رئوس مطالب　　　　مدار (۲)　　　　استاد نادری

۱ـ عناصر دو دوئی (سلف‌های تزویج شده)　　　　۲ـ ترانسفورماتورها و قضیه تلگان

۳ـ تجزیه و تحلیل گره و مش　　　　۴ـ تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

۵ـ معادلات حالت　　　　۶ـ فرکانس‌های طبیعی

۷ـ پاسخ فرکانسی　　　　۸ـ فضای نسبه

۹ـ توابع شبکه　　　　۱۰ـ دوقطبی‌ها

مراجع: ۱ـ نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها　　　　ارنست کو

۲ـ تحلیل مهندسی مدار　　　　ویلیام هیت

امتحان میان ترم　　　　هفته اول اردیبهشت　　　　۵ـ ۳ نمره　　　　شنبه

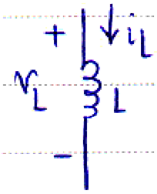
۸۷/۲/۱۴

تکالیف و کار کلاسی　　۲ نمره

فصل آخر جلد اول از دسوئر کوه

سلف‌های تزویج شده :

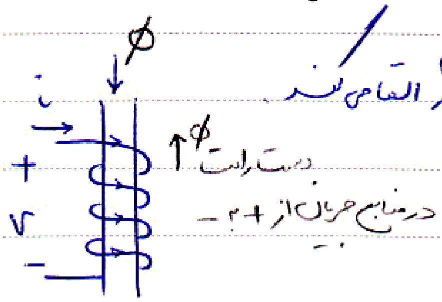
در مدارهای الکتریکی (۱) با سلف آشنا شدیم.



$$v_L = \frac{d(Li_L)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + i_L\frac{dL}{dt}$$

در سلف‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان $\frac{dL}{dt} = 0$ ⇐ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$

در واقع اگر شار متغیر با زمان $\phi(t)$ سیم پیچی را در بر بگیرد در آن ولتاژ القا می‌کند.

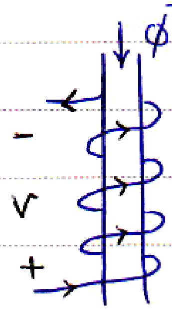


سیم پیچ سلفی که هسته با مقدار L ها را می‌دهد.

این سیم پیچ یک سلف L ها را تشکیل می‌دهد شار پیوندی سلف به صورت زیر تعریف می‌شود: $\lambda = Li$

و ولتاژ القایی دو سر سلف عبارت است از : $v = \frac{d\lambda}{dt}$ ⇐ $v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$

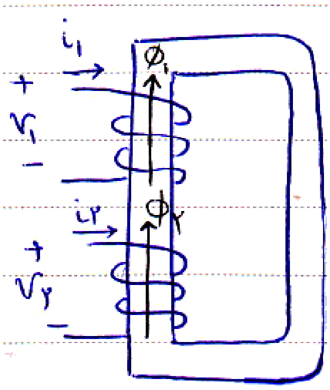
تولید شدن ولتاژ القایی بر اساس قانون لنز به نحوی است که جریان عبوری از سیم پیچ سبب تولید شاری شود که با شار به وجود آورنده‌اش مخالفت کند.



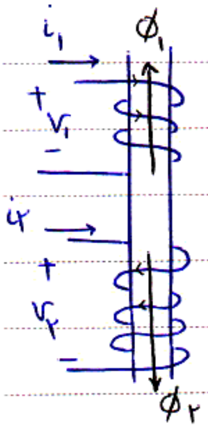
شار $\phi\uparrow$

تذکر 3: با توجه به روابط گفته شده، ولتاژ القایی دو سر یک سلف (سیم پیچ) وابسته به شار عبوری از آن است.

حال دو سیم پیچ را در نظر بگیرید که روی یک هسته بسته شده‌اند.



کل شار عبوری از هر سیم پیچ (شار پیوسته) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$



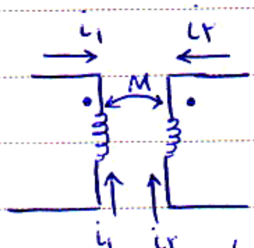
جهت مثبت به سمت بالا شار پیوسته $\phi = \phi_1 - \phi_2$

و می دانیم که ولتاژ دو سر هر سلف به شار عبوری از آن ها مربوط است. در مثال های قبل شار عبوری از هر سیم پیچ به سیم پیچ دیگر نیز وابسته است. به چنین حالتی که شار عبوری از سیم پیچ ها به یکدیگر وابسته باشد سلف های تزویج شده می گوییم. تزویج بین سلف ها می تواند به صورت مثبت یا منفی باشد.

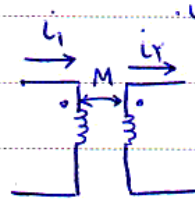
وقتی شار تولیدی یکی موافق با شار تولیدی دیگری باشد تزویج از نوع مثبت و در غیر این صورت اثر منفی دارد.

قرارداد در تحلیل مدار:

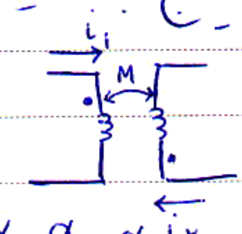
سلف های تزویج شده را با سرهای نقطه دار نشان می دهیم. وقتی ورود یا خروج جریان به سرهای نقطه دار هر دو سلف یکسان باشد تزویج مثبت و در غیر این صورت تزویج منفی است.



$\phi = \phi_1 + \phi_2$



$\phi = \phi_1 - \phi_2$



$\phi = \phi_1 + \phi_2$

در دو سر سلف تزویج شده با ضریب تزویج M شارهای عبوری به صورت زیر بیان می شوند:

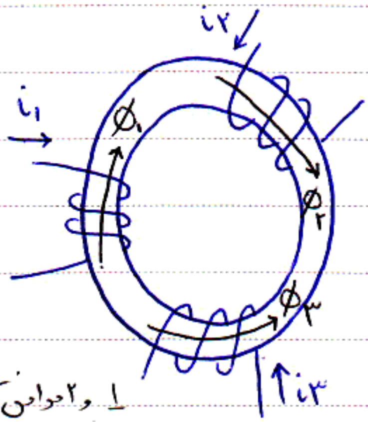
$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

مثال) سه سلف تزویج شده زیر را در نظر بگیرید.

ماتریس اندوکتانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

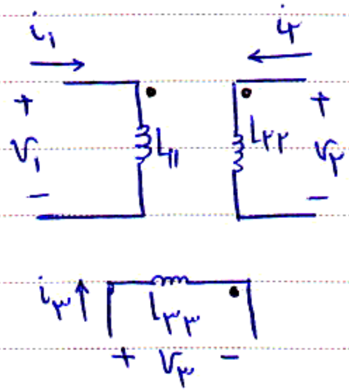


۱ و ۲ موافق هم و
با ۳ مخالف.

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}$$

عناصر قطری، اندوکتانس های خودی و عناصر غیر قطری، اندوکتانس های متقابل است.

با تعیین سرهای نقطه‌دار و سیم‌بندی این سه سلف روابط ولتاژ را می‌نویسیم:



$$V_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$V_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{23} \frac{di_3}{dt}$$

۳ با ۱ و ۲ مخالف $\quad V_3 = -L_{13} \dfrac{di_1}{dt} - L_{23} \dfrac{di_2}{dt} + L_{33} \dfrac{di_3}{dt}$

بیان روابط در حوزه فازور به صورت زیر خواهد بود: $\quad \dfrac{d}{dt} \rightarrow j\omega$

$$V_1 = (L_{11} j\omega) i_1 + (L_{12} j\omega) i_2 - (L_{13} j\omega) i_3$$

$\vdots$

موازی و جهت جریان خلاف $\lambda_1 = -\lambda_2$ $\lambda_2 = -i_1 + 4i_2 - i_3$

$\lambda_3 = 2i_1 - i_2 + 3i_3$

$$3i_1 - i_2 + 2i_3 = i_1 - 4i_2 + i_3$$

$$\rightarrow 2i_1 + 3i_2 = -i \quad (1)$$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_3$ یا $\lambda = -\lambda_2 + \lambda_3$ سری

λ شار کل سیم‌پیچ‌ساز برابر $= 5i_1 - 2i_2 + 5i \quad (2)$ $\qquad i = i_1 - i_2 \quad (3) \rightarrow i_1 = i + i_2$

جایگذاری در (1), (2):

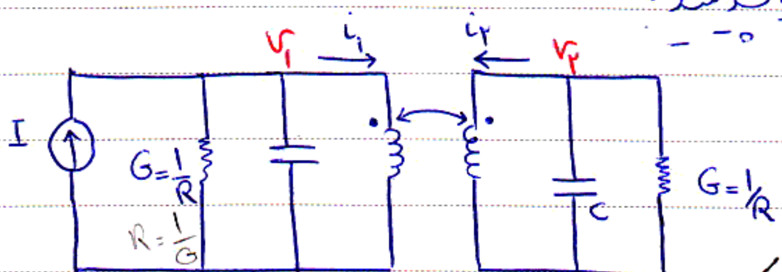
$2i + 2i_2 + 3i_2 = -i \rightarrow 3i = -5i_2$

$i_2 = -\frac{3}{5} i$

$\lambda = 5\underbrace{(i - \frac{3}{5}i)}_{i_1} - 2\times(-\frac{3}{5}i) + 5i$ $\qquad \lambda = 2i + \frac{6}{5}i + 5i$

$\lambda = \frac{41}{5}i \rightarrow L_{eq} = \frac{41}{5}$

مثال) V_1 و V_2 را با استفاده از آنالیز گره بیابید.



$$L = \begin{bmatrix} L & LK \\ LK & L \end{bmatrix}$$

در سلف‌های موازی راحت‌تر هم از ضریب القای معکوس استفاده کنیم

$$\Gamma = \frac{L}{L^2(1-k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

حل در حوزه فازور:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

خازن $\times C \rightarrow \frac{1}{Cj\omega}$ $\qquad \lambda \rightarrow V$ در فازور

$$\Gamma = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

در دو سلف تزویج شده

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}(j\omega)V_1 + \Gamma_{12}(j\omega)V_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}(j\omega)V_1 + \Gamma_{22}(j\omega)V_2 \end{cases}$$

$$KCL: \quad I = V_1 G + V_1 C\omega j + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_1 - kV_2)$$

$$KCL: \quad V_2 Cj\omega + V_2 G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_2 - kV_1) = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = V_1\left(G + Cj\omega + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_2 \\ V_2\left(Cj\omega + G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) = \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_1 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول

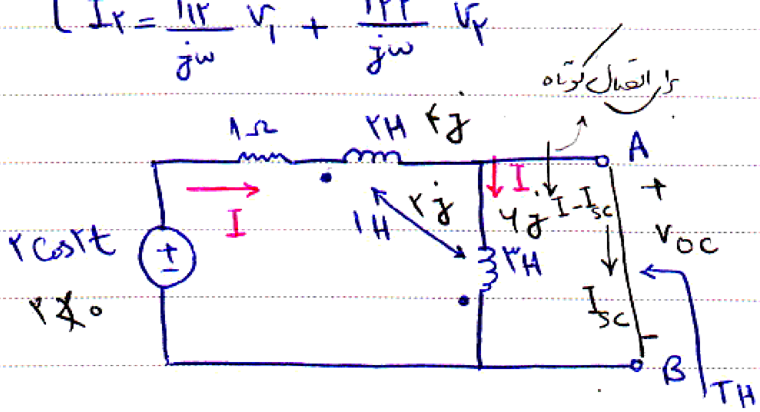
نکته) در حوزه فازور برای دو سلف تزویج شده:

$$\begin{cases} V_1 = L_{11}j\omega I_1 + L_{12}j\omega I_2 \\ V_2 = L_{12}j\omega I_1 + L_{22}j\omega I_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_2 \\ I_2 = \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega}V_2 \end{cases}$$

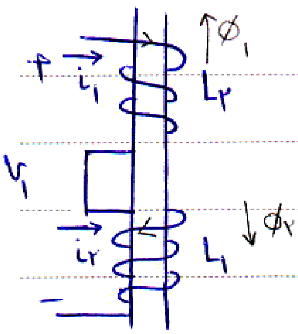
مثال) مدار معادل تونن را بیابید.



$\omega = 2$

استفاده از معادله دیفرانسیل کامل‌ترین جواب را می دهد.

مثال) دو سلف تزویج شده سری



$$i_1 = i_2 = i$$

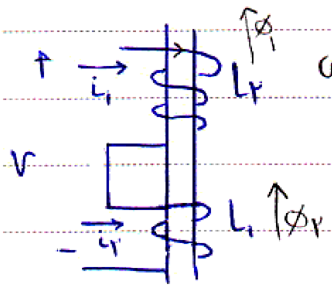
با توجه جهت سیم پیچ ها:

$$V = V_1 + V_2$$

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di}{dt} - M \dfrac{di}{dt} \\ V_2 = -M \dfrac{di}{dt} + L_2 \dfrac{di}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{تزویج منفی}} V = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

/ ۱۰ /

برای امتحان سوال حساس دارد در شکل زیر:



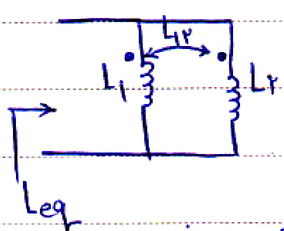
همه روابط قبلی

$$V = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

تزویج مثبت

در دو سلف سری تزویج شده : $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

سلف معادل دو سلف تزویج شده موازی :



$$\lambda = L i$$

در دو سلف تزویج شده داشتیم :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

می توانیم جریان ها را برحسب شار بیان کنیم

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\Gamma = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11} \lambda_1 + \Gamma_{12} \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12} \lambda_1 + \Gamma_{22} \lambda_2 \end{cases}$$

ضرایب القاء معکوس

در سلف های موازی، شارهای پیوندی با هم برابرند.

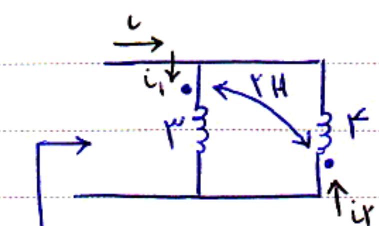
$$\lambda_1 = \lambda_2 \triangleq \lambda$$

صفحه بعد

$$i_1 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{12})\lambda$$
$$i_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\lambda$$

$$i = i_1 + i_2 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\lambda \qquad i = (\underbrace{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12}}_{\Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}}})\lambda$$

تمرین)



$L_{eq} = ?$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{3\times4 - 2\times2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{bmatrix}$$

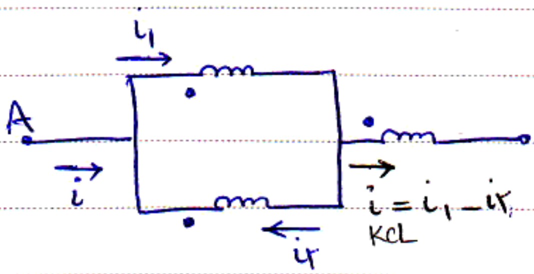
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2 \end{cases}$$

چون جهت جریان عکس

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2}\lambda + (\frac{-1}{4})\times(-\lambda) = \frac{3}{4}\lambda \\ i_2 = (\frac{-1}{4}\times\lambda) + \frac{3}{8}(-\lambda) = -\frac{5}{8}\lambda \end{cases}$$

KCL
$$i = i_1 - i_2 = (\frac{3}{4} + \frac{5}{8})\lambda = \frac{11}{8}\lambda \qquad i = \frac{11}{8}\lambda \longrightarrow \Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}} = \frac{11}{8} \rightarrow L_{eq} = \frac{8}{11}$$

مثال) سلف معادل از دیدگاه AB را بدست آورید؟



$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3i_1 - i_2 + 2i_3$$

با ۳ موافق هردو

$i_3 = i$ با ۲ مخالف

Subject:
Year. Month. Date.

در حوزه‌ی فازور حل می‌کنیم:

$KVL:\ ۲ = I + ۴jI - ۲jI + ۶jI - ۲jI$

$V_{oc} = ۴jI$

$۲ = (۱+۶j)I$

$I = \dfrac{۲}{۱+۶j} \qquad V_{oc} = \dfrac{۸j}{۱+۶j} = ۱/۲۹ + ۰/۲۱j = ۱/۳۰۷ \angle ۹/۲۴$

اتصال کوتاه:

$KVL:\ ۲ = I + ۴jI - ۲j(I - I_{sc})$

$۲ = I(۱+۲j) + ۲jI_{sc}$

$KVL:\ ۶j(I - I_{sc}) - ۲jI = ۰ \longrightarrow ۴jI = ۶jI_{sc} \longrightarrow \boxed{I = \frac{۳}{۲} I_{sc}}$

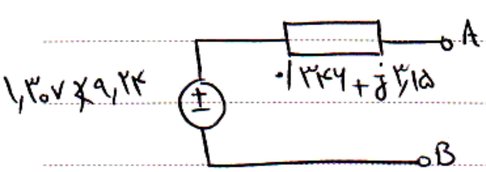
جایگذاری:

$۲ = \left(\dfrac{۳+۶j}{۲} + ۲j\right) I_{sc} = \dfrac{۳+۱۰j}{۲} I_{sc}$

$I_{sc} = \dfrac{۴}{۳+۱۰j} = ۰/۱۱ - ۰/۳۹۷j = ۰/۴۱۲ \angle -۷۴/۵$

$Z_{th} = \dfrac{V_{oc}}{I_{sc}} = \dfrac{۱/۳۰۷ \angle ۹/۲۴}{۰/۴۱۲ \angle -۷۴/۵} = ۳/۱۷۲ \angle ۸۳/۷۴ = ۰/۳۴۴ + j\,۳/۱۵$

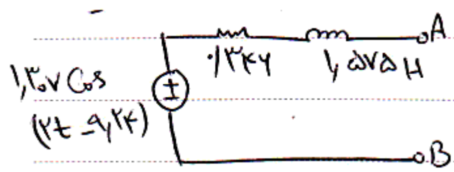
مدار معادل تونن:



یا

$\overset{۲}{\downarrow}$

$Lj\omega = ۳/۱۵j$



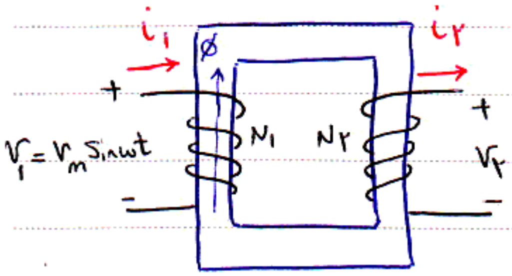
مدار معادل T:

$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

PAPCO

ضریب تزویج $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ $(k \leq 1)$

ترانس ایده‌آل :



از یک هسته و دو سیم پیچ تشکیل شده. با اعمال ولتاژ به سیم پیچ اول، شاری در هسته جاری می‌شود که از رابطه‌ی زیر پیروی خواهد کرد :

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_m}{N_1}\sin\omega t \longrightarrow \phi = \frac{V_m}{N_1\omega}\cos\omega t$$

این شار از سیم پیچ دوم عبور می‌کند و در آن ولتاژ زیر القا می‌شود :

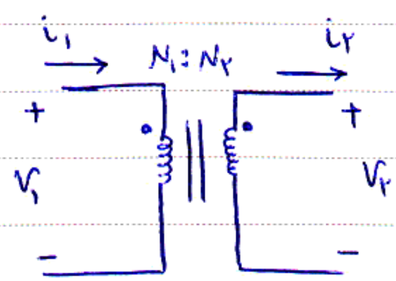
$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1}\underbrace{V_m \sin\omega t}_{V_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

$P = Vi$ در ترانس ایده‌آل، تلفات سیستم صفر فرض می‌شود، بنابراین قدرت لحظه‌ای دو سیم پیچ برابر است

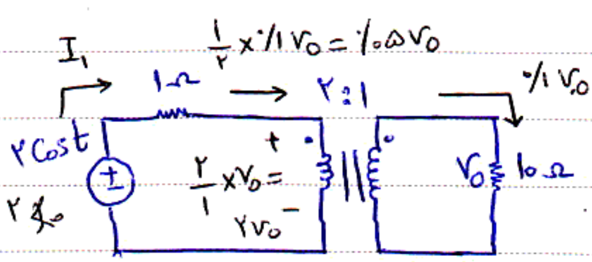
$$V_1 i_1 = V_2 i_2 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} \longrightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

سمبل ترانس :



مثال) قدرت کشیده شده از منبع را به دست آورید؟
ولتاژ خروجی را؟ (V_o)

از فازور استفاده نمی‌کنیم چون سلف و خازن نداریم.



