جزوه خلاصه درس

آمار و احتمال مقدماتی (1)

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

هدف کلی:

آشنایی کلی با نقش اعداد در تجزیه و تحلیل پدیده ها، علم آمار، انواع مقیاسهای عددی

هدف های رفتاری:

- مفهوم داده های آماری و مقیاسهای اندازه گیری آنها
- تعریف علم آمار، آمار توصیفی و آمار استنباطی، عنصر و جامعه
- دلایل نمونه گیری و مزایای آنها
- انواع داده های مهم در تحلیلهای جغرافیا و تفاوت آنها با دیگر داده ها در سایر علوم

مفاهیم:

آمار به مجموعه ای از تکنیک ها و روشهایی گفته می شود که در جمع آوری، طبقه بندی، خلاصه کردن، پردازش، نمایش، تجزیه و تحلیل و تفسیر اطلاعات آماری مورد استفاده قرار می گیرد.

در یک دسته بندی عمومی، دو روش آماری عمده وجود دارد: آمار توصیفی و تحلیلی. این روشها ممکن است با نامهای دیگری هم شناخته شوند و یا بصورت ترکیبی و در کنار هم به کار روند.

آمار توصیفی (Descriptive statistics): آمار توصیفی زمانی است که ما از آمار برای توصیف یک جامعه آماری استفاده می کنیم. این جامعه آمار باید آنقدر کوچک باشد که ما بتوانیم تمام اعضاء آن را در مطالعه بگنجانیم. به عنوان مثال می خواهیم تاثیر جنسیت دانشجویان یک کلاس 50 نفره حسابداری را بر نگرش آنان نسبت به این رشته بسنجیم. ما باید هر 50 نفر را مطالعه کنیم. نتایج به دست آمده توصیفگر تأثیر جنسیت بر نگرش اعضاء این کلاس نسبت به رشته خواهد بود. ما نمی توانیم نتایج این مطالعه را به تمام دانشجویان حسابداری یا هر جامعه آماری دیگری تعمیم دهیم. چرا که مطمئن نیستیم که این گروه 50 نفره معرف تمامی دانشجویان حسابداری باشند.

آمار تحلیلی یا استنباطی (Inferential statistics): آمار تحلیلی زمانی مطرح می شود که ما از یک مجموعه داده برای نتیجه گیری در مورد چیزی فراتر از آن مجموعه داده استفاده کنیم. به عنوان مثال ما با استفاده از نمونه گیری، 30 دانشجوی حسابداری را از میان 200 دانشجوی حسابداری یک دانشگاه انتخاب کرده و تأثیر جنسیت بر نگرش آنها نسبت به رشته را بررسی می کنیم. سپس نتایج مطالعه این 30 نفر را به تمامی دانشجویان حسابداری این دانشگاه تعمیم می دهیم. یعنی در آمار توصیفی، تمام اعضا جامعه مطالعه می شوند ولی در آمار تحلیلی نمونه ای از جامعه که معرف کل جامعه است مطالعه می شود اما نتایج به کل جامعه تعمیم داده می شوند. آمار تحلیلی این امکان را میدهد تا جنبه های مورد نظر جامعه های بزرگ آماری را از روی نمونه های نسبتاً کوچکی که نماینده یا معرف آن جامعه ها هستند، مطالعه کنیم.

آمار تحلیلی نسبت به آمار توصیفی پدیده ای جدیدتر به حساب می آید و نتایج حاصل از آن می تواند در استدلال یافته های پژوهش و یا تصمیم گیری مدیران موثر واقع شود.

به همه افراد یا اشیایی که حداقل در یک صفت با هم مشترک باشند، جامعه آماری گفته می شود. جامعه آماری می تواند شامل اشیاء نیز باشد. خاصیت یا خواصی که بین اعضای جامعه مشترک هستند را صفت مشخصه میگویند.

هر عضو از جامعه را یک فرد یا واحد میگویند. مجموعه واحدها یا افراد جامعه را حجم جامعه میگویند که معمولاً با N نشان داده می شود.

صفت مشخصه، صفت یا صفاتی است که در تمامی اعضای جامعه آماری بصورت یکسان وجود دارد. به همین علت بررسی آماری بر روی صفت مشخصه انجام نمی گیرد.

عناصر جامعه به جز صفت مشخصه که در همه اعضا جامعه مشترک است، دارای خواص دیگری نیز هستند که با هم متفاوتند. این گونه خاصیتها یا صفات را که بین اعضا جامعه متغیّر هستند، صفات متغیّر و یا به اختصار متغیر می نامند.به عبارت دیگر صفت متغیّر صفتی است که از یک عضو جامعه آماری به عضو دیگر می تواند تغییر کند.

نمونه آماری به بخشی از جامعه آماری اطلاق می شود که مورد بررسی قرار می گیرد. نمونه آماری بار روشهای مختلف نمونه گیری به دست می آید. اگر تمام اعضای یک جامعه مشمول سنجش آماری شوند و تک تک مورد بررسی قرار گیرند این عمل را سرشماری می گویند. سرشماری عبارت از ثبت و ضبط هدفمند داده های ارزشمند درباره یک جامعه. سرشماریها عموما در سطح ملی و با شمارش همه اعضای جامعه انجام می گیرند. سر شماری وقتی انجام می گیرد که دسترسی به تمامی اعضای جامعه مورد نظر امکان پذیر باشد. مثالها:

- دیدگاه دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه آزاد در مورد نیازهای اساسی دانشگاه در حوزه تحصیلات تکمیلی
- میانگین تعداد دفعات امانت کتاب توسط استادان دانشکده علوم انسانی از کتابخانه مرکزی دانشگاه آزاد در سه ماهه سوم سال جاری

انواع متغییر:

صفات متغیّر میتوانند دو نوع داشته باشند، کیفی و کمّی:

متغیّر کیفی (qualitative): صفتی که برای اعضا جامعه نتوان آن را با هیچ کمیتی بیان کرد مثل جنسیت که می تواند زن باشد یا مرد، و یا نوع بیماری.

متغیّر کمّی (quantitative): صفتی است که بتوان آن را برای اعضا جامعه به صورت عددی و کمّی بیان نمود مثل قد، سن، میزان درآمد، میزان مطالعه، تعداد مقالات تألیفی و غیره.

صفات متغیّر کمّی نیز خود دارای دو نوع مهم هستند که عبارتند از پیوسته، و گسسته یا ناپیوسته.

متغیّر پیوسته (continuous): متغیری که بین هر دو عدد آن بی نهایت عدد قرار می گیرد. به عنوان مثال عمر یک مدرک از هنگام نشر تا تهیه و قرار دادن در کتابخانه می تواند یک کمیت پیوسته باشد زیرا عمر یک مدرک می تواند 3 سال، یا سه سال و 2 ماه و یا 3 سال و 2 ماه و 13 روز و 10 ساعت باشد. همچنین است قد یک انسان می تواند 170 سانتیمتر و یا 170 سانتیمتر و 5 میلیمتر باشد.

متغیّر گسسته (discrete): اگر اعداد حاصل از شمارش و آمار گیری به گونهای باشد که بین دو واحد متوالی، عدد یا کمیت دیگری قرار نگیرد، این کمیتها جدا یا ناپیوسته یا گسسته نامیده می شوند. به عبارت دیگر در متغیر گسسته، بین

هر دو عدد متوالی آن هیچ عددی قرار ندارد. نظیر تعداد دفعات استفاده از یک کتاب که می تواند 2 یا 3 باشد اما نمی تواند 2/5 (دو و نیم) باشد. یا تعداد دانشجویان کلاس که می تواند فرضاً 14 یا 15 باشد اما نمی تواند 14/5 باشد.

مقیاس های اندازه گیری متغییرها:

- مقیاس اسمی
- مقیاس ترتیبی(رتبه ای)
- مقیاس فاصله ای
- مقیاس نسبتی(نسبی)

مقیاس یا سنجه استاندارد، معیاری پذیرفته شده برای اندازه گیری برخی صفات کمّی است. مثلا برای سنجش وزن از گرم یا کیلوگرم استفاده می کنیم. به طور کلی در آمار چهار نوع مقیاس برای اندازه گیری متغیرها وجود دارد: مقیاس اسمی،مقیاس ترتیبی، مقیاس فاصله ای و مقیاس نسبتی .

مقیاس اسمی (nominal)

در اندازه گیری به طریقه اسمی، از اعداد به منظور جدا کردن نمودها یا عناصر طبقات استفاده می شود. اما این اعداد صرفاً نقش نمادین دارند یک علامت یا نام محسوب می شوند. آنها به هیچ وجه جنبه کمّی یا عددی ندارند و نمیتوان هیچ نوع عملیات جبری روی آنها انجام داد. تنها ویژگی که این مقیاس نشان میدهد برابر بودن و یا متفاوت بودن است. به عنوان مثال ممکن است در یک پرسشنامه از پاسخ دهندگان بپرسید:

جنسیت شما چیست؟

1. مرد   2. زن

در اینجا عدد یک می تواند به عنوان یک نماد برای جنسیت مرد مورد استفاده قرار گیرد ولی هیچ ماهیت کمّی ندارد.

مقیاسهای اندازه گیری در تمام مثالهای زیر از نوع اسمی هستند.

