به نام خدا

روشهای نمونه گیری۱

رشته: آمار

ا

فهرست مطالب

فصل اول

کلیات

هدف های رفتاری فصل اول

- جامعه را تعریف کنید
- مفهوم سر شماری را بیان کنید
- نمونه راتعریف کنید
- بررسی های نمونه ای را رده بندی کنید
- هدف بررسی های توصیفی و بررسی های تحلیلی را بیان کنید
- مزایای نمونه گیری را توضیح دهید

مراحل اصلی در یک نمونه گیری رابیان کنی

– انواع روش های برآورد را بنویسید-

– ملاک های یک برآورد خوب را توضیح دهید

- ملاک های نااریبی،سازگاری،کارایی وکفایت را برای یک براوردتعریف کنید
- برآورد فاصله ای را تعریف کنید
- مواردی را که فرض نرمال بودن توزیع یک برآورد را می توان پذیرفت مشخص کنید

– ضریب تغییرات یک متغیر را محاسبه کنید

میانگین مربع خطا(*MSE*)را برای یک برآوردتعریف

کرده و مقدار آن را تعیین نمایید

– مواردی که فرض نرمال بودن توزیع یک برآوردکننده

را

می توان پذیرفت مشخص کنید

-ضریب تغییرات یک متغیر را محاسبه کنید

-تفاوتهای نظریه ی نمونه گیری متعارف و

کلاسیک را بیان کنید

مقدمه

در این فصل مفاهیم آماری لازم از قبیل جامعه،نمونه،نمونه گیری سرشماری،برآورد،فاصله اطمینان و....معرفی می شود

۱-۱ جامعه

در هر بررسی آماری ،مجموعه عناصر مورد نظر را جامعه می گویند

۱–۲ سرشماری

سر شماری از جامعه متناهی بررسی است که تمام واحدهای جامعه را در بر گیرد

۱-۳ نمونه

نمونه بخشی از جامعه تحت بررسی است که با روشی که از پیش تعیین شده است انتخاب می شود،به قسمی که می توان از این بخش استنباط هایی درباره کل جامعه بدست آورد

بررسی نمونه:

فرآیند انتخاب نمونه و استخراج نتایج و استنباطهای حاصل را بررسی نمونه ای می نامند

۱- بررسی نمونه توصیفی:هدف صرفا کسب اطلاع در مورد گروه های بزرگ است

۲- بررسی نمونه تحلیلی:بین زیرگروههای متفاوتی از جامعه ،برا کشف تاوتهای انها مقایسه هایی صرت می گیردو یا فرض هایی را درباره ی دلائل این تفاوتها عنوان کرده و موردتحقیق قرار می دهند

٤-١ مزایای نمونه گیری

۱- تقلیل هزینه:اگر داده ها فقط ا ز نسبت کوچکی از توده ی جامعه تامین شوند مسلماً هزینه ی تهیه ی آنها به مراتب کمتر از سر شماری است.

۲- سرعت بیشتر:چون حجم نمونه کمتر از جامعه در سرشماری است،جمع آوری و تلخیص داده ها با سرعت بیشتر،یعنی با وقت کمتری انجام می شود.

۳- قدرت عمل بیشتر

٤- صحت عمل بیشتر

۵- حفظ واحدهای جامعه:در بعضی از جوامع امکان سرشماری نیست و نا گزیریم برای بررسی مشخصه ی مورد نظر از نمونه گیری استفاده کنیم.

۱–۵ مراحل اصلی در یک بررسی نمونه ای

۱– اهداف بررسی

همواره باید حکمی روشن و صریح درباره هدف های بررسی در دست باشد

۲– جامعه نمونه گیری

جامعه ای که از آن نمونه می گیریم باید دقیق تعریف شود.جامعه ای که می خواهیم درباره ی آن کسب اطلاع کنیم جامعه هدف نامیده می شود.جامعه ای که از آن نمونه گیری می کنیم قاعدتاً باید بر جامعه هدف منطبق باشد ولی بی دلایل عملی و یا برای سهولت کار جامعه مورد نمونه گیری اغلب محدود تر از جامعه هدف است

۳–جمع آوری داده ها:
لازم است تحقیق کنیم که تمام داده ها به اهداف بررسی مربوط اند و هیچ داده اساسی از قلم نیفتاده است

٤ – درجه دقت مطلوب

۵ – روش های اندازه گیری

۶- چارچوب

فهرست واحد های نمونه را چارچوب می نامندکه غالباً تعیین آن یکی از مسائل عمده ی کار نمونه گیری است

۷- انتخاب نمونه

۸- پیش آزمون

پیش آزمون معمولا با هزینه کم مانع از به هدر رفتن هزینه زیاد نمونه گیری اصلی می شود

۹- آموزش آمارگران

۱۰- تلخیص و تحلیل داده ها

۱۱- اطلاعات حاصل برای بررسی های آتی هر نمونه ای که از جامعه گرفته می شود،بالقوه راهنمایی برای اصلاح نمونه گیری های بعدی است

۱-٦ مروری بر برخی مفاهیم آماری

در نظریه نمونه گیری،برآوردپارامترهاو تهیه ی حکم احتمالاتی درباره ی دقت برآورداز اهداف اصلی است.

۱–برآورد

برآوردکننده و یا برآوردی را از نظر آماری خوب گوییم که در چهار ملاک نااریبی،سازگاری،کارایی و کفایت صادق باشد

نا اریبی

اگر پارامتر نا معلوم جامعه θ باشد و اگر برآورد کننده ی آن $\hat{\theta}$، آماره ای باشد که میانگین آن θ شود در اینصورت $\hat{\theta}$ را برآورد کننده ی نااریب θ گویند و داریم

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

واگر

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta + \alpha$$

در اینصورت $\hat{\theta}$ را برآورد اریب θ گوییم

α را اریبی برآورد کننده گویند

سازگاری

به ازای ε بی نهایت کوچک مثبت

$$\lim_{n \to \sim\infty} \mathrm{P}\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right| \langle \varepsilon\right) \to 1$$

ر جامعه را نرمال در نظر بگیریم،چون در جامعه نرمال
نگین و میانه یکی است میانه نمونه هم برآوردکننده
زگاری برای $\bar{Y}_N$ خواهد بود

کارایی

اگر برای پارامتر θ ی جامعه،دو برآورد کننده ی $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ داشته باشیم و $\operatorname{var}(\hat{\theta}_1) < \operatorname{var}(\hat{\theta}_2)$ آنگاه کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ بصورت زیر است:

$$e = \frac{\operatorname{var}(\hat{\theta}_1)}{\operatorname{var}(\hat{\theta}_2)} \qquad 0 \le e \le 1$$

2-برآوردفاصله ای،فا صله اطمینان

در بررسی های نمونه ای ،روش اصلی برآورد غالباً مبتنی بر برآورد فاصله ای است.یک برآورد فاصله ای برای پارامتر θ ی جامعه، فاصله ای بصورت $K_1 \langle \theta \langle K_2$ است که در آن K_2 و K_1 به توزیع $\hat{\theta}$ وبه مقداریکه برآوردکننده ی $\hat{\theta}$ درنمونه ای مفروض اختیار میکند بستگی دارد.می توانیم از توزیع $\hat{\theta}$ استفاده کنیم وK_1 و K_2 راطوری انتخاب کنیم که به ازای هر احتمال مشخص $1-\alpha$احتمال همراه با فاصله ی $K_1 \langle \theta \langle K_2$ برابر $1-\alpha$ باشد.این فاصله را فاصله اطمینان $\%100(1-\alpha)$ می نامند و $1-\alpha$راضریب اطمینان می گویند.K_1 و K_2 حدود اطمینان اند.

۳–میانگین مربع خطا

$$MSE\left(\hat{\theta}\right)=Var\left(\hat{\theta}\right)+\beta^{2}$$ = مربع اریبی+واریانس

اگر MSE را به عنوان ملاک دقت یک برآورد کننده به کار بریم به این نتیجه می رسیم که دو برآوردکننده ای که دارای MSE برابر هستند هم ارزند.