در ترانسفورماتورها جهت جریان از سر نقطه دار به یکی وارد و از دیگری خارج می‌شود

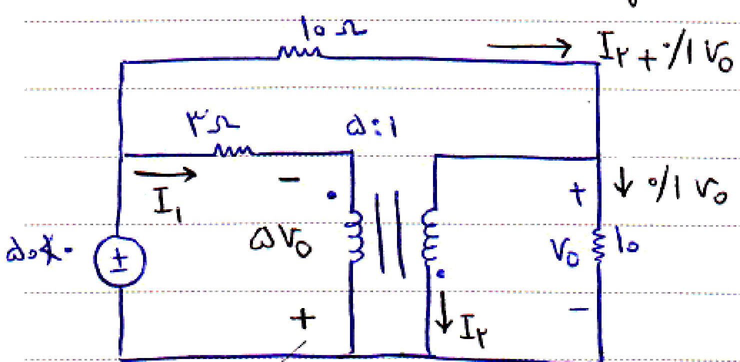
KVL: $2\cos t = 1\times 0.05V_0 + 2V_0$

$2\cos t = 2.05V_0 \longrightarrow V_0 = 0.975\cos t$

$I_1 = 0.05V_0 = 0.0487\cos t = 0.0487\angle 0$ $V_{rms}=\frac{V}{\sqrt{2}}$ $I_{rms}=\frac{I}{\sqrt{2}}$

قدرت منبع $P = V_{rms}\times I_{rms} = \frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{0.0487}{\sqrt{2}} = 0.0487\ W$

مثال) V_0 را بدست آورید؟



ولتاژ برعکس چون جریان‌ها نقطه‌دار عکس هم شد

$I_1 = \frac{1}{5}I_2 \longrightarrow I_2 = 5I_1$

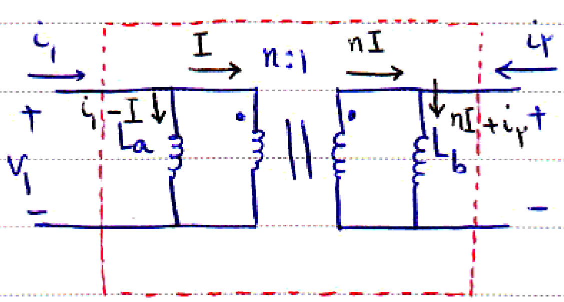
KVL: $50 = 3I_1 - 5V_0$

$I_1 = \frac{50+5V_0}{3} \longrightarrow I_2 = \frac{250+25V_0}{3}$

KVL: $50 = 10(I_2 + 0.1V_0) + V_0 \longrightarrow 50 = 10I_2 + 2V_0$

$50 = \frac{2500+250V_0}{3} + 2V_0 \longrightarrow 150 = 2500 + 256V_0 \longrightarrow V_0 = -9.18$

تمرین) یکی از سرهای نقطه‌دار را عوض کرده و مجدداً V_0 را بدست آورید؟



مثال) این مدار جلو با دو سلف تزویج شده، با ماتریس القای $L=\begin{bmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{bmatrix}$ معادل می‌شود؟

$$v_1 = L_a\frac{d(i_1-I)}{dt} = L_a\frac{di_1}{dt} - L_a\frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$v_2 = L_b \frac{d(nI+i_2)}{dt} = nL_b\frac{dI}{dt} + L_b\frac{di_2}{dt} \qquad (2)$$

$$v_1 = nv_2 \longrightarrow L_a\frac{di_1}{dt} - L_a\frac{dI}{dt} = n^2L_b\frac{dI}{dt} + nL_b\frac{di_2}{dt}$$

$$(n^2L_b+L_a)\frac{dI}{dt} = L_a\frac{di_1}{dt} - nL_b\frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{L_a}{n^2L_b+L_a}\frac{di_1}{dt} - \frac{nL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_2}{dt} \qquad (3)$$

(3) در (1) :

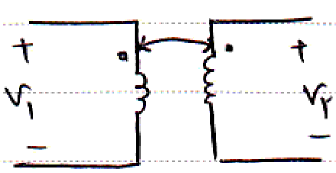
$$v_1 = L_a\frac{di_1}{dt} - \frac{L_a^2}{n^2L_b+L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{n^2L_aL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_2}{dt}}$$

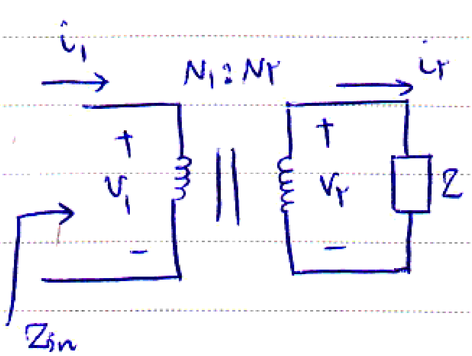
(3) در (2) :

$$v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_1}{dt} - \frac{n^2L_b^2}{n^2L_b+L_a}\frac{di_2}{dt} + L_b\frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{L_aL_b}{n^2L_b+L_a}\frac{di_2}{dt}}$$



$$L = \begin{bmatrix} \frac{n^2L_bL_a}{n^2L_b+L_a} & \frac{nL_aL_b}{n^2L_b+L_a} \\ \frac{nL_aL_b}{n^2L_b+L_a} & \frac{L_aL_b}{n^2L_b+L_a} \end{bmatrix}$$



خاصیت ارجاع امپدانس در ترانس ایده‌آل :

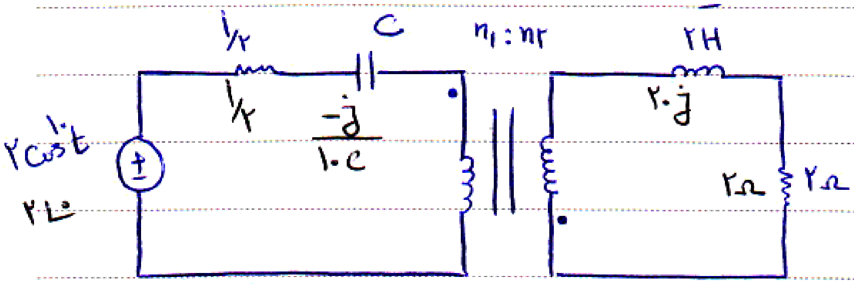
$$Z = \frac{v_2}{i_2}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = ?$$

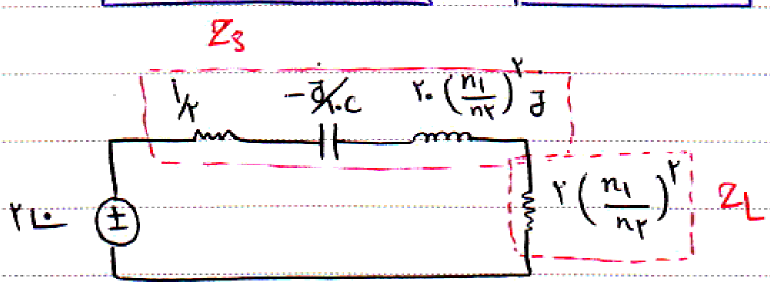
$$Z_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{(\frac{N_1}{N_2})V_2}{(\frac{N_2}{N_1})i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

$\rightarrow Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z \rightarrow$ خاصیت ارجاع امپدانس (رابطه هم سرها نقطه‌دار نباشند که باشند)

مثال) نسبت تبدیل ترانس $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ و مقدار خازن را به گونه‌ای بیابید که توان تحویلی به مقاومت 2Ω حداکثر شود.



به سمت اولیه ارجاع می‌دهیم:



$$\frac{n_1}{n_2} \triangleq n$$

$$Z_s = \frac{1}{2} + j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right) \qquad Z_L = 2n^2$$

شرط انتقال حداکثر توان: $Z_L = Z_s^*$

$$2n^2 = \frac{1}{2} - j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right)$$

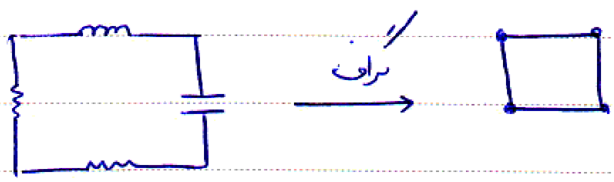
$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{1}{2} \rightarrow n^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \\ 20n^2 - \frac{1}{10C} = 0 \rightarrow 5 = \frac{1}{10C} \rightarrow \boxed{C = 0/02\ F} \end{cases}$$

فصل دوم: گراف‌ها و قضیه تلگان

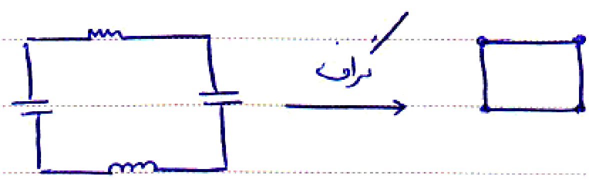
عناصر فشرده: عناصری می‌باشند که ابعاد آن‌ها نسبت به طول موج سیگنالی که آنها را عبور می‌کند کوچک است.

در غیر این صورت قوانین kvl و kcl دیگر برقرار نخواهد بود.

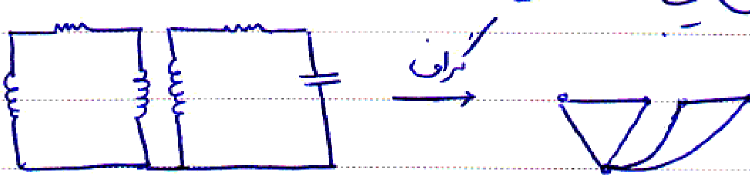
گراف:



قوانین kvl و kcl ارتباطی به ماهیت اجزاء مدار ندارد و بنابراین به عنوان به جای هر عنصر یک شاخه در گراف قرار داده و دو سر هر شاخه را با نقطه‌هایی که گره می‌نامند نشان داد.



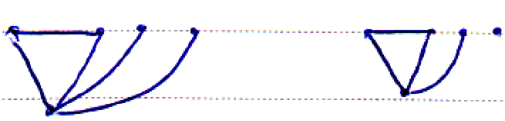
* از روی گراف نمی‌توان مشخص داد که شبکه دارای عناصر زوج هست یا خیر.



زیرگراف:

مفهوم زیرگراف به گراف مانند زیرمجموعه به مجموعه است که با حذف بعضی گره‌ها یا شاخه‌ها از یک گراف به دست می‌آید.

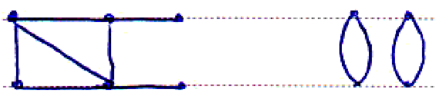
شکل‌های زیر گراف بالا زیرگراف



زیرگراف سره:

زیرگرافی که حداقل از یک گره کمتر تشکیل شده باشد.

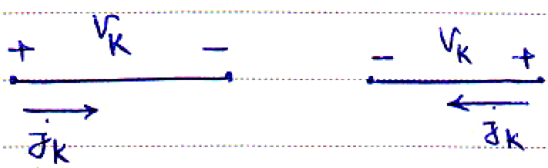
گراف پیوسته: به گرافی پیوسته می‌گوییم که بین هر دو گره دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

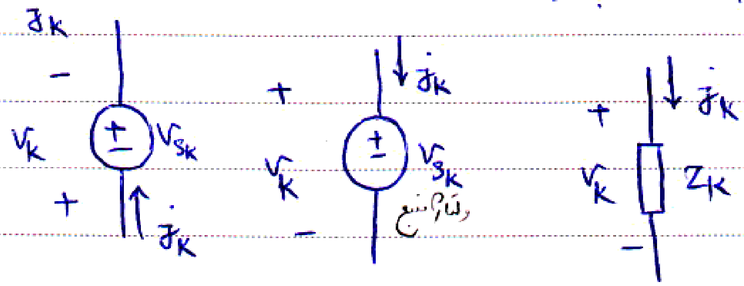


جهت‌های قراردادی جریان:

جهت جریان در شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌شود ولی باید بر اساس جهت انتخاب شده قطب مثبت ولتاژ

در جهت ورود جریان قرار می‌شود.



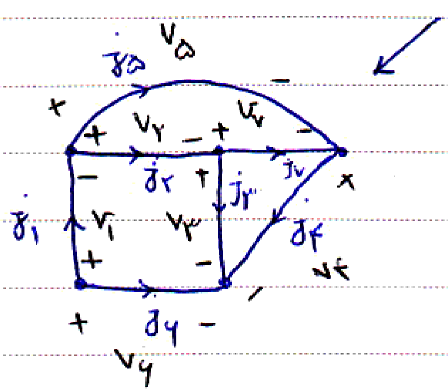


برای عناصر $V_k J_k > 0$

برای منابع $V_k J_k < 0$

گراف جهت‌دار:

گرافی که جریان شاخه‌ها روی آن تعیین شده باشد گراف جهت‌دار است.



ماتریس تلاقی گره و شاخه (Aa):

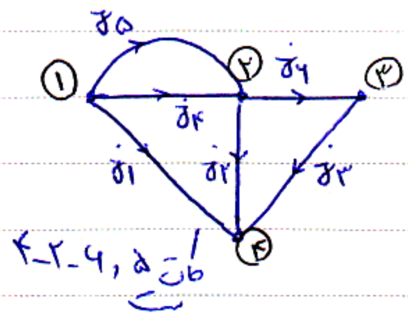
در یک گراف جهت‌دار عناصر ماتریس به صورت زیر فرض می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

A_a

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } n \text{ تلاقی داشته و جریان از گره خارج شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ و گره } n \text{ تلاقی نداشته باشند.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } n \text{ تلاقی داشته و جریان به آن وارد شود.} \end{cases}$$

مثال)



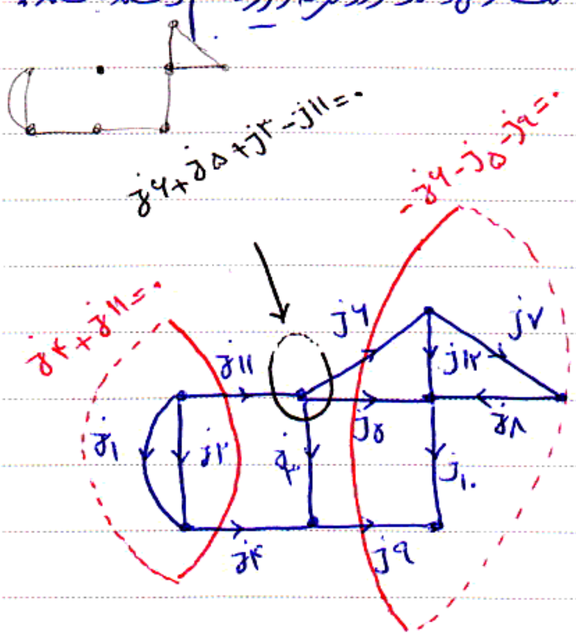
$$\begin{array}{c|c} \text{گره} \backslash \text{شاخه} \Rightarrow & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

جمع جبری جریان های وارد شده به یک گره صفر است. حال این قانون را تعمیم می دهیم.

گراف کات ست: دسته ای از شاخه ها یک گراف تشکیل کات ست را می دهند اگر دو شرط زیر را باهم داشته باشند:

۱) حذف تمام شاخه ها این دسته یک گراف ناپیوسته باقی بگذارد.

۲) حذف تمام شاخه ها غیر یکی، گراف را پیوسته کند.



کات ست هائی که می توان تشخیص داد: ۴ و ۱۱،

کات ست ۵، ۶ و ۹   کات ست ۷، ۱۲ و ۶

گسترش قانون KCL: برای هر شبکه گسترده در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان های خارج شده از کات ست صفر است.

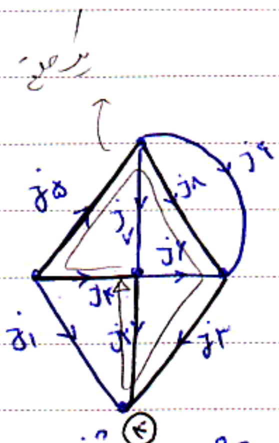
قرارداد: اگر کات ست را با یک سطح گاوسی نشان دهیم، جریان های خارج شده از کات ست با علامت مثبت و جریان های

وارد شده با علامت منفی هستند. علامت جهت ... در شکل

حلقه و قانون KVL : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را حلقه می‌گویند اگر دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) زیرگراف پیوسته باشد.

۲) به هر گره دقیقاً ۲ شاخه متصل باشد.



$$-v_4+v_5+v_8+v_3-v_2=0$$

قضیه تلگان: برای هر شبکه فشرده که گراف آن دارای b شاخه و n_t گره باشد چنانچه ولتاژ و جریان شاخه‌ها با j_k و v_k مشخص شده باشند خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

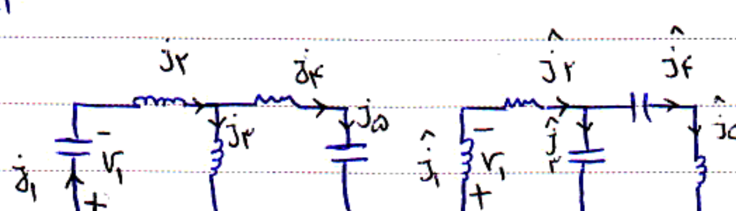
$v_k j_k > 0$ برای عناصر $v_k j_k < 0$ برای منابع

تبصره: اگر دو شبکه گراف‌های یکسان داشته باشند و فقط در دو گراف شاخه‌ها را با شماره‌گذاری یکسان و جهت‌های قراردادی جریان یکسان بگیریم، قضیه تلگان روابط زیر را تضمین می‌کند:

1) $$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k$$

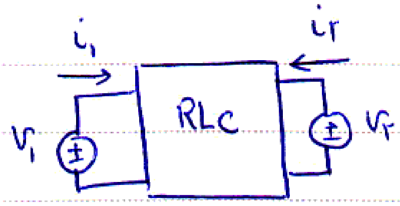
۲) $$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

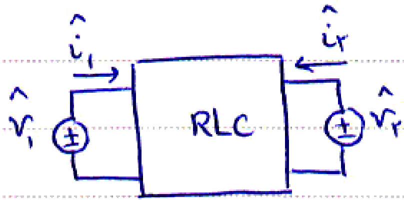
مثال)



به آزمایش زیر در جهت اثبات تفسیر تلگان دقت کنید:

یک مدار RLC ثابت در نظر بگیرید که منابع آن را به صورت زیر جابجا می‌کنیم:





می‌خواهیم اثبات کنیم:
$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

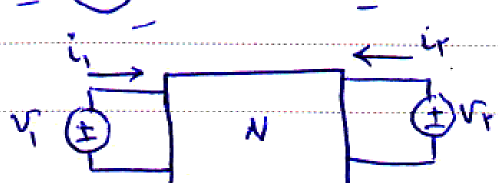
$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k}_{\text{باهم برابرند}} = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k}_{\text{باهم برابرند}}$$

$$v_k = Z_k j_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k j_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_k = Z_k \hat{j}_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k \hat{j}_k j_k$$

$$\Longrightarrow v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

مثال) شبکه N از عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده. اندازه‌گیری‌های زیر در آن انجام شده است:



$v_1 = 4\cos(\omega t + 60)$, $v_2 = 0$

$i_1 = \cos(\omega t + 80)$, $i_2 = 2\cos(\omega t + 70)$

$\hat{v}_1 = \cos(\omega t + 10)$, $\hat{v}_2 = 2\cos(\omega t + 20)$ $\qquad \hat{i}_1 = ?$

به حوزه‌ی فازوری می‌بریم :

$v_1 = 4\angle 60 \qquad i_1 = 1\angle 80 \qquad \hat{v}_1 = 1\angle 10$

$v_2 = 0 \qquad i_2 = 2\angle 70 \qquad \hat{v}_2 = 2\angle 20$

طبق قضیه‌ی تلگان :

$$v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

$$4\angle 60 \times \hat{i}_1 + 0 = 1\angle 10 \times 1\angle 80 + 2\angle 20 \times 2\angle 70$$

$$4\angle 60\ \hat{i}_1 = 1\angle 90 + 4\angle 90$$

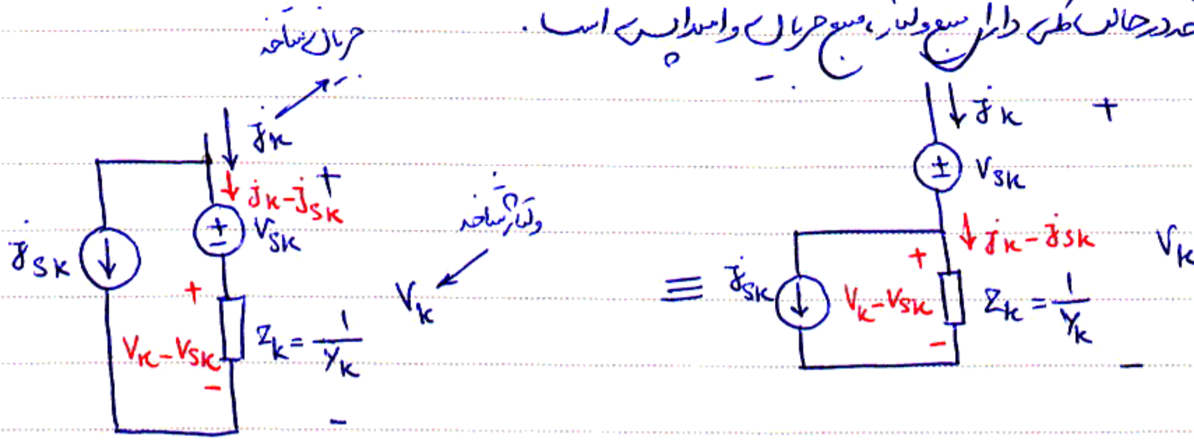
$$\hat{i}_1 = \frac{5\angle 90}{4\angle 60} = \frac{5}{4}\angle 30 \longrightarrow \hat{i}_1 = \frac{5}{4}\cos(\omega t + 30)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ۱ : تجزیه و تحلیل گره و مش

مدل کلی یک شاخه :

یک شاخه در حالت کلی دارای منبع ولتاژ، منبع جریان و امپدانس است.



معادلات KVL , KCL در هر دو به یک نتیجه منجر می‌شود که نشان می‌دهد باهم معادلند.

بیان رابطه شاخه با KCL :

$$j_k = j_{sk} + V_k Y_k - V_{sk} Y_k$$

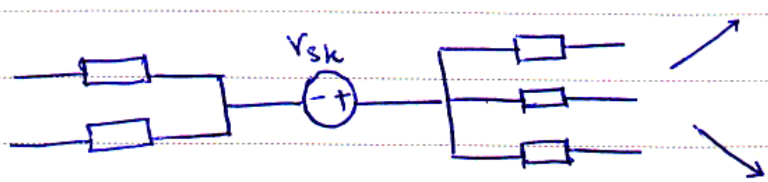
کاربرد در روش گره و کات‌ست.

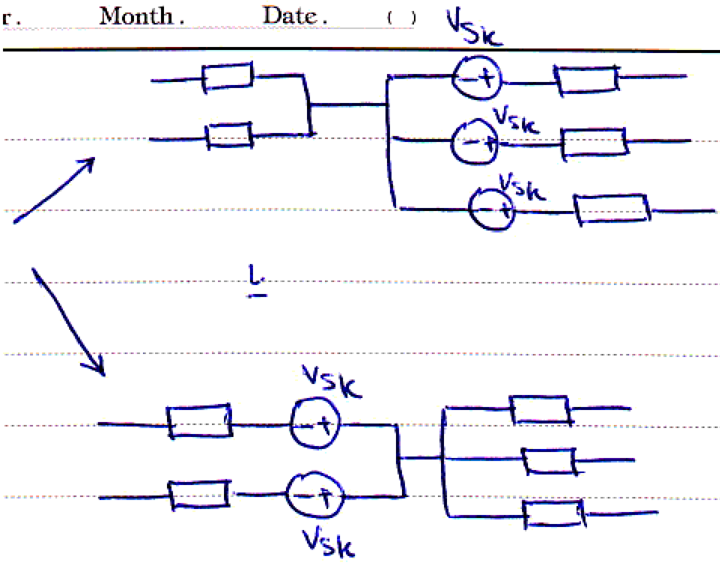
بیان رابطه شاخه با KVL :

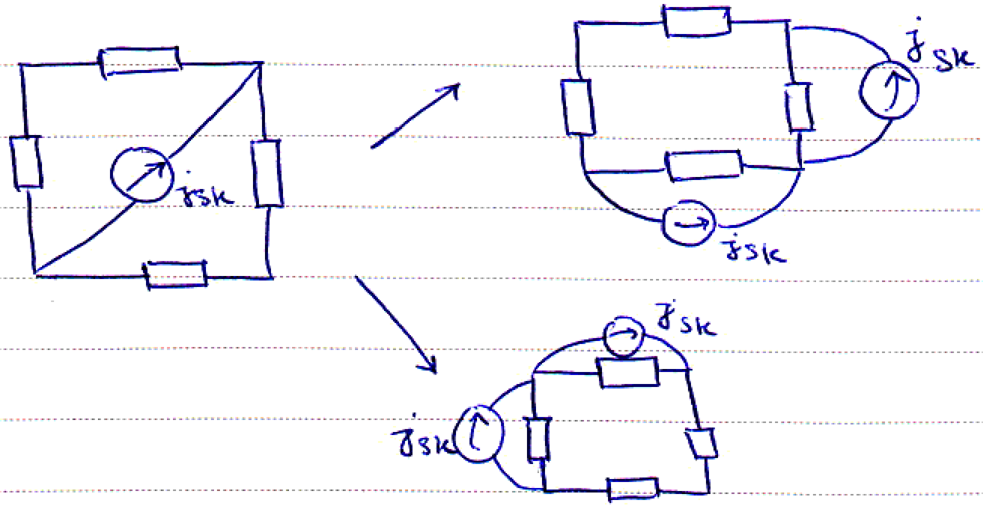
$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

- برای اینکه حداکثر شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، تبدیل را انجام می‌دهیم که تغییری در نتیجه نهایی مدار حاصل نشود.

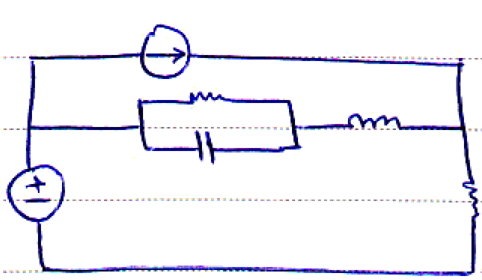


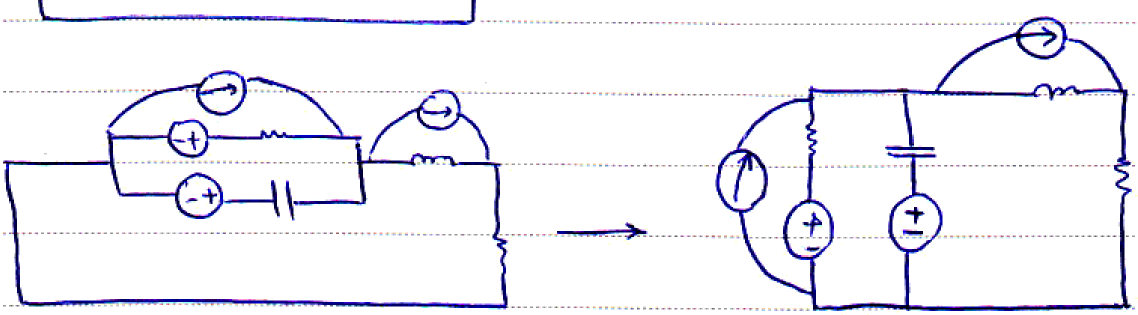




در تبدیل منابع ولتاژ اثر KVL به کار میرود و در تبدیل منابع جریان اثر KCl به کار میرود این معادلات اساسی میشود :

به عنوان مثال :





روش های تبدیل منابع نورتن هم برای منابع مستقل هم برای منابع وابسته برقرار است.