رشته تحصیلی شما چیست؟

1. شیمی 2. فیزیک 3. حسابداری 4. ریاضیات

از کدام منبع بیش از سایر منابع برای انجام پژوهش استفاده میکنید؟

1. کتاب 2. مقالات مجلات 3. منابع روی وب 4. پایاننامه ها

مقیاس ترتیبی یا رتبه ای (ordinal)

در این نوع اندازه گیری از اعداد برای مقایسه عناصر از نظر کوچکتر یا بزرگتر بودن و یا برابر بودن استفاده می شود. عناصر جامعه نیز بر اساس نتایج این مقایسه ها، طبقه بندی می شوند. اعداد در این نوع اندازه گیری فقط برای مرتب کردن عناصر از کوچک به بزرگ یا برعکس مورد استفاده قرار می گیرند و نشانه کمیّت مشخصی نیستند. مثال: به سئوال زیر توجه کنید:

شما میزان رضایتمندی خود را از خدمات بخش مرجع کتابخانه چگونه می بینید؟

1. خیلی کم 2. کم 3. متوسط 4. زیاد 5. خیلی زیاد

توجه کنید که در اینجا ما میتوانیم بگوئیم 5 (خیلی زیاد) بیشتز از 4 (زیاد است) اما این صرفاً بیانگر رتبه آنها در مقایسه با یکدیگر است. ما نمیتوانیم میزان یا کمیت این برتری را مشخص کنیم، یا به عبارتی مشخص نیست خیلی زیاد چقدر از زیاد، بیشتر است. در مقیاس ترتیبی نیز انجام عملیات جبری ممکن نیست.

مقیاس فاصله ای (interval)

در اندازه گیری به شیوه فاصله ای، عناصر مورد اندازه گیری نه تنها میتوانند از نظر رتبه با یکدیگر مقایسه شوند، بلکه میتوان آنها را بر حسب طول فاصله میان عناصر نیز مقایسه و طبقهبندی کرد. نمونه بارز این نوع مقیاس، درجه حرارت بر حسب سلسیوس است. در اندازه گیری با مقیاس فاصله ای ما نیازمند یک نقطه صفر و نیز نیازمند مشخص بودن فاصله هستیم. صفر در این مقیاس صفر مطلق نیست و صفر دلبخواهی است. مثل صفر در مقیاس درجه حرارت سلسیوس که صفر مطلق نیست (صفر مطلق 273− درجه سلسیوس است). به همین علت دراین مقیاس استفاده از مقادیر منفی نیز امکانپذیر است. برخلاف دو مقیاس اسمی و ترتیبی، در مقیاس فاصله ای میتوان برخیعملیات جبری نظیر تفریق را انجام داد، اما امکان ضرب و تقسیم وجود ندارد. به عنوان مثال نمیتوان گفت 50 درجه سلسیوس دو برابر 25 درجه سلسیوس گرم است. نمونه دیگر مقیاس فاصله ای، بهره هوشی است.

مقیاس نسبی یا نسبتی (ratio)

مقیاس نسبی نه تنها به ما امکان میدهد تعیین کنیم یک اندازه از اندازه دیگر چقدر بزرگتر یا کوچکتر است، بلکه به ما امکان میدهد تا بگوئیم یک اندازه چند برابر یا چه نسبتی از یک اندازه دیگر است. مقادیر فیزیکی نظیر وزن، طول و حجم از نوع مقیاس نسبی هستند. در مقیاس نسبی، یک اندازه طبیعی به نام صفر مطلق وجود دارد. در این مقیاس امکان انجام اعمال جبری نظیر تقسیم و ضرب نیز وجود دارد. به عنوان مثال میتوانیم بگوییم که یک بسته 20کیلوگرمی دو برابر یک بسته 10 کیلوگرمی وزن دارد، یا وزن آن 10 کیلوگرم از بسته 10 کیلوگرمی بیشتر است و یا اینکه وزن آن 100 درصد بیشتر از بسته 10 کیلوگرمی است و یا اینکه این دو بسته در مجموع 30 کیلوگرم وزن دارند. همان طور که میبینیم تمامی اعمال جبری بر روی این مقیاس قابل انجام است.

* نکته: صفتهای متغیّر کیفی با مقیاسهای اسمی و ترتیبی اندازه گیری می شوند، و صفتهای متغیّر کمّی با مقیاسهای فاصله ای و نسبی.

فصل دوم: سازمان دهی داده ها

هدف کلی:

آشنایی مقدماتی با شیوه های تنظیم و تلخیص داده ها و تشکیل جدول فراوانی

هدف های رفتاری:

- نحوه مرتب کردن داده ها(کمی و رسته ای)
- تنظیم جداول فروانی و معیارهای مربوطه
- نمودارهای آماری و کاربرد آنها در توصیف داده ها

داده های آماری که در مرحله مشاهده به دست آمده است، اعداد و ارقامی هستند که هیچگونه مفهوم خاصی نداشته و نیاز به پردازش دارند تا آنها را به صورت یک مجموعه ادغام شده درآورد. پردازش داده ها یا نتایج مشاهدات شامل منظم کردن، طبقهبندی یا گروهبندی، تشکیل جداول، محاسبه شاخصهای آماری است. بنابراین هدف از پردازش عبارت است از ادغام نتایج مشاهدات، متراکم کردن اطلاعات، و به دست آوردن شاخصها به منظور توصیف ویژگیهای جامعه آماری.

جدول توزیع فراوانی:

فراوانی عبارت است از تعداد یا مقدار مشاهده شده از یک متغیر در یک گروه خاص. جدول توزیع فراوانی جدولی است که خلاصه ای از فراوانی های مشاهده شده یک متغیر را نشان می دهد.

در جدول توزیع فراوانی (یا توزیع صفت متغیّر)، کلیه اعداد، طبقه بندی شده و فراوانی آنها که بیانگر تکرار یک عدد است در جلوی آنها یادداشت می شود.

مفاهیم جدول آماری:

الف) فراوانی مطلق هر رده

ب) فراوانی نسبی هر رده

ج) فراوانی تجمعی هر رده

د) فراوانی تجمعی نسبی

ه) نماینده طبقات (وسط طبقات)

و) خط و نشان(چوب وخط)

- **فراوانی (مطلق) در جدول دسته‌بندی: فراوانی مطلق یک دسته برابر تعداد اعضایی است که در آن دسته قرار می‌گیرند.**
- **فراوانی نسبی : نسبت فراوانی مطلق یک دسته به کل فراوانی های همه دسته ها یعنی** $\frac{f_i}{n}$.
- **درصد فراوانی نسبی : حاصلضرب فراوانی نسبی در ۱۰۰ را درصد فراوانی نسبی می نامند.**
- **فراوانی تجمعی : مجموع همه فراوانی ها از دسته اول تا هر دسته را فراوانی تجمعی می نامند.به عبارت دیگر فراوانی تجمعی هر دسته برابر تعداد اشیایی است که مقدار آنها از کرا ن بالای آن دسته کمترند.**
- **فراوانی نسبی تجمعی : نسبت فراوانی تجمعی یک دسته به کل فراوانی های همه دسته ها.**
- **درصد فراوانی نسبی تجمعی : حاصلضرب فراوانی نسبی تجمعی در ۱۰۰ را درصد فراوانی نسبی تجمعی می نامند.**

مثال1. داده های زیر میزان کیفیت 20 کالا را براساس کیفیت خوب(کد3) و کیفیت متوسط (کد2) و کیفیت ضعیف (کد1) نشان می دهد. یک جدول فراوانی مناسب برای این داده ها تشکیل دهید.

2 3 2 1 1 2 3 1 3 2 1 1 2 31 2 2 2 2 3

کیفیت کالا	فراوانی مطلق	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فروانی نسبی تجمعی
۱	۶	۰/۳	۶	۰/۳
۲	۹	۰/۴۵	۱۵	۰/۷۵
۳	۵	۰/۲۵	۲۰	۱
جمع	۲۰	۱	-	-

مثال 2. گروه خونی 20 فرد ورزشکار را به صورت زیر جمع آوری کرده ایم. یک جدول فراوانی مناسب برای این داده ها تشکیل دهید.

$$B\ ,\ A\ ,\ AB\ \ ,\ B\ ,\ O\ ,\ O\ ,\ AB\ \ ,\ O\ ,\ O\ ,\ O$$
$$AB\ \ ,\ B\ ,\ B\ ,\ A\ ,\ B\ ,\ A\ ,\ O\ ,\ O\ ,\ O\ ,\ A$$

گروه خونی	فراوانی مطلق	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی تجمعی
A	4	0.2	4	0.2
B	5	0.25	9	0.45
AB	3	0.15	12	0.6
O	8	0.4	20	1
جمع	20	1	–	–

چگونگی تشکیل جدول فراوانی داده های پیوسته:

محاسبه دامنه تغییرات: $R = x_{\max} - x_{\min}$

محاسبه تعداد رده ها :

الف) روش دلخواه

ب) $k = 1 + 3.3\log(n)$

ج) $n = 2^k$

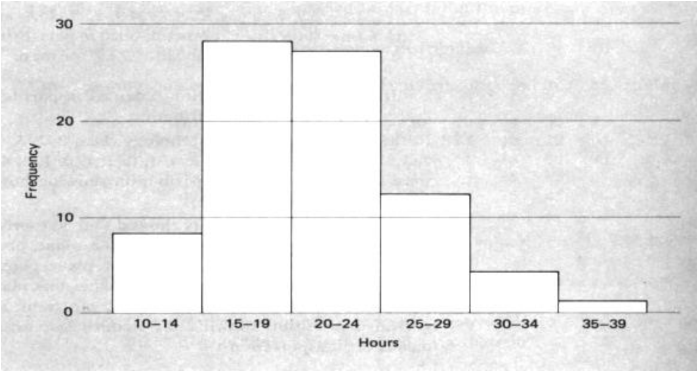
محاسبه طول(حدود) رده ها: $c = \dfrac{R}{k}$

نمودارهای آماری:

- بافت نگار(هیستوگرام)

نمودار بافت نگار برای داده های کمی پیوسته بکار برده می شود.