٤-اعتبار تقریب نرمال

ثابت شده است که برای هر جامعه با انحراف معیار متناهی،توزیع میانگین نمونه وقتی n زیاد می شود،به توزیع نرمال می گراید

برای انتخاب حجم نمونه از $n \rangle 2\sigma G^2_1$ استفاده می کنیم:

$$G_1 = \frac{\mathrm{E}\left(y_i - \overline{y_N}\right)^3}{\sigma^3} = \frac{1}{N\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y_N}\right)^3$$

۱–۷ضریب تغییرات

$$C^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - \bar{y}_N}{\bar{y}_N} \right]^2 = \frac{1}{N \bar{y}_N^2} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{y}_N \right)^2 = \frac{\sigma^2}{\bar{y}_N^2}$$

$$C = \frac{\sigma}{\bar{y}_N}$$

ضریب تغییر **y**

واریانس نسبی جامعه یا واریانس نسبی توزیع **y** متغیر تصادفی

ضریب تغییرات ،مقایسه ی تغییرات میانگین های دو جامعه متفاوت را با هم مقایسه می سازد

ویژگی مهم C

دربسیاری ازپدیده هامقدارش تقریباًثابت است

$$\frac{C(y)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_y}{\bar{y}_N \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{Var(\bar{y}_n)}}{\mathrm{E}(\bar{y}_n)} = C(\bar{y}_n)$$

ضریب تغییر میانگین نمونه ای به حجم n برابر $\frac{1}{\sqrt{n}}$ میانگین جامعه است.

۱–۸ تفاوتهای نظریه نمونه گیری متعارف و کلاسیک

یکی آنکه ،در نظریه ی کلاسیک،فرض بر این است که اندازه های واحد ها نمونه از توزیع فراوانی معینی پیروی می کنند ولی در نظریه ی نمونه گیری معمولاً درباره ی توزیع فراوانی اطلاعات چندانی در دست نیست

دوم اینکه برای نمونه گیری کلاسیک حجم جامعه غالباً نا متناهی است ولی در نظریه نمونه گیری مورد بحث کتاب،حجم جامعه متناهی است

فصل دوم

نمونه گیری تصادفی ساده

هدف های رفتاری فصل دوم

- نمونه گیری تصادفی ساده را تعریف کنید.
- نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری را تعریف کنید.
- نمونه گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری را تعریف کنید.
- جدول اعداد تصادفی را برای انتخاب نمونه تصادفی ساده به کار برید.
- ویژگی های مهم نمونه گیری تصادفی بدون جایگذاری را بیان کنید.
- مشخصه ی جامعه را تعریف کنید.

ثابت کنید که میانگین نمونه ی تصادفی ساده بدون جایگذاری برآورد کننده ی نااریب میانگین جامعه است.

– ثا بت کنید که s^2 ،واریانس نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری برآورد کننده ی نااریب S^2 ی جامعه است.

– برآورد نااریب واریانس میانگین نمونه را در یک نمونه گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری بدست آورید.

– ثابت کنید $N\,\overline{y}_n$ برآورد کننده نااریب t_N ،مجموع واحدهای جامعه است.

– برآورد کننده نااریب واریانس $\hat{t}_N$ را بدست آورید.

– ضریب تصحیح واریانس میانگین نمونه را برای جامعه متناهی تعریف و مواردی که این ضریب را نادیده می گیرند بیان کنید.

-موارد استفاده از توزیع t یا توزیع نرمال رادر برآورد فاصله ای میانگین جامعه تشخیص دهید.

-نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری را تعریف کنید.

-ثابت کنید که در نمونه گیری تصادفی با جایگذاری، s^2 ی نمونه برآورد کننده ی نااریب σ^2 ی جامعه است.

-نسبت P را در جامعه با استفاده از نسبت نمونه ای p بیان کنید.

-واریانس نسبت جامعه را بدست آورید.

-برآورد نااریب واریانس P رابدست آورید.

- حدود اطمینان برای نسبت جامعه، P ،را محاسبه کنید.
- مواردی را که ممکن است از توزیع نرمال به عنوان تقریبی خوب برای محاسبه حدود اطمینان P استفاده کرد مشخص کنید.
- نسبت یک رده را در جامعه ای با چند رده محاسبه کنید.

مقدمه

یکی از روش های متداول درنمونه گیری که برای جمع آوری اطلاعات به کارمیرود،نمونه گیری تصادفی ساده است که بصورت "باجایگذاری" و "بدون جایگذاری" انجام می شود

۲-۱نمونه گیری تصادفی ساده

روش انتخاب n واحد مشخص از جامعه ای به حجم N واحد است،به قسمی که همه ی $\binom{N}{n}$ نمونه ای که می توان انتخاب کرد شانس یکسانی برای انتخاب شدن داشته باشد.

*احتمال اینکه n واحد مشخص در استخراج انتخاب شوند برابر nاست با

$$\frac{1}{\left[\frac{N}{n}\right]}$$

چون هر عددی که در استخراج های متوالی بدست می آید کنار گذاشته می شوند،روش مزبور را در نمونه گیری تصادفی بدون جایگذاری می نامند

*نمونه گیری تصادفی با جایگذاری هم قابل انجام است که در هر استخراج شانس در آمدن هر یک از واحد های جامعه مقدار $\frac{n}{N}$ است

دقت نمونه گیری باجایگذاری از بدون جایگذاری کمتر است

۲-۲انتخاب نمونه تصا دفی ساده

جداول اعداد تصادفی جداولی از ارقام ۰،۱،۲،۳،٤،٥،٦،۷،۸،۹

هستند که شانس انتخاب تمام ارقام درهراستخراج یکی است. از این جداول برای انتخاب نمونه تصادفی ساده استفاده میشود.

۲-۳ویژگی مهم نمونه گیری تصا دفی بدون جایگذاری

احتمال استخراج یک واحد مشخص در انتخاب r ام برابر $\frac{1}{N}$ است.

۲-٤تعاریف و نما دها

در یک بررسی نمونه ای،توجه ما به برخی ویژگی های واحدهاست.
هرویژگی موردنظر را یک مشخصه یا یک صفت می نامیم.

$\bar{y}_N$ میانگین جامعه $\rightarrow$ عدد ثابت $\rightarrow$ $\bar{y}_N$ برآورد کننده = $\bar{y}_n$

$\bar{y}_n$ میانگین نمونه $\rightarrow$ متغیر تصادفی $\rightarrow$

برای نمونه ای مشخص با $\bar{y}_n$ مقداری است ثابت

t_N مجموعه واحدهای جامعه $\rightarrow$ عدد ثابت $\rightarrow$

t_N برآورد کننده = $\hat{t}_N$

t_n مجموعه واحدهای نمونه $\rightarrow$ متغیر تصادفی $\rightarrow$

برای نمونه ای مشخص با t_n مقداری است ثابت

$$\bar{y}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \qquad \bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

۲–۵قضیه

$\overline{y}_n$ ،میانگین نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری،برآورد کننده ی نااریب $\overline{y}_N$ ،میانگین جامعه ست،

یعنی

$$E\left(\overline{y}_n\right) = \overline{y}_N$$

۲-٦واریانس میانگین نمونه

قبل از اینکه واریانس میانگین نمونه تصادفی ساده را با بیان قضیه مشخص کنیم خا طر نشان می سازیم که واریانس جامعه N واحدی را با σ^2 وتغییرات این جامعه را با S^2 نشان می دهیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y}_N\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y}_N\right)^2$$

برای محا سبه واریانس $\overline{y}_n$ به لم زیر نیاز داریم

لم

از جامعه ای به حجم N نمونه تصادفی،
ساده بدون جایگذاری به حجم n را
انتخاب می کنیم. اگر y_i و y_j دوواحد
مشخص نمونه در دو انتخاب متوالی نمونه
باشند و σ^2 واریانس جامعه فرض شود
آنگاه،

$$Cov(y_i, y_j) = \frac{-\sigma^2}{N-1}$$

۲-۷ قضیه

اگر $\bar{y}_n$ ،میانگین نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری از جامعه به حجم N باشدآنگاه

$$Var\left(\bar{y}_n\right)=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right]S^2=\left(1-f\right)\frac{S^2}{n}$$

که در آن S^2 تغییرات جامعه و $f=\frac{n}{N}$ کسر نمونه گیری است.

۲-۸ قضیه

اگر s^2 واریانس یک نمونه تصادفی ساده ی بدون جایگذاری به حجم n از جامعه ای به حجم N باشد،آنگاه برآوردکننده ی نااریب S^2 جامعه است.یعنی

$$E\left(s^2\right)=S^2$$

فرع ۱.

برآورد کننده ناااریب $Var\left(\overline{y}_n\right)$ در یک نمونه گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری بصورت

$$V\hat{a}r\left(\overline{y}_n\right)=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right]s^2=\left(1-f\right)s^2$$

است که در آن، S^2 واریانس نمونه است

فرع ۲.

می توان نتیجه گرفت که

$$\sigma_{\overline{y}_n}=\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{N}}s=\sqrt{\frac{1-f}{n}}\cdot s$$

فرع ۳.

بنابررابطه فرع ۱

$$V\hat{a}r\left(\overline{y}_n\right)=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right]s^2=\left(1-f\right)\frac{s^2}{n}$$

برآورد کننده نااریب $Var\left(\overline{y}_n\right)$ است، اما اگر از طرفین این برابری ها جذر بگیریم نتیجه می شود

$$\hat{\sigma}\left(\overline{y}_n\right)=\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{N}}\cdot s=\sqrt{\frac{1-f}{n}}\cdot s$$

وقتی جامعه مورد نمونه گیری توزیع نرمال داشته باشد می توان برآورد کننده ای نا اریب برای $\sigma_{\overline{y}_n}$ یا فت.