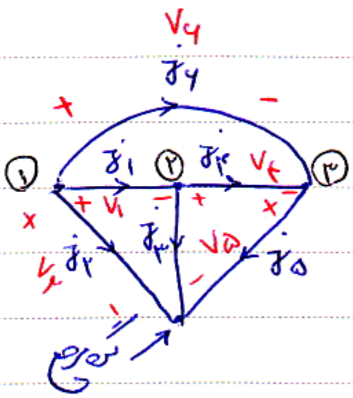
تجزیه و تحلیل گره :

فرض کنید مداری دارای b شاخه باشد، در این صورت بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم :

$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$ بردار جریان شاخه‌ها

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

در روش گره معمولاً گرهی که بیشترین اتصال به آن وجود دارد را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. اگر n_t تعداد کل گره‌ها باشد آنگاه $n_t = n+1$



فرض کنید گراف جهت دار مدار به صورت زیر باشد ←

ماتریس تلاقی گره و شاخه در روش گره به صورت زیر است : $A = (A_a)$

بدون گره مبنا

$$A.j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 + j_2 + j_6 \\ -j_1 + j_3 + j_4 \\ -j_4 + j_5 - j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ معادلات قانون kcl

$$\rightarrow \boxed{A.j = 0}$$

بردار ولتاژ گره‌ها را با e نمایش می‌دهیم.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم $A^t.e$ را به دست آوریم :

$$A^t.e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 - e_3 \\ e_3 \\ e_1 - e_3 \end{bmatrix}$$

جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض می‌کنیم.

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{A^t \cdot e = v}$$

اتساط KVL

اصل تلگان :

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

$$\longrightarrow v_1 j_1 + v_2 j_2 + \dots + v_b j_b = 0$$

$$\sum v_k j_k = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = v^t \cdot j = (A^t \cdot e)^t \cdot j = e^t \cdot A \cdot j = 0$$

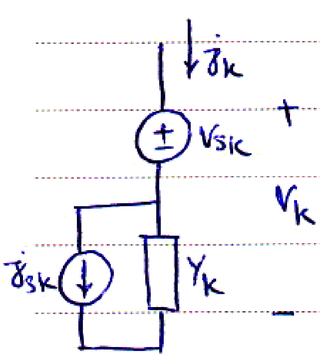
روش تجزیه و تحلیل گره :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

سه روش امکان پذیر است : در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است.

۱) روش منظم ۲) روش نظری ۳) روش میانبر

۱) روش منظم :



$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

این رابطه را برای تمام شاخه‌های مدار می‌نویسیم :

$$j_1 = j_{s1} + Y_1 v_1 - Y_1 v_{s1}$$

$$j_2 = j_{s2} + Y_2 v_2 - Y_2 v_{s2}$$

$$\vdots$$

$$j_b$$

$$\xrightarrow{\text{به صورت ماتریسی}} j = j_s + Y v - Y v_s$$

دو طرف را در A ضرب می‌کنیم :

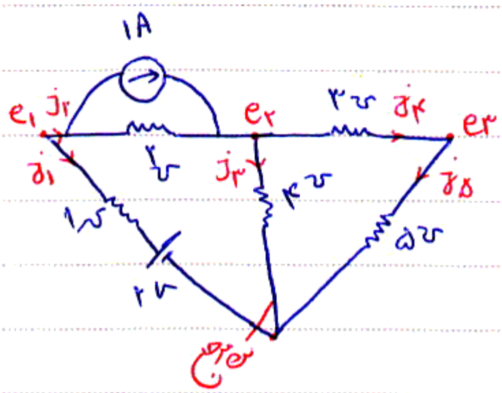
$$\underbrace{A \cdot j}_{0} = A j_s + A Y \underbrace{v}_{A^t \cdot e} - A Y v_s$$

$$0 = A j_s + A Y A^t . e - A Y v_s$$

$$\underbrace{A Y A^t}_{Y_n} . e = \underbrace{A Y v_s - A j_s}_{I_s} \quad (A) \longrightarrow Y_n . e = I_s$$

خوبی است معادله A، منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کند.

مثال) یک مدار ساده‌ی مقاومتی: $V = ?$



ابتدا استفاده از رول

$$j_k = j_{sk} + y_k v_k - y_k v_{sk}$$

j_k ها را می‌نویسیم و بعد به صورت ماتریسی درمی‌آوریم سپس:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + 1 v_1 - 1 \times 2$$
$$j_2 = 1 + 2 v_2 - 2 \times 0$$
$$j_3 = 0 + 4 v_3 - 4 \times 0$$
$$j_4 = 0 + 3 v_4 - 3 \times 0$$
$$j_5 = 0 + 5 v_5 - 5 \times 0$$

$$?\ Y_n = A Y A^t$$
$$?\ I_s = A Y v_s - A j_s \Rightarrow Y_n . \underset{?}{e} = I_s \Rightarrow V = A^t . e$$

را بدست می‌آورید.

برای مثال بعدی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}}_{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{14} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{14} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_s}$$

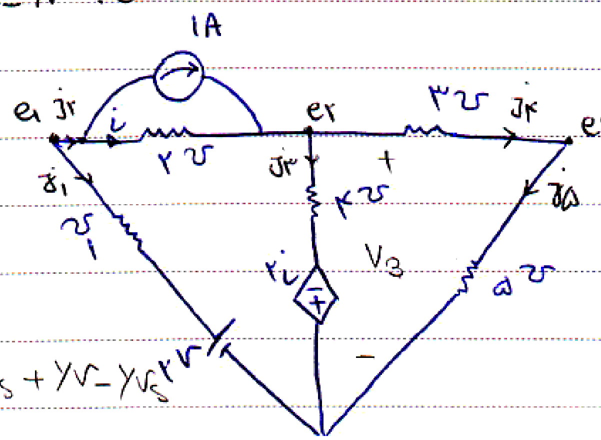
$$Y_n = A Y A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$I_s = A Y v_s - A j_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Y_n . e = I_s$ $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow e$ بدست می‌آید.

$V = A^t . e$

مثال)



$j = j_s + YV - YV_s$

اشتراط سلفی را بدست می‌آوریم. (i)

$i = j_2 - 1$

$KCL: \quad j_2 = i + 1 \Rightarrow i = j_2 - 1$

$j_1 = 0 + 1V_1 - 1 \times 2$

$j_2 = 1 + 2V_2 - 2 \times 0$

$j_3 = 0 + 4(V_3 - (-2i)) = 4(V_3 + 2j_2 - 2) = 4V_3 + 8j_2 - 8 = 4V_3 + 16V_2 + 8 - 8 =$

$0 + 4V_3 + 16V_2 + 0$

$j_4 = 0 + 3V_4 - 3 \times 0$

$j_5 = 0 + 5V_5 - 5 \times 0$

$j_3 = 0 + 4V_3 - 4(-2i) =$

$4(V_3 - (-2i))$

$Y_n = AYA^t = ?$

$I_s = AYV_s - Aj_s = ? \longrightarrow Y_n . e = I_s$

روش نقطه‌ای:

در شرایط زیر از روش نقطه‌ای استفاده می‌کنیم:

1) منابع ولتاژ وجود نداشته باشد یا اگر وجود دارند به منابع جریان تبدیل شوند.

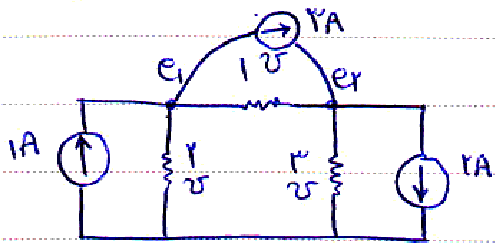
2) سلف‌های تزویج شده و منابع وابسته وجود نداشته باشند، در این صورت در معادله‌ی $Y_n . e = i_s$

می‌توان Y_n و I_s را مستقیماً به صورت زیر تشکیل داد. $Y_n \cdot e = i_s$

$$Y_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع ادمیتانس‌های متصل بین گره } i \text{ و } j) \end{cases}$$

$i_{s_i} =$ مجموع جریان‌های وارد شده به گره (وارد شده با علامت مثبت و خارج شده با علامت منفی)

مثال)



تعداد گره‌ها ۲×۲

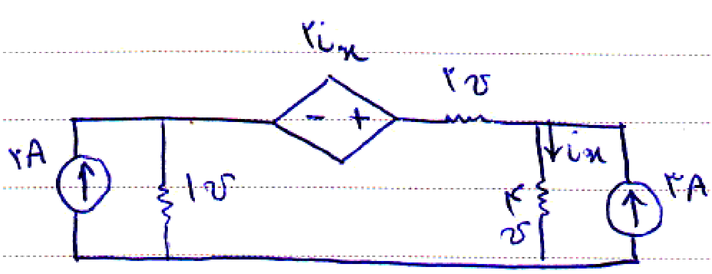
$$Y_n = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+3 \end{bmatrix}$$

$$i_s = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{bmatrix} \qquad Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

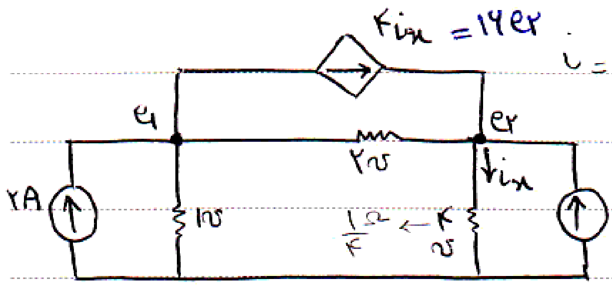
روش میانبر:

همان روش نودال است، با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در این روش، ابتدا منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات را از روش نودال می‌نویسیم. در اینجا اثر منابع وابسته را در ماتریس Y_n نمی‌نویسیم.

مثال)



حل: منابع ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند: $i = \frac{2i_x}{1/2} = \frac{8e_2}{1/2} = 16e_2$



در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است. وقتی از روش ماتریسی استفاده می‌کنیم، تمام وابسته‌ها برحسب e نوشته می‌شوند.

$i_x = \frac{e_2}{1/4} = 4e_2$

چون از آن جهت نشان داری، علامت عوض شده

$$Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-16e_2 \\ 16e_2+3 \end{bmatrix}$$

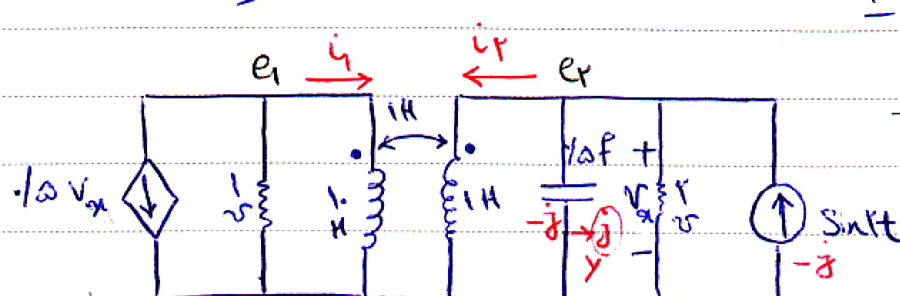
$+16$, -16

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه‌وتحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

وقتی منابع موجود در یک مدار در رژیم سینوسی به صورت یک فرکانس باشند می‌توان از تحلیل حالت دائمی استفاده کرد.

مثال) چون سلف تزویج شده داریم باید از تحلیل استفاده کنیم.



$\sin 2t = \cos(2t - 90) \rightarrow -j$

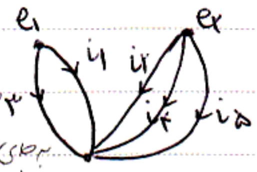
وقتی چسبیده نباشد خودمان هم باید بچسبانیم.

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{10-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = Li \Rightarrow i = \frac{\lambda}{L} = \lambda\Gamma \xRightarrow{\text{فازور}} I = V\,\frac{1}{j\omega}\,\Gamma$$

درحوزه‌ی سینوسی ماندگار :

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



به‌جای i ها j

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

معادلات گره به روش منظم :

$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

$$j_3 = 0/5\, v_x + 1\times v_3 \ , \ v_x = v_5 \qquad j_5 = -(-j) + 0 + 2v_5 \longrightarrow j_5 = j + 2v_5$$

$$j_4 = 0 + j\times v_4 \longrightarrow j_4 = j\, v_4 \qquad j_3 = /5\times v_5 + v_3 \longrightarrow j_3 = /5\, v_5 + v_3$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad j = j_s + Yv - Yv_s$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & /5 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_b}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n = AY_bA^t \qquad i_s = \cancelto{0}{AY_bv_s} - Aj_s$$

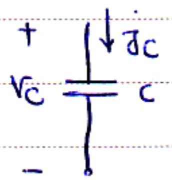
معادلات انتگرال - دیفرانسیل :

چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکه‌ی معینی را به یک ورودی و حالات اولیه‌ی معلوم محاسبه کنیم، معادلات

انتگرال - دیفرانسیل لازم خواهد بود.

اپراتور D : $\quad \frac{d}{dt} \triangleq D$

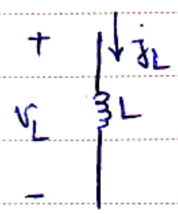
حال ادمیتانس های سلف و خازن را در حوزه ی انتگرال - دیفرانسیل را به دست می آوریم:



۱- خازن:

$$i_C = C\frac{d}{dt}v_C = CDv_C$$

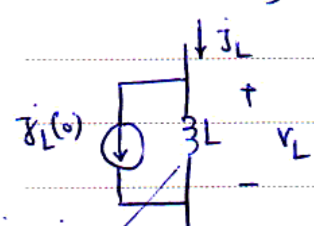
$$\boxed{Y_C = \frac{i_C}{v_C} = CD}$$



۲- سلف:

$$i_L = \frac{1}{L}\int v_L \, dt + i_L(0)$$

جریان اولیه ی سلف $i_L(0)$ را با یک منبع جریان موازی مدل می کنیم تا از معادلات حذف شود.

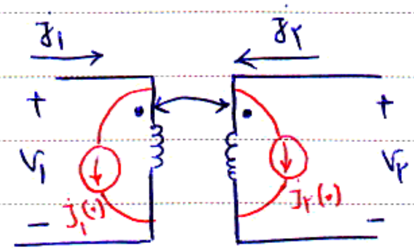


سلف بدون جریان اولیه

$$i = \frac{1}{L}\int v_L \, dt \Rightarrow v_L = L\frac{d}{dt} i$$

$$v_L = LDi \Longrightarrow \boxed{Y_L = \frac{i}{v_L} = \frac{1}{LD}}$$

برای سلف های تزویج شده نیز می توانیم آن را تعمیم دهیم:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه

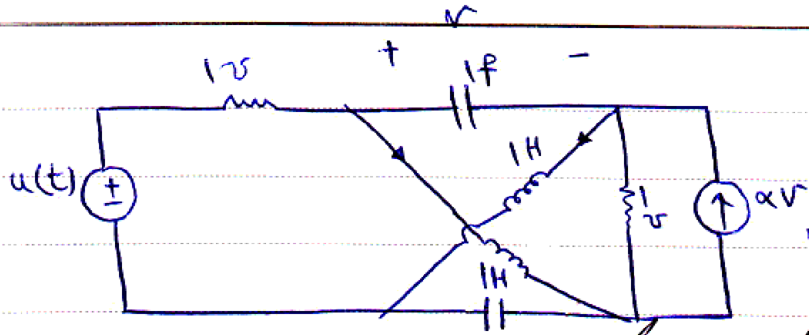
$$\lambda = Li$$

$$i = \lambda\Gamma$$

$$i = v\frac{1}{j\omega}\Gamma = v\frac{1}{D}\Gamma$$

$$i = \frac{1}{D}v\Gamma$$

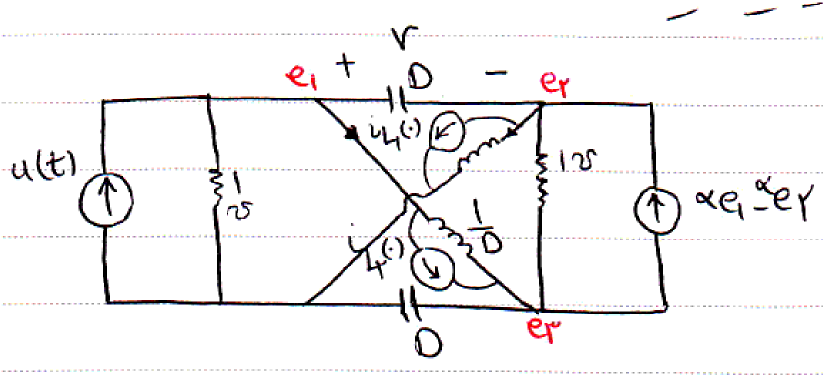
مثال) تمرین ۲۹ کتاب



$V_{C_2}(0), V_{C_1}(0)$, $i_{L_1}(0)$, $i_{L_2}(0)$

در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل از روش پتانسیل گره استفاده می‌کنیم

بدلیل وجود $u(t)$ ناچاریم از انتگرال دیفرانسیل حل کنیم

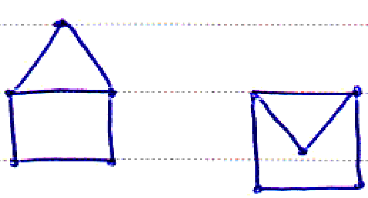


$$\begin{bmatrix} 1+D+\frac{1}{D} & -D & \frac{-1}{D} \\ -D-\alpha & 1+D+\frac{1}{D}+\alpha & -1 \\ \frac{-1}{D}+\alpha & -1-\alpha & 1+\frac{1}{D}+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)-i_{L_2}(0) \\ \alpha e_1-\alpha e_2-i_{L_1}(0) \\ -\alpha e_1+\alpha e_2+i_{L_2}(0) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل مش :

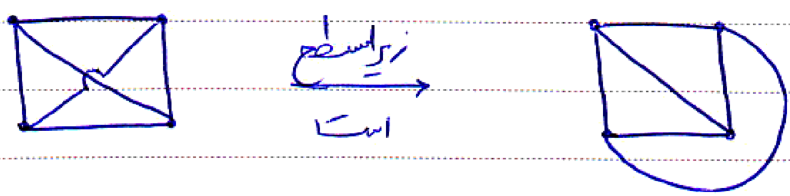
گراف‌های توپولوژیکی : گراف‌هایی هستند که از نظر رسم متفاوت‌اند ولی در واقع یک گراف هستند.

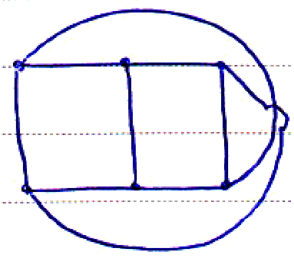
مثال)



گراف‌های مسطح : به گرافی گفته می‌شود که بتوان آن را در یک صفحه رسم کرد به نحوی که هیچ دو شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

مثال)

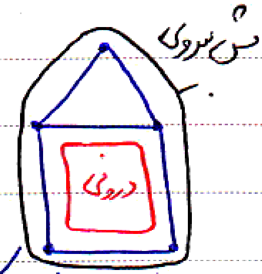




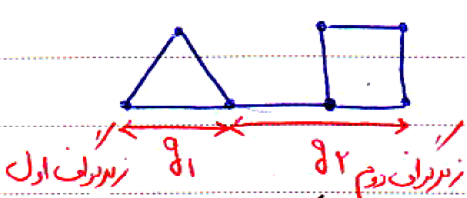
غیر مسطح

ش درونی و ش بیرونی:

حلقه‌ای که در آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد را ش درونی و از این به بعد به اختصار ش می‌گویند و حلقه‌ای که در خارج از آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد، ش بیرونی است.

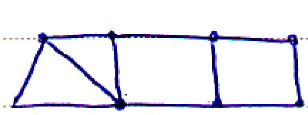


گراف‌های لولا دار و بی‌لولا: به گرافی لولا دار می‌گویند که بتوان آن را به دو زیر گراف ناسوده که تنها در یک رأس به هم متصل اند، تفکیک کرد.



گراف لولا دار

به گرافی بی لولا می‌گویند که هرگاه به دو زیر گراف ناسوده تفکیک شوند، حداقل در دو رأس به هم متصل باشند.

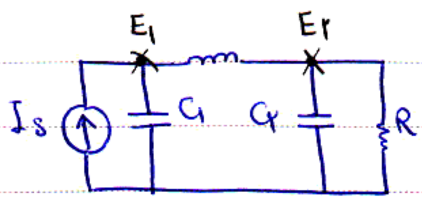


گراف بی لولا

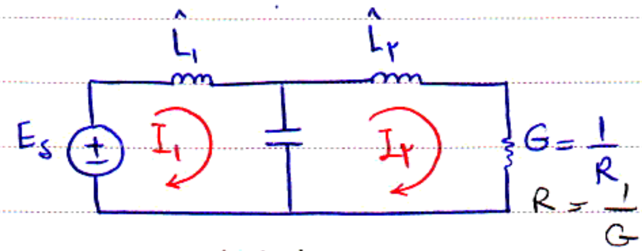
توجه) وقتی در یک مدار، بیش‌تر منابع جریان داشته باشیم، از KCL استفاده می‌کنیم.

توجه) وقتی در یک مدار، بیش‌تر منابع ولتاژ داشته باشیم، از KVL استفاده می‌کنیم.

خاصیت دوگان: این خاصیت در گراف‌های مسطح پیوسته دی‌نولا صدق می‌کند. عناصر نیز باید دوتایی باشند. بنابراین عناصری مانند ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج شده و غیره را از بحث خارج می‌کنیم. به دو مدار زیر توجه کنید:



مدار (A)



مدار (B)

مدار A:

KCL

$$I_s = E_1 C_1 j\omega + \frac{E_1 - E_2}{Lj\omega}$$

$$\boxed{I_s = E_1\left(C_1 j\omega + \frac{1}{Lj\omega}\right) - E_2 \times \frac{1}{Lj\omega}} \quad (1)$$

KCL

$$\frac{E_1 - E_2}{Lj\omega} = E_2 C_2 j\omega + \frac{E_2}{R}$$

$$\boxed{E_1 \times \frac{1}{Lj\omega} - E_2\left(\frac{1}{Lj\omega} + C_2 j\omega + \frac{1}{R}\right) = 0} \quad (2)$$

مدار B:

KVL

$$E_s = \hat{L}_1 j\omega I_1 + \frac{1}{\hat{C} j\omega}(I_1 - I_2)$$

$$\longrightarrow \boxed{E_s = I_1\left(L_1 j\omega + \frac{1}{\hat{C} j\omega}\right) - I_2 \times \frac{1}{\hat{C} j\omega}} \quad (3)$$

KVL

$$\frac{1}{\hat{C} j\omega}(I_2 - I_1) + \hat{L}_2 j\omega I_2 + R I_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\hat{C} j\omega} I_1 - I_2\left(\frac{1}{\hat{C} j\omega} + \hat{L}_2 j\omega + R\right) = 0} \quad (4)$$

با مقایسه روابط ① با ③ و همچنین ② با ④ مشاهده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین روابط وجود دارد.

E ⟷ I   E جانشین را به I داده و برعکس.

C ⟷ L   C جانشین را به L داده و برعکس.

R ⟷ $G = \frac{1}{R}$ R جانشین را به G داده و برعکس.

* این دو مدار (A و B) دوگان هم هستند به عبارتی اگر مدار A را حل کنیم، پاسخ آن برای مدار B قابل استفاده است.