روی محور افقی حدود رده ها و روی محور عمودی فراوانی مطلق یا فراوانی نسبی تعریف می شود.



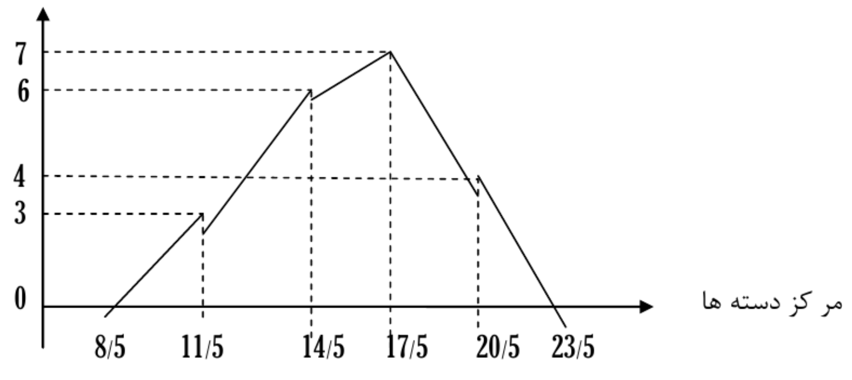
- چند بر فراوانی(چند ضلعی)

نمودار چند بر فراوانی نیز برای داده های کمی پیوسته بکار برده می شود.

روی محور افقی حدود رده ها و روی محور عمودی فراوانی مطلق یا فراوانی نسبی تعریف می شود.

مثال: برای جدول فراوانی زیر ، نمودار چند بر فراوانی رسم کنید

دسته ها	مرکز دسته	فراوانی
10-13	11/5	3
13-16	14/5	6
16-19	17/5	7
19-22	20/5	4



- شاخه و برگ(ساقه و برگ)

نمودار شاخه و برگ نیز برای داده های کمی پیوسته بکار برده می شود.

مثال: فرض کنید عددهای زیر تعداد شعب یک بانک بزرگ در 20 ناحیه شهری باشد.

69 84 52 93 61 74 79 65 63 88

57 64 67 72 74 55 82 61 77 68

شاخه			برگ					
5	2	5	7					
6	1	1	3	4	5	7	8	9
7	2	4	4	7	9			
8	2	4	8					
9	3							

- دایره ای(کلوچه ای)

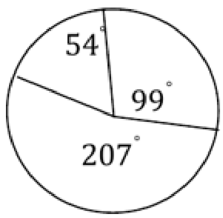
نموداری دایرهای، شبیه یک دایره است که تمام اجزا یک کل را نشان میدهد. فهم این نوع نمودار به لحاظ بصری آسانتر است و بیشتر از آن برای صفات متغیّر کیفی استفاده می شود. اما به طور کل از نمودار دایره ای بیشتر برای نشان دادن متغیرهای کیفی (مثل جنسیت، رشته تحصیلی و غیره) استفاده می شود.

نمودار دایره ای برای داده های رسته ای(کیفی) بکار برده می شود.

360 × فراوانی نسبی هر رده = قطاع دایره برای هر رده

مثال: با توجه به جدول زیر نمودار دایره ای خانوارها را بر حسب جمعیت رشم کنید.

نوع خانوار	کم جمعیت	جمعیت متوسط	پر جمعیت	جمع
تعداد خانوار	11	23	6	40
زاویه روی دایره	$\frac{11}{40}\times 360^\circ = 99^\circ$	$\frac{23}{40}\times 360^\circ = 207^\circ$	$\frac{6}{40}\times 360^\circ = 54^\circ$	



- میله ای

نمودار میله ای برای داده های رسته ای(کیفی) و داده های کمی گسسته بکار برده می شود.

روی محور افقی نشان طبقات(نماینده رده ها) و روی محور عمودی فراوانی نسبی را تعریف می کنیم.

فصل سوم: توصیف عددی داده ها

هدف کلی:

آشنائی با راه های گوناگون بیان ویژگیهای داده ها به کمک اندازه های گرایش مرکزی و پراکندگی

هدف های رفتاری:

- دلایل نیاز به توصیف هندسی و عددی داده ها
- گرایشهای مرکزی و پراکندگی و تفاوتها و کاربرد آنها
- مشخصه های شکلی در توصیف داده ها

گرایش های مرکزی: شاخصهای مرکزی یا مشخصه های مرکزی، شاخصهایی هستند که مرکزیت یک صفت متغیّر را در جامعه نشان میدهند. برای یک محقق مهم است که از وضعیت توزیع یک صفت متغیّر در جامعه آگاه باشد.

- میانگین
- میانه
- مد(نما)

میانگین حسابی:

الف) هنگامی که تعداد داده ها معمولی یا کم باشد. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

ب) هنگامی که داده ها به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i . m_i$ که در آن f_i فراوانی مطلق رده i ام و m_i نشان دسته i ام است.

مثال:

در جدول فراوانی مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۱۰/۵

۳) ۱۱

۴) ۱۱/۵

حدود دسته‌ها	۸ـ۶	۱۰ـ۸	۱۲ـ۱۰	۱۴ـ۱۲
فراوانی	۱	۳	۱	۵

گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم در یک جدول فراوانی، میانگین کرانهای هر طبقه برابر نشان دسته است، پس داریم:

حدود دسته‌ها	۸ـ۶	۱۰ـ۸	۱۲ـ۱۰	۱۴ـ۱۲
نشان دسته‌ها	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱	۳	۱	۵

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i . m_i = \frac{1\times7+3\times9+1\times11+5\times13}{1+3+1+5} = \frac{110}{10} = 11$$

میانگین همساز(هارمونیک یا توافقی) :

هنگامی که مشاهدات بر حسب واحد مانند، کیلومتر بر ساعت، لیتر بر ثانیه،... تعریف شوند از میانگین هارمونیک استفاده می شود.

الف) هنگامی که تعداد داده ها معمولی یا کم باشد. $H=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$

ب) هنگامی که داده ها به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند. $H=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{f_i}{m_i}}$

مثال: در یک کارگاه تراشکاری یک قطعه خاص به وسیله سه رایانه در زمان های $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ساعت تراش داده می شود. میانگین هارمونیک زمان برش را محاسبه کنید.

برای حل از فرمول قسمت الف استفاده می کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$H=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{3}{(4+3+2)}=\frac{1}{3}$$

میانگین هندسی

هنگامی که مشاهدات به صورت، نرخ رشد، نرخ تورم، نسبت،... تعریف شوند از میانگین هندسی استفاده می شود.

االف) هنگامی که تعداد داده ها معمولی یا کم باشد. $G=\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}$

ب) هنگامی که داده ها به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند. $G=\sqrt[n]{x_1^{f_1}.x_2^{f_2}....x_k^{f_k}}$

مثال: اگر میزان رشد جمعیت در 5 سال اخیر در کشور به صورت زیر باشد میانگین رشد جمعیت در این دوره چقدر است؟

3.5 و 3 و 3 و 2.8 و 3

داریم $G=\sqrt[5]{2.8\ .3^3.3.5}=3.05$

نکته: همواره رابطه زیر بین میانگین ها برقرار است:

میانگین حسابی > میانگین هندسی > میانگین هارمونیک

مثال: میانگین حسابی تعدای داده 11 و میانگین هارمونیک آنها 8 می باشد، کدام گزینه می تواند میانگین هندسی همان داده ها باشد؟

1) 9   2) 12   3) 7   4) قابل محاسبه میست

پاسخ گزینه 1 می باشد، با توجه به نکته فوق باید از 8 بزرگتر و از 11 کوچکتر باشد.

میانه:

حالت(1): هنگامی که تعداد مشاهدات معمولی یا کم است.

االف) تعداد مشاهدات فرد باشد: میانه برابر است با عددی که در وسط مشاهدات قرار می گیرد.

ب) تعداد مشاهدات زوج باشد: میانه برابر است با میانگین دو مشاهده ای که در وسط داده ها قرار می گیرد.

حالت(2):هنگامی که مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$\tilde{x} = m = L \ + (\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}) \times c$$

L : حد پایین طبقه ای که میانه در آن قرار می گیرد.(**رده میانه اولین رده ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی** $\frac{n}{2}$ **باشد.**)

F_{i-1} : فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه ای که میانه در آن قرار دارد.

f_i : فراوانی مطلق طبقه ای که میانه در آن قرار دارد.