فرع ٤.

$N\bar{y}_n$ برآورد کننده ی نا اریب t_N است.

$$E\left(N\bar{y}_n\right) = t_N \Rightarrow \hat{t}_N = N\bar{y}_n$$

فرع ۵.

واریانس $\hat{t}_N = N\bar{y}_n$ یعنی واریانس برآورد کننده مجموع واحد های جامعه برابر است با

$$Var\left(\hat{t}_N\right)=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right]N^2S^2=\left(1-f\right)\frac{N^2S^2}{n}$$

۲-۹ضریب تصحیح برای جامعه متناهی

برای نمونه تصادفی به حجم ***n*** از جامعه نا متناهی داریم

$$Var\left(\bar{y}_n\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

که در آن σ^2 ،واریانس جامعه است.وقتی جامعه متناهی است دیدیم که بر حسب σ^2

$$Var\left(\bar{y}_n\right)=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

۲–۱۰حدود اطمینان میانگین جامعه

معمولاً فرض می کنند که $\bar{y}_n$ حول $\bar{y}_N$ و t_n ح

t_N توزیع نرمال دارند

بنا براین داریم

$$\begin{cases} \bar{y}_L = \text{حد بالا برای میانگین جامعه} = N\bar{y}_n - \dfrac{zNS}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f} \\ \bar{y}_U = \text{حد پایین برای میانگین جامعه} = N\bar{y}_n + \dfrac{zNS}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_L = \text{حد پایین برای مجموع واحدهای جامعه} = \bar{y}n - \dfrac{zS}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f} \\ t_U = \text{حد بالا برای مجموع واحد های جامعه} = \bar{y}n + \dfrac{zS}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f} \end{cases}$$

۲-۱۱نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری

اگر در انتخاب n واحد نمونه ،پس از انتخاب هر واحد آن را به جامعه برگردانیم و انتخاب بعدی را انجام دهیم نمونه گیری تصادفی ساده را با **جایگذاری** می نامند.

احتمال انتخاب یک نمونه ی n واحدی= $\frac{1}{N^n}$

۲-۱۲میانگین نمونه تصادفی ساده با جایگذاری

فرض می کنیم واحد y_i ی جامعه ، Z_i بارظاهر شود.بدیهی است Z_i می تواند از ۰ تا n تغییر کند.با این فرض

$$\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Z_i y_i$$

۲-۱۳ قضیه

میانگین نمونه ی تصادفی ساده با جایگذاری برآورد کننده ی ناریب میانگین جامعه است.

یعنی،

$$E(\bar{y}_n) = \bar{y}_N$$

۲-۱٤واریانس میانگین نمونه ی تصادفی ساده با جایگذاری

تعداد میانگین های ممکن برابر N^n است.اگر پراکندگی این میانگین ها کم باشد،میانگین که در عمل از روی یک نمونه حاصل می شود با $\bar{y}_N$ خیلی فاصله ندارد و لذا براورد نا اریب مطلوبی است که برای تشخیص زیاد و کم بودن این پراکندگی $Var(\bar{y}_n)$را محاسبه می کنیم

$$Var(Z_i) = n \cdot \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) \qquad Cov(Z_i, Z_j) = \frac{-n}{N^2}$$

$$Var(\bar{y}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

انحراف معیار $\bar{y}_n$ برابر

۲-۱۵قضیه

در نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری s^2 نمونه ،برآورد کننده ی نا اریب σ^2 ی جامعه است یعنی

$$\mathrm{E}\left(s^2\right)=\sigma^2$$

نتیجه:

چون s^2 برآورد کننده ی نااریب σ^2 است پس $V\hat{a}r\left(\bar{y}_n\right)=\frac{s^2}{n}$

لذا پراکندگی $\bar{y}_n$ های ممکن را با $\frac{s^2}{n}$ حاصل از یک نمونه برآورد می کنیم.

۲–۱۷نماد گذاری

دو رده را با C و $\bar{C}$ نشان می دهیم.

هر واحد جامعه را مطابق معمول N می گیریم.

به روش تصادفی ساده،بدون جایگذاری ،نمونه ای به حجم n تهیه می کنیم.نماد های زیر را اختیار می کنیم:

تعداد واحد های جامعه که در رده ی C هستند= A

تعداد واحد های نمونه که در رده C هستند= a

نسبت واحد هایی از جامعه که در رده C هستند= $P=\frac{A}{N}$

نسبت واحدهایی از نمونه که در رده C هستند= $p=\frac{a}{n}$

۲-۲۲ قضیه

برآورد کننده ی ناریب P، برابر p است.

نتیجه ۱:

اگر نسبت واحدهایی از جامعه را که در رده ی $\overline{C}$ اند ب

Q نشان می دهیم

$$P+Q=1$$

و اگر نسبت واحدهایی از نمونه را که در رده ی $\overline{C}$

هستند با q نشان می دهیم

$$p+q=1$$

نتیجه ۲:

بدیهی است که q برآوردکننده ی

ناریب Q است.

$$\hat{A} = a \cdot \frac{N}{n}$$

۲-۱۹محاسبه تغییرات جامعه ونمونه

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^{2}$$ =مجموع مربعات یکها و صفرها در دنباله جامعه

$$A = NP$$ = مجموع مربعات یکها در دنبا له جامعه =

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{2}$$ =مجموع مربعات یکها و صفرها در دنباله جامعه =

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{y}_N\right)^2 = \frac{NPQ}{N-1}$$

$$a = np$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}_n\right)^2 = \frac{n}{n-1}pq$$

۲–۲۰قضیه

واریانس P بصورت زیر است.

$$Var(p) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{PQ}{n}$$

۲–۲۱برآورد واریانس

درعمل برای تعیین دقت برآورد کننده ی Q، P

و p را نداریم لذا باید برآوردی برای

$Var(p)$

فراهم کنیم.

۲–۲۲ قضیه

برآورد کننده ی نا اریب $Var(p)$ بصورت زیر است

$$V\hat{a}r(\bar{y}_n) = V\hat{a}r(\hat{P}) = \frac{N-n}{n-1}\frac{Pq}{N}$$

نتیجه ۱

اگر N خیلی بزرگ باشدو به قسمی که از fpc بتوان صرف نظر کرد

$$V\hat{a}r(p)=\frac{pq}{n-1}$$

نتیجه ۲

برآورد ناااریب واریانس $\hat{A}=Np$

$$V\hat{a}r(\hat{A})=\frac{N-n}{n-1}\cdot Npq \leftarrow \hat{A}=Np$$

اگر حجم جامعه بزرگ

$$V\hat{a}r(\hat{A})\cong\frac{N^2pq}{n-1}$$

۲-۲۳حدود اطمینان P

حدود تقریبی P رادر سطح اطمینان $1-\alpha$ بصورت زیر بدست می آوریم

$$\begin{cases} \text{حد پایین} = p - z\sqrt{\dfrac{N-n}{n-1}\dfrac{pq}{N}} \\ \text{حد بالا} = p + z\sqrt{\dfrac{N-n}{n-1}\dfrac{pq}{N}} \end{cases}$$

۲-۲۴تعیین نسبت در جامعه ای با چند رده

اگر N واحدجامعه به جای دو رده در Kرده قرار گیرند تعداد واحدهای رده i را A_i و

نسبت این واحد ها را در جامعه برابر P_iمی گیریم

$$p_i = \frac{a_i}{n}$$

۲-۲۵برآورد حجم نمونه

در طرح ریزی بررسی نمونه ای ،اخذتصمیم درباره حجم نمونه از نظرتامین دقت نتایج نمونه گیری و صرفه جویی در میزان وقت و هزینه ی آن از اهمیت خاصی برخوردار است.