گراف‌های دوگان:

دو گراف g و ĝ را دوگان می‌گویند، اگر سه شرط زیر را داشته باشند:

به ازای هر تعداد مش همان تعداد گره

۱- میان مش‌های ĝ (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره‌های g یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲- میان مش‌های g (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره‌های ĝ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۳- میان شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به طوری که هرگاه دو مش یک گراف دارای شاخه‌ی مشترک باشند، گره‌های متناظر با این دو مش در مدار دوگان شاخه‌ای داشته باشد که این دو گره را به هم وصل می‌کند.

الگوریتم رسم مدار دوگان:

۱- برای هر یک از مش‌های g با احتساب (در نظر گرفتن) مش بیرونی، یک گره از ĝ را انتخاب می‌کنیم.

۲- برای هر شاخه‌ی K از g که بین مش‌های i و j مشترک است، یک شاخه از ĝ انتخاب می‌کنیم که گره‌های i و j ĝ را متصل کند.

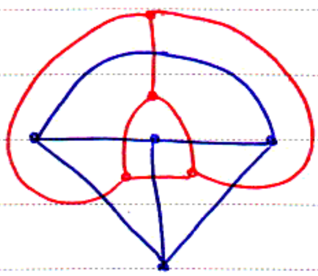
۳- بین عناصر g و ĝ تناظر زیر را به وجود می‌آوریم؟

L ⟷ C

R ⟷ G

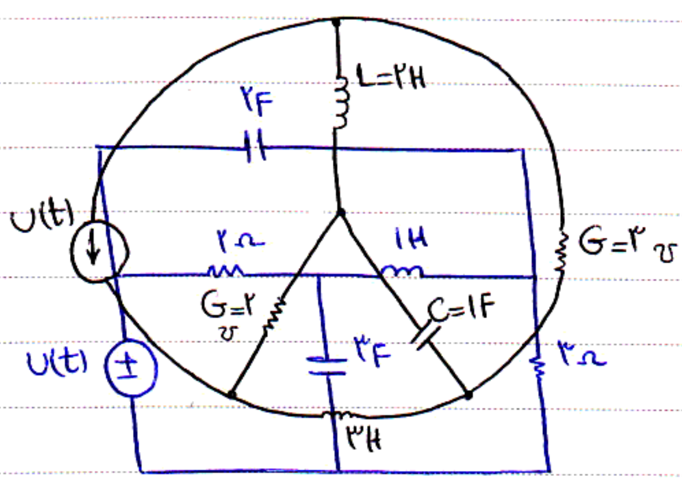
مثل منابع جریان I ⟷ E مثل منابع ولتاژ

مثال) گراف های دوگان گراف زیر را به دست آورید؟



متناظر با هر مش، نودی را در دوگان به وجود می‌آوریم.

مثال) گراف دوگان مدار زیر را به دست آورید.

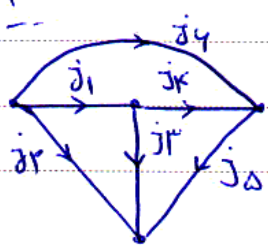


جریان به سر مثبت منبع وارد می‌شود.

تجزیه و تحلیل مش؟

در یک مدار که دارای b شاخه و n_t گره باشد، تعداد مش‌ها عبارت است از: $L = b - n_t + 1$

در روش مش برای هر یک از مش‌ها جهت عقربه‌های ساعت را به عنوان جهت قراردادی در نظر می‌گیریم.



$L = 6 - 4 + 1 = 3$

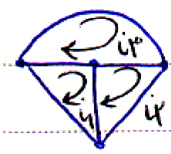
شاخه ، گره

i = بردار جریان مش‌ها $= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$ $\qquad$ V = بردار ولتاژ شاخه‌ها $= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$

ماتریس M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i\text{ام قرار داشته و هم‌جهت با مش باشد} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } k \text{ در مش } i\text{ام نباشد} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } k \text{ در مش } i\text{ام قرار داشته و مخالف مش باشد} \end{cases}$$

ماتریس M برای گراف مقابل:



$$\underset{3\times 6}{M_{ik}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

استنباط‌های KVL و KCL:

$$M.V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + v_3 \\ -v_3 + v_4 + v_5 \\ -v_1 - v_4 + v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استنباط KVL: $\boxed{M.V = 0}$

$M^t . i = ?$

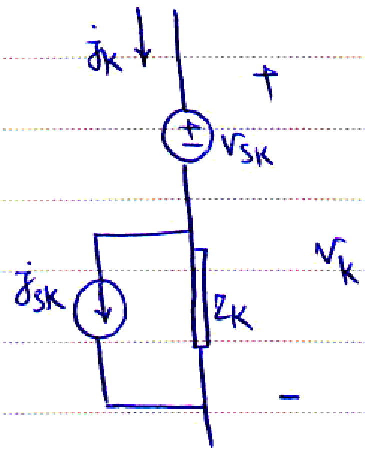
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_3 \\ -i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 - i_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix}$$

استنباط KCL: $\boxed{M^t . i = j}$

روش آنالیز مش:

سه روش وجود دارد: مستقیم / نظری / ماتریسی

روش مستقیم:



$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

وقتی رابطه‌ی فوق برای تمام شاخه‌ها به صورت ماتریسی نوشته شود:

$$V = V_s + Z_b J - Z_b J_s$$

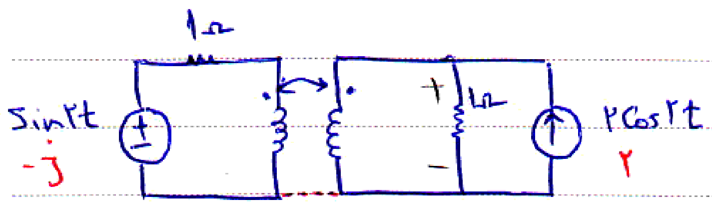
دو طرف را در M ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{M \cdot V}_{0} = MV_s + MZ_b \underbrace{J}_{M^t \cdot i} - MZ_b J_s$$

$$\boxed{\overbrace{MZ_bM^t}^{Z_m} \cdot i = \underbrace{MZ_b J_s - MV_s}_{e_s}} \quad (1) \quad \Rightarrow Z_m \cdot i = e_s$$

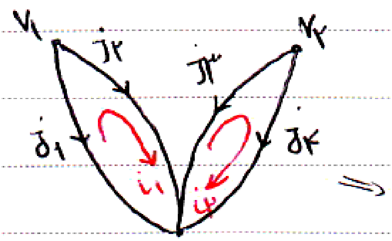
طرف راست معادله‌ی (1) که منابع جریان مستقل را منبع ولتاژ تبدیل می‌کند.

مثال)



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

گراف :



$$\Rightarrow \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

منابع را در بردار نشان می‌دهیم.

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2j & 2j \\ 2j & 4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_1 = -j + 1 \times J_1 - 1 \times 0}$$

$$\boxed{V_4 = 0 + 1 \times J_4 - 1 \times (-2)}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Z_b} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_m \cdot i = e_s$$

$$Z_m = M Z_b M^t = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -1 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & -2j & -4j & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2j & -2j \\ -2j & 1+4j \end{bmatrix}$$

$$e_s = M Z_b J_s - M V_s$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix}$$

روش نظری :

اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_m \cdot i = e_s$ ماتریس‌های Z_m و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند یا اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند. (ضمناً همه‌ی منابع مستقل باشند)

۲) سلف‌های تزویج شده در مدار موجود نباشد. L تعداد مش‌ها

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در مش } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین مش } i \text{ و } j) \end{cases}$$

$e_{s_i} =$ مجموع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام اگر از قطب مثبت منبع وارد شدیم با علامت منفی و اگر از قطب منفی وارد شدیم با علامت مثبت.

روش میانبر :

همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. منابع وابسته را مثل منابع

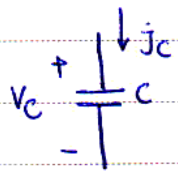
Year.   Month.   Date.   ( )

مستقل فرض می‌کنیم و وابستگی‌ها را برحسب جریان مش‌ها تعیین می‌کنیم و معادلات را به روش کولی می‌نویسیم. در اینجا اثر وابستگی‌ها را به ماتریس Z_m می‌بریم.

معادلات انتگرال - دیفرانسیل:

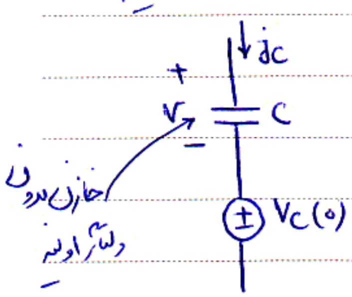
امپدانس‌های سلف و خازن را در این حوزه به دست می‌آوریم

۱- خازن:



$$V_C = \frac{1}{C}\int j_C\, dt + V_C(0)$$

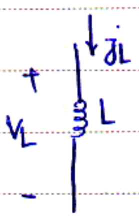
برای جدا کردن شرط اولیه از معادله آن را به صورت یک منبع ولتاژ سری با یک خازن بدون شرط اولیه نشان می‌دهیم



$$V = \frac{1}{C}\int j_C\, dt \Rightarrow C\frac{dV}{dt} = j_C$$

$$CDV = j_C \longrightarrow Z_C = \frac{V}{j_C} \Rightarrow \boxed{Z_C = \frac{1}{CD}}$$

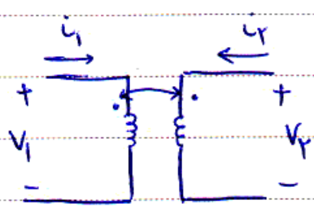
۲- سلف:



$$V_L = L\frac{dj_L}{dt} \longrightarrow V_L = LD\, j_L$$

$$Z_L = \frac{V_L}{j_L} \longrightarrow \boxed{Z_L = LD}$$

با تعمیم برای سلف‌های تزویج شده خواهیم داشت:

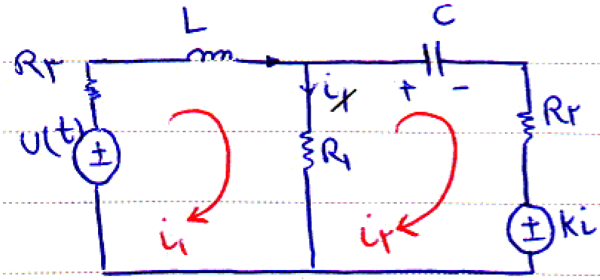


$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = L i \Rightarrow V = L j\omega i = LDi$

$V = LDi$

مثال)

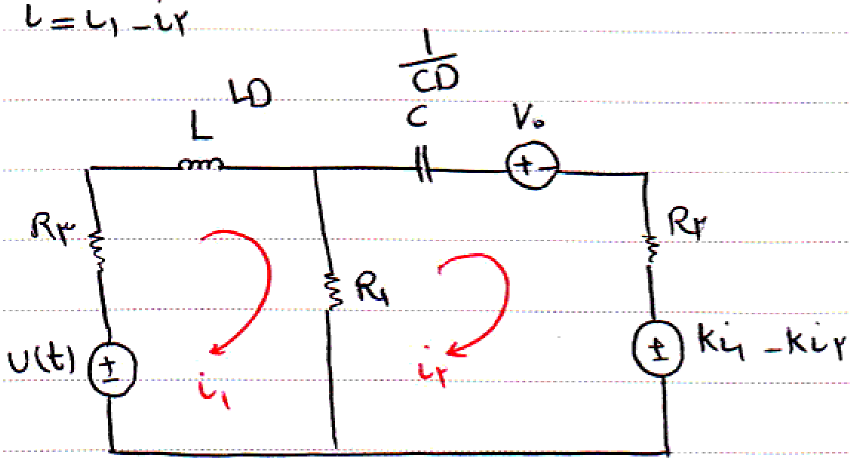


$V_C(0) = V_0$

$i_L(0) = I_0$

حل از روش مش: چون مدار در رژیم سینوسی نیست، دارای سلف و خازن است و شرایط اولیه داده شده باید در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل حل شود.

$i = i_1 - i_2$



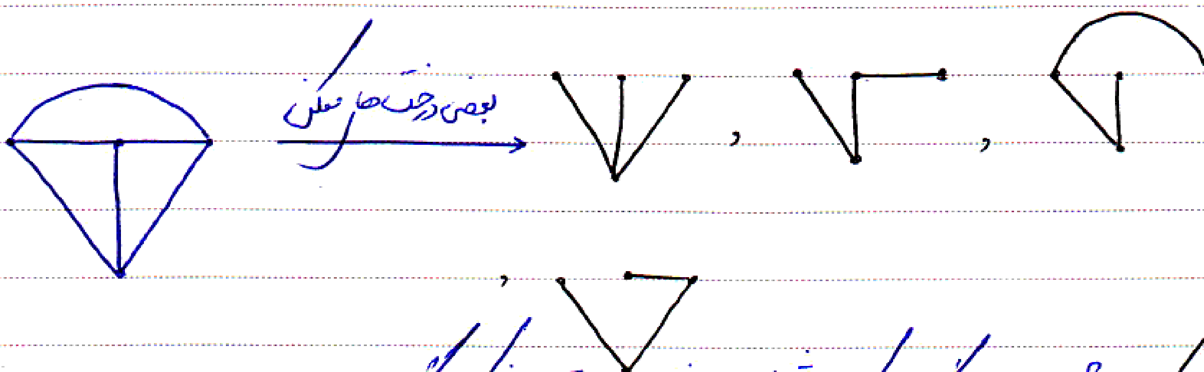
$Z_m \cdot i = e_s$

$$\begin{bmatrix} R_3 + LD + R_1 & -R_1 \\ -R_1 + K & R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 - K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(t) \\ -V_0 \cancel{- Ki_1} \cancel{+ Ki_2} \end{bmatrix}$$

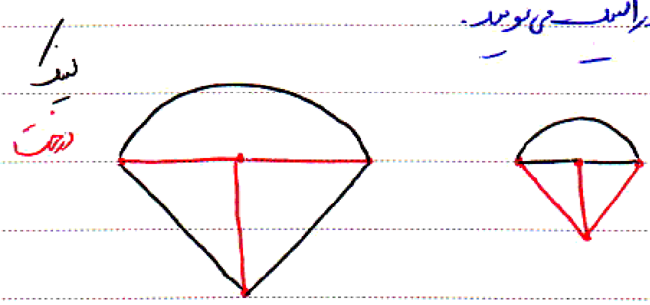
فصل ۱۱ : تجزیه تحلیل حلقه‌ی اساسی و کات‌ست اساسی :

درخت : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را درخت گویند اگر ۳ شرط زیر را دارا باشد :

۱) پیوسته باشد. ۲) تمام گره‌ها را شامل شود ۳) هیچ حلقه‌ای تشکیل ندهد.



لینک : شاخه‌هایی از گراف که از شاخه‌های درخت نیستند را لینک می‌گویند.



قضیه اساسی تئوری گراف :

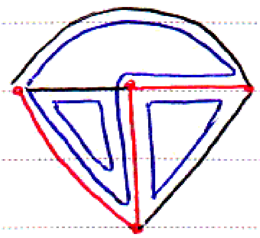
اگر گراف پیوسته‌ی G و درخت اختیاری T از آن گراف را در نظر بگیریم :

۱) بین هر دو گره‌ی دلخواه از گراف G روی درخت T یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

۲) تعداد شاخه‌های درخت برابر $n_t - 1$ (۴ − ۱ = ۳) و تعداد لینک‌ها برابر $b - n_t + 1$ (۶ − ۴ + ۱ = ۳) است.

۳) هر لینک درخت T همراه با مسیر منحصر به فرد میان دو گره آن لینک تشکیل یک حلقه می‌دهد که به آن حلقه‌ی اساسی

متناظر با آن لینک می‌گویند.

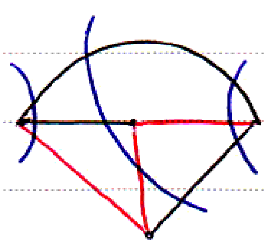


یعنی به تعداد لینک‌ها حلقه‌ی اساسی داریم.

۴) هر شاخه‌ی درخت T و تعدادی از لینک‌ها تشکیل یک کات‌ست منحصر به فرد را می‌دهد که به آن کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت می‌گویند. یعنی به تعداد شاخه‌های درخت، کات‌ست اساسی داریم.

روش به دست آوردن کات‌ست اساسی متناظر با شاخه‌ی درخت:

شاخه‌ی درخت مورد نظر را حذف می‌کنیم، درخت به ۲ قسمت مجزا تقسیم می‌شود. لینک‌هایی که این دو قسمت مجزا را به هم وصل می‌کنند به همراه آن شاخه‌ی درخت، تشکیل کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت را می‌دهند.

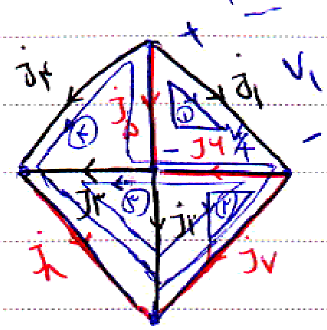


تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی:

قرارداد ۱) لینک‌ها را از 1 تا L و درخت‌ها را از $L+1$ تا b شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲) جهت حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را هم‌جهت با جریان لینک در نظر می‌گیریم.

فرض کنید یک گراف به همراه درخت انتخابی مانند شکل زیر باشد:



جهت‌ها اختیاری است.

حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را تشکیل می‌دهیم.

استنباط‌های KVL و KCL:

ماتریس B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن هم‌جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

ماتریس B برای مثال قبلی:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

استنباط‌های KVL و KCL:

$$\text{بردار ولتاژ شاخه‌ها } V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \qquad \text{بردار جریان حلقه‌های اساسی } i = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

$$\text{بردار جریان شاخه‌ها } j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

$$B.V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_5 + v_6 \\ v_2 + v_6 - v_7 \\ v_3 + v_6 - v_7 + v_8 \\ v_4 - v_5 + v_6 - v_7 + v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$B.V = 0$ استنباط KVL

$$B^t . i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ -i_1 - i_4 \\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \\ -i_2 - i_3 - i_4 \\ i_3 + i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B^t . i = j}$$

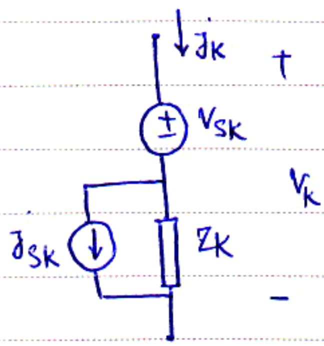
استنباط KCL

معادلات حلقه‌ی اساسی: سه روش داریم:

- منظم
- نظری
- ماتریسی

۱- روش منظم

مجددا تعمیم‌یافته‌ی شاخه‌ای را به یاد داریم.



$$V_K = V_{SK} + Z_K j_K - Z_K j_{SK}$$

وقتی رابطه را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$V = V_s + Z_b j - Z j_s$$

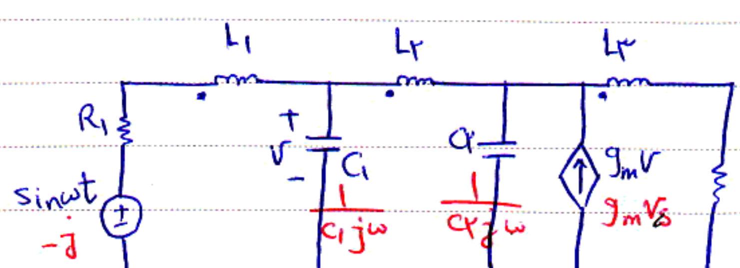
طرفین در B ضرب می‌شود:

$$\underbrace{B . V}_{0} = B V_s + B Z_b \underbrace{j}_{B^t . i} - B Z j_s$$

$$\Rightarrow \underbrace{B Z_b B^t}_{Z_B} . i = \underbrace{B Z_b j_s - B V_s}_{e_s} \quad (A) \Rightarrow \quad Z_B . i = e_s$$

مولفه‌ی $B Z_b j_s$ در طرف راست رابطه‌ی (A)، عمل تبدیل منابع مستقل جریان را به منابع ولتاژ انجام می‌دهد.

مثال: در مدار زیر به روش منظم حلقه‌ی اساسی، ماتریس را ارائه دهید.



$$L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

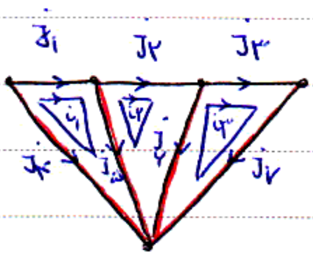
$$\sin\omega t = 1\cos(\omega t - 90) = 1 \angle -90 = \cos -90 + j\sin(-90) = -j$$

$$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90) = e^{-j90} = \cos 90 - j\sin 90 = -j$$

$$\boxed{A\cos(\omega t + \theta) = A e^{j\theta}}$$

در حوزه فازور کار می‌کنیم

گراف:



لینک و درخت:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده:

$\lambda = Li$

$V = L j\omega I$

J بردار جریان شاخه‌ها

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$V_K = V_{SK} + Z_K J_K - Z_K J_{SK}$$

$$V_1 = 4j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + j\omega \times J_3$$

$$V_2 = 2j\omega \times J_1 + 4j\omega \times J_2 + 2j\omega \times J_3$$

$$V_3 = j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + 4j\omega \times J_3$$

$$V_4 = -j + R_1 \times J_4 - R_1 \times 0$$

$$V_5 = 0 + \frac{1}{C_1 j\omega} \times J_5 - \frac{1}{C_1 j\omega} \times 0$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} \times J_6 - \frac{1}{C_2 j\omega} \times (-g_m V_5)$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6 + \frac{g_m}{C_2 j\omega}\left(\frac{1}{C_1 j\omega}\right) J_5 \Rightarrow V_6 = \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} J_5 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6$$

$v_7 = 0 + R_2\, j_7 - R_2 \times 0$

به صورت ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4j\omega & 2j\omega & j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j\omega & 4j\omega & 2j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j\omega & 2j\omega & 4j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-g_m}{C_1C_2\omega^2} & \frac{1}{C_2 j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}}_{z_b} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}}_{z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s}$$

$Z_B = B Z_b B^t$

$e_s = B Z_b j_s - B V_s$

$$\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

۲) روش تحلیل: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_B \cdot i = e_s$ ماتریس‌های Z_B و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند و اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته وجود نداشته باشد.

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1L} \\ \vdots & & \\ z_{L1} & \cdots & z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ \vdots \\ e_{sL} \end{bmatrix}$$

$z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه‌ی اساسی iام} \\ i \neq j & \text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین حلقه‌ی اساسی i و j} \end{cases}$

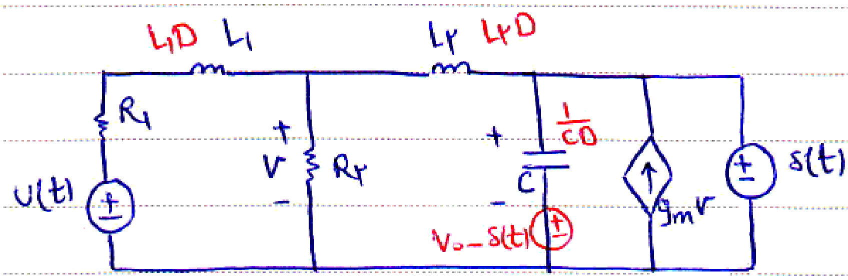
(اگر جهت حلقه‌های اساسی در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و اگر خلاف بود با علامت منفی جمع می‌زنیم.)

e_{s_i} = مجموع منابع ولتاژ موجود در حلقه‌ی اساسی i (اگر از سر منفی وارد شدیم با علامت + و اگر از سر مثبت وارد شدیم با علامت منفی − جمع می‌زنیم.)

۴) روش مانیسر : همان روش تلژن است.

با این تفاوت که منابع وابسته نمی‌توانند وجود داشته باشند. وابستگی‌ها را برحسب جریان حلقه‌ها می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم و معادلات را با روش تلژن می‌نویسیم. در نهایت اثر وابستگی را با ماتریس Z_B در نظر می‌گیریم.