مثال: میانه داده های جدول فراوانی زیر را بیابید:

حدود رده ها	20-24	25-29	30-34	35-39
فراوانی	12	22	10	16

حل: مقدار $30 = \frac{12+22+10+16}{2} = \frac{n}{2}$ را با فراوانی تجمعی رده ها مقایسه می کنیم. برای این منظور لازم است فراوانی های تجمعی را نیز در جدول حساب نماییم. بنابراین

حدود رده ها	19.5-24.5	14.5-29.5	39.5-34.5	34.5-39.5
فراوانی	12	22	10	16
فراوانی تجمعی	12	34	44	60

لذا رده حاوی میانه رده دوم خواهد بود. بنابراین:

$$\tilde{x} = m = L \ + (\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}) \times c = 24.5 + (\frac{30-12}{22}) \times 5 = 28.59$$

دلیل اینکه از کران پایین رده دوم نیم واحد کم کرده ایم، پیوسته کردن داده ها می باشد چون جدول فوق چون تمام داده ها را در بر ندارد از کران پایین هر طبقه نیم واحد کم و به کران بالا در طبقه نیم واحد اضافه می کنیم.

چارک ها:

حالت(1): هنگامی که تعداد مشاهدات معمولی باشد: $a=1,2,3 \qquad Q_a = x_{(\frac{a\times n}{4})}$

(1) چارک اول (Q_1)

(2) چارک دوم(Q_2) همان میانه است.

(3) چارک سوم(Q_3)

حالت(2):هنگامی که مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$Q_a = L + (\frac{\frac{a\times n}{4} - F_{i-1}}{f_i})*c$$

L:حد پایین طبقه ای که چارک aام در آن قرار می گیرد.

F_{i-1}:فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه ای که چارک aام در آن قرار دارد.

f_i :فراونی مطلق طبقه ای که چارک aام در آن قرار دارد.

تمرین: در جدول فراوان زیر چارک سوم را بدست آورید.

حدود رده ها	**2-5**	**6-9**	**10-13**	**14-17**	**18-21**	**22-25**	**26-29**	**30-33**
فراوانی	2	5	8	10	<u>10</u>	3	1	1
فراوانی تجمعی	2	7	15	<u>25</u>	35	38	39	40

حل)

$$Q_3 = L + (\frac{\frac{3\times n}{4} - F_{i-1}}{f_i})*c = L + (\frac{\frac{3\times n}{4} - F_{i-1}}{f_i})*c = 17.5 + (\frac{30-25}{10})*4 = 19.5$$

دقت کنید که جدول فوق چون تمام داده ها را در بر ندارد از کران پایین هر طبقه نیم واحد کم و به کران بالا در طبقه نیم واحد اضافه می کنیم.

مد(نما):

داده ای که بیشترین فراوانی یا تکرار را داشته باشد مد نامیده می شود.

مثال: مد داده های زیر را بیابید.

1 1 2 2 5 6 3 6 6 9 5 5 6 9 2 1

با توجه به اینکه 6 بیشتر از داده های دیگر تکرار شده، مد می باشد.

هنگامی که مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند مد عبارتست از:

$$M = L + (\frac{d_1}{d_1 + d_2}) \times \mathrm{c}$$

(رده مد رده ای است که بیشترین فراوانی مطلق را دارد.)

مثال: در جدول فراوانی داده شده، مد را بیابید.

حدود رده ها	فراوان
2-5	7
6-9	6
10-13	10
14-17	4

حل:

$$M = L + (\frac{d_1}{d_1 + d_2}) \times \mathrm{c} = 9.5 + (\frac{10-6}{(10-6)+(10-4)}) \times 4 = 9.5 + 1.6 = 11.1$$

نکته مهم: جدول فوق چون تمام داده ها را در بر ندارد از کران پایین هر طبقه نیم واحد کم و به کران بالا در طبقه نیم واحد اضافه می کنیم.

گرایش های پراکندگی: در مطالعه تغییرات صفت متغیر اعضا یک جامعه تنها نمی توان به مشخصکننده های مرکزی اکتفا نمود چرا که گاه این تمامی شاخصهای مرکزی نظیر میانگین و نما و میانه برای دو جامعه یکسان است اما آن دو جامعه از حیث پراکندگی متفاوت هستند.به این مثال توجه کنید: فرض کنید که دو جامعه الف و ب هر یک با هفت عضو به شرح زیر وجود دارند:

الف: 8 6 4 4 3 2 1

ب: 9 8 4 4 2 1 0

مشاهده می کنید که میانگین، میانه و نما برای هر دو جامعه عدد 4 است، درحالی که اختلاف و از هم گسیختگی داده های جامعه ب بیشتر است و مشخص کننده های مرکزی این تفاوت را بیان نمی کنند. بنابراین معرفی مشخص کننده های پراکندگی که بیانگر این نوع اختلافها هستند، ضرورت دارد. سه نوع مشهور مشخص کننده های پراکندگی عبارتند از دامنه ی تغییرات، انحراف متوسط و انحراف معیار که آنها را شرح میدهیم.

- دامنه تغییرات
- انحراف از میانگین
- واریانس

- انحراف معیار

دامنه تغییرات:

R = کوچکترین مشاهده − بزرگترین مشاهده

انحراف از میانگین:

$$A.D = \frac{1}{n}\sum |x_i - \bar{x}|$$

واریانس:

حالت اول: تعداد مشاهدات معمولی باشد. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

حالت دوم: مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2$

انحراف از معیار:

$$s = \sqrt{s^2}$$

گرایش های دیگر پراکندگی:

- برد میان چارکی : $Q_3 - Q_1$
- نیم برد چارکی: $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$
- ضریب تغییر چارکی: $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

ضریب چولگی پیرسن:

$$SK_p = \frac{\bar{x} - M}{S}$$

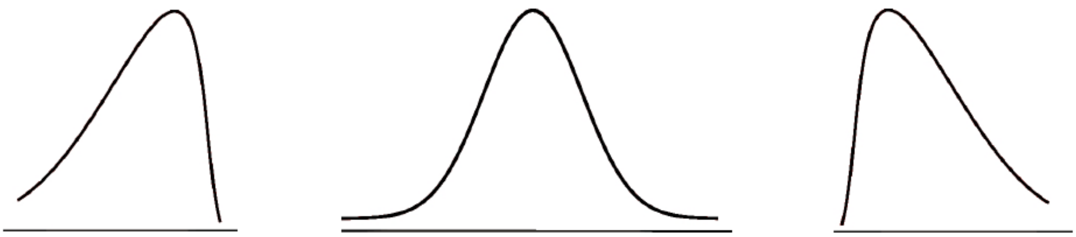
رابطه پیرسن:

$$\bar{x} - M = 3(\bar{x} - m)$$

ضریب چولگی بر اساس گشتاور مرکزی مرتبه سوم $b = \frac{m_3}{S^3}$

در مورد نمودارهای پیوسته تک‌مدی معمولاً یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

چوله به راست $S>0$ — متقارن $S=0$ — چوله به چپ $S<0$



میانگین > میانه > مد — مد = میانه = میانگین — مد > میانه > میانگین

برجستگی
$$K=\frac{m_4}{S^4}-3=\frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^4}{\left[\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right]^2}-3$$

<u>مساله حل شده</u>: میزان فشار خون 30 بیمار بستری در یک بیمارستان به شرح زیر است:

الف) جدول فراوانی این داده ها را رسم نمایید.

ب) مقادیر میانگین هندسی، هارمونیک، میانه و مد رامحاسبه کنید.

ج) چارک سوم و صدک سی وسوم داده ها را بدست آورید.

د) واریانس و انحراف معیار داده ها را محاسبه نمایید.

7,7,8,8,9,9,9,10,10,10, 10, 11,11,11,12,12,12,12,12,
12,13,13,15,15,16,17,18,20, 20,21

حل:

$$k=1+3.32*\log(30)=5.9\cong 5$$
$$R=(21+0.5)-(7-0.5)=15$$
$$I=\frac{R}{k}=\frac{15}{5}=3$$

رده ها	x_i نشان رده	f_i فراوانی مطلق	فراوانی تجمعی F_i	r_i فراوانی نسبی	g_i فراوانی نسبی تجمعی
6.5—9.5	8	7	7	0.23	0.23
9.5—12.5	11	13	20	0.43	0.66
12.5—15.5	14	4	24	0.13	0.8
15.5—18.5	17	3	27	0.1	0.9
18.5—21.5	20	3	۳۰	0.1	1
جمع		30		1	

ب)

$$G = \sqrt[30]{8^7.11^{13}.14^4.17^3.20^3} = 11.69$$

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{5} \frac{f_i}{x_i}} = \frac{30}{\frac{7}{8}+\frac{13}{11}+\frac{4}{14}+\frac{3}{17}+\frac{3}{20}} = 11.23$$

$$med = 9.5 + (\frac{15-7}{13})*3 = 11.34$$

$$Mode = 9.5 + (\frac{6}{6+9})*3 = 10.7$$

ج) $np = 30*0.75 = 22.5$

$$Q_p = L_{Q_p} + (\frac{np - F_{Q_p-1}}{f_{Q_p}})*I = Q_{0.75} = 12.5 + (\frac{22.5-20}{4})*3 = 14.375$$

$$np = 30*0.33 = 9.9$$

$$Q_p = L_{Q_p} + (\frac{np - F_{Q_p-1}}{f_{Q_p}})*I = Q_{0.33} = 9.5 + (\frac{9.9-7}{13})*3 = 10.01$$

د)

$$\overline{X} = 12.2, \qquad S^2 = \frac{1}{30-1}[\sum_{i=1}^{5} f_i.X_i^{\,2} - n.\overline{X}^2] = 14.03 \qquad S = 3.75$$

مسایل حل شده مبحث نمودارها:

در نمودار ساقه و برگ مقابل، تفاضل میانه از مُد کدام است؟

۱	۱	۲	۳	۳	۴
۲	۱	۲	۲	۵	
۳	۲	۳	۳	۳	۷

۱) ۱۱

۲) ۲۲

۳) ۳۳

۴) صفر

گزینه ۱ پاسخ است.