بدیهی است بزرگ بودن حجم نمونه موجب صرف هزینه و وقت زیاد،و کوچک بودن آن موجب عدم دقت کافی برآورد هاست

۲-۲۶محاسبه حجم نمونه برای داده های پیوسته

اگر ضریب تغییرات جامعه $\approx \frac{S}{\bar{y}_n}$

آنگاه

$$n = \left[\frac{tS}{r\bar{y}_N}\right]^2 \Big/ \left[1 + \frac{1}{N}\left[\frac{tS}{r\bar{y}_N}\right]^2\right]$$

اگر N بزرگ باشد

$$n_\circ = \left[\frac{tS}{r\bar{y}_N}\right]^2 = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{S}{\bar{y}_N}\right]^2$$

که

$$\gamma = \left(\frac{r}{t}\right)^2$$

که با جایگذاری حجم نمونه برابر است

$$n = \frac{n_\circ}{1 + n_\circ / N}$$

نتیجه

برآورد حجم نمونه

$$\hat{n} = \left[\frac{t\hat{S}}{r\hat{\bar{y}}_N}\right]^2 \Bigg/ \left[1 + \frac{1}{N}\left[\frac{t\hat{S}}{r\hat{\bar{y}}_N}\right]^2\right]$$

۲-۲۷محاسبه حجم نمونه برحسب فاصله اطمینان مفروض

گاهی حجم نمونه را به قسمی تعیین می کنند که فاصله اطمینان میانگین جامعه با ضریب اطمینان معلوم $1-\alpha$ به طول مفروض $2l$ باشد

$$\hat{n}=(1-f)\frac{s^2}{l^2}t^2$$

۲–۲۸ تعیین حجم نمونه در نمونه گیری برای نسبت ها

$$n = \frac{t^2 PQ / d^2}{1 + \frac{1}{N}\left[\frac{t^2 PQ}{d^2} - 1\right]}$$

برآورد n

$$\hat{n} = \frac{t^2 pq / d^2}{1 + \frac{1}{N}\left[\frac{t^2 pq}{d^2} - 1\right]}$$

اگر قرار دهیم $\frac{d^2}{t^2} = v$ $\leftarrow$

$$\hat{n} = \frac{pq/v}{1 + \frac{1}{N}\left[\frac{pq}{v} - 1\right]}$$

وقتی N بزرگ است $\hat{n}_\circ = \frac{pq}{v}$

$$n = \frac{\hat{n}_\circ}{1 + \frac{\hat{n}_\circ - 1}{N}} \approx \frac{\hat{n}_\circ}{1 + \frac{\hat{n}_\circ}{N}}$$

۲–۳۰ قضیه

اگر $\left(x, y\right)$ یک زوج متغیر تصادفی باشند و نمونه تصادفی ساده ا ی به حجم n ازجامعه $\left(x, y\right)$ که به حجم N است انتخاب کنیم و اگر $\bar{x}_n$ و $\bar{y}_n$ میانگین های نمونه ای x و y باشند

آنگاه

$$Cov\left(\bar{x}_n, \bar{y}_n\right) = E\left[\left(\bar{y}_n - \bar{y}_N\right)\left(\bar{x}_n - \bar{x}_N\right)\right] = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right] S_{xy}$$

که در آن $\bar{x}_N$ و $\bar{y}_N$ به ترتیب میانگین های جامعه ای x و y بـ

و

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_N\right)\left(y_i - \bar{y}_N\right)$$

۲–۳۱ قضیه

اگرضریب همبستگی بین زوج (x, y) برابر ρ باشد و اگر $\bar{y}_n$ و $\bar{x}_n$ میانگین های نمونه ای به حجم n اززوج (x, y) باشند آنگاه ضریب همبستگی زوج $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ به حجم نمونه بستگی ندارد و برابر با ρ است.

فصل سوم

نمونه گیری با طبقه بندی

هدف های رفتاری فصل سوم

- نمونه گیری تصادفی با طبقه بندی را تعریف کنید
- سه دلیل عمده طبقه بندی جامعه را بیان کنید
- نمونه گیری با تخصیص متناسب را تعریف کنید
- ثابت کنید که $\bar{Y}_{st}$ برآورد نااریب میانگین جامعه است
- واریانس $\bar{Y}_{st}$ رادرصورتی که نمونه هاتی طبقات مستقل از هم باشند بدست آورید

- واریانس $\bar{Y}_{st}$ را درحالت تخصیص متناسب بدست آورید
- ثابت کنید که براورد نااریب مجموع واحدهای جامعه $N\bar{Y}_{st}$ است.
- برآورد کننده واریانس $\bar{Y}_{st}$ رادر نمونه گیری تصادفی ساده با طبقه بندی بدست آورید
- حدود اطمینان میانگین ومجموع واحدهای جامعه را درنمونه گیری تصادفی ساده با طبقه بندی بدست آورید

– حدود اطمینان میانگین و مجموع واحدهای جامعه را در نمو
گیری تصادفی ساده با طبقه بندی بدست آورید

– حجم نمونه را در طبقات مختلف طوری بدست آورید که
هزینه نمونه گیری مینیمم شود

– حجم نمونه را در طبقات مختلف طوری بدست آورید که
واریانس $\bar{Y}_{st}$ مینیمم شود

– حجم نمونه رادرطبقات مختلف،برای حالتی که هزینه ی نمو
گیری برای هرواحددرتمام طبقات یکسان است
بدست آورید

– ....

مقدمه

نمونه گیری تصادفی با طبقه بندی نیز یکی از روش های متداول نمونه گیری است که دراین فصل با آن آشنا خواهید شد.با اطلاعات حاصل از این روش ،برآوردهایی برای مشخصه های جامعه و حجم نمونه لازم در هر طبقه بدست می آید.

۳-۱ تعریف.

در نمونه گیری با طبقه بندی،جامعه به حجم N راابتدا به زیر جامعه هایی به حجم های $N_1, N_2, ...N_L$ تقسیم می کنند.این زیر جامعه ها متداخل نیستند و اجتماع آنها برابر با کل جامعه است،یعنی

$$N_1 + N_2 + ... + N_L = N$$

هر زیر جامعه را یک طبقه می نامند

-حجم های نمونه های طبقات را با $n_1, n_2, ..., n_L$ نشان می دهیم

-اگر از هر طبقه نمونه ای به روش تصادفی ساده گرفته شود شیوه ی کلی نمونه گیری را،نمونه گیری تصادفی با طبقه بندی می نامند.

۳-۲نمادها و تعاریف

زیر نویس ***h*** معرف طبقه است که از ***1*** تا ***L***
تغییر می کند. ***L*** تعداد طبقات است   .
زیر نویس   ***i*** برای تعیین شماره ی واحد ها در
داخل هر طبقه به کار می رود. ***N*** تعداد کل افراد
جامعه است.نمادهای زیر برای طبقه   ***h*** و
h=1,2,.........,L تعریف می شود.

۳–۲نمادها و تعاریف

تعداد کل واحدها در طبقه h ام N_h

تعداد واحد های نمونه ی طبقه ی hام n_h

برای n_h $i = 1,2,........,$ مقدار واحد iام

در طبقه ی hام Y_{h_i}

کسر نمونه گیری برای طبقه hام $f_h = \dfrac{n_h}{N_h}$

وزن طبقه ی hام $W_h = \dfrac{N_h}{N}$

۳-۲نمادها و تعاریف

$$\bar{Y}_h = \frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi}$$

میانگین طبقه h ام

$$\bar{y}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} Y_{hi}$$

میانگین نمونه طبقه h ام

$$S_h^{\ 2} = \frac{1}{(N_h - 1)}\sum_{i=1}^{N_h}\left(Y_{hi} - \bar{Y}_h\right)^2$$

تغییرات طبقه h ام

$$s_h^{\ 2} = \frac{1}{(n_h - 1)}\sum_{i=1}^{n_h}\left(Y_{hi} - \bar{y}_h\right)^2$$

تغییرات نمونه ای طبقه h ام

میانگین های موزون میانگین های نمونه ای طبقات را به نام میانگین با طبقه بندی می نامیم

$$\bar{Y}_{st}=\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}N_h\bar{y}_h=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h$$

این میانگین با میانگین نمونه ی n واحدی حاصل از روی به هم ریختن نمونه های طبقات ،در حالت کلی ،تفاوت دارد.بدیهی است که وقتی $\bar{y}_{st}$ با میانگین نمونه کلی یکی است که در هر طبقه $(h=1,2,3......L)$ $f_h=f$ یا $\frac{n}{N}=\frac{n_h}{N_h}$ باشد

یعنی کسر نمونه گیری در تمام طبقات یکسان باشد.نمونه گیری با طبقه بندی را وقتی با این ویژگی همراه باشد می گویند با تخصیص متناسب است

قضیه ۳-۳

اگر در هر طبقه، $\bar{y}_h$ برآورد کننده نا اریب میانگین طبقه h باشد،آنگاه $\bar{y}_{st}$ برآورد کننده نااریب میانگین کل جامه یعنی برآورد کننده نااریب $\bar{y}_N$ است.

$$E(\bar{y}_{st}) = \bar{y}_N$$

پس $\hat{\bar{Y}}_N = Y_{st}$ که این برآورد کننده ویژگی نااریبی را هم دارد

۳-٤ قضیه

اگر نمونه های طبقات ،مستقل از هم گرفته شوند

$$Var(\bar{y}_{st})=\sum_{h=1}^{L}W_h{}^2\ Var(\bar{y}_h)$$

که در آن $Var(\bar{y}_h)$،واریانس $\bar{y}_h$ برای تمام نمونه های ممکن از طبقه h ام است.