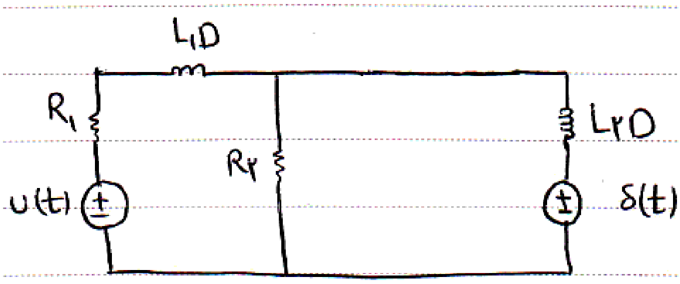
مثال)

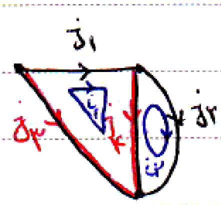


$V_C(0)=V_0$

$i_{L_1}(0)=i_{L_2}(0)=I_0$

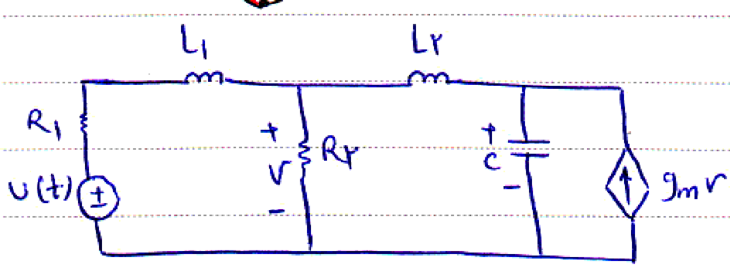
در حوزه‌ی انتگرال ـ دیفرانسیل حل می‌کنیم:

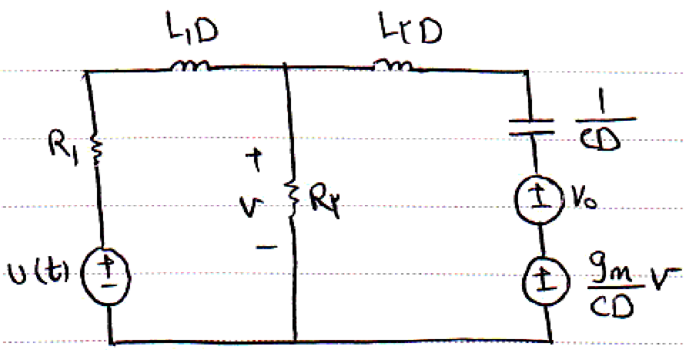


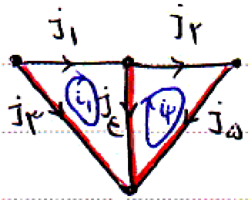


$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+L_2D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u(t) \\ -\delta(t) \end{bmatrix}$$

مثال)







$$V = R_2 i_1 - R_2 i_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+L_1D & -R_2 \\ -R_2+\frac{g_mR_2}{CD} & R_2+L_2D+\frac{1}{CD}-\frac{g_mR_2}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0 - \cancel{\frac{g_mR_2}{CD} i_1} + \cancel{\frac{g_mR_2}{CD} i_2} \end{bmatrix}$$

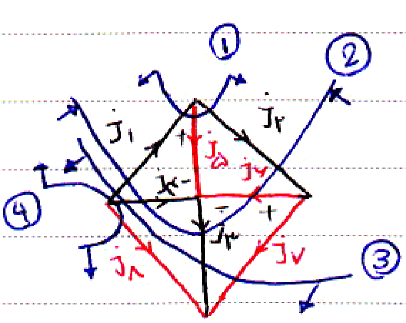
تجزیه و تحلیل کات ست :

با تعیین درخت مناسب در گراف مدار :

قرارداد ۱ : لینک‌ها را از ۱ تا L و شاخه‌های درخت را از L+1 تا b شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲ : جهت کات ست را هم جهت با جهت شاخه درخت متناظر در نظر می‌گیریم.

مثال: فرض کنید یک گراف و درخت انتخابی بصورت زیر باشد :



ماتریس Q :

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ بوده و با آن هم‌جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

در مثال قبل ۸ شاخه داریم.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

استنباط‌های KVL و KCL :

بردار جریان شاخه‌ها :

$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه‌ها :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه‌های درخت :

$$e = \begin{bmatrix} e_{L+1} \\ \vdots \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_2 + j_5 \\ j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + j_6 \\ -j_1 + j_3 - j_4 + j_7 \\ j_1 + j_4 + j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \quad Q \cdot j = 0$ استنباط KCL

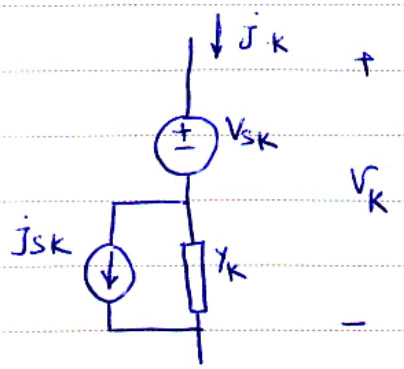
$$Q^t \cdot e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^t . e = v$$

استنباط KVL ، $Q^t . e = v$

معادلات کات ست اساسی و ← مقطع، نظری، مانند

ا منظم :

تعمیم شاخه را مجدداً در نظر می‌گیریم.



$$j_k = j_{sk} + y_k v_k - y_k v_{sk}$$

وقتی این معادله را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم ، معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود :

$$j = j_s + Y_q v - Y_q v_s$$

ضرب طرفین در Q :

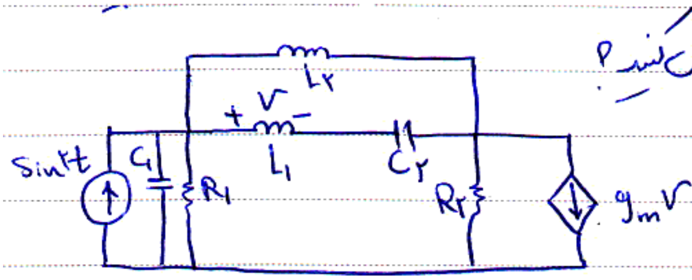
$$\underbrace{Q . j}_{0} = Q j_s + Q Y_q \underbrace{v}_{Q^t . e} - Q Y_q v_s$$

$$\underbrace{Q Y_q Q^t}_{Y_Q} . e = \underbrace{Q Y_q v_s - Q j_s}_{i_s}$$

$$\boxed{Y_Q . e = i_s}$$

$Q Y_q v_s$: تبدیل منابع ولتاژ مستقل به جریان

مثال) مدار زیر را به روش کات ست اساسی منظم حل کنید؟



در روش کات ست

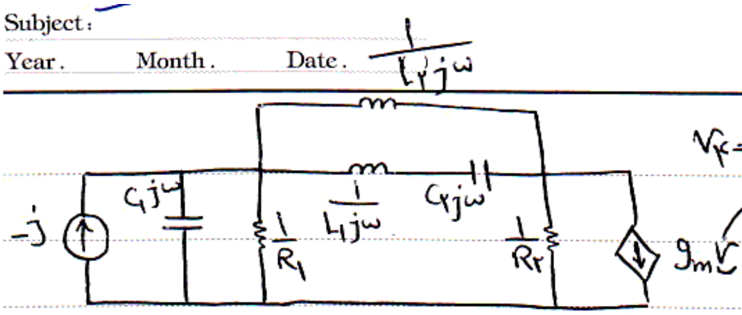
چون با ادمیتانس سروکار داریم

همه را به Y تبدیل کنیم

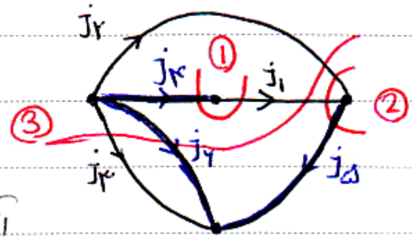
مثلاً $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Leftarrow Y_C = j\omega C$ و $Z_L = Lj\omega \Leftarrow Y_L = \frac{1}{Lj\omega}$

Subject:

Year. Month. Date.



تبدیل به Y ؟



آبی درخت
سیاه لینک

گراف :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + C_2 j\omega \times V_1 - C_2 j\omega \times 0$$
$$j_2 = 0 + \frac{1}{L_2 j\omega} V_2 - \frac{1}{L_2 j\omega} \times 0$$
$$j_3 = -(-j) + C_1 j\omega \times V_3 - C_1 j\omega \times 0$$
$$j_4 = 0 + \frac{1}{L_1 j\omega} \times V_4 - \frac{1}{L_1 j\omega} \times 0$$
$$j_5 = g_m V + \frac{1}{R_2} V_5 - \frac{1}{R_2} \times 0$$

$$j_5 = g_m \times L_1 j\omega \left(\frac{1}{L_1 j\omega}\right) V_4 + \frac{1}{R_2} V_5 \Rightarrow j_5 = 0 + g_m V_4 + \frac{1}{R_2} V_5$$
$$-(-j)$$
$$j_6 = 0 + \frac{1}{R_1} V_6 - \frac{1}{R_1} \times 0$$

ادامه به عهده خودتان.

$$j_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_q = \begin{bmatrix} C_2 j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 j\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_m & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_Q = Q Y_q Q^t \\ i_s = Q Y_q V_s - Q j_s \end{cases}$$

ادامه به عهده خودتان

۲- روش گره: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد می‌توان Y_Q و i_s را مستقیماً تشکیل داد:

۱) منابع ولتاژ موجود نباشند (اگر هستند به منبع جریان تبدیل شوند).

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته نداشته باشیم.

$Y_{ij} = \begin{cases} i=j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به کات‌ست i ام} \\ i\neq j & \text{مجموع ادمیتانس‌های مشترک کات‌ست‌های i و j} \end{cases}$

(اگر جهت دو کات‌ست در شاخه مشترک یکسان بود با علامت مثبت در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

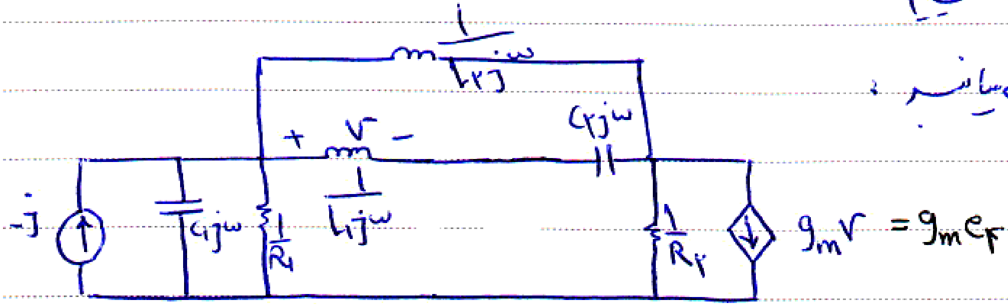
$i_{s_i} =$ مجموع جبری منابع جریان موجود در کات‌ست i ام (اگر جهت منبع مخالف جهت کات‌ست بود با علامت مثبت در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

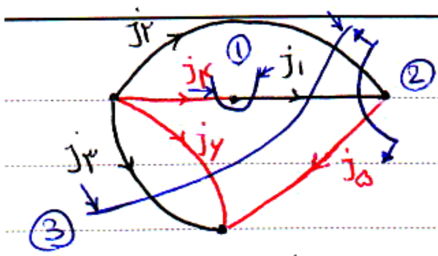
۳- روش میانبر: همان روش گره است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند.

تمامی وابستگی‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌های درخت می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم.

معادلات را به روش گره می‌نویسیم و در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Y_Q می‌بریم.

مثال) مثال حل به روش میانبر:





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 j\omega} + C_4 j\omega & C_4 j\omega & -C_2 j\omega \\ C_2 j\omega + g_m & \frac{1}{L_2 j\omega} + C_4 j\omega + \frac{1}{R_2} & \frac{-1}{L_4 j\omega} - C_2 j\omega \\ -C_2 j\omega & \frac{-1}{L_2 j\omega} - C_2 j\omega & C_1 j\omega + \frac{1}{R_1} + C_2 j\omega + \frac{1}{L_2 j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\cancel{-j}} \\ \cancel{-g_m e_4} \\ \underset{-j}{\cancel{0}} \end{bmatrix}$$

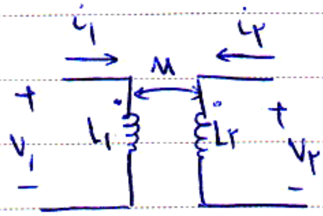
نکات مهم برای حل مسائل:

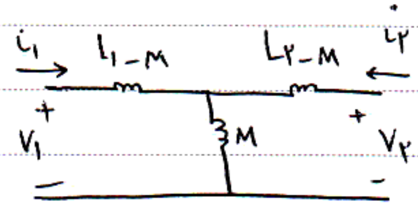
۱ـ در روش گره و کات‌ست اساسی منابع جریان را می‌توان به تنهایی یک شاخه درنظر گرفت.

۲ـ در تحلیل مش و حلقه اساسی منابع ولتاژ را می‌توان به تنهایی یک شاخه درنظر گرفت.

۳ـ در تحلیل گره و کات‌ست و حلقه اساسی، گراف‌ها می‌توانند غیرمسطح باشند اما در روش مش خیر.

۴ـ در روش ماتریسی نیز گفته بودیم سلف تزویج شده نباید وجود باشد، لکن می‌توان به جای سلف‌های تزویج شده مدار معادل قرار داد و از روش ماتریسی استفاده کرد.

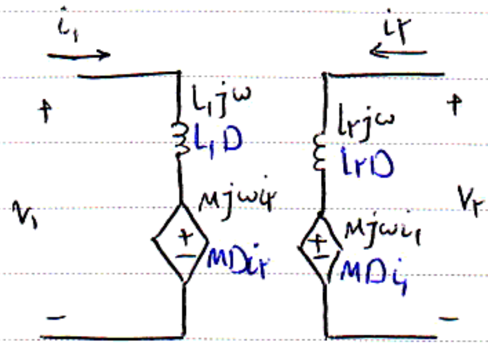




معادل اول: مدار معادل T ،

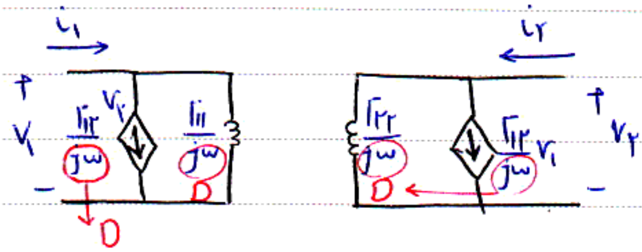
شرط استفاده از این معادل این است که سلف‌ها در مجاورت هم باشند و یا سر مشترک داشته باشند.

معادل دوم:



کاربرد در روش مش یا حلقه اساسی.

معادل سوم:

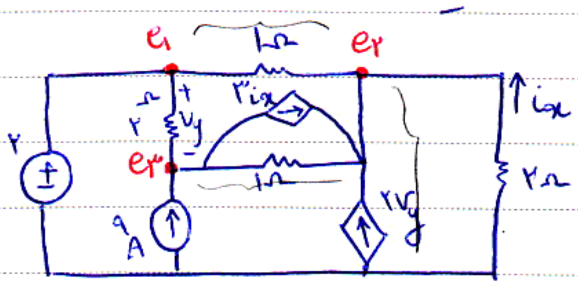


کاربرد در روش گره و کات ست اساسی.

۵ـ در بعضی حالات در هنگام استفاده از روش‌های تحلیل منابع مستقلی وجود دارد که قابل تبدیل نیستند یا تبدیل آن‌ها به سختی انجام می‌شود. مثلاً منابع جریان در تبدیل‌های مش و حلقه اساسی و منابع ولتاژ در تبدیل‌های گره و کات ست اساسی. در این موارد به صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف) در تحلیل‌های گره و کات ست اساسی، این منابع (منابع ولتاژ)، ولتاژ گره یا ولتاژ یک شاخه درخت اند. در این حالت در روش‌های تحلیل، ولتاژ مشخص شده را در سطر e قرار می‌دهیم، سپس سطر مربوطه را از ماتریس Y_n یا Y_Q حذف می‌کنیم.

مثال) حل از روش پتانسیل گره



با معادله مربوطه e_2

$Y_n \cdot e = I_s \qquad i_x = \frac{-e_2}{2} \longrightarrow 3 i_x = -\frac{3}{2} e_2 \qquad V_y = e_1 - e_3$

$\Rightarrow 2V_y = 2e_1 - 2e_3$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1-2 & 1+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} & -1+2 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{3}{2} & 1+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{-\frac{3}{2} e_2} \cancel{+2e_1} \cancel{-2e_3} \\ -9 \cancel{+\frac{3}{2} e_2} \end{bmatrix} \quad 9+\frac{3}{2} e_2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{3}{2}} & \cancel{-1} & \cancel{-\frac{1}{2}} \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$-6 + 4e_2 + e_3 = 0 \longrightarrow 4e_2 + e_3 = 6 \longrightarrow \boxed{e_3 = 6 - 4e_2}$

$-1 - \frac{5}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3 = -9 \longrightarrow -2 - 5e_2 + 3e_3 = -18 \longrightarrow \boxed{3e_3 - 5e_2 = -16}$

$18 - 12e_2 - 5e_2 = -16 \longrightarrow -17e_2 = -34 \longrightarrow \boxed{e_2 = 2} \qquad e_3 = 6 - 4\times 2 = -2 \rightarrow \boxed{e_3 = -2}$

$i_x = -\frac{e_2}{2} = -1$

ب) در تحلیل مش و حلقه اساسی، این منابع (منابع جریان)، جریان یک مش یا جریان یک حلقه اساسی اند.

در این حالت در روش ماتریسی، جریان مشخص شده را در بردار $\underline{i}$ قرار می‌دهیم، سپس سطر مربوطه را از ماتریس Z_m یا Z_B حذف می‌کنیم.

فصل ۱۲ : معادلات حالت

متغیرهای حالت: کوچکترین دسته از متغیرهای شبکه است به طوریکه بتوان با دانستن آن مقادیر $t=t_0$ و دانستن منابع در $t>t_0$ بتوان رفتار شبکه را در هر لحظه $t \geq t_0$ تعیین کرد. اگر دست کم n متغیر حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$، ... و $x_n(t)$ وجود داشته باشند، بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

معادلات حالت: اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه را به صورت زیر بنویسیم، معادلات حالت تشکیل شده.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(\underbrace{x(t)}_{\text{بردار حالت}}, \underbrace{u(t)}_{\text{بردار ورودی های سیستم}}\big) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

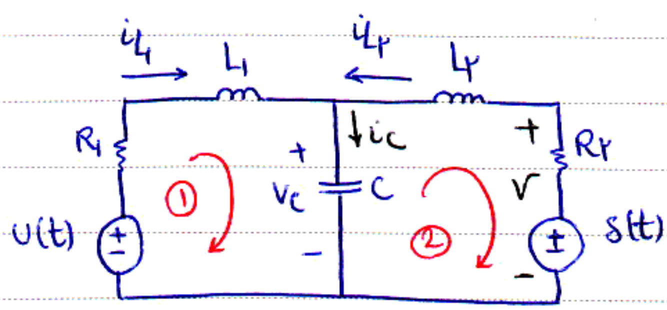
در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

خروجی های سیستم

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

مثال) مدار زیر را در نظر بگیرید:



$$KVL\,(1):\quad -u(t) + R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_C = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{-R_1}{L_1} i_{L_1} - \frac{1}{L_1} v_C + \frac{1}{L_1} u(t)}$$

$$KVL(2):\quad -v_C - L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} - R_2 i_{L_2} + \delta(t) = 0$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-R_2}{L_2} i_{L_2} - \frac{1}{L_2} v_C + \frac{1}{L_2} \delta(t)$$

$$KCL:\quad i_{L_1} + i_{L_2} = C \frac{dv_C}{dt} \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_{L_2}$$

براساس این معادلات می‌توان بردار حالت را به صورت زیر نقش کرد:

خروجی سیستم به صورت روبرو است:

$$v = -R_2 i_{L_2} + \delta(t)$$

حال:

$$\dot{x} = Ax + B\underbrace{U}_{\text{بردار ورودی‌ها}} \qquad \underbrace{y}_{\text{بردار خروجی‌ها}} = Cx + DU$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_C \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

به طور کلی اگر در یک سیستم، n متغیر حالت، m ورودی و k خروجی داشته باشیم، ابعاد ماتریس‌ها در فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n} [x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m} [U]_{m\times 1}$$

$$[y]_{k\times 1} = [C]_{k\times n} [x]_{n\times 1} + [D]_{k\times m} [U]_{m\times 1}$$

کات ست یک درخت بقیه لینک
حلقه یک لینک با بقیه درخت

سلف باید لینک باشد. باید خازن درخت باشد

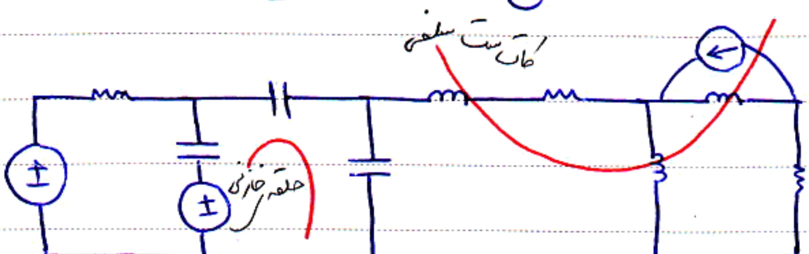
Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوریتم معادلات حالت:

۱- انتخاب متغیرهای حالت: براساس عناصر ذخیره کننده انرژی انجام می‌شود. در سلسله‌های الکتریکی، معمولاً جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند. به طور مشابه می‌توان شار سلف‌ها و بار خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود.

۲- انتخاب درخت مناسب: درختی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن‌ها بوده و شامل سلف‌ها نباشد.

سوال: آیا همیشه امکان‌پذیر است؟ خیر، در شرایطی که حلقه خازنی داریم، یکی از خازن‌ها را در درخت انتخاب نمی‌کنیم. همچنین در شرایطی که کات ست سلفی داریم یکی از سلف‌ها را انتخاب نمی‌کنیم. در نتیجه به تعداد حلقه‌های خازنی و کات ست‌های سلفی از متغیرهای حالت کم می‌شود. حلقه خازنی و کات ست سلفی را با کشتن منابع مستقل می‌توان تشخیص داد.