با توجّه به نمودار ساقه و برگ مفروض، تعداد ۱۴ داده داریم که از کوچک به بزرگ عبارتند از:

۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۳ و ۱۴ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۲ و ۲۵ و ۳۲ و ۳۳ و۳۳ و۳۳ و ۳۷

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو داده‌ی وسطی برابر میانه خواهد بود، پس:

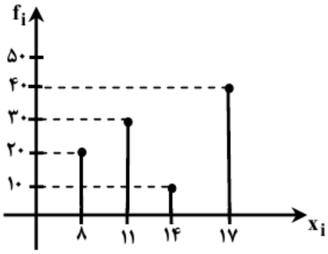
$\overset{\approx}{x}$ **= ۲۲**

از طرفی چون عدد۳۳ بیش از اعداد دیگر تکرار شده، لذا:

$\hat{x}$ **= ۳۳**

$\hat{x} - \overset{\approx}{x}$ **= ۳۳ − ۲۲ = ۱۱**

- در داده‌های مربوط به نمودار روبه رو میانه کدام است؟



۱) ۱۱

۲) ۱۴

۳) ۱۲/۵

۴) ۹/۵

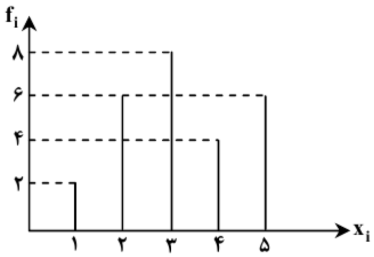
گزینه ۳ پاسخ است.

اگر داده‌های این نمودار را در یک سطر مرتب کنیم داریم:

۱۷...و۱۷و۱۷و (تا۴۰)   ۱۴و...و۱۴و۱۴و (تا۱۰)   و ۱۱...و۱۱و۱۱ (تا۳۰)   و ۸,۸,...,۸ (تا۲۰)

تعداد کل داده‌ها برابر۱۰۰ است که جمله‌های پنجاهم و پنجاه و یکم در وسط قرار دارند. اما با توجه به سطر بالا دیده می‌شود که جمله‌ی پنجاهم برابر ۱۱ و جمله ی پنجاه و یکم برابر ۱۴ است، پس میانه برابر است با $\frac{۱۱+۱۴}{۲} = \frac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵$

- در نمودار میله‌ای مقابل، مُد داده‌ها کدام است؟



۱) ۸

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۳

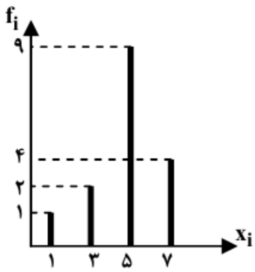
گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به نمودار داده شده، جدول فراوانی ذیل نتیجه می‌گردد:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۲	۶	۸	۴	۶

چون طبقه‌ی سوم بیش‌ترین فراوانی را دارد، نشان این طبقه برابر مُد داده‌ها است.

با توجه به نمودار میله ای روبه‌رو، واریانس داده‌ها چه قدر است؟



۱) ۲/۲۵

۲) ۲/۴۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

گزینه ۳ پاسخ است.

$$X = \frac{۱\times۱+۲\times۳+۹\times۵+۴\times۷}{۱۶} = ۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱\times۱^۲+۲\times۳^۲+۹\times۵^۲+۴\times۷^۲}{۱۶} - ۵^۲ = ۲.۵$$

فصل چهارم: احتمال

هدف کلی: آشنائی مقدماتی با نظریه احتمال و روشهای شمارش

هدف های رفتاری: آشنائی با مفاهیم

- فضای نمونه و پیشامد
- احتمال و اصول آن
- روشهای شمارش

مفاهیم اولیه:

- آزمایش تصادفی
- فضای نمونه (S)
- پیشامد (E)

آزمایش قطعی: آزمایشی که نتیجه آن قبل از انجام معلوم باشد.

آزمایش (پدیده) تصادفی: آزمایشی که از قبل نتیجه‌اش معلوم نباشد را آزمایش (پدیده) تصادفی می‌نامیم.

فضای نمونه ای: کلیه حالات ممکن را در یک آزمایش فضای نمونه ای می نامند.

برآمد: هر عضو فضای نمونه ای را یک برآمد می نامند.

پیشامد: هر زیر مجموعه ای از فضای نمونه ای را یک پیشامد می نامند.

مثال1. پرتاب سکه

آزمایش تصادفی	فضای نمونه
پرتاب یک سکه	{ خ ، ش }
پرتاب دو سکه	{خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}
پرتاب سه سکه	{ش ش ش ، خ ش ش ، ش خ ش ، ش ش خ ، ش خ خ ، خ ش خ ، ش خ خ ، خ خ خ}
۲^n	تعداد عضوهای پرتاب n سکه

مثال2. پرتاب تاس

آزمایش تصادفی	فضای نمونه
پرتاب یک تاس	{۱،۲،۳،۴،۵،۶}
پرتاب دو تاس	{(۱و۱)،(۲و۱)،(۳و۱)،(۴و۱)،(۵و۱)،(۶و۱)، (۱و۲)،...،(۶و۲)،...،(۱و۶)،...،(۶و۶) }
۶^n	تعداد عضوهای پرتاب n تاس

تعریف احتمال: احتمال یک پیشامد عبارتست از تعداد عضوهای آن پیشامد بروی تعداد عضوهای فضای نمونه.

به عبارتی:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

مثال3. در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه یک بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

S = {خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}

E = {ش خ ،خ ش}

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{2}{4}=0.5$$

مثال 4. در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه حداقل یک بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

S={خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}

E={ش خ ،خ ش ، ش ش}

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{3}{4}=0.75$$

مثال5. در پرتاب سه سکه، احتمال اینکه دو بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

S= {خ خ خ ،خ خ ش ،خ ش خ ، ش خ خ، ش ش خ ، ش خ ش ،خ ش ش ، ش ش ش}

E= {ش ش خ ، ش خ ش ،خ ش ش }

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{3}{8}=0.375$$

مثال6. در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد ظاهر شده فرد باشد، چقدر است؟

S = {1,2,3,4,5,6}

E = {1,3,5}

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{3}{6}=0.5$$

مثال7. در پرتاب دو تاس، احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده 9 باشد، چقدر است؟

S = {(1و1)،(1و2)،(1و3)،(1و4)،(1و5)،(1و6)،(2و1)،....(2و6)،....(6و1)،....(6و6) }

E={(3و6)،(4و5)،(5و4)،(6و3)}

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{4}{36}=0.11$$

اصول احتمال:

اصل (1): اگر E پیشامدی از فضای نمونه S باشد، آنگاه: $0 \le P(E) \le 1$

اصل (2): $P(\Phi)=0 \quad , \quad P(S)=1$

یا به عبارتی، اگر $E_1,...,E_k$ پیشامدهای از فضای S نمونه باشد، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{k} P(E_i)=1$$

چند تعریف:

1. متمم احتمال E برابر است با : $P(E')=1-P(E)$
2. E_1,E_2 دو پیشامد مستقل اند، اگر: $P(E_1 \cap E_2)=P(E_1) \cap P(E_2)$
3. E_1,E_2 دو پیشامد ناسازگاراند، اگر: $P(E_1 \cap E_2)=0$

مثال 8. در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد ظاهر شده کمتر از 3 نباشد، چقدر است؟

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{1,2\}$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(E')=1-P(E)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

مثال9. یک تاس سالم دو بار پرتاب می شود. مطلوبست احتمال اینکه مجموع شماره هایی که در دو بار پرتاب ظاهر می شوند، کمتر از 5 و بیشتر از 10 باشد.

S = {(1و1)،(1و2)،(1و3)،(1و4)،(1و5)،(1و6)،(2و1)،....(2و6)،....(6و1)،....(6و6) }

E_2 = {(5و6)،(6و5)،(6و6) } و E_1 = {(1و1)،(1و2)،(1و3)، (2و1)، (2و2)،(3,1)}

$$P(E_1)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(E_2)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

$$E_1 \cap E_2=\Phi \Rightarrow P(E_1 \cap E_2)=0$$

قضیه: اگر E_2,E_1 دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه:

- E_2,E_1' دو پیشامد مستقل اند.
- E_2',E_1 دو پیشامد مستقل اند.
- E_2',E_1' دو پیشامد مستقل اند

قواعد احتمال:

- جمع احتمال: اگر E_2, E_1 دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند آنگاه داریم:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

احتمال شرطی: فرض کنید پیشامدی مانند E_2 رخ داده است. احتمال وقوع E_1 به شرط E_2 که با نماد $P(E_1 | E_2)$ نشان می دهیم عبارتست از:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

- ضرب احتمال: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \times P(E_1 | E_2)$

مثال 10. تاس سالمی را پرتاب می کنیم. اگر بدانیم عدد ظاهر شده فرد می باشد، احتمال اینکه عدد ظاهر شده کمتر از 4 باشد، چقدر است؟

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$E_2 = \{1, 3, 5\}$$

$$P(E_1) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$E_1 \cap E_2 = \{1, 3\} \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

آنالیز ترکیبی و اصول شمارش:

فاکتوریل:

حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت 1 و 2و 3و ....n را فاکتوریل n گویند که با نماد $n!$ نشان داده می شود.

