۱. $P(\{1, 2\}) = \frac{2}{3}$

۴. $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ فضای احتمال نیست.

۳. $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$

۱۷- در مسائل واقعی و کاربردی معمولاً Ω شمارا (و حتی متناهی) است و

۲. $\mathfrak{I} = P(\Omega)$

۱. \mathfrak{I} متشکل از همه ی مجموعه های تک عضوی

۴. $\mathfrak{I} = \{\emptyset, \Omega, P(\Omega)\}$

۳. $\mathfrak{I} = \{a_i\} \cup \{a_j\} \cup \dots$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۸- فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله ای از پیشامدهای صعودی باشد. در این صورت :

۲. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

۱. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$

۴. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \underline{\lim} P(A_n)$

۳. $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \overline{\lim} P(A_n)$

۱۹- فرض کنید $A_n = \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ ، $n \in N$ مجموعه هایی از فاصله ی $(0, 1)$ باشند. اگر مدل یکنواخت احتمال روی بازه ی

$(0, 1)$ در نظر بگیریم آنگاه مقدار $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c)$ برابر کدام گزینه است؟

۴. حد ندارد

۳. ۱

۲. $\frac{1}{2}$

۱. صفر

۲۰- اگر $A_n \uparrow$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۲. $P(A_n | B) \downarrow P(\bigcap_n A_n | B)$

۱. $P(A_n | B) \uparrow P(\bigcup_n A_n | B)$

۴. $P(A | B) = 1 - P(A | B^c)$

۳. $P(A | B) + P(A^c | B) = 1$

۲۱- کدام گزینه در مورد فضای احتمال صحیح است؟

۱. هر فضای احتمال کامل است.
۲. هر فضای احتمال را می توان کامل کرد.
۳. فضای احتمال نمی تواند کامل باشد.
۴. هر فضای احتمال بسته است.

۲۲- $\lim A_n$ با کدام عبارت معادل نیست؟

۱. $(A_n : i.o.)$
۲. (تعداد نامتناهی از A_n ها رخ دهند)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

۳. (از جایی به بعد تمام A_n ها رخ دهند)
- ۴.

۲۳- فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله ای از پیشامدهای فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد. اگر $P(A_n) = 2^{-n}$ تعریف شود، آنگاه مقدار $P(A_n : i.o.)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. صفر
۲. یک
۳. $\frac{1}{2}$
۴. $\frac{1}{4}$

۲۴- اگر $\{A_n\}$ دنباله ای از پیشامدهای مستقل از فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد، و $P(A_n) = 0.25$ آنگاه مقدار $P(A_n : i.o.)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. k
۲. صفر
۳. یک
۴. e^{-k}

۲۵- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. $\overline{\lim} P(A_n) > P(A)$
۲. $\underline{\lim} P(A_n) < P(A)$
۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$
۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) < P(A)$

۲۶- اگر A_1, \dots, A_n پیشامدهایی از فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشند، آنگاه:

۱. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1)$
۲. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - n$
۳. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i^c) - n$
۴. $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \left(\frac{n-1}{n}\right)$

www.nashr-estekhdam.ir

۲۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\lim X_n = \inf_n \sup_{k \geq n} X_k$
۲. $\underline{\lim} X_n = \sup_n \inf_{k \geq n} X_k$

۳. $\underline{\lim} X_n \leq \overline{\lim} X_n$
۴. $\underline{\lim} X_n \geq \overline{\lim} X_n$

۲۸- فرض کنیم $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ و $\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ و $P(\{1\}) = 0$ ، $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{3}$ متغیر تصادفی X بر Ω چنین تعریف می‌شود:

$$X(2) = X(3) = X(4) = 0 \quad , \quad X(1) = 5$$

کدام گزینه درست است؟

$$P(X > 5) = \frac{2}{3} \quad .2$$

$$P(X = 5) = \frac{2}{3} \quad .1$$

$$(X = 0 : a.s.) \quad .4$$

$$X \quad \text{یک تابع ثابت است.} \quad .3$$

۲۹- شرط کوشی کدام گزینه است؟

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |X_n - X_m| = 0 \quad .2$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P\{w : |X_n(w) - X_m(w)| \rightarrow 0\} = 1 \quad .1$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1 \quad .4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad .3$$

۳۰- شرط لازم و کافی برای آنکه $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ آن است که :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad .1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad .2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad .3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad .4$$

۳۱- فرض کنید $P\left(\bigcup_{n \geq N} \{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

$$X_n \xrightarrow{a.s.} 1 \quad .2$$

$$X_n \xrightarrow{P} 1 \quad .1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} \{|X_k - 1| > \varepsilon\}\right) = 1 \quad .4$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n \geq N} \{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right) = 1 \quad .3$$

۳۲- کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱. همگرایی قریب به یقین از همگرایی در احتمال ضعیفتر است.