تعداد متغیرهای حالت: ۶-۱-۱=۴ ، تعداد حلقه خازنی: ۱ ، تعداد کات ست سلفی: ۱ ، تعداد عناصر ذخیره کننده: ۶

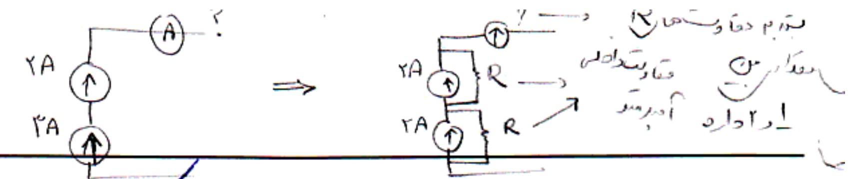
۳- KCL را در کات ست‌های خازنی می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که برحسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۴- KVL را در حلقه‌های اساسی شامل سلف‌ها می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که برحسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۳۰

Subject:

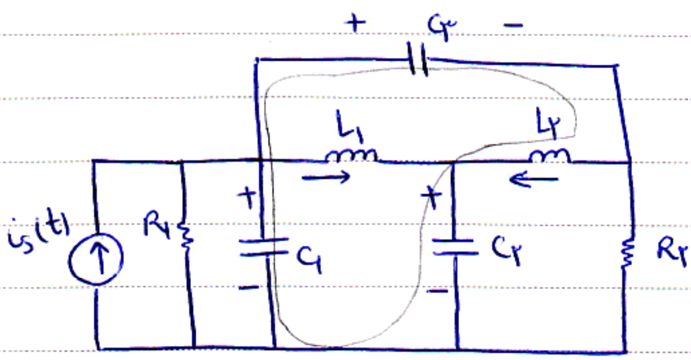
Year. Month. Date. ( )



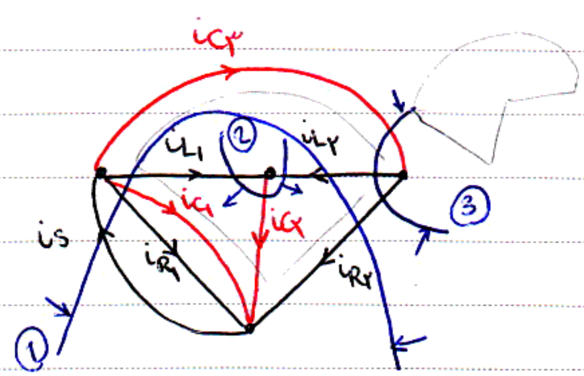
۵- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴ (اگر این متغیر غیرحالت، متغیر یک لینک بود، حلقه اساسی را در آن لینک می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

۶- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴، درصورتیکه این متغیر مربوط به یک شاخه درخت بود، کات ست اساسی را در آن شاخه درخت می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

مثال) معادلات حالت مدار زیر؟



منبع جریان را به عنوان یک شاخه مستقل درنظر می‌گیریم



$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{KCL (1)}: \quad i_{L_1} + i_{L_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} - i_s + i_{R_2} = 0$$

غیرحالت   غیرحالت

$$\boxed{\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1} i_{R_1} - \frac{1}{C_1} i_{R_2} + \frac{1}{C_1} i_s} \quad (1)$$

$$\text{KCL (2)}: \quad C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_1} - i_{L_2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} + \frac{1}{C_2} i_{L_2}}$$

$$\text{KCL}(3):\ C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt} - i_{L_2} - i_{R_2} = 0 \longrightarrow \frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} i_{R_2} \quad (2)$$

غیرحالت

$$\text{KVL}(1):\ L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} v_{C_1} - \frac{1}{L_1} v_{C_2}$$

$$\text{KVL}(2):\ L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} v_{C_1} - \frac{1}{L_2} v_{C_2} - \frac{1}{L_2} v_{C_3}$$

$$\text{KVL}:\ R_1 i_{R_1} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{v_{C_1}}{R_1}$$

حذف غیرحالت : i_{R_1}

$$\text{KVL}:\ R_2 i_{R_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow$$

حذف غیرحالت : i_{R_2}

$$i_{R_2} = \frac{1}{R_2} v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3}$$

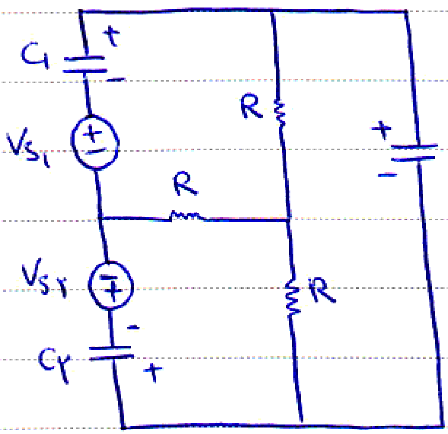
بازنویسی ① و ②

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3} + \frac{1}{C_1} i_s$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} \frac{v_{C_1}}{R_2} - \frac{1}{C_3 R_2} v_{C_3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{v}_{C_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 0 & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3 R_2} & 0 & \frac{-1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} i_s(t)$$

مثال) قبلاً گفتیم اگر متغیرهای حالت بر حسب هم نوشته شوند از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود مانند حلقه خازنی و کات ست



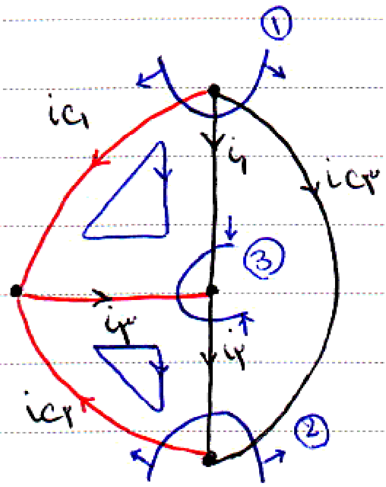
مثلاً: $V_{C_2} + V_{S_2} - V_{S_1} - V_{C_1} + V_{C_3} = 0$

$V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$

یعنی از متغیرهای حالت یکی کم می‌شود. از بین سه متغیر موجود،

۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

$$x = \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \end{bmatrix}$$



غیرحالت غیرحالت

$$KCL(1): \quad C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} + i_1 + i_{C_3} = 0 \longrightarrow \dot{V}_{C_1} = \frac{-1}{C_1} i_1 - \frac{1}{C_1} i_{C_3} \quad ①$$

غیرحالت غیرحالت

$$KCL(2): \quad C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} - i_2 - i_{C_3} = 0 \longrightarrow \dot{V}_{C_2} = \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{1}{C_2} i_{C_3} \quad ②$$

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL: \quad R i_1 - R i_3 - V_{S_1} - V_{C_1} = 0 \longrightarrow i_1 = i_3 + \frac{1}{R} V_{C_1} + \frac{1}{R} V_{S_1} \quad (A)$$

غیرحالت

تنها مربوط به یک شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(3): \quad i_3 + i_1 - i_2 = 0 \longrightarrow i_3 = i_2 - i_1$$

جایگذاری در (A): $2i_1 = i_2 + \frac{1}{R}V_{C_1} + \frac{1}{R}V_{S_1}$

غیرحالت

$$\longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{2}i_2 + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}} \quad (B)$$

i_2 متغیر لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ Ri_2 + V_{C_2} + V_{S_2} + Ri_3 = 0 \longrightarrow i_2 = \underbrace{-i_3}_{i_1 - i_2} - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2}$$

$$2i_2 = i_1 - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2} \longrightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}} \quad (C)$$

جایگذاری (C) در (B):

$$i_1 = \frac{1}{4}i_1 - \frac{1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\frac{3}{4}i_1 = \frac{-1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{-1}{3R}V_{C_2} - \frac{1}{3R}V_{S_2} + \frac{2}{3R}V_{C_1} + \frac{2}{3R}V_{S_1}} \quad (E)$$

با جایگذاری (E) در (C)، i_2 نیز برحسب متغیرهای حالت بیان می‌شود.

$$i_2 = \frac{-1}{6R}V_{C_2} - \frac{1}{6R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{C_1} + \frac{1}{3R}V_{S_1} - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{3R}V_{C_1} - \frac{2}{3R}V_{C_2} - \frac{2}{3R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{S_1}} \quad (F)$$

i_1 و i_2 طبق روابط E و F، خود به حالت تبدیل شدند.

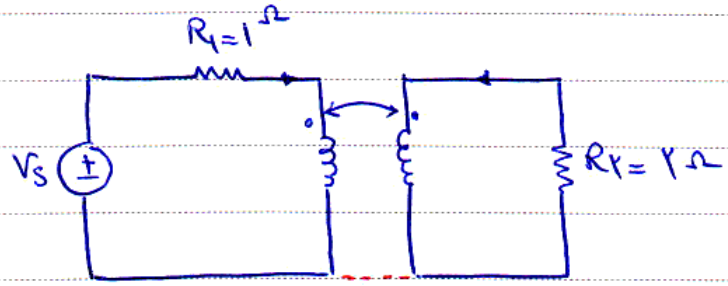
حذف غیرحالت i_{C_3} : $\quad V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$: داشتیم

$i_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_3} \longrightarrow \boxed{i_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_1} - C_3 \dot{v}_{C_2} + C_3 \dot{v}_{S_1} - C_3 \dot{v}_{S_2}}$ ⑨

با جایگذاری 9 در ① و ② و استفاده از سایر روابط نامبرده شده، معادلات حالت به دست می‌آید. ادامه دهید

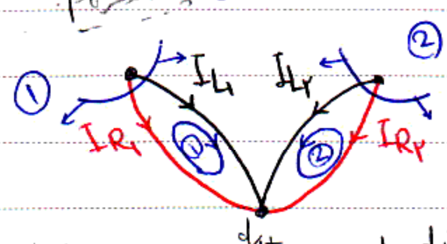
دانشجو!

مثال) $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



خودمان چسبیده در نظر گرفتیم

گراف:



$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \xrightarrow{d/dt} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$. برای هر یک از سلف‌ها حلقه اساسی را می‌نویسیم

$KVL\ (1):\ 1\times \frac{dI_{L_1}}{dt} + 1\,\frac{dI_{L_2}}{dt} - V_S - 1\times I_{R_1} = 0$

غیرحالت

$\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = I_{R_1} + V_S$ ①

غیرحالت

$KVL(2):\ 2\,\frac{dI_{L_2}}{dt} + 1\times \frac{dI_{L_1}}{dt} - 2I_{R_2} = 0 \longrightarrow 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = 2 I_{R_2}$ ②

حذف غیرحالت i_{R_1}: i_{R_1} متغیر یک شاخه درخت است، کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه را می‌نویسیم.

$KCL(1):\ I_{L_1} + I_{R_1} = 0 \longrightarrow I_{R_1} = -I_{L_1}$ Ⓐ

حذف غیرحالت I_{R_2} : متغیر یک شاخه در حلقه است ، کات ست اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KCL(2): \quad I_{L_2} + I_{R_2} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{R_2} = -I_{L_2}} \quad (B)$$

جایگذاری (A) در (1) و (B) در (2):

$$\begin{cases} \dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = -I_{L_1} + V_s \longrightarrow \dot{I}_{L_1} = -I_{L_1} - \dot{I}_{L_2} + V_s & (3) \\ 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = -2I_{L_2} & (4) \end{cases}$$

جایگذاری (3) در (4):

$$2\dot{I}_{L_2} - I_{L_1} - \dot{I}_{L_2} + V_s = -2I_{L_2} \longrightarrow \boxed{\dot{I}_{L_2} = I_{L_1} - 2I_{L_2} - V_s} \quad (5)$$

جایگذاری (5) در (3):

$$\dot{I}_{L_1} = -I_{L_1} - I_{L_1} + 2I_{L_2} + V_s + V_s$$

$$\boxed{\dot{I}_{L_1} = -2I_{L_1} + 2I_{L_2} + 2V_s} \quad (6)$$

از (5) و (6):

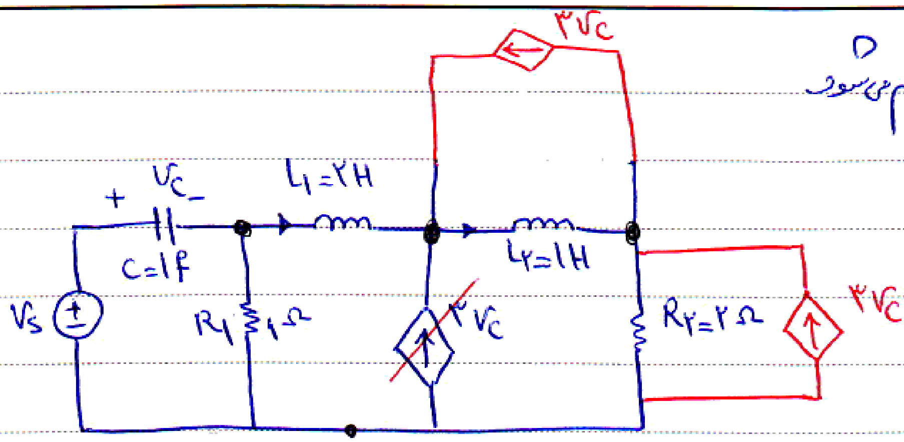
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} V_s$$

نکته) در شرایطی که حلقه خازنی و کات ست سلفی داشته باشیم به دلیل اینکه متغیرهای حالت به هم وابسته می‌شوند، از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود.

حتی منابع وابسته نیز علاوه بر شرایط فوق، ممکن است متغیرهای حالت را به هم وابسته کند، در این صورت

بازهم از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود

مثال):



تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی ۳ است. به نظر می‌رسد ۳ متغیر حالت داشته باشیم ولی اگر دقت کنیم، مشاهده می‌کنیم که

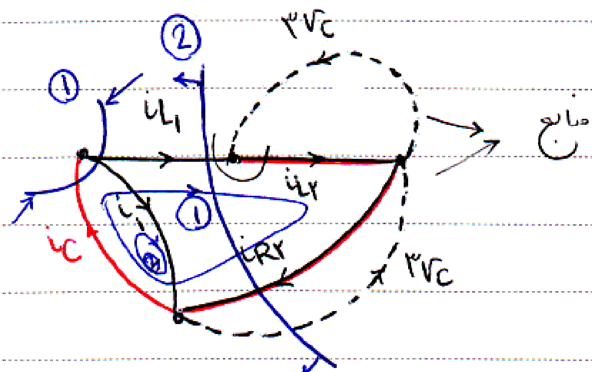
KCL : $3V_C = i_{L_2} - i_{L_1}$

یعنی یکی از متغیرهای حالت برحسب بقیه بیان می‌شود، در نتیجه ۲ متغیر حالت داریم. از ۳ متغیر موجود، ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم

$$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ V_C \end{bmatrix}$$

حال متغیرهای حالت را بدست می‌آوریم:

گراف:



غیرحالت

KCL (1) : $C\frac{dV_C}{dt} - i_1 - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \dot{V}_C = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_1$ ①

KVL (1) : $L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$

غیرحالت

$L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_2} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$ ②

غیرحالت

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر لینک است، حلقه اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ R_1 i_1 - V_s + V_C = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{-1}{R_1}V_C + \frac{1}{R_1}V_s} \quad (A)$$

حذف غیرحالت i_{R_2} : i_{R_2} متغیر شاخه درخت است. کات‌ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(2):\ i_{R_2} - i_{L_1} - 3V_C = 0 \longrightarrow i_{R_2} = i_{L_1} + 3V_C \quad (B)$$

حذف غیرحالت i_{L_2} :

داشتیم: $i_{L_2} = i_{L_1} + 3V_C \longrightarrow \boxed{\dot i_{L_2} = \dot i_{L_1} + 3\dot V_C}$ (C)

جایگذاری (A)، (B) و (C) در (1) و (2)

$$\boxed{\dot V_C = \frac{1}{C} i_{L_1} - \frac{1}{R_1 C} V_C + \frac{1}{CR_1} V_s} \quad (3)$$

$$L_1 \dot i_{L_1} + L_2 \dot i_{L_1} + 3L_2 \dot V_C + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_C - V_s + V_C = 0$$

$$(L_1 + L_2)\dot i_{L_1} + \underbrace{\frac{3L_2}{C} i_{L_1} - \frac{3L_2}{R_1 C} V_C + \frac{3L_2}{R_1 C} V_s}_{3L_2 \dot V_C} + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_C - V_s + V_C = 0$$

$$\boxed{(L_1 + L_2)\dot i_{L_1} + \left(\frac{3L_2}{C} + R_2\right) i_{L_1} + \left(1 + 3R_2 - \frac{3L_2}{R_1 C}\right)V_C + V_s\left(\frac{3L_2}{R_1 C} - 1\right)V_s = 0}$$

عددگذاری :

$$\boxed{\dot V_C = i_{L_1} - V_C + V_s}$$

$$3\dot i_{L_1} + 5 i_{L_1} + 4V_C + 2V_s = 0 \longrightarrow \boxed{\dot i_{L_1} = -\frac{5}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3}V_C - \frac{2}{3}V_s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} v_s$$

نکته) درصورت لزوم می‌توان منابع را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر گرفت، در این صورت سعی می‌شود منابع ولتاژ جزء شاخه‌های درخت و منابع جریان جزء لینک‌ها باشند.

فصل ۱۳ : تبدیلات لاپلاس

از این روش برای تبدیل معادلات خطی و تغییرناپذیر با زمان استفاده می‌شود.

ابتدا مروری بر روابط لاپلاس :

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad \mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos\beta t\right] = \frac{s}{s^2+\beta^2} \qquad \mathcal{L}\left[\sin\beta t\right] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(n)}(t)\right] = s^n \qquad \mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3$$

* در بسیاری از مواقع، معکوس گیری از لاپلاس و یا لاپلاس گیری از توابع از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مروری بر خواص :

۱)

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}f(t)\right] = F(s-\alpha)$$

مثال)

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(3t)\right] = ?$$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos 3t\right] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \qquad (۲$$

مثال) $L[t^2 e^{3t}] = ?$ $\quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) \qquad (۳$$

$2 = 2 \times (1) \rightarrow L\{\delta(t)\}$

حکم ضربه دارد.

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f(0^-) - \dots - s f(0^-) - f(0^-) \qquad (۴$$

مشتقات ضربه $\quad L[\delta^{(n)}(t)] = s^n$

نکته: باید هنگام استفاده از قاعده مشتق‌گیری، ضربه‌های ناشی از $f(0^-)$ ظاهر شود را فراموش نشود.

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

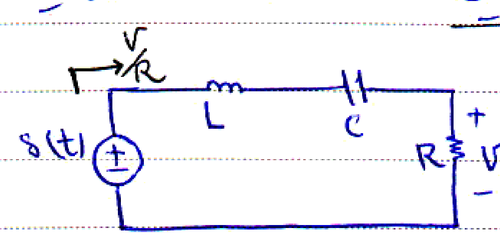
قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

شرایط اولیه صفر

یادآوری: پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

مثال) در مدار زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید. (تابع تبدیل سیستم؟)



پاسخ ضربه ← لب

شرایط اولیه صفر

هدف بدست آوردن v است.

$$\delta(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\right] + \frac{1}{C}\int\frac{v}{R}\,dt + \cancel{v_c(0)} + v$$

$$\delta(t) = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\int v\,dt + v \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 = \frac{L}{R}\left[sV(s) - \cancel{v(0^-)}\right] + \frac{1}{RCs}V(s) + V(s)$$

$$1 = V(s)\left[\frac{Ls}{R} + \frac{1}{RCs} + 1\right]$$

$$1 = V(s)\left[\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{Rsc}\right] \longrightarrow V(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + 1 + RCs} \Rightarrow V(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

* برای بدست آوردن پاسخ در حوزه زمان باید معکوس تبدیل لاپلاس را انجام داد.

بسط به کسرهای جزئی

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad m \leq n$$

ریشه‌های صورت $\quad P(s) = 0 \xrightarrow{\text{صفرها}} z_1, z_2, \dots, z_m$

ریشه‌های مخرج $\quad Q(s) = 0 \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} p_1, p_2, \dots, p_n$

۱- قطب‌ها حقیقی و ساده

$$Q(s) = (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)$$

$$F(s) = \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{(s-p_j)} \qquad K_j = (s-p_j)F(s)\Big|_{s=p_j}$$

مثال:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_۲=(S+۲)F(S)\Big|_{S=-۲}=\frac{۲}{S+۱}\Big|_{S=-۲}=-۲$$

$$f(t)=\left[۲e^{-t}-۲e^{-۲t}\right]u(t)$$

۲- قطب‌ها حقیقی ولی تکراری:

$$Q(s)=(s-P_۱)^{n_۱}(s-P_۲)^{n_۲}(s-P_۳)^{n_۳}\cdots(s-P_r)^{n_r}$$

$$F(S)=\frac{K_{۱۱}}{(S-P_۱)}+\frac{K_{۱۲}}{(S-P_۱)^۲}+\cdots+\frac{K_{۱n_۱}}{(S-P_۱)^{n_۱}}+$$

$$\frac{K_{۲۱}}{(S-P_۲)}+\frac{K_{۲۲}}{(S-P_۲)^۲}+\cdots+\frac{K_{۲n_۲}}{(S-P_۲)^{n_۲}}+$$

$$\vdots$$

$$\frac{K_{r۱}}{(S-P_r)}+\frac{K_{r۲}}{(S-P_r)^۲}+\cdots+\frac{K_{rn_r}}{(S-P_r)^{n_r}}$$

$$k_{in_i}=(S-P_i)^{n_i}F(S)\Big|_{S=P_i}$$

$$k_{in_{i-۱}}=\frac{d}{dS}\left[(S-P_i)^{n_i}F(S)\right]\Big|_{S=P_i}$$

$$k_{in_{i-۲}}=\frac{۱}{۲!}\frac{d^۲}{dS^۲}\left[(S-P_i)^{n_i}F(S)\right]\Big|_{S=P_i}$$

$$k_{in_{i-۳}}=\frac{۱}{۳!}\frac{d^۳}{dS^۳}\left[(S-P_i)^{n_i}F(S)\right]\Big|_{S=P_i}$$

$$\vdots$$

مثال:

$$F(S)=\frac{۱}{(S+۱)^۳S^۲}$$

$$= \frac{k_{11}}{(s+1)} + \frac{k_{12}}{(s+1)^2} + \frac{k_{13}}{(s+1)^3} + \frac{k_{21}}{s} + \frac{k_{22}}{s^2}$$

$$k_{13} = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_{11} = \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{s^3}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{3}{s^4}\Big|_{s=-1} = 3$$

$$k_{22} = \left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = 1$$

$$k_{21} = \frac{d}{ds}\left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]\Big|_{s=0} = \frac{-3}{(s+1)^4}\Big|_{s=0} = -3$$

$$f(t) = \left[3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + t - 3\right]u(t)$$

۳ـ قطب‌های مزدوج:

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$$F(s) = \frac{k_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{k_2}{s-(\alpha-j\beta)}$$

$$k_1 = |k| \angle \theta_k$$

تمرین) نشان دهید k_1 و k_2 مزدوج همند؟

$$k_2 = |k| \angle -\theta_k \qquad F(s) = \frac{k}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{k^*}{(s-(\alpha-j\beta))}$$

$$f(t) = k e^{(\alpha+j\beta)t} + k^* e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$f(t) = |k| e^{j\theta_k} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + |k| e^{-j\theta_k} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$$

$$f(t)=|K|\,e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta_K)}+e^{-j(\beta t+\theta_K)}\right]$$

$$\boxed{f(t)=2|K|\,e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_K)}$$

مثال)

$$F(s)=\frac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)} \qquad P:\ -2+2j\ ,\ -2-2j\ ,\ -1$$

$$F(s)=\frac{K}{(s-(-2+2j))}+\frac{K^*}{(s-(-2-2j))}+\frac{K_1}{s+1}$$

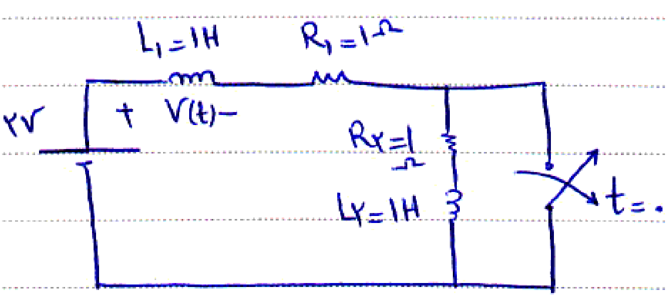
$$K=(s-(-2+2j))\,F(s)\Big|_{s=-2+2j}=\frac{(-2+2j)^2+3(-2+2j)+7}{(-2+2j+2+2j)(-2+2j+1)}=\frac{j}{4}=\frac{1}{4}\angle 90$$

$$\begin{cases}|K|=\frac{1}{4}\\ \theta_K=90\end{cases}$$

$$K_1=(s+1)\,F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s^2+3s+7}{s^2+4s+8}\Big|_{s=-1}=1$$

$$\longrightarrow f(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t+90)+e^{-t}\right]u(t)$$

مثال) در مدار زیر با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس، $v(t)$ را بدست آورید.



توضیحی در مورد مدارهای کلیددار:

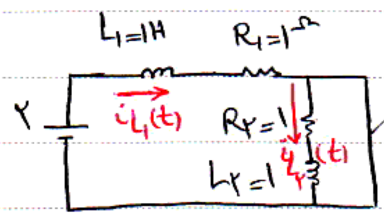
اگر در لحظه $t=t_0$ کلید تغییر وضعیت دهد، آنالیز را به دو مرحله زیر انجام می‌دهیم:

۱) $t \le t_0$ فرض می‌شود که مدار در وضعیت پایدار خود قرار دارد، یعنی در رژیم DC، سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها اتصال باز فرض می‌شوند. و اگر در رژیم سینوسی باشیم از فازور استفاده می‌کنیم.