مثال:

$$1! = 1$$
$$2! = 1 \times 2$$
$$3! = 1 \times 2 \times 3$$
$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$
$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

تبدیل یا جایگشت:

جابجا کردن n شی متمایز را به صورتهای مختلف در کنار هم، تبدیل n شی گویند که با نماد P_n نشان داده می شود.

مثال1. در یک سالن سخنرانی 4 صندلی خالی وجود دارد. 4 نفر از بیرون وارد سالن می شوند. نفر اول می تواند به 4 طریق جا انتخاب کند، نفر دوم به سه طریق، نفر سوم به دو طریق و نفر چهارم به یک طریق.

$$P_4 = 4! = 24$$

مثال2. کتابداری می خواهد شش کتاب متفاوت با نامهای مختلف را در یک قفسه کتابخانه بدون در نظر گرفته هیچ شرطی از راست به چپ بچیند. این کار را به چند صورت می تواند انجام دهد.

$$P_6 = 6! = 720$$

تبدیلهای با تکرار: اگر از شی مفروض r_1 شی از یک نوع، r_2 شی از نوع دیگر و ..... و سرانجام r_k شی از نوع دیگری باشند به طوری که $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$ باشد، تعداد جایگشت یا تبدیلهای کل آنها از رابطه زیر تعیین خواهد شد.

$$\frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}$$

مثال3. به چند طریق 3 دانشجوی سال اول و 4 دانشجوی سال دوم می توانند بر روی 7 صندلی در یک ردیف کنار هم قرار گیرند.؟

$$\frac{7!}{3!4!} = 35$$

مثال4. با حروف کلمه دیدم چند کلمه می توان ساخت.

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

مثال5. با حروف باباخانیان چند کلمه ده حرفی می توان نوشت.

$$\frac{10!}{2!4!2!} = 37800$$

مثال6. با ارقام به کار رفته در عدد 34334 چند عدد پنج رقمی می توان نوشت.

$$\frac{5!}{2!2!} = 10$$

هر گاه بخواهیم از بین n شیء، فرد، عدد و ... مختلف r تا را انتخاب نماییم، بر حسب آنکه ترتیب انتخاب عناصر اهمیت داشته باشد یا نداشته باشد، تعداد طرق انجام این کار از فرمول ترتیب یا ترکیب بدست می آید.

الف) ترتیب یا جایگشت

هر گاه بخواهیم از بین n شیء، فرد، عدد و ... مختلف r تا را *به ترتیب* انتخاب نماییم، آنگاه تعداد طرق انجام این کارعبارت است از:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب: هر گاه بخواهیم از بین n شیء، فرد، عدد و ... مختلف r تا را انتخاب نماییم، به نحوی که ترتیب انتخاب عناصر اهمیت نداشته باشد،آنگاه تعداد طرق انجام این کارعبارت است از:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال 7. از بین 10 نفر از دانشجویان ممتاز گروه کامپیوتر می خواهیم 3 نفر را انتخاب نموده و: الف) به اردو بفرستیم. ب) به آنها هدیه دهیم. به این ترتیب که به نفر اول یک لپ تاب، به دومی یک سکه، به سومی یک فلش مموری هدیه دهیم. هر کدام از این کارها را به چند طریق می توان انجام داد.

الف) چون ترتیب انتخاب مهم نیست لذا تعداد طرق انتخاب عبارت است از:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

ب) چون ترتیب انتخاب در نحوه تقسیم هدایا مهم است لذا تعداد طرق انتخاب عبارت است از:

$$P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

فصل پنجم: توزیع های احتمال

هدف کلی: آشنائی با مفهوم متغیرهای تصادفی و توزیع احتمال آنها

هدف های رفتاری: آشنائی با مفاهیم

- متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته
- تابع چگالی متغیر تصادفی
- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی
- توزیع نمونه
- توزیع احتمال

متغییر تصادفی: تابعی از فضای نمونه را به مجموعه اعداد حقیقی، متغیر تصادفی می نامند. متغییر تصادفی را با X نشان می دهیم.

انواع متغییر تصادفی:

1. متغیر تصادفی گسسته
2. متغیر تصادفی پیوسته

تابع احتمال متعییر تصادفی:

هر متغیر تصادفی X دارای یک تابع احتمال است که در اصول زیر صدق می کند:

$$(1)\quad \forall x,\quad 0 \le \mathrm{f(x)} \le 1$$

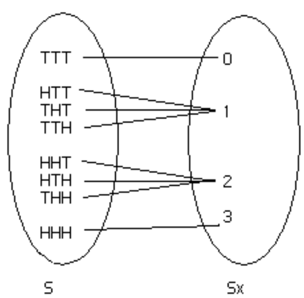
$$(2)\qquad \sum_{x \in X} f(x) = 1$$

مثال 1. فرض کنید سه سکه را تواما پرتاب نماییم. اگر X تعداد شیرهای مشاهده شده در سه پرتاب باشد، مجموعه مقادیر X و تابع احتمال آن را تعیین کنید.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

و داریم X : تعداد شیرهای مشاهده شده در سه پرتاب

لذا $\quad S_X = \{0,1,2,3\}$



همچنین

$$p(X=0)=\frac{1}{8},\quad p(X=1)=\frac{3}{8},\quad p(X=2)=\frac{3}{8},\quad p(X=3)=\frac{1}{8}$$

تابع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$X=x$	0	1	2	3	
$p(X=x)=f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

و بنابراین

$$X:S\to S_X=\{0,1,2,3\}\subseteq\Re$$

مثال 2. دو تاس را با هم پرتاب می کنیم، متغیر تصادفی X را برابر مجموع مشاهدات دو تاس در نظر بگیرید.

الف) تابع احتمال X را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه مجموع اعداد دو تاس حداکثر 4 باشد، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه مجموع مشاهدات دو تاس بین 6 تا 9 باشد چقدر است؟

حل: تکیه گاه X برابر $S_X=\{2,3,4,\dots,12\}$ است. و تابع احتمال X به صورت زیر است:

$X=x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$p(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ب)
$$p(X\le 4)=\sum_{x=2}^{4}p(X=x)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{6}$$

ج)
$$p(6\le X\le 9)=\sum_{x=6}^{9}p(X=x)=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}=\frac{20}{36}$$

مثال3. به ازای چه مقداری از C تابع زیر، یک تابع چگالی احتمال است؟

$$f(x)=cx\qquad x=1,2,3$$

(1) $\forall x\,,\ \ 0 \le \mathrm{f(x)} \le 1$

(2) $\sum_{x \in X} f\,(x) = 1 \Rightarrow c \times 1 + c \times 2 + c \times 3 = 1 \Rightarrow 6c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}$

امید ریاضی متغییر: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه S_X و تابع احتمال $P(X=x)$ (تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. در اینصورت امید ریاضی یا میانگین X عبارت است از:

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x.P(X=x)$$

مثال 4. فرض کنید از بین 5 مهندس و 3 تکنسین می خواهیم 3 نفر را انتخاب نماییم. امید ریاضی یا میانگین تعداد مهندسین انتخاب شده در نمونه 3 تایی را بدست آورید.

حل: اگر X تعداد مهندسین انتخاب شده در نمونه 3 تایی باشد، آنگاه $S_X = \{0,1,2,3\}$ و داریم:

$$P(X=x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{8}{3}} \quad , \quad x = 0,1,2,3$$

لذا تابع احتمال X عبارت است از:

$X=x$	0	1	2	3	
$p(X=x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$	1

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x.P(X=x) = 0*\frac{1}{56} + 1*\frac{15}{56} + 2*\frac{30}{56} + 3*\frac{10}{56} = \frac{105}{56} = 1.9$$

ویژگی های امید ریاضی: اگر X وY دو متغیر تصادفی دلخواه و a و b و c و d مقادیر ثابتی باشند، آنگاه :

الف) $\mathrm{E(a)=a}$

ب) $\mathrm{E(aX+b)=aE(X)+b}$

ج) $\mathrm{E(aX+bY\text{-}c)=aE(X)+bE(Y)\text{-}c}$

د) امید ریاضی تابعی از یک متغیر یا چند متغیر تصادفی:

اگر X یک متغیر تصادفی و g تابعی دلخواه از X باشند، آنگاه :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x).P(X=x)$$

واریانس متغییر تصادفی: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه S_X و تابع احتمال $P(X=x)$ (تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. در اینصورت واریانس متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

مثال5. در پرتاب دو سکه، فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. در این صورت امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X بدست آورید؟