۳-٥ قضیه

برای نمونه گیری تصادفی با طبقه بندی واریانس$\bar{Y}_{st}$ بصورت زیر است.

$$Var(\bar{Y}_{st})=\frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}N_h(N_h-n_h)\frac{S_h{}^2}{n_h}=\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h{}^2S^2{}_h}{n_h}-\sum_{h=1}^{L}\frac{W_hS_h{}^2}{N}$$

فرع ۱

اگر در تمام طبقات کسر نمونه گیری،یعنی f_h هاکوچک و
قابل اغماض باشند،آنگاه

$$Var\left(\overline{Y}_{st}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^{\,2}\,\frac{S_h^{\,2}}{n_h}=\frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^{\,2}}{n_h}\cdot S_h^{\,2}$$

فرع ۲

اگر تخصیص متناسب مورد نظر باشد،یعنی

$$\frac{n_h}{N_h}=\frac{n}{N}$$

آنگاه

$$n_h=\frac{n}{N}N_h$$

بنابراین

$$Var\left(\overline{Y}_{st}\right)=\sum_{n=1}^{L}\frac{N_h}{N}\cdot\frac{S_h{}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)=\frac{1-f}{n}\sum W_h S_h{}^2$$

فرع ۳

اگر نمونه گیری باتخصیص متناسب بوده و مقدار واریانس در همه طبقات یکی باشد آنگاه اگر واریانس مشترک را با S_W^2 نشان دهیم تمام S_W^2ها برابر با S_h^2 هستند بنابراین

$$Var(\bar{Y}_{st}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{S_w^2}{n} = (1-f)\frac{S_w^2}{n}$$

f کسر نمونه گیری در کل جامعه است

فرع ٤

اگر t_N مجموع واحدهای جامعه باشد،آنگاه $N\bar{Y}_{st}$
برآورد کننده نااریب t_N است

$$\mathrm{E}\left(\hat{t}_N\right) = t_N$$

واریانس این برآورد کننده

$$Var\left(\hat{t}_N\right) = \sum_{h=1}^{L} N_h \left(N_h - n_h\right) \frac{S_h^{\,2}}{n_h}$$

۳–٦برآورد واریانس

اگر از هر طبقه نمونه تصادفی ساده بگیریم برآورد کننده نااریب $S_h^{\,2}$ ،بنابرآنچه در نمونه گیری تصادفی ساده دیدیم،عبارت است از:

$$s_h^{\,2} = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} \left(Y_{hi} - \bar{Y}_h \right)^2$$

۳–۷قضیه

در نمونه گیری تصادفی ساده باطبقه‌بندی،
برآورد کننده ناااریب $Var\left(\overline{Y}_{st}\right)$ برابر است با

$$\overline{\sigma^2}\left(\overline{Y}_{st}\right)=V\hat{a}r\left(\overline{Y}_{st}\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}N_h\left(N_h-n_h\right)\frac{s_h^{\;2}}{n_h}$$

۳–۸حدود اطمینان میانگین و مجموع واحدهای جامعه

برای یک نمونه ی تصادفی ساده با طبقه بندی به حجم n
ازجامعه ای به حجم N تعداد نمونه های ممکن

$$\pi_{h=1}^{L}\left[\begin{matrix}N_h\\ n_h\end{matrix}\right]$$

است.

متغیر تصادفی $\dfrac{\bar{Y}_{st}-\bar{Y}_N}{\sigma\left(\bar{Y}_{st}\right)}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.اگر

Z مقدار متغیر نرمال استاندارد متناظر با احتمال $1-\alpha/2$ باشد به سادگی می توان دید که فاصله اطمینان $\%100\left(1-\alpha\right)$ برای $\bar{Y}_N$ بصورت زیر است

فاصله اطمینان تصادفی

$$\left[\bar{Y}_{st}-z\sigma\left(\bar{Y}_{st}\right),\bar{Y}_{st}+z\sigma\left(\bar{Y}_{st}\right)\right]$$

برآوردفاصله اطمینان

$$\left[\bar{Y}_{st}-z\hat{\sigma}\left(\bar{Y}_{st}\right),\bar{Y}_{st}+z\hat{\sigma}\left(\bar{Y}_{st}\right)\right]$$

برآورد فاصله اطمینان برای t_N با ضریب اطمینان $1-\alpha$ بصورت زیر است

$$\left[N\bar{Y}_{st} - zN\hat{\sigma}\left(\bar{Y}_{st}\right), N\bar{Y}_{st} + zN\hat{\sigma}\left(\bar{Y}_{st}\right)\right]$$

$$\hat{\sigma}^2\left(\bar{Y}_{st}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{L} g_h s_h^{\,2}$$

درجه آزادی موثر با ne نشان می دهیم که بصورت زیر محاسبه می شود

$$ne = \frac{\left\langle \sum g_h s_h^{\,2} \right\rangle^2}{\sum \dfrac{g_h^{\,2} s_h^{\,2}}{n_h - 1}} ; g_h = \frac{N_h\left(N_h - n_h\right)}{n_h}$$

مقدار ne همیشه بین کوچکترین مقداراز مقادیر $\left(n_h - 1\right)$ و مجموع آنها می افتد.
اگر توزیع واحدهای جامعه چاولگی مثبت باشداین فرمول درجه آزادی را بیش برآوردمی کند

۳-۹تخصیص اپتیمم

درنمونه گیری باطبقه بندی،مقادیر حجمهای نمونه ای در طبقات مربوط از طرف نمونه گیر تعیین میشوند..........

$$\text{هزینه} = C = C_{\circ} + \sum_{h=1}^{L} C_h n_h$$

ساده ترین تابع هزینه

مبلغ ثابت

هزینه نمونه گیری هر واحد از طبقه h ام

اگر $C_{\circ}$ فقط هزینه رفت و آمد بین طبقات باشد بهتر است که بصورت $\sum t_h \sqrt{n_h}$ نمایش داده شود که در آن t_h هزینه رفت و آمدها به ازای هر واحد است

۳-۱۰ قضیه

درنمونه گیری تصادفی با طبقه بندی که تابع هزینه

بصورت $C = C_{\circ} + \sum_{h=1}^{L} C_h n_h$ است، برآورد

واریانس $\bar{Y}_{st}$ برای C مشخص و هزینه برای

واریانس مشخص $Var\left(\bar{Y}_{st}\right)$ وقتی مینیمم می شود

که n_h متناسب با $W_h S_h / \sqrt{C_h}$ است.

معادله زیر n_h را برحسب مقدار N_h بدست می دهد ولی،مقدار n رانمی دانیم.مقدار n دررابطه بااین است که C را از قبل داشته باشیم یا V را

$$n_h = \frac{W_h S_h \big/ \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} \left(W_h S_h / \sqrt{C_h} \right)} \cdot n = \frac{N_h S_h / \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} \left(N_h S_h / \sqrt{C_h} \right)} \cdot n$$

نتیجه

در طبقه مفروض هر چه ۱-طبقه بزرگتر باشد۲-ناهمگنی طبقه بیشتر باشدو۳-مایل به نمونه گیری ارزانتری باشیم باید نمونه ای بزرگتر انتخاب کنیم .زیرا n_h به N_h تناسب مستقیم دارد و با S_h که معرف تغییرات طبقه است نیز تناسب مستقیم داردولی با C_h تناسب معکوس دارد.

الف).وقتی C معلوم است با معلوم بودن N_h هاو S_h هاو C_h ها ابتدا مقدار n را می یابیم و سپس مقادیر n_h را بدست می آوریم.

$$n=\frac{(c-c_{\circ})\sum\left(N_hS_h/\sqrt{c_h}\right)}{\sum\left(N_hS_h\sqrt{c_h}\right)}$$

ب)وقتی V ازقبل تثبیت شود

وقتی V معلوم است n به صورت زیر بدست می آید

$$n=\frac{\left[\sum_{i=1}^{L}W_hS_h/\sqrt{c_h}\right]\left[\sum_{i=1}^{L}W_hS_h\cdot\sqrt{c_h}\right]}{V+\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}W_hS_h{}^2}$$

تبصره ۱: وقتی $c_h = c$،تابع هزینه به صورت $C = c_\circ + cn$ در می آید و $n = \frac{C - c_\circ}{c}$ و

$$n_h = \frac{W_h S_h / \sqrt{c}}{\sum_{h=1}^{L} \left(W_h S_h / \sqrt{c_h} \right)} \cdot n = \frac{W_h S_h}{\sum_{h=1}^{L} W_h S_h} \cdot n = \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h S_h} \cdot n$$