۲) $t = t_0$ در معادلات بخش قبل با قرار دادن $t = t_0$ شرایط اولیه را برای مرحله بعد به دست می‌آوریم.

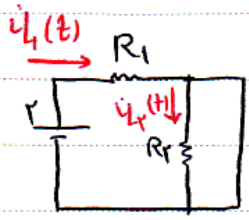
۳) $t > t_0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر مدار را به دست می‌آوریم.

حل مثال) $t \le t_0$



اتصال کوتاه

حالت پایدار

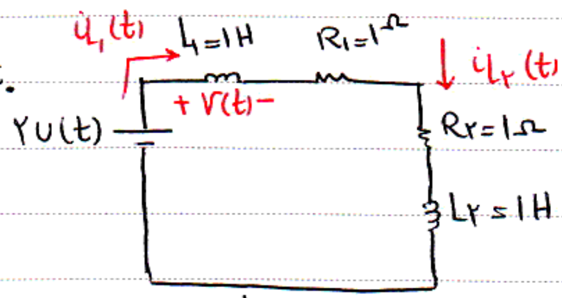


$$i_{L_1}(t) = \frac{2}{R_1} = \frac{2}{1} = 2A \quad , \quad i_{L_2}(t) = 0 \quad , \quad V(t) = 0$$

اتصال کوتاه

$$t = 0 \longrightarrow \begin{cases} i_{L_1}(0) = 2 \\ i_{L_2}(0) = 0 \end{cases}$$

$t > t_0$



$$KVL: \quad 2u(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + R_1 i_{L_1}(t) + R_2 i_{L_2}(t) + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$2u(t) = \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) + \frac{di_{L_2}(t)}{dt}$$

نکته: اگرچه $i_{L_1}(t) = i_{L_2}(t)$ اما چون شرایط اولیه آن‌ها فرق می‌کند از مساوی قرار دادن آن‌ها قبل از انتقال به حوزه لاپلاس پرهیز می‌کنیم.

به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$\frac{2}{s} = s I_{L_1}(s) - \underbrace{i_{L_1}(0^-)}_{2} + I_{L_1}(s) + I_{L_2}(s) + s I_{L_2}(s) - \underbrace{i_{L_2}(0^-)}_{0}$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$\frac{2}{s} = I_L(s)(2s+2) - 2 \longrightarrow \frac{2}{s} + 2 = 2 I_L(s)(s+1)$$

$$\frac{2(s+1)}{s} = 2(s+1) I_L(s) \Rightarrow I_L(s) = \frac{1}{s}$$

نکته: تا رسیدن به جواب نهایی، استفاده از حوزه لاپلاس را ادامه می‌دهیم.

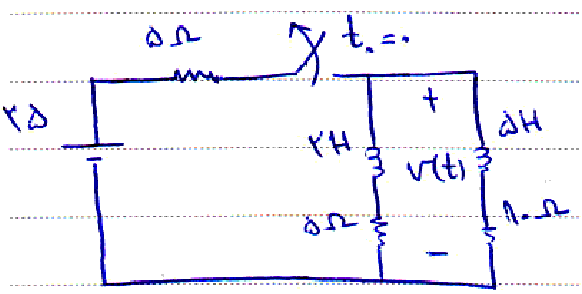
$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = u(t) \\ v(t) = L_1 \dfrac{di_{L_1}(t)}{dt} = 1 \times \dfrac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t) \end{cases} \quad \times$$ اشتباه

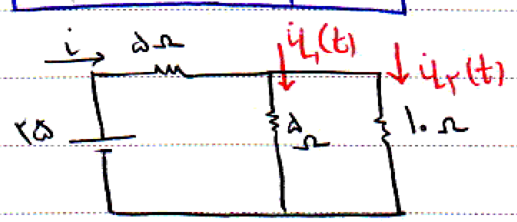
حالا:

$$v(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \xrightarrow{L} V(s) = L_1\left(s I_L(s) - i_{L_1}(0)\right) = 1 \times \left(s \times \frac{1}{s} - 2\right) = -1$$

$$V(s) = -1 \Rightarrow \boxed{v(t) = -\delta(t)}$$

مثال) مدار زیر را با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس تحلیل کرده و $v(t)$ را به دست آورید.



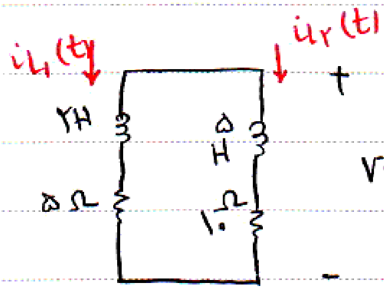


$t < 0$

$$i = \frac{25}{5+(5\|10)} = 3A \qquad i_{L_1}(t) = 3\times\frac{10}{15} = 2A \qquad i_{L_2}(t) = 3\times\frac{5}{15} = 1A$$

$$i_{L_1}(0^-) = 2A \;,\; i_{L_2}(0^-) = 1A \qquad t=0$$

$$t>0$$



$$KVL: \; 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + 5 i_{L_1}(t) - 10 i_{L_2}(t) - 5\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} 2\left[sI_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + 5I_{L_1}(s) - 10 I_{L_2}(s) - 5\left[sI_{L_2}(s) - i_{L_2}(0^-)\right] = 0$$

$$i_{L_2}(0^-) = 2 \;,\; i_{L_2}(0^-) = 1 \;,\; I_{L_2}(s) = -I_{L_1}(s)$$

$$2sI_{L_1}(s) - 4 + 5I_{L_1}(s) + 10 I_{L_1}(s) + 5sI_{L_1}(s) + 5 = 0$$

$$I_{L_1}(s)\,(7s+15) = -1 \Rightarrow I_{L_1}(s) = \frac{-1}{7s+15} = \frac{-1/7}{s+\frac{15}{7}}$$

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = -\frac{1}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \\ i_{L_2}(t) = \frac{1}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \end{cases} \qquad i_{L_1}(0^+) = -\frac{1}{7} \;,\; i_{L_2}(0^+) = \frac{1}{7}$$

دقت کنید جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی داشته، یعنی در ولتاژ دو سر آن‌ها ایجاد ضربه خواهد شد.

$$v(t) = 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + 5 i_{L_1}(t)$$

دقت کنید که از همین $i_{L_1}(t)$ مستقیما استفاده نمی‌کنیم، به جوری لاپلاس می‌گیریم:

$$V(s)=2\left[sI_{L_1}(s)-i_{L_1}(0^-)\right]+5I_{L_1}(s)$$

$$V(s)=(2s+5)I_{L_1}(s)-4 \longrightarrow V(s)=\frac{-(2s+5)}{7s+15}-4=\frac{-2s-5-28s-60}{7s+15}$$

$$V(s)=\frac{-30s-65}{7s+15}$$

حال لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$F(s)=\frac{-30}{7s+15}=\frac{-30/7}{s+15/7}\xrightarrow{L^{-1}}$$

$$\frac{-30}{7}e^{-15/7\,t}u(t)=f(t)$$

طبق خواص L^{-1} داشتیم:

$$sF(s)-f(0^-)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{df(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow sF(s)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{df(t)}{dt}+f(0^-)$$

$$\frac{-30s}{7s+15}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{-30}{7}e^{-15/7\,t}u(t)\right)-\frac{30}{7}e^{-\frac{15}{7}\times 0}u(0^-)=$$

$$\frac{-30}{7}\times\left(-\frac{15}{7}\right)e^{-15/7\,t}u(t)-\underbrace{\frac{30}{7}e^{-15/7\,t}\delta(t)}_{-\frac{30}{7}\delta(t)}$$

$* \; f(t)\,\delta(t-T_0)=f(T_0)\,\delta(t-T_0)$

$$\begin{cases}-\dfrac{30s}{7s+15}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{450}{49}e^{-15/7\,t}u(t)-\dfrac{30}{7}\delta(t)\\[2ex]\dfrac{-65}{7s+15}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{-65}{7}e^{-15/7\,t}u(t)\end{cases}$$

$$v(t)=\frac{450}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{65}{7}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)$$

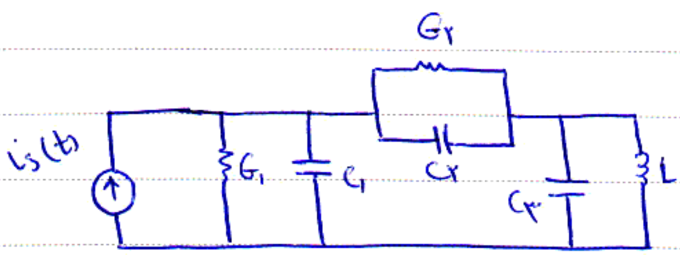
$$v(t)=-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{5}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)\Rightarrow$$ $v(t)$ دارای ضربه است.

تنظیم کردن معادلات جبر خطی:

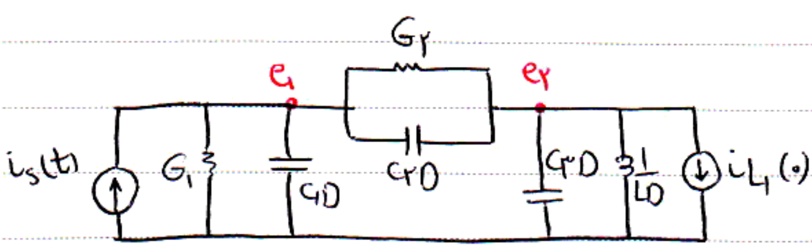
هدف انتقال معادلات حوزه‌ی انتگرال - دیفرانسیل به حوزه‌ی لاپلاس است.

با یک مثال، مسأله را بررسی می‌کنیم.

مثال) معادلات انتگرال - دیفرانسیل مدار زیر را در حوزه‌ی انتگرال - دیفرانسیل به روش گره به دست آورید.



$v_{C_1}(0)$, $v_{C_2}(0)$, $v_{C_3}(0)$ و $i_L(0)$



حوزه‌ی انتگرال - دیفرانسیل

از روش ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1D+C_2D & -G_2-C_2D \\ -G_2-C_2D & G_2+C_2D+C_3D+\frac{1}{LD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_L(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Df(t)\xrightarrow{L} sF(s)-f(0^-) \\ \frac{1}{D}f(t)\xrightarrow{L}\frac{F(s)}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_1 e_1 + G_2 e_1 + C_1 D e_1 + C_2 D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + C_2 D e_2 + C_3 D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (G_1+G_2) e_1 + (C_1+C_2) D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + (C_2+C_3) D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس :

$$(G_1+G_2)E_1(s) + (C_1+C_2)\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] - G_2 E_2(s)$$

$$-C_2\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] = I_s(s)$$

$$① \rightarrow \boxed{E_1(s)\left(G_1+G_2+C_1 s+C_2 s\right) + E_2(s)\left(-G_2-C_2 s\right) = I_s(s) + C_1 \overset{V_{C_1}(0^-)}{e_1(0^-)} + \overbrace{C_2\left(e_1(0^-)-e_2(0^-)\right)}^{V_{C_2}(0^-)}}$$

$$-G_2 E_1(s) - C_2\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] + G_2 E_2(s) + (C_2+C_3)\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] + \frac{1}{Ls}E_2(s)$$

$$= -\frac{i_{L_1}(0)}{s}$$

$$② \boxed{E_1(s)\left(-G_2-C_2 s\right) + E_2(s)\left(G_2+C_2 s+C_3 s+\frac{1}{Ls}\right) = -\frac{i_L(0)}{s} - \overset{V_{C_1}(0^-)}{C_2 e_1(0^-)} + \overset{V_{C_2}(0^-)}{C_2 e_2(0^-)} + \underset{V_{C_3}(0^-)}{C_3 e_2(0^-)}}$$

معادلات را به صورت ماتریسی می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1 s+C_2 s & -G_2-C_2 s \\ -G_2-C_2 s & G_2+C_2 s+C_3 s+\frac{1}{Ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} =$$

بردار شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} I_s(s) \\ \\ -\frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 e_1(0) + C_2\left(e_1(0) - e_2(0)\right) \\ C_1 v_{C_1}(0) + C_2 v_{C_2}(0) \\ -C_2 e_1(0) + C_2 e_2(0) + C_3 e_2(0) \\ -C_2 v_{C_1}(0) + C_2 v_{C_2}(0) + C_3 v_{C_3}(0) \end{bmatrix}$$

اما از تشکیل معادلات فوق، راه حل مستقیمی به صورت زیر وجود دارد:

حوزه ی انتگرال دیفرانسیل

بردار شرایط اولیه

روش گره $\quad Y_n . e = i_s \xrightarrow{L} Y_n(s)\ E(s) = I_s(s) + \alpha$

روش مش $\quad Z_m . i = e_s \xrightarrow{L} Z_m(s) . I(s) = E_s(s) + \alpha$

روش حلقه اساسی $\quad Z_B . i = e_s \xrightarrow{L} Z_B(s) . I(s) = E_s(s) + \alpha$

روش کات ست اساسی $\quad Y_Q . e = i_s \xrightarrow{L} Y_Q(s) . E(s) = I_s(s) + \alpha$

در روش های گره و کات ست اساسی، بردار شرایط اولیه شامل ولتاژ اولیه خازن ها است.

در روش های مش و حلقه اساسی، بردار شرایط اولیه شامل جریان اولیه سلف ها است.

$\frac{1}{D} \to \frac{1}{s}$

$D \to s$

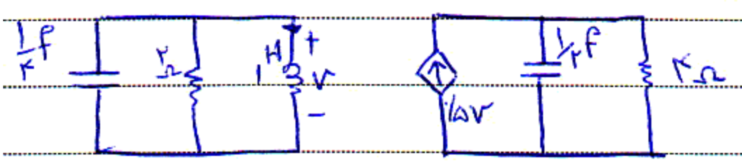
برای تبدیل معادلات انتگرال دیفرانسیل به حوزه لاپلاس در طرف چپ معادلات اول است D ها را به S تبدیل می کنیم و هر جا D داریم (نه $\frac{1}{D}$) به جای علامت و هر جا ضرب، شرایط اولیه را در بردار α جمع می کنیم.

فرض کنید معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل یک مدار در [illegible] به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 2D+\frac{1}{D} & -D & 3 \\ -D & 3D+2 & D \\ 3 & D & 5D+\frac{1}{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

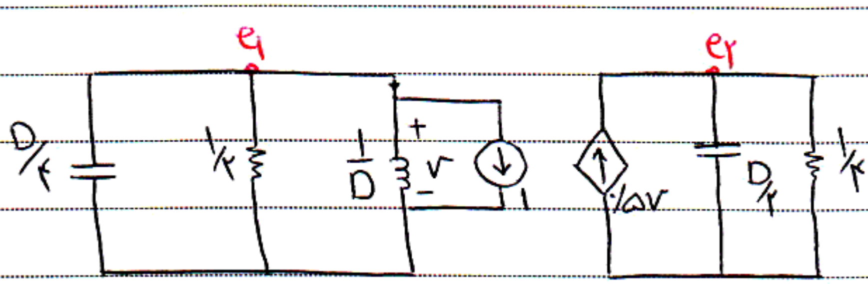
$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{s} & -s & 3 \\ -s & 3s+2 & s \\ 3 & s & 5s+\frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+3i_2(0^-)+i_3(0^-) \\ i_2(0^-)+5i_3(0^-) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

مثال) در مدار زیر معادله v را بیابید. (در حوزه لاپلاس)



$i_L(0^-)=1A \qquad V_{C_1}(0^-)=2V \qquad V_{C_2}(0^-)=1V$

ابتدا معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل را در یکی از روش‌ها مثلاً گره می‌نویسیم.



$$\begin{bmatrix} \frac{D}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{D} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{D}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0.5e_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{۴}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{s} & ۰ \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۴}+\frac{s}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱(s) \\ E_۲(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/s \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} e_۱(۰^-) \\ \frac{۱}{۲} e_۲(۰^-) \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow V_{C_۱}(۰^-)=۲ \\ \rightarrow V_{C_۲}(۰^-)=۱ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^۲+۲s+۴}{۴s} & ۰ \\ -۱/۲ & \frac{۲s+۱}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱(s) \\ E_۲(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-۲}{۲s} \\ ۱/۲ \end{bmatrix}$$

$$E_۱(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-۲}{۲s} & ۰ \\ ۱/۲ & \frac{۲s+۱}{۴} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{s^۲+۲s+۴}{۴s} & ۰ \\ -۱/۲ & \frac{۲s+۱}{۴} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{(s-۲)(۲s+۱)}{۸s}}{\dfrac{(s^۲+۲s+۴)(۲s+۱)}{۱۶s}}$$

$$E_۱(s) = \frac{۲s-۴}{s^۲+۲s+۴}$$

$$P_۱, P_۲ = -۱ \pm j\sqrt{۳} \qquad E_۱(s) = \frac{K}{(s-(-۱+j\sqrt{۳}))} + \frac{K^*}{(s-(-۱-j\sqrt{۳}))}$$

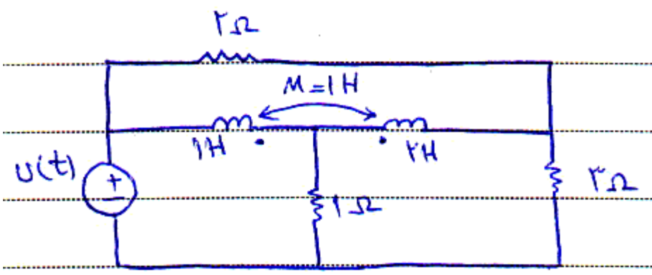
$$K = (s-(-۱+j\sqrt{۳}))\, E_۱(s)\Big|_{s=-۱+j\sqrt{۳}} = \frac{۲s-۴}{s+۱+j\sqrt{۳}}\Big|_{s=-۱+j\sqrt{۳}} = \frac{-۲+۲j\sqrt{۳}-۴}{۲j\sqrt{۳}} = \frac{-۳+j\sqrt{۳}}{j\sqrt{۳}}$$

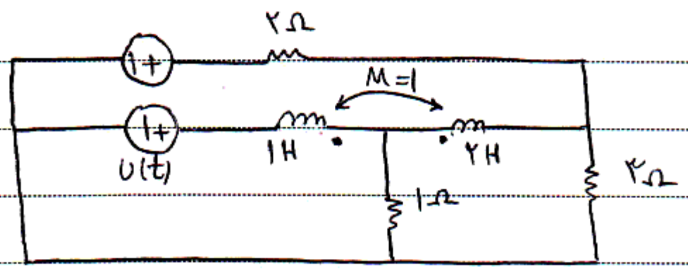
$$= \frac{۲\sqrt{۳}\angle ۱۵۰}{\sqrt{۳}\angle ۹۰} = ۲\angle ۶۰ \left\langle \begin{matrix} |K| = ۲ \\ \angle K = ۶۰ \end{matrix} \right.$$

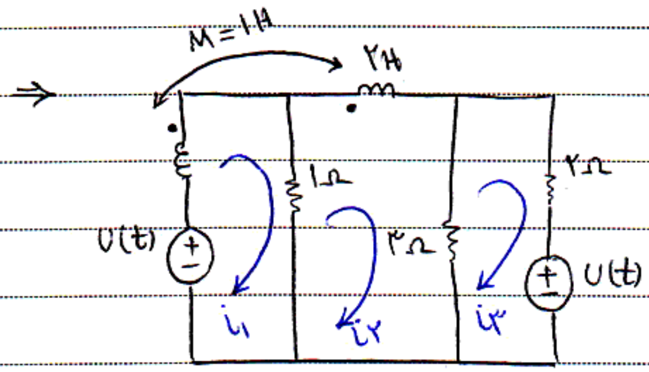
$$v(t) = ۲|K| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$$

$$= ۴e^{-t} \cos(\sqrt{۳}\, t + ۶۰)$$

مثال) با استفاده از روش لاپلاس، مدار زیر را آنالیز کنید؟

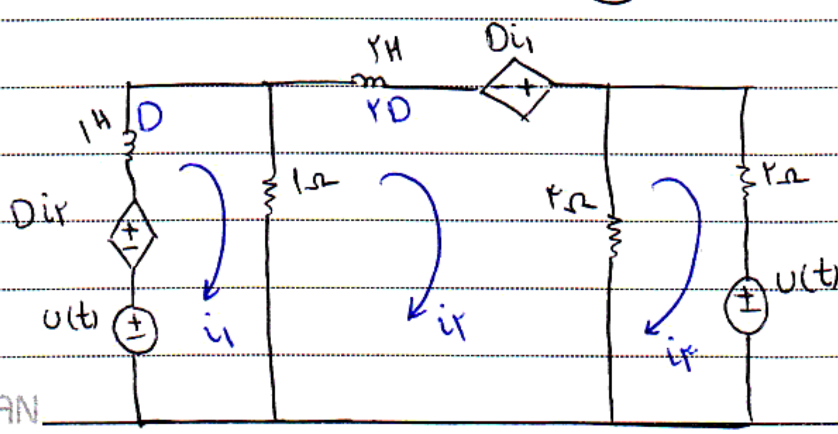


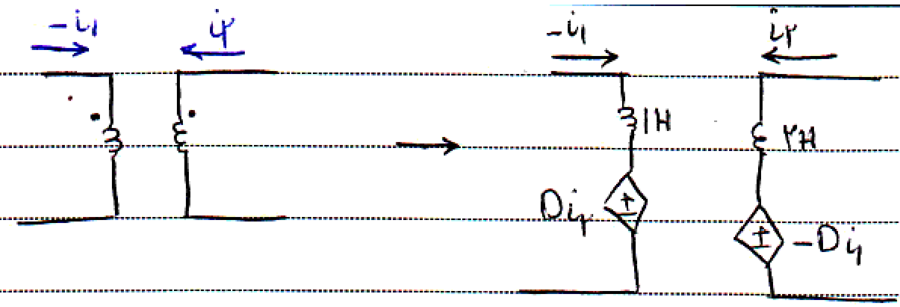




روش مش را استفاده می کنیم.