X	۰	۱	۲
$f(x)$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵

$$E(X)=\sum_x x\times f(x)=۰\times ۰/۲۵+۱\times ۰/۵+۲\times ۰/۲۵=۱$$

$$E(X^۲)=\sum_x x^۲\times f(x)=۰^۲\times ۰/۲۵+۱^۲\times ۰/۵+۲^۲\times ۰/۲۵=۱/۵$$

$$V(X)=E(X^۲)-(E(X))^۲=۱/۵-۱^۲=۰/۵$$

فصل ششم: چند توزیع احتمال خاص

هدف کلی: آشنایی با چند توزیع احتمال مهم

هدف های رفتاری: آشنائی با توزیعهای

- برنولی
- دوجمله ای
- پواسن
- نرمال

توزیع برنولی: آزمایش دو حالته (پیروزی – شکست) را که احتمال مشاهده پیروزی در هر آزمایش برابر p و احتمال مشاهده شکست برابر 1-p است را در نظر بگیرید و متغیر تصادفی X را تعداد پیروزیها ، آنگاه X را دارای توزیع برنولی با پارامتر p است. متغیر X دارای تابع احتمالی بفرم زیر است:

$$P(X=x)=p^{x}q^{1-x} \quad x=0,1$$

توزیع دوجمله ای: هرگاه یک آزمایش دو حالته (پیروزی – شکست) را که احتمال مشاهده پیروزی در هر آزمایش برابر p و احتمال مشاهده شکست برابر q=1-p است را n بار تکرار نماییم و متغیر تصادفی X را تعداد پیروزیها در n آزمایش بگیریم، آنگاه X را دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و p گویند. متغیر دو جمله ای دارای تابع احتمالی بفرم زیر است:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,3,\ldots,n$$

مثال 1. دانشجویی به صورت کاملا تصادفی به یک آزمون چهارگزینه ای 10 سوالی پاسخ می دهد. الف) احتمال آنکه وی دقیقا به 5 سوال پاسخ دهد چقدر است؟ ب) احتمال آنکه حداکثر به 3 سوال پاسخ صحیح دهد، چقدر است؟

حل: الف) در واقع در این مثال یک آزمون پیروزی – شکست را با n=10 و p=0.25 داریم. لذا

$$P(X=5)=\binom{10}{5}(0.25)^{5}(0.75)^{5}=0.0583$$

ب)

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\binom{10}{0}(0.25)^{0}(0.75)^{10}+\binom{10}{1}(0.25)^{1}(0.75)^{9}+\binom{10}{2}(0.25)^{2}(0.75)^{8}+\binom{10}{3}(0.25)^{3}(0.75)^{7}$$
$$=0.0563+0.1877+0.2816+0.2502=0.7758$$

مثال 2. امید ریاضی و واریانس توزیع دو جمله ای با تابع احتمال زیر را بدست آورید؟

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,3,\ldots,n$$

الف) امید ریاضی:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x f(x)=\sum_{x=0}^{n} x.\binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n} x.\frac{n!}{x!.(n-x)!} p^{x} q^{n-x}=n.p.\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!.(n-1-x+1)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

با قرار دادن y=x-1 داریم:

$$E(X)=n.p.\sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!.(n-1-y)!} p^{y} q^{n-1-y}=n.p\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y} p^{y} q^{n-1-y}=n.p$$

ب) محاسبه واریانس: برعهده دانشجو (راهنمایی: برای محاسبه واریانس ابتدا $E(X(X-1))$ را بدست آورید.)

متغیر تصادفی پواسون: اگر متغیر تصادفی X تعداد مشاهدات یا رخدادهای خاصی در یک بازه (فاصله) زمانی، مکانی و ... باشد به نحوی که متوسط تعداد مشاهدات یا رخدادهای مورد نظر در همان بازه (فاصله) زمانی، مکانی و ... مقدار معلوم λ باشد، X را دارای توزیع پواسون با پارامتر λ گویند. تابع احتمال X عبارت است از:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,2,3,\ldots$$

مثال 3. یک تایپیست بطور متوسط در هر صفحه مرتکب 3 غلط تایپی می شود. مطلوبست محاسبه احتمال آنکه: الف) در یک فصل 11 صفحه ای 20 غلط تایپی داشته باشد؟ ب) احتمال آنکه در یک صفحه از کارش، اصلا غلط تایپی نداشته باشد؟

حل: در این مثال $\lambda=3$ است و در قسمت (الف) داریم $\lambda=33$ لذا

$$P(X=20)=\frac{e^{-33}.(33)^{20}}{20!}=0.0045$$

ب)

$$P(X=0)=\frac{e^{-3}.(3)^{0}}{0!}=0.0497$$

داده های استاندارد: داده هایی را استاندارد گویند که میانگین آنها صفر و واریانس آنها یک باشد.

سئوال: آیا می توان در جامعه ای داده های استاندارد انتخاب کرد؟ اکثراً خیر.

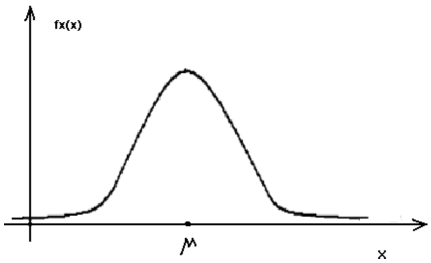
سئوال: آیا می شود داده را استاندارد کرد؟ بله. بنا بر این اصل که اگر داده ها را در عددی ضرب و یا با عددی جمع کنیم میانگین نیز همان تغییر را خواهد کرد. برا استاندارد کردن داده ها کافی است ابتدا داده ها را از میانگینشان کم و بر انحراف استانداردشان تقسیم کنیم. داده های جدید استاندارد هستند.

مهمترین مزیت داده های استاندارد آنست که فاقد واحد اندازه گیری است پس می توان یک دسته داده استاندارد را با دسته دیگر که آنها هم استاندارد هستند مقایسه کنم. داده های استاندارد را با Z نشان می دهند.

برای متغییر تصادفی X نیز می توان متغییر تصادفی استاندارد را به صورت $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ تعریف کرد. از این متغییر استاندارد در توزیع نرمال استفاده خواهیم کرد.

متغیر تصادفی نرمال: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، هرگاه دارای تابع چگالی احتمالی بفرم زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < +\infty, \quad \mu \in \Re, \qquad \sigma^2 > 0$$



خواص توزیع نرمال:

1-منحنی نرمال تنها دارای یک نقطه ماکزیمم در نقطه $x=\mu$ است.

2-منحنی نرمال دارای دو نقطه عطف در نقاط $x=\mu-\sigma$ و $x=\mu+\sigma$ است.

3-منحنی نسبت به خط $x=\mu$ متقارن است. یعنی $f_X(x-a) = f_X(x+a)$

4-مساحت زیر منحنی نرمال برابر 1 است.

برای محاسبه گزاره های احتمالی مانند $P(a<X<b)$ یا $P(X<c)$ یا $P(X>d)$ باید از طریق جدول عمل می کنیم.

توجه: اگر متغیر تصادفی دلخواه X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 است که به آن نرمال استاندارد می گویند. توزیع نرمال استاندارد، تمامی خواص توزیع نرمال را دارد. برای محاسبه گزاره های احتمالی بر مبنای توزیع نرمال استاندارد، جداول نرمال استاندارد وجود دارد.

مثال 4. نمره یک درس در امتحان میان ترم دارای میانگین 5 و انحراف معیار 3 ودر پایان ترم دارای میانگین 6 و انحراف معیار 4 می باشد. فرض کنید نمرات دو امتحان از هم مستقل بوده و هر یک دارای توزیع نرمال باشند. شخصی در این امتحان پذیرفته می شود که دو برابر نمره میان ترم او بعلاوه دو برابر پایان ترم او از 18 کمتر نباشد اگر در این درس 50 نفر ثبت نام کرده باشند. داریم :

$$X_1 \sim N(5,3^2), X_2 \sim N(6,4^2)$$

$$Y = 2X_1 + 2X_2 \sim N(2\times5 + 2\times6, 2^2\times3^2 + 2^2\times4^2) \Rightarrow Y \sim N(22,100)$$

$$p(Y < 18) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{18-22}{10}\right) = P(Z < -0.40) = 0.3446$$

$$\Rightarrow 0.3446\times50 = 17.23 \cong 17$$

تعداد 17 نفر که در این درس پذیرفته می شوند .

منابع:

[1] آمار و احتمال مقدماتی، نویسنده: جواد بهبودیان، انتشارات دانشگاه امام رضا (ع)

[2] مبانی احتمال، نویسنده: سعید قهرمانی، ترجمه بزرگ نیا–شاهکار، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف

پیوست الف. نمونه سوالات امتحانی

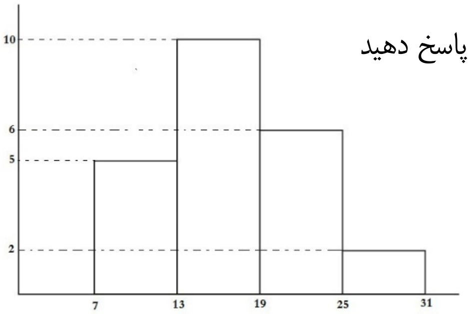
1. داده های زیر میزان کیفیت 20 کالا را براساس کیفیت خوب(کد 3) و کیفیت متوسط (کد2) و کیفیت ضعیف (کد1) نشان می دهد. یک جدول فراوانی مناسب برای این داده ها تشکیل دهید.