تخصیص نیمن

تبصره ۲: طبق رابطه بالا n_h مینیمم می شود و مقدار مینیمم برابر

$$V = Var\left(\bar{Y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h S_h^2}{N}$$

$$V_{opt} = \frac{1}{n}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h S_h\right]^2 - \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} W_h S_h^2$$

۳-۱۱مقایسه دقت نمونه گیری تصادفی باطبقه بندی و نمونه گیری تصادفی ساده

واریانس $\bar{Y}_{st}$ درحالت تخصیص اپتیمم V_{opt} واریانس میانگین نمونه تصادفی V_{ran} و واریانس در حالت تخصیص متناسب V_{prop} می باشد

۳-۱۲قضیه

اگر $\frac{1}{N_h}$ قابل اغماض باشد آنگاه $V_{opt} \le V_{prop} \le V_{ran}$

این رابطه نشان می دهد که اگردونمونه گیری تصادفی ساده و نمونه گیری تصادفی باطبقه بندی در حالت تخصیص اپتیمم رادرنظر بگیریم درتقلیل واریانس،دو مولفه دخالت دارند

نتیجه

$$V_{ran} = V_{opt} + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L} W_h\left(S_h - \bar{S}\right)^2 + \frac{1-f}{n}\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}_N\right)^2$$

اگر $V_{ran} \leq V_{prop}$ نمونه گیری تصادفی ساده کاراتر از نمونه گیری با طبقه بندی و تخصیص متناسب است.

اگر فرض کنیم تمام $S_h^{\,2}$ هاباهم برابرند و مقدارمشترک آنها را با $S_w^{\,2}$ نشان دهیم به شرطی که تخصیص متناسب به مفهوم نیمن ،اپتیمم باشد داریم:

$$\sum_{h=1}^{L} N_h\left(\overline{Y}_h - \overline{Y}_N\right)^2 \langle \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{L}\left(N - N_h\right)S_W^{\,2}$$

یا $$\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h\left(\overline{Y}_h - \overline{Y}_N\right)^2}{L-1} \langle S_W^{\,2}$$

یعنی نسبت F باید کوچکتراز ۱ باشد.
در چنین حالتی نمونه گیری تصادفی کاراتر از نمونه گیری تصادفی با طبقه بندی درحالت تخصیص متناسب است.

۳-۱٤برآورد حجم نمونه برای دادههای پیوسته

فرض کنیم که $\bar{Y}_{st}$ دارای واریانس معلوم V باشد .اگر S_h برآورد S_h

فرض شود،قرار می دهیم $W_h = \frac{n_h}{n}$ می دانیم که :

$$V \approx \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 s_h^2}{n_h} - \frac{1}{N} \sum W_h s_h^2$$

مقدار n_h راجایگزین می کنیم داریم

$$V = \frac{1}{n} \sum W_h^2 s_h^2 - \frac{1}{N} \sum W_h s_h^2$$

رابطه کلی برای n

$$\Longrightarrow \quad n = \sum \frac{W_h^2 s_h^2}{W_h} \bigg/ V + \frac{1}{N} \sum W_h s_h^2$$

اگر N بزرگ باشد

$$\Longrightarrow \quad n_\circ = \frac{1}{V} \sum \frac{W_h^2 s_h^2}{W_h}$$

اگر N بزرگ نباشد $\Longrightarrow$

$$n = \frac{n_\circ}{1 + \frac{1}{NV} \sum W_h s_h^2}$$

حالات خاص

الف)تخصیص را اپتیمم گیریم وقتی

$$n_h = n\frac{W_h s_h}{\sum W_h s_h}$$

آنگاه صورت کسر

یعنی

$$\Rightarrow \frac{n_h}{n} = W_h = \frac{W_h s_h}{\sum W_h s_h} \Rightarrow \left(\sum W_h s_h\right)^2$$

در نتیجه n می شود

$$\Rightarrow \qquad n = \frac{\left[\sum_{h=1}^{L} W_h S_h\right]^2}{V + \frac{1}{N}\sum W_h S_h{}^2}$$

حالات خاص

ب)درتخصیص متناسب

$$w_h = \frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N} = W_h$$

$$\Rightarrow n_\circ = \frac{1}{V}\sum W_h S_h{}^2$$

$$\Rightarrow n = \frac{n_\circ}{1+\frac{n_\circ}{N}}$$

۳-۱۵برآورد مجموع واحدهای جامعه

در این بخش V معرف $Var\left(\hat{t}_N\right)$ یا $Var\left(N\bar{Y}_{st}\right)$ است که برابر $N^2Var\left(\bar{Y}_{st}\right)$ است.از قرار دادن $\frac{V}{N^2}$ بجای V در رابطه n داریم:

$$n=\frac{\sum N_h{}^2 s_h{}^2/w_h}{V+\sum N_h s_h{}^2}$$

برای تخصیص اپتیمم (n تثبیت شده) داریم

$$n=\left[\sum_{h=1}^{L} N_h s_h\right]^2 \Bigg/ V+\sum_{i=1}^{L} N_h s_h{}^2$$

و برای تخصیص متناسب داریم

$$n_\circ=\frac{N}{V}\sum_{h=1}^{L} N_h s_h{}^2 \longrightarrow n=\frac{n_\circ}{1+\frac{n_\circ}{N}}$$

۳-۱۶نمونه گیری با طبقه بندی برای نسبت ها

می خواهیم در جامعه ،نسبت واحدهایی را بیابیم که دررده معین C می افتند

نسبت واحدهایی از طبقه h ام است که در رده C می افتد $P_h = \dfrac{A_h}{N_h}$

نسبت واحدهایی از نمونه طبقه h ام است که در رده C می افتد $p_h = \dfrac{a_h}{n_h}$

$$p_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h p_h \quad \text{و} \quad \mathrm{E}(p_{st}) = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} A_h = P$$

یعنی p_{st} برآورد کننده ناااریب نسبت واحدهایی از جامعه است که در رده C هستند.

۳–۱۷قضیه

در نمونه گیری تصادفی با طبقه بندی

$$V(p_{st})=\frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h{}^2(N_h-n_h)}{N_h-1}\cdot\frac{P_hQ_h}{n_h}$$

تبصره

در کاربردها، حتی وقتی که fpc قابل اغماض

نباشد $\frac{N_h}{N_h-1}$ رابرابر ۱ می گیریم و فرمول

واریانس بصورت تقریبی زیر به کار می رود

$$V(p_{st})=\sum_{h=1}^{L}W_h{}^2[1-f_h]\frac{P_hQ_h}{n_h}$$

فرع ۱

اگر بتوانیم fpc رانادیده بگیریم :

$$V\left(p_{st}\right)=\sum W_h^{\,2}\,\frac{P_h Q_h}{n_h}$$

فرع ۲

اگر تخصیص متناسب باشد

$$\frac{N_h-n_h}{N-n}=\frac{N_h}{N}=\frac{n_h}{n}$$

$$V\left(p_{st}\right)=\frac{N-n}{N}\cdot\frac{1}{nN}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^{\,2}}{N_h-1}P_hQ_h\approx\frac{1-f}{n}\sum_{h=1}^{L}W_hP_hQ_h$$

فرع ۳

چون P_h و Q_h درعمل مجهولند لذا نمی توان $V\left(p_{st}\right)$ رابدست آورد.برای تعیین $\hat{V}\left(p_{st}\right)$ ،همانطور که در نمونه گیری تصادفی ساده برای نسبت ها دیدیم برآورد $\frac{Q_h P_h}{n_h}$ تقریباً برابر با $\frac{p_h q_h}{n_h - 1}$ است،لذا

$$\hat{V}\left(p_{st}\right) \approx \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h{}^2\left(N_h - n_h\right)}{N_h - 1} \frac{p_h q_h}{n_h - 1}$$

فرع ٤

بهترین انتخاب n_hها برای مینیمم کردن $V\left(p_{st}\right)$ از قضیه کلی

نتیجه می شود:

الف)اگر حجم نمونه ثابت باشد برای اینکه واریانس مینیمم شود باید

$n_h \propto N_h S_h$ باشد

$$n_h \approx n_\circ \frac{N_h\sqrt{P_hQ_h}}{\sum_{h=1}^{L} N_h\sqrt{P_hQ_h}}$$

ب) اگر هزینه $C = C_\circ + \sum_{h=1}^{L} C_h n_h$ ثابت باشد، وقتی واریانس p_{st}

مینیمم است که داشته باشیم:

$$n = \frac{\left(C - c_\circ\right)\sum N_h\sqrt{P_hQ_h / C_h}}{\sum N_h\sqrt{P_hQ_hC_h}}$$