۲. همگرایی قریب به یقین از همگرایی در احتمال از لحاظ قدرت معادلند.

۳. همگرایی قریب به یقین از همگرایی در احتمال قویتر است.

۴. بستگی به حجم نمونه و نرخ همگرایی دارد.

۳۳- هر تابع نامنفی اندازه پذیر را می توان بصورت حد دنباله ای صعودی از توابعو.....نوشت.

۱. ساده و اندازه پذیر ۲. نامنفی و مشتق پذیر ۳. نامنفی و پیوسته ۴. ساده و پیوسته

۳۴- فرض کنید متغیر تصادفی X از روی تعداد شیرها در سه بار پرتاب یک سکه تعریف شود. با توجه به

$A_i = \{w \in \Omega \mid X(w) = i\}, i = 0, 1, 2, 3$ کدام گزینه درست نیست؟

$$X(w) = \sum_{i=0}^3 I_{A_i}(w) \quad .1 \quad X(w) = \sum_{i=0}^3 i I_{A_i}(w) \quad .2$$

$$X^{-1}(i) = A_i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad .3 \quad E(X) = \sum_{i=0}^3 i P(A_i) \quad .4$$

۳۵- فرض کنیم X نامنفی و $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی ساده و صعودی باشد که به X میل می کند، و Y

متغیر تصادفی ساده و نامنفی است به طوری که $X \geq Y$. تعریف می کنیم $A_n = \{w \mid X_n(w) > Y(w) - \varepsilon\}$. کدام گزینه برقرار است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \Omega \quad .1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset \quad .2 \quad \overline{A_n} \uparrow \quad .3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \Omega \quad .4$$

۳۶- شرط لم فاتو کدام گزینه است؟

۱. دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی که یک متغیر تصادفی میل کند.

۲. کرانی برای امید ریاضی

۳. موجود بودن حد پایینی امید ریاضی دنباله ای از متغیرها

۴. متغیرهای تصادفی دارای امید ریاضی باشند.

www.nashr-estekhdam.ir

۳۷- اگر $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی محدود به متغیری با امید متناهی باشد آنگاه

$$\underline{\lim} E(X_n) \leq \underline{\lim} E(X_n) \quad .1 \quad E(\underline{\lim} X_n) \geq \underline{\lim} E(X_n) \quad .2$$

$$E(\overline{\lim} X_n) \leq \overline{\lim} E(X_n) \quad .3 \quad E(\overline{\lim} X_n) \geq \overline{\lim} E(X_n) \quad .4$$

۳۸- در قضیه‌ی همگرایی یکنوا، شرط لازم کدام گزینه است؟

۱. دنباله‌ی متغیرهای تصادفی یکنوا باشد.
۲. دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل باشد.
۳. دنباله‌ی متغیرهای تصادفی در شرایط لم فاتو صدق کنند.
۴. دنباله‌ی متغیرهای تصادفی نامنفی و غیرنزولی باشند.

۳۹- یکتایی حد وقتی رخ می‌دهد که نوع همگرایی از کدام گزینه باشد؟

۱. در احتمال
۲. توزیع
۳. تقریباً مطمئن
۴. محدودیت نوع همگرایی ندارد.

۴۰- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله‌ی $\{X_n\}$ در احتمال به X میل کند، است؟

۱. $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right] = 0$
۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n - X|}{1 - |X_n - X|} \right] = 0$
۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \right] = 0$
۴. $E \left[\frac{|X|}{1 + |X|} \right] = 0$

۱	ب
۲	ج
۳	د
۴	ج
۵	ج
۶	د
۷	ب
۸	ج
۹	الف
۱۰	الف
۱۱	الف
۱۲	ب
۱۳	الف
۱۴	الف
۱۵	الف
۱۶	ب
۱۷	ب
۱۸	ب
۱۹	الف
۲۰	د
۲۱	ب
۲۲	ج
۲۳	الف
۲۴	ج
۲۵	ج
۲۶	الف
۲۷	د
۲۸	د
۲۹	الف
۳۰	الف
۳۱	ب
۳۲	ج
۳۳	الف
۳۴	ب
۳۵	د
۳۶	الف
۳۷	ج
۳۸	د
۳۹	الف، د
۴۰	الف