2 3 2 1 1 2 3 1 3 2 1 1 2 3 1 2 2 2 2 3

2. اگر نمودار زیر بافت نگار تعداد داده ها باشند، به هرکدام از سوالات زیر پاسخ دهید

الف) فراوانی تجمعی دسته چهارم را بیابید.

ب) میانگین و میانه را حساب کنید .



3. راننده ای مسیر 100 کیلومتری بین دو شهر را با سرعت 60 کیلومتر بر ساعت رفته و با سرعت 65 کیلومتر بر ساعت برگشته است. متوسط سرعت رفت و برگشت این راننده را محاسبه کنید؟

4. نرخ رشد جمعیت در سالهای 1355، 1365، 1375 در ایران به ترتیب 08/0، 13/0، 17/0 می باشد. متوسط نرخ رشد جمعیت در این سالها چقدر بوده است؟

5. داده های زیر متوسط رشد سالانه (در هزار) جمعیت ایران را در دوره های 12ساله نشان می دهد. چارک اول و دوم و سوم داده ها را محاسبه کنید.

3 , 14 , 14 , 3 , 20 , 14 , 6 , 28 , 29 , 29 , 6 , 26

6. اگر در تعدادی داده واریانس نمونه ای 16 و ضریب چولگی پیرسن 0.2 باشد با فرض اینکه مقدار میانگین 4 برابر میانه است، مقدار عددی میانه را بیابید.

7. یک تاس سالم دو بار پرتاب می شود. مطلوبست احتمال اینکه مجموع شماره هایی که در دو بار پرتاب ظاهر می شوند، کمتر از 6 یا بیشتر از 9 باشد.

8. به چند طریق 5 دانشجوی سال اول و 2 دانشجوی سال دوم می توانند بر روی 7 صندلی در یک ردیف کنار هم قرار گیرند؟

9. 3 کتاب آمار و 2 کتاب ریاضی را به طور تصادفی کنار هم در یک قفسه قرار می دهیم، احتمال اینکه کتاب های آمار پهلوی هم و کتاب های ریاضی نیز پهلوی هم قرار گیرند، چقدر است؟

10. دایره ای به شعاع r در داخل دایره ای به شعاع R قرار دارد. نقطه ای به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه نقطه انتخابی در داخل دایره کوچک باشد چقدر است؟

11. کلمه ای به تصادف از رباعی زیر، سروده حکیم عمر خیام ریاضی دان و شاعر بزرگ انتخاب می کنیم. میانگین تعداد حروف این کلمه چقدر است؟

از آمدنم نبود گردون را سود، وز رفتن من جاه و جلالش نفزود؛
وزهیچ کسی نیز دو گوشم نشنود، کاین آمدن و رفتنم از بهر چه بود!

12. اگر $E(X)=m$ و $E[X(X-1)]=2m^2$ باشد، آنگاه واریانس X را محاسبه کنید.

13. نقطه X را به تصادف از $(0,\frac{\pi}{4})$ انتخاب می کنیم $E(\cos^2(X))$ را بیابید.

پرسش های چهارگزینه ای:

1. کدام گزینه از ویژگی های میانگین نمونه نمی باشد؟

(الف) اگر به تک تک داده ها مقدار ثابت a اضافه یا کم شود، میانگین جدید از اضافه یا کم کردن a از میانگین قدیم به دست می آید.

(ب) از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می کند.

(ج) از تمام داده های نمونه استفاده می شود.

(د) اگر تک تک داده ها را در مقدار ثابت k ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، میانگین جدید از ضرب یا تقسیم میانگین قدیم به k^2 دست می آید.

2. جمع جبری انحرافات یک دسته از میانگین مساوی چیست؟

(الف) میانگین تقسیم بر تعداد

(ب) میانگین تقسیم بر جذر مجموع اعداد

(ج) میانگین تقسیم بر توان دوم مجموع اعداد

(د) صفر

3. میانگین سرعت شخصی که راهی به طول 55 کیلومتر را با سرعت 30 کیلومتر در ساعت رفته و با سرعت 50 کیلومتر در ساعت برگشته، چقدر است؟

الف) 38 ب) 39 ج) 37.5 د) 40

4. در منحنی‌هایی که دارای چولگی به سمت راست می‌باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) مد> میانگین > میانه ب) میانه > میانگین> مد

ج) میانگین< میانه< مد د) میانگین> میانه> مد

5. در یک نمونه به حجم N=100 ، اطلاعات زیر را در مورد میانه داریم:

– کران پایین 10 و کران بالای طبقه میانه 20 است،

– فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه 44 است.

میانه را بیابید.

6. واریانس اعداد $1, 2, ..., k+1$ کدام است؟

الف) $\frac{k(k+1)}{6}$ ب) $\frac{k(k-2)}{6}$ ج) $\frac{k(k+2)}{12}$ د) $\frac{k(k+1)}{12}$

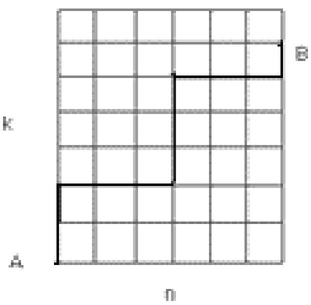
7. تعداد اعداد چهار رقمی که می‌توان از ترکیب ارقام 0، 1، 3، 5، 6، 7 و 8 به دست آورد به طوری که در هر عدد رقمی تکرار نگردد و هر عدد بر 5 قابل قسمت باشد، کدام است؟

الف)180 عدد ب) 220 عدد ج) 55 عدد د) 50 عدد

8. به چند طریق می‌توان از میان 3 نماینده استان کرمان، 4 نماینده استان خراسان و 2 نماینده استان سیستان و بلوچستان یک کمیته‌ی 5 نفره‌ی مبارزه با مواد مخدر تشکیل داد؟

الف) 98 ب) 72 ج)144 د) هیچ کدام

9. شخصی با حرکت‌های قایم و افقی (نسبت به بالا و جلو) می‌خواهد از A به B برود. به چند طریق می‌تواند این عمل را انجام دهد؟ (اول قائم و بعد افقی یا بالعکس مطرح نیست).



الف) $\frac{(n+k)!}{n!\,k!}$ ب) $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ ج) $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$ د) $\frac{(n+k)!}{(n-k)!}$

10.اگر تابع احتمال چگالی X به صورت زیر باشد، a چقدر است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2 & 0\le x\le 1\\ ae^{-x} & x>1\end{cases}$$

الف) $\frac{3}{4}e$ ب) $-\frac{3}{4}e$ ج) $\frac{4}{3}e$ د) $-\frac{4}{3}e$

11. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)=kx(1-x)$ است به طوری که $P(X<b)=P(X\geq b)$. مقدار b برابر است با

الف) مقدار مد توزیع
ب) مقدار میانگین توزیع
ج) مقدار میانه توزیع
د) مقدار انحراف معیار توزیع

12. فرض کنید تابع توزیع مدت زمان لازم برای رفع عیب از یک دستگاه برقی بر حسب ساعت به فرم زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 1\\ \ln x & 1<x<2\\ 1 & x\geq 2\end{cases}$$

احتمال این که این دستگاه زودتر از یک ساعت و دیرتر از دو ساعت پس از خرابی تعمیر نگردد برابر است با

الف)1
ب) 0
ج)$\ln 2$
د) $\ln 2$ -1

بیشتر بدانیم:

Spss چیست ؟ **Spss** یک تجزیه کننده جامع و انعطاف پذیر آماری و یک سیستم مدیریت داده است. Spss می تواند داده‌ها را تقریباً از همه انواع فایل‌ها بگیرد و از آنها در تولید گزارش‌های جدول بندی شده ،نقشه‌ها ،نقشه پخش/ توزیع و روند/ توسعه ،آمارهای توصیفی و تجزیه و تحلیل آماری جریان پیچیده و رفتار مرکب داده‌ها … استفاده کند. Spss در پلت فرمهای مختلفی چون سیستم‌های : -Windows Mancintash-Unix … قابل اجراست . نسخه ویندوز Spss، تمامی قابلیت‌های قالب اصلی برنامه Spss را برای محیط کامپیوترهای شخصی بوجود میآورد . Spss شما را برای اجرای بسیاری از تجزیه و تحلیلها در کامپیوتر شخصی خود که پیشتر در ماشین‌های بسیار بزرگتر میسر بودند ،قادر میسازد . نسخه ویندوز Spss ، یک برنامه کاربردی که تجزیه و تحلیل‌های آماری را برای همه سطوح از کاربران بیش از پیش شهودی میسازد ، بوجود میآورد.

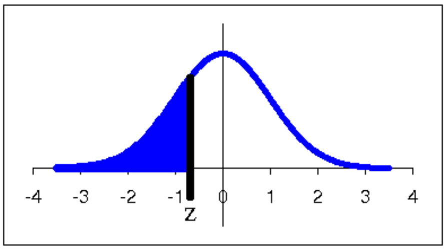
پیوست ب. جدول توزیع نرمال

Table 1a: Standard Normal Probabilities

The values in the table below are cumulative probabilities for the standard normal distribution Z (that is, the normal distribution with mean 0 and standard deviation 1). These probabilities are values of the following integral:

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Geometrically, the values represent the area to the left of z under the density curve of the standard normal distribution:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641