۳–۱۸ اثر انحراف از تخصیص اپتیمم

در این بخش افت دقت نتیجه نمونه گیری را به دلیل عدم توفیق در دستیابی به تخصیص اپتیمم مورد بحث قار می دهیم

$$n'_h = \frac{n(W_h S_h)}{\sum W_h S_h}$$ حجم نمونه در طبقه h ام

می دانیم

$$\Rightarrow \quad V_{\min}(\bar{Y}_{st}) = \frac{\left(\sum W_h S_h\right)^2}{n} - \frac{\sum W_h S_h^2}{N}$$

اگر $\hat{n}_h$ حجم نمونه ای مورد استفاده در طبقه h ام باشدمقدار واریانس:

$$V(\bar{Y}_{st}) = \sum \frac{W_h^2 S_h^2}{\hat{n}_h} - \frac{\sum W_h S_h^2}{N}$$

افزایش واریانس ناشی از تخصیص ناکامل عبارت است از

$$V(\bar{Y}_{st}) - V_{\min}(\bar{Y}_{st}) = \sum \frac{W_h^2 S_h^2}{\hat{n}_h} - \frac{1}{n}\left(\sum W_h S_h\right)^2$$

داریم $W_h S_h = \dfrac{n_h'}{n} \sum W_h S_h$

باجایگزینی در روابط صفحه قبل:

$$V\left(\bar{Y}_{st}\right) - V_{\min}\left(\bar{Y}_{st}\right) = \frac{\left(\sum W_h S_h\right)^2}{n^2} \sum \frac{\left[\hat{n}_h' - n_h'\right]^2}{n_h'}$$

دررابطه واریانس مینیمم زمانی که $\dfrac{1}{N} \to 0$ داریم:

$$\frac{V_{\min}\left(\bar{Y}_{st}\right)}{n} = \frac{\left(\sum W_h S_h\right)^2}{n^2}$$

از تقسیم دو رابطه اخیر داریم:

$$\frac{V\left(\bar{Y}_{st}\right) - V_{\min}\left(\bar{Y}_{st}\right)}{V_{\min}\left(\bar{Y}_{st}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} \frac{\left[\hat{n}_h - n_h'\right]^2}{\hat{n}_h}$$

این مقدار،مقدار افزایش نسبی واریانس را وقتی تخصیص بصورت ناکامل انجام می شود نشان می دهد

۳-۱۹مساله تخصیص با بیش از یک صفت

اپتیمم $\rightarrow$ $$V_{opt}=\frac{\left(\sum W_h s_h\right)^2}{n}$$

مصالحه ای $\rightarrow$ $$V_{com}=\sum\frac{\left(W_h s_h\right)^2}{n_h}$$

متناسب $\rightarrow$ $$V_{prop}=\frac{\sum W_h s_h{}^2}{n}$$

۳-۲۰ساختن طبقات
۳-۲۱طبقه بندي بعد از انتخاب نمونه

غالبا وقتی نمونه تصادفی ساده دقیقابرحسب گروه بندی های جامعه ای حالت تعادلی ندارد،انتخابی مناسب است

میانگین موزون

$$\bar{Y}_{st} = \frac{N_1}{N}\bar{y}_1 + \frac{N_2}{N}\bar{y}_2 \qquad \mathrm{E}(n_h) = nW_h$$

$$\hat{V}(\bar{Y}_{st}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{s_h^2}{n_h} - \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} W_h s_h^2$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n_h}\right) \approx \frac{1}{nW_h} + \frac{1-W_h}{n^2 W_h^2}$$

تنهاوقتی خوب کار می کند که n بزرگ و n_i مثبت باشد

$$\hat{V}_p(\bar{Y}_{st}) = \frac{N-n}{nN}\sum_{h=1}^{L} W_h s_h^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{L}(1-W_h)s_h^2$$

فصل چهارم

نمونه گیری با احتمال متغیر

اهداف رفتاری فصل چهارم

- نمونه گیری تصادفی با احتمال متغیر را تعریف کنید
- نمونه گیری تصادفی متناسب با ندازه را تعریف کنید
- با استفاده از دناله صفت کمکی و جدول اعداد تصادفی نمونه ای متناسب با احتمال از جامعه انتخاب کنید
- با روش لاهیری مبنی براستفاده از دنباله صفت کمکی و جدول اعداد تصادفی و مقدار ماکسیمم صفت کمکی ،نمونه گیری با احتمال متغیر را انجام دهید

اهداف رفتاری فصل چهارم

– زوج های موثر و نا موثر و ناموثر را تعریف کنید-

– احتمال موثر یا نا موثر بودن هر زوج را در روش لاهیری بدست آورید

دلیل روش لاهیری را ارائه دهید

– ازروش خردکردن برای کوچک ترکردن احتمال غیرموثربودن انتخاب زوج ها در روش لاهیری استفاده کنید.

– ثابت کنید که $\bar{Z}_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ که $Z_i = \frac{Y_i}{NP_i}$

برآوردنااریب میانگین جامعه در نمونه گیری با احتمال متغ
و با جایگذاری است.

اهداف رفتاری فصل چهارم

- ثابت کنید $\bar{Z}_n$ برآورد کننده ناااریب میانگین جامعه
دارای واریانس $\frac{\sigma^2_z}{n}$ است،
- ثابت کنید که s_z^2 برآورد کننده نااریب σ_z^2 جامعه است
- نمونه گیری با احتمال متغیر وبدون جایگذاری را تعریف کنید

مقدمه

نوعی از نمونه گیری را که احتمال انتخاب واحدهای جامعه برای شرکت دادن در نمونه از واحدی به واحد دیگر تغییر می کند نمونه گیری بااحتمال متغیر می نامند.ودر حالت خاصی که احتمالهای انتخاب متناسب با اندازه صفت باشد نمونه گیری را تصادفی متناسب باتاندازه می گویند و آن را با نماد *pps* نشان می دهند.

نمونه گیری تصادفی یا احتمال متغیر به دو روش با جایگذاری و بدون جایگذاری انجام می شود.

۴-۲شیوه انتخاب نمونه با احتمال متغیر

در نمونه گیری تصادفی ساده از جدول اعداد تصادفی استفاده می کنیم.ولی در این نمونه گیری چون احتمال منتسب به هر واحد با واحدهای دیگر در حالت کلی فرق می کند استفاده مستقیم از جدول اعداد تصادفی میسر نیست.

برای انتخاب نمونه اعداد صحیح $Y_1, Y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, Y_N$ راکه

متناسب با احتمال های انتخاب واحد ها $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_N$ جامعه هستند درنظر می گیریم.

صفت کمکی	$Y_1, Y_2, \ldots\ldots\ldots Y_N$
صفت ملکی	$X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_N$

حال به اولین واحد جامعه عدد $T_1 = X_1$ به دومین واحد جامعه عدد $T_2 = X_1 + X_2$

...... و به iامین واحد جامعه عدد $T_i = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_i$ و به

Nامین واحد جامعه عدد $T_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ رانسبت می دهیم.

جدول زیر نتیجه می شود

صفت اصلی	صفت کمکی	T_i	P_i
Y_1	X_1	X_1	X_1/T_N
Y_2	X_2	X_1+X_2	
$\vdots$	$\vdots$		
Y_i	X_i	$X_1+\dots\dots\dots+X_i$	X_i/T_N
$\vdots$	$\vdots$		
Y_N	X_N	$X_1+\dots\dots\dots+X_N$	X_N/T_N

حال عددی از ۱ تا $T_N = X_1 + ... + X_N$ انتخاب وآن را R می نامیم و با T_i ها

مقایسه می کنیم و $T_{i-1} < R \leq T_i$ دراین صورت Y_i ها رابه عنوان واحد نمونه

انتخاب کنیم

*برای اینکه $T_{i-1} < R \leq T_i$ قرار گیرد تعداد حالات مساعد برابر است با

$$T_i - T_{i-1} = \left(X_1 + X_2 + ... + X_i\right) - \left(X_1 + X_2 + ... + X_{i-1}\right) = X_i$$

تعداد حالات ممکن R برابربا T_N است .پس

P(R وقوع)=**P(** Y_iانتخاب) $= \dfrac{X_i}{T_N} = \dfrac{X_i}{X_1 + X_2 + ... + X_N} = P_i$

۳-٤روش لاهیری

بزرگترین مقدار صفت کمکی X_i ها رامشخص و آنرا Mمی گیریم.

حجم جامعه N یک زوج تصادفی (i, j)انتخاب می کنیم.به قسمی که

$1 \le i \le N$ و $1 \le M \le j$ وقتی i انتخاب شد X_i را درنظرمی گیریم.

اگر $j \le X_i$ آنگاه Y_i را به عنوان واحدی از نمونه مطلوب اختیار می کنیم.

اگر $j \ge X_i$ بود زوج (i, j) را نادیده می گیریم ومجدداً زوج دیگری بر

می گزینیم.این فرآیند آنقدر ادامه پیدا می کند تا از n Y_iرا انتخاب نماییم.

٤-٤برهان روش لاهیری

زوج های نا موثر=برخی از زوج های (i, j) که به انتخاب واحد نمونه منجر نمی شود

زوج های موثر= زوجی که به انتخاب واحدی از نمونه منجر می شود

$P_1(Y_i) = P\{$ابتدا i از اعداد ۱ تا N انتخاب شود و سپس داشته باشیم $j \le X_i\}$

چون i و j مستقل از هم صورت می گیرند، پس

$P_1(Y_i) = P($انتخاب i از 1تا $N$$)$. $P(j \le X_i)$

P(انتخاب i ازاعداد 1 تا N)= $\frac{1}{N}$

تعداد حالات ممکن انتخاب برابر است زیرا را را از اعداد تا انتخاب کرده ایم.

لذا

$$P\left(j \le X_i\right) = \frac{X_i}{M}$$

بنا براین $\Longrightarrow P_1\left(Y_i\right) = \frac{1}{N}\cdot\frac{X_i}{M}$

که به طور خلاصه داریم

P{ (i, j) غیر موثر بودن زوج} $= 1 - \frac{\bar{X}_N}{M}$

P(انتخاب Y_i برای نمونه) $= \frac{1}{N}\frac{X_i}{M} + \left[1 - \frac{\bar{X}_N}{M}\right]\cdot\frac{1}{N}\frac{X_i}{M}$

$$+\left[1 - \frac{\bar{X}_N}{M}\right]^2 \cdot \frac{1}{N}\frac{X_i}{M} + \ldots\ldots.$$

درحالت کلی

$\frac{\bar{X}}{M} < 1$ وقدر مطلق $1 - \frac{\bar{X}_N}{M}$ مقدار کمتر از ۱ است،لذاسری

هندسی بالا همگرا بوده و مجموع جملات آن طبق معمول قابل

محاسبه است.پس وقتی تعداد دفعات انتخابهای متوالی (j, j) زیاد شود

$$\lim P\,(\text{برای نمونه } Y_i \text{ انتخاب}) = \frac{X_i}{T_N}$$

تبصره: هر چه $\frac{\bar{X}_N}{M}$ به یک نزدیکتر باشد احتمال انتخاب غیر موثر کمتر است.

وزمانی که بزرگترین X_i خیلی با سایر X_i ها فاصله داشته باشد از روش خرد کردن استفاده کنیم

٤-٥روش خرد کردن

روش خرد کردن برای کوچکتر کردن $1-\frac{\bar{X}_N}{M}$ ابداع شده

است<<یعنی M را به چند بخش تقسیم می کنیم>>

ولی در عمل کوچک شدن M به میزانی انجام می گیرد که

$\frac{\bar{X}_N}{M}$ بزرگ شود و احتمال $1-\frac{\bar{X}_N}{M}$ کوچک شود

٤-٦برآورد میانگین جامعه در نمونه گیری با احتمال متغیر و با جایگذاری

$N =$ حجم جامعه

$Y_i =$ واحد i ام

$p_i =$ احتمال انتخاب واحد i ام و $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

$Z_i = \frac{Y_i}{Np_i}$ برآورد کننده نااریب $\bar{Z}_i$ $\quad \bar{Z}_n = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n} Z_i$

$$\bar{Z}_n = \hat{\bar{Z}}_N = \hat{\bar{Y}}_N$$

٤-٧واریانس برآورد کننده میانگین جامعه در نمونه گیری با احتمال متغیر و با جایگذاری

$$Var\left(\hat{\bar{Y}}_N\right) = Var\left(\bar{Z}_n\right) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{Y_i^2}{N^2 p_i} - \bar{Y}_N^{\ 2}\right]$$

تبصره ۱:

اگر $p_i = \frac{1}{N}$، آنگاه نمونه گیری با احتمال متغیر به نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری تبدیل میشود.چون $Z_i = Y_i$

$$Var(\bar{Z}_n) = Var(\bar{Y}_N) = \frac{\sigma_y^{\ 2}}{n}$$

تبصره ۲:

اگر احتمال انتخاب Y_i متناسب با Y_i باشد آنگاه

$$\frac{Y_i}{\sum_{i=1}^{N} Y_i} = p_i \quad \text{و} \quad \frac{X_i}{\sum_{i=1}^{N} X_i} = p_i \Rightarrow Y_i = p_i \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

اگر این مقدار را در رابطه $Z_i = \dfrac{Y_i}{NP_i}$ قرار دهیم داریم

$$Z_i = \frac{p_i \sum_{i=1}^{N} Y_i}{Np_i} = \overline{Y}_N$$

یعنی تمام مقادیر Z_i با $\overline{Y}_N$ برابرند و $\sigma_Z{}^2 = 0$ واین نمونه گیری کاراتر از نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری است

۳-۸برآورد واریانس برآورد کننده میانگین در نمونه گیری تصادفی با احتمال متغیر و با جایگذاری

دیدیم که $\bar{Z}_n$ برآورد کننده نااریب $\bar{Y}_N$ دارای واریانس $\frac{\sigma_Z^2}{n}$ بود ولی مقدار

واریانس جامعه Z_iها مجهول است لذاباید ازروی نمونه گیری برآوردی برای این

واریانس بیابیم.

$$E\left(s_z^{\,2}\right)=\sigma_z^{\,2}$$

یعنی $S_Z^{\,2}$ برآورد کننده نااریب $\sigma_Z^{\,2}$ است. پس با توجه به اینکه

$$Var\left(\hat{\bar{Y}}_N\right)=Var\left(\bar{Z}_n\right)=\frac{\sigma^2{}_z}{n}$$

برآورد کننده این واریانس بصورت زیر است که نااریب بودن آن بدیهی است

$$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_N\right)=\frac{s_z^{\,2}}{n}$$

نتیجه

برای استفاده های کاربردی $V\hat{a}r\left(\bar{Z}_n\right)$ را می توان بصورت زیر نوشت

$$V\hat{a}r\left(\bar{Z}_n\right)=\frac{1}{n(n-1)N^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{Y_i}{p_i}-N\hat{\bar{Y}}_N\right]^2$$

٤-٩نمونه گیری بااحتمال متغیر و بدون جایگذاری

٤-١٠برآوردهای مرتب

ابزاری برای غلبه بر مشکل تغییر امید با هر استخراج ،در نظر گرفتن متغیر جدیدی با هر استخراج است به قسمی که امیدش برابر با مقدار جامعه ای متغیر اصلی تحت مطالعه باشد.برآوردهای مبتنی بر چنین ابزارهایی که ترتیب استخراج ها را به حساب می آورند به برآورد های مرتب موسومند.

الف)حالت دو استخراج

مقادیر دو واحدی را که در اولین و دومین استخراج به دست امده اند با Y_1 و Y_2 نشان می دهیم،که این دو واحد الزاماً واحدهای جامعه نیستند و احتمال های اولیه استخراج این دو واحد را به ترتیب p_1 و p_2 می گیریم

قرار می دهیم

$$Z_1 = \frac{Y_1}{Np_1} \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{1}{N}\left\{Y_1 + Y_2\frac{1-p_1}{p_2}\right\}$$

برآورد کننده نااریب واریانس $\bar{Z}$ بصورت زیر است

$$n = 2 \quad \text{وقتی} \quad V\hat{a}r\left(\bar{Z}\right) = \frac{\left(1+p_1\right)^2}{4N^2}\left[\frac{Y_1}{p_1} - \frac{Y_2}{p_2}\right]^2$$

ب)حالت کلی

فرض کنید $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ مقادیر واحدهای باشند که به ترتیب

استخراج شده اند و $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ احتمال های اولیه انتخاب آنها

در جامعه باشند متغیر Z_i رابصورت تعمیمی بیان می کنیم

$$Z_i = \frac{2}{N}\left[Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_{i-1} + Y_i \frac{\left(1 - p_1 - p_2 \ldots\ldots p_{i-1}\right)}{p_i}\right]$$

می توان دید که

$$\mathrm{E}\left(Z_i\right) = \bar{Y}_N \quad \Longrightarrow \quad \bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

برآورد نااریبی از $Var\left(\overline{Z}_n\right)$

$$V\hat{a}r\left(\overline{Z}_n\right)=\overline{Z}_n^{\,2}-\hat{\overline{Y}}_N^{\,2}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\overline{Z}_n\right)^2$$

برآوردهایی که بیان کردیم به ترتیب استخراج واحد ها بستگی داشتند اما متناظر با هر برآورد مرتب،برآوردی نامرتب نیزوجودداردکه به ترتیب استخراج واحد ها بستگی ندارد.معلوم شده که این روش کاراتر از روش برآورد مرتب است ،یعنی دارای واریانس کمترند.

پیروز و موفق باشید

پایان

بازگشت به فهرست ها