برای استفاده از روش جایگزین از مدار معادل سلف های تزویج شده استفاده می کنیم.





$$\begin{bmatrix} D+1 & -1-D & 0 \\ -1-D & 2D+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)+\cancel{Di_2} \\ \cancel{Di_1} \\ -v(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1-s & 0 \\ -1-s & 2s+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \overset{i_{L_1}(0^-)}{i_1(0^-)} - \overset{i_{L_2}(0^-)}{i_2(0^-)} \\ 0 - i_1(0^-) + 2i_2(0^-) \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

معادلات حالت و تبدیلات لاپلاس:

در معادلات حالت داریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

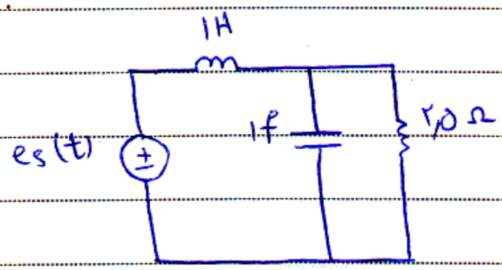
$$X(s)(sI - A) = BU(s) + x(0) \rightarrow \boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0)\right]}$$

پاسخ حالت صفر $\quad X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$

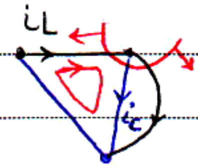
پاسخ ورودی صفر $\quad X(s) = (sI - A)^{-1} x(0^-)$

* پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

مثال) با استفاده از معادلات حالت پاسخ پله و پاسخ ضربه مدار زیر را بدست آورید؟



گراف:



$$KCL: \quad C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{2.5}-i_L=0$$

$$\dot{v}_C=-\frac{1}{2.5}v_C+i_L$$

$$KVL: \quad L\frac{di_L}{dt}+v_C-e_s=0 \Rightarrow \dot{i}_L=-v_C+e_s$$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{-1}{2.5} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}e_s$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-1}{2.5} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2.5s+1}{2.5} & -1\\ 1 & s\end{bmatrix}$$

ماتریس واحد

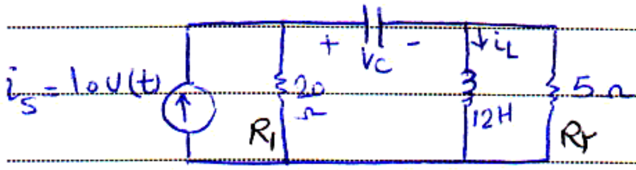
$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\frac{2.5s^2+s+2.5}{2.5}}\begin{bmatrix}s & 1\\ -1 & \frac{2.5s+1}{2.5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2.5s}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{2.5}{2.5s^2+s+2.5}\\ \frac{-2.5}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{6.25}{(2.5s+1)(2.5s^2+s+2.5)}\end{bmatrix}$$

پاسخ ضربه $\quad e_s(t)=\delta(t)\longrightarrow E_s(s)=1$

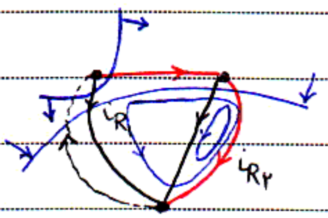
$$x(S)=\begin{bmatrix}V_C(S)\\ I_L(S)\end{bmatrix}=\left[(SI-A)^{-1}\right]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\times 1$$

(پاسخ حالت صفر)

مثال) در مدار زیر معادلات حالت را بدست آورید سپس پاسخ ورودی را با شرایط اولیه صفر محاسبه کنید؟



گراف:



$$KCL:\ 0/1\,\frac{dV_C}{dt}+i_{R_1}-10u(t)=0 \longrightarrow \frac{dV_C}{dt}=-10\,i_{R_1}+10\,i_s \quad ①$$

غیرحالت

$$KVL:\ 0/2\,\frac{di_L}{dt}=5\,i_{R_2} \longrightarrow \frac{di_L}{dt}=25\,i_{R_2} \quad ②$$

غیرحالت

$$KVL:\ 20\,i_{R_1}-5\,i_{R_2}-V_C=0 \Longrightarrow i_{R_1}=\frac{1}{4}i_{R_2}+\frac{1}{20}V_C \quad Ⓐ$$

رفع غیرحالت i_{R_1} :

A در ① :

غیرحالت

$$\dot{V_C}=\frac{-10}{4}\,i_{R_2}-\frac{1}{2}V_C+10\,i_s \quad ③$$

رفع غیرحالت i_{R_2} :

$$KCL:\ i_{R_2}+i_L+i_{R_1}-i_s=0$$

$$i_{R_2}=-i_L-i_{R_1}+i_s$$

از معادله A در KCL استفاده می‌کنیم:

$$i_{R_2}=-i_L-\frac{1}{4}i_{R_2}-\frac{1}{20}V_C+i_s$$

TABAN

$$\frac{5}{4} i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{20} v_C + i_s$$

$$\boxed{i_{R_2} = -\frac{4}{5} i_L - \frac{1}{25} v_C + \frac{4}{5} i_s} \quad (B)$$

(B) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم تا معادلات حالت تولید شود

(B) در (2):

$$\boxed{\dot{i}_L = -20\, i_L - v_C + 20\, i_s} \quad \text{معادله حالت}$$

(B) در (3):

$$\dot{v}_C = 2 i_L + 0.1\, v_C - 2 i_s - \frac{1}{2} v_C + 10\, i_s$$

$$\boxed{\dot{v}_C = 2 i_L - 0.4\, v_C + 8\, i_s} \quad \text{معادله حالت}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 \\ 2 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} i_s$$

محاسبه روابط i_L و v_C:

یک راه استفاده از معادلات انتگرال دیفرانسیل در هر یک از ۴ روش موجود با استفاده از معادلات لاپلاس، یک

راه استفاده از خود لاپلاس با استفاده از ماتریس A است.

داشتیم: $X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0^-)\right]$

با شرایط اولیه صفر:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s) = \begin{bmatrix} s+20 & 1 \\ -2 & s+0.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} \overbrace{\left(10 \times \frac{1}{s}\right)}^{U(s)}$$

$$X(S)=\frac{1}{(s+۲۰)(s+۰/۴)+۲}\begin{bmatrix} s+۰/۴ & -۱ \\ ۲ & s+۲۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۲۰۰}{s} \\ \frac{۸۰}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(S)=\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{۲۰۰s}{s(s^۲+۲۰/۴s+۱۰)} \\ \dfrac{۸۰s+۲۰۰۰}{s(s^۲+۲۰/۴s+۱۰)} \end{bmatrix}$$

$$I_L(S)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+۰/۵۰۵)}+\frac{K_3}{(s+۱۹/۸۹۵)}$$

$$K_1=\left.\frac{۲۰۰s}{s^۲+۲۰/۴s+۱۰}\right|_{s=۰}=۰$$

$$K_2=\left.\frac{۲۰۰s}{s(s+۱۹/۸۹۵)}\right|_{s=-۰/۵۰۵}=۱۰/۳۱ \qquad K_3=\left.\frac{۲۰۰s}{s(s+۰/۵۰۵)}\right|_{s=-۱۹/۸۹۵}=-۱۰/۳۱$$

$$\boxed{i_L(t)=۱۰/۳۱\left(e^{-۰/۵۰۵t}-e^{-۱۹/۸۹۵t}\right)u(t)}$$

[illegible]

فصل ۱۴: فرکانس‌های طبیعی

سیستمی مانند سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$x(t) = ۳\cos ۳t + e^{-۲t}$ → ☐ → $y(t) = \sin ۳t + \cos(۵t + ۳۰) + ۰/۲ e^{-۲t} + ۳e^{-۴t}$

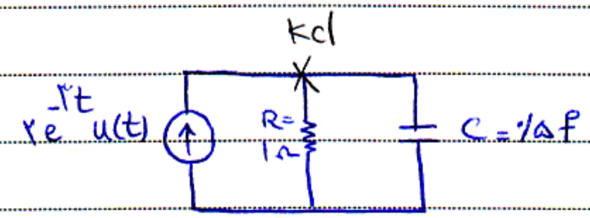
فرکانس‌های $۳t$ و $۲t$ که در خروجی ظاهر شده‌اند معلوم است ناشی از ورودی می‌باشند. اما فرکانس‌های $۵t$ و $۴t$ ناشی از وضعیت سیستم در خروجی ظاهر شده است و ارتباطی با ورودی ندارد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق:

نکته: فرکانس‌های طبیعی در پاسخ ورودی صفر سیستم ظاهر می‌شوند.

یک راه این است که معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسیم. ریشه‌های معادله مشخصه همان فرکانس‌های طبیعی هستند.

مثال:



$v_C(۰) = ۲V$

می‌خواهیم پاسخ کامل v_C را به دست آوریم؟

پاسخ کامل v_C:

$$۲e^{-۳t} = ۰/۵ \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{۱}$$

معادله دیفرانسیل مدار:

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt}+2v_c=4e^{-3t}}$$

پاسخ عمومی $\quad v_c(t)=Ke^{-2t}$

پاسخ خصوصی $\quad v_c(t)=Ae^{-3t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} -3Ae^{-3t}+2Ae^{-3t}=4e^{-3t} \longrightarrow \boxed{A=-4}$

کامل $\quad v_c(t)=\underset{\text{عمومی}}{v_c(t)}+\underset{\text{خصوصی}}{v_c(t)} \longrightarrow v_c(t)=Ke^{-2t}-4e^{-3t}$

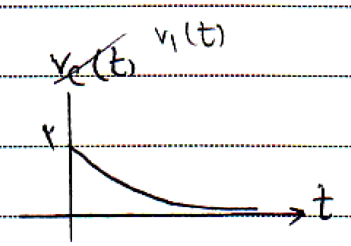
$$v_c(0)=2 \longrightarrow K-4=2 \longrightarrow K=6$$

$$\boxed{v_c(t)=\left(6e^{-2t}-4e^{-3t}\right)u(t)}$$

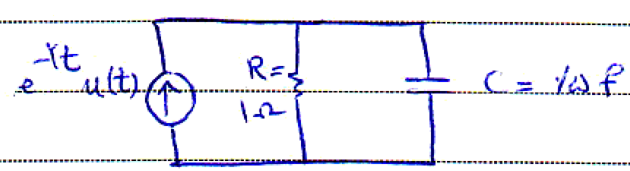
با توجه به جواب مسئله $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است اما $s=-3$ نباید فرکانس طبیعی باشد شاید نمایی از ورودی باشد. در حالیکه اگر معادله مشخصه را بررسی کنیم:

$$\frac{dv_c}{dt}+2v_c=0 \longrightarrow s+2=0 \longrightarrow \boxed{s=-2}$$

پس فقط $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است



حال فرض کنید ورودی به صورت زیر باشد و مدار را با فرکانس طبیعی خاص اش تحریک کنیم:

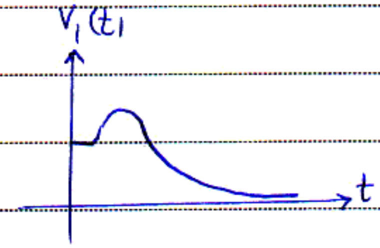


$v_c(0)=2V$

پاسخ کامل v_C،

$$e^{-2t} = 0.5\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{1}$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 2e^{-2t}$$



پاسخ عمومی $v_C(t) = kte^{-2t}$

پاسخ خصوصی $v_C(t) = Ae^{-2t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \longrightarrow \boxed{A=1}$

کامل $v_C(t) = \underset{\text{عمومی}}{v_C(t)} + \underset{\text{خصوصی}}{v_C(t)} \Rightarrow v_C(t) = kte^{-2t} + e^{-2t} \longrightarrow v_C(t) = e^{-2t}(1+kt)$

مثال) معادله مشخصه یک مدار به صورت زیر است؟

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4 i_L + 3 = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ s = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

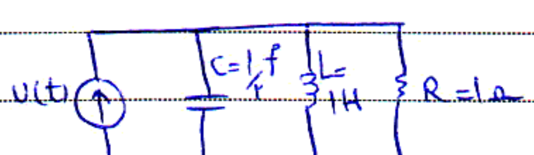
تا اینجا حل شده است.

انواع نوسان‌های طبیعی ← نوسان‌های طبیعی حذف نشده

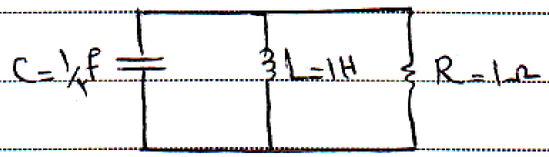
انواع نوسان‌های طبیعی ← نوسان‌های طبیعی حذف شده

یعنی ممکن است یک یا تعدادی از نوسان‌های طبیعی حذف شده در ولتاژ یا جریان یک شاخه ظاهر نشوند.

مثال) نوسان‌های طبیعی ولتاژ خازن را به دست آورید؟



منبع را می‌کشیم تا مدار در شرایط ورودی صفر قرار گیرد.



$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0 \longrightarrow$$ معادله مدار

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$0.5\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0$$ معادله مشخصه

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4j^2}}{2} \; \begin{cases} -1+j \\ -1-j \end{cases}$$ فرکانس های طبیعی

می‌توان نشان داد که مشخصه‌های تابع تبدیل در حوزه لاپلاس همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

راه دوم: $$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2\int v_C\,dt + 2v_C + 2i_L(0) = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} sV_C(s) - V_C(0) + \frac{2}{s}V_C(s) + 2V_C(s) + \frac{2i_L(0)}{s} = 0$$

$$V_C(s)\left(s + \frac{2}{s} + 2\right) = V_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)$$

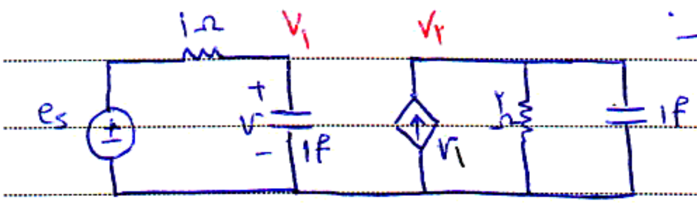
$$V_C(s) = \frac{V_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)}{s + \frac{2}{s} + 2}$$

$$V_C(S)=\frac{SV_C(0^-)-2i_L(0^-)}{S^2+2S+2}$$

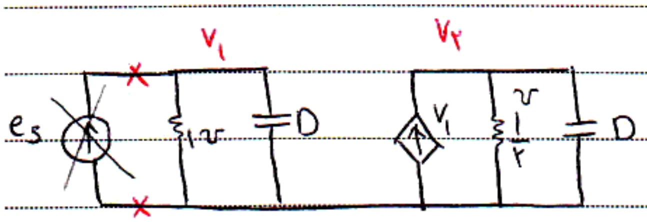
۱– قطب‌ها $\begin{cases} S=-1+j \\ S=-1-j \end{cases}$

یعنی:

مثال ۲) فرکانس‌های طبیعی V_1 و V_2 را بدست آورید؟



در حالت ورودی صفر، مدار را از راه گره تحلیل می‌کنیم.



$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ 0\;-1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{array}{c} V_{C_1}(0^-) \\ \begin{bmatrix} V_1(0^-) \\ V_2(0^-) \end{bmatrix} \\ V_{C_2}(0^-) \end{array}$$

$$V_1(S)=\frac{\begin{vmatrix} V_1(0^-) & 0 \\ V_2(0^-) & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{V_1(0^-)(S+\frac{1}{2})}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(S)=\frac{V_1(0^-)}{S+1} \xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی}} \boxed{S=-1}$$

$$V_2(S)=\frac{\begin{vmatrix} S+1 & V_1(0^-) \\ -1 & V_2(0^-) \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} \Longrightarrow V_2(S)=\frac{V_2(0^-)(S+1)+V_1(0^-)}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

فرکانس‌های طبیعی $\begin{cases} S=-1 \\ S=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$s=-1$ و $s=-1/2$ فرکانس طبیعی های کل مدار ولی $s=-1/2$ در تبدیل V_1 ظاهر نشده.

مثال) در مثال قبل پاسخ به ورودی های زیر را بدست آورید؟

$$\begin{cases} e_s(t)=u(t) \\ e_s(t)=e^{-t}\,u(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه : $V_{C_1}(0^-)=V_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overset{1}{V_{C_1}(0^-)}+E_S \\ \overset{1}{V_{C_2}(0^-)} \end{bmatrix}$$

$$V_1(S)=\frac{\begin{vmatrix} 1+E_S & 0 \\ 1 & S+1/2 \end{vmatrix}}{(S+1)(S+1/2)}=\frac{(1+E_S)(S+1/2)}{(S+1)(S+1/2)}=\frac{1+E_S}{(S+1)}$$

$$V_2(S)=\frac{\begin{vmatrix} S+1 & 1+E_S \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(S+1)(S+1/2)}=\frac{S+2+E_S}{(S+1)(S+1/2)}$$

الف) $E_S=\frac{1}{S}$

$$V_1(S)=\frac{1+1/S}{S+1}=\frac{\frac{S+1}{S}}{S+1}=\frac{1}{S}$$

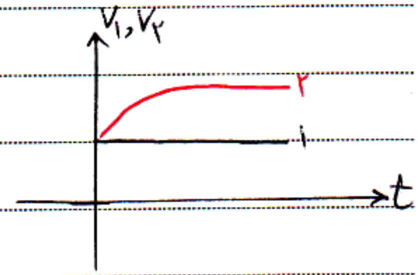
$$\Rightarrow \boxed{V_1(t)=u(t)}$$

$$V_2(S)=\frac{S+2+1/S}{(S+1)(S+1/2)}=\frac{S+1}{S\quad(S+1/2)}=\frac{K_1}{S}+\frac{K_2}{S+1/2}$$

$$K_1 = \frac{s+1}{s+1/2}\Bigg|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \frac{s+1}{s}\Bigg|_{s=-1/2} = -1$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1/2} \longrightarrow \boxed{V_2(t) = (2 - e^{-1/2\, t})\, u(t)}$$



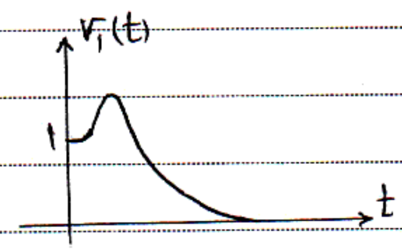
ب: $E_g = \frac{1}{(s+1)}$: این ورودی، فرکانس طبیعی مدار را تحریک می‌کند.

$$V_1(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$V_1(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

$$K_{12} = (s+2)\Big|_{s=-1} = 1 \qquad K_{11} = \frac{d}{ds}\Big[(s+2)\Big]_{s=-1} = 1$$

$$\boxed{V_1(t) = (e^{-t} + t e^{-t})\, u(t)} \Longrightarrow \boxed{V_1(t) = e^{-t}(1+t)\, u(t)}$$



$$V_2(s) = \frac{(s+2) + \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)}$$

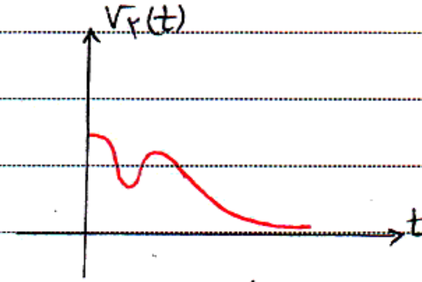
$$V_2(s) = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+1/2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_{12} = \frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\Bigg|_{s=-1} = \frac{1-3+3}{-1/2} = -2$$

$$K_{11} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right]_{s=-1} = \left[\frac{(2s+3)(s+1/2) - s^2 - 3s - 3}{(s+1/2)^2}\right]_{s=-1} = \frac{1\times(-1/2) - 1 + 3 - 3}{1/4} = -6$$

$$K_2 = \left.\frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=-1/2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 3}{\frac{1}{4}} = 7$$

$$v_{C2}(t) = \left(-6e^{-t} - 2te^{-t} + 7e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$



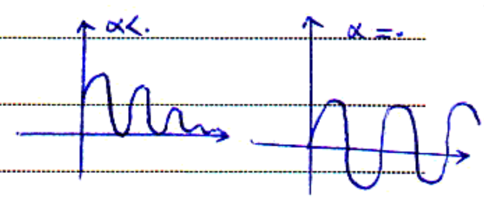
حالت‌های ممکن برای فرکانس‌های طبیعی:

$$f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_3 e^{s_3 t} + \dots$$

۱) اگر حقیقی باشند دارای علامت منفی و اگر مختلط باشند زوج با سمت حقیقی منفی‌اند. فرکانس‌های طبیعی مختلط به صورت نوسانی در جواب ظاهر می‌شوند (به صورت sin و cos)

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$f(t) = e^{(\alpha+j\omega)t} + e^{(\alpha-j\omega)t} = e^{\alpha t}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$



$$f(t) = 2e^{\alpha t}\cos\omega t$$

α: سمت حقیقی (ضریب میرایی)

ω: سمت موهومی فرکانس طبیعی (فرکانس نوسان)

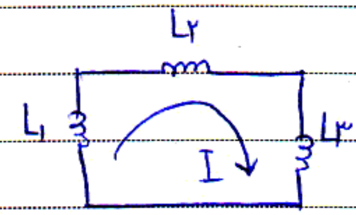
۲) هرگاه، متغیر شبکه مورد نظر جریان یک سلف باشد و این سلف در حلقه‌ای قرار گرفته باشد که این حلقه فقط از تعدادی سلف تشکیل شده، چون سلف‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است جریان ثابت I_0 در آن ایجاد باشد یعنی:

$$\frac{I_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} I_0 e^{0t} u(t)$$

برای هر حلقه سلفی یک فرکانس طبیعی صفر خواهیم داشت.

بنابراین S=0 فرکانس طبیعی جریان سلف خواهد بود.

مثال)



$$KVL:\quad L_1\frac{dI_{L_1}}{dt}+L_2\frac{dI_{L_2}}{dt}+L_3\frac{dI_{L_3}}{dt}=0$$

$$L_1\left(sI_{L_1}(s)-I_{L_1}(0^-)\right)+L_2\left(sI_{L_2}(s)-I_{L_2}(0^-)\right)+L_3\left(sI_{L_3}(s)-I_{L_3}(0^-)\right)=0$$

$$I_{L_1}(s)=I_{L_2}(s)=I_{L_3}(s)\triangleq I_L(s)$$

$$I_L(s)=\overbrace{+\frac{L_1I_{L_1}(0^-)+L_2I_{L_2}(0^-)+L_3I_{L_3}(0^-)}{s(L_1+L_2+L_3)}}^{I_0}=\frac{I_0}{s}$$

اگر S=0 فرکانس طبیعی جریان سلف باشد فرکانس طبیعی ولتاژ سلف نخواهد بود.

$$V_L(t)=L\frac{dI_L(t)}{dt}\longrightarrow V_L(s)=L\left(s\underbrace{I_L(s)}_{\frac{I_0}{s}}-i_L(0^-)\right)$$

۳) هرگاه متغیر شبکه مورد نظر ولتاژ یک خازن باشد و این خازن فقط در کات ستی که از خازن تشکیل شده قرار داشته باشد چون خازن ها ایده آل فرض می شوند معلق است ولتاژ ثابت V_0 در دو سر آن ها باقی بماند

در این صورت ،
$$V(s)=\frac{V_0}{s}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}V_0e^{0t}u(t)$$

$i_C = C\frac{dv}{dt} \xrightarrow{L}$

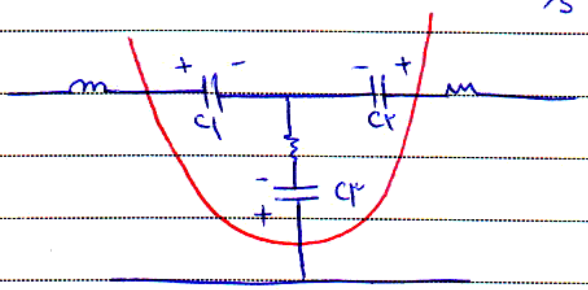
* اگر $S=0$ ورتاس ضربه ولتاژ خازن باشد، ورتاس ضربه جریان خازن خواهد بود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$I_C(S) = C S \underbrace{V_C(S)}_{1/S} - CV_C(0^-) = C\left(1 - V_C(0^-)\right)$$

و $S=0$ ورتاس ضربه ولتاژ خازن خواهد بود.

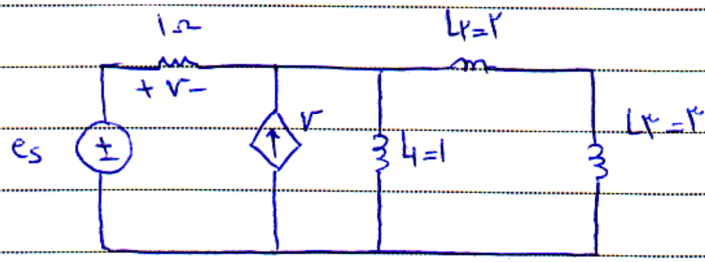


✓ به تعداد حلقه‌های سلفی یا کات‌ست‌های خازنی، ورتاس ضربه صورت داریم

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + C_2\frac{dv_{C_2}}{dt} + C_3\frac{dv_{C_3}}{dt} = 0$$

$$C_1 S V_{C_1}(S) - C_1V_{C_1}(0) + C_2 S V_{C_2}(S) - C_2 V_{C_2}(0^-) + C_3 S V_{C_3}(S) - C_3 V_{C_3}(0^-) = 0$$

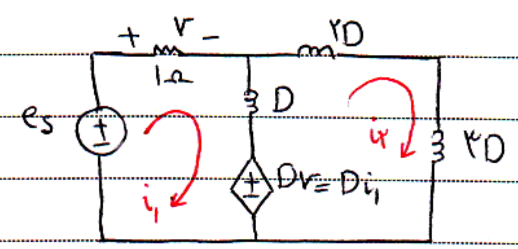
مثال) ورتاس ضربه جریان سلف‌ها را به دست آورید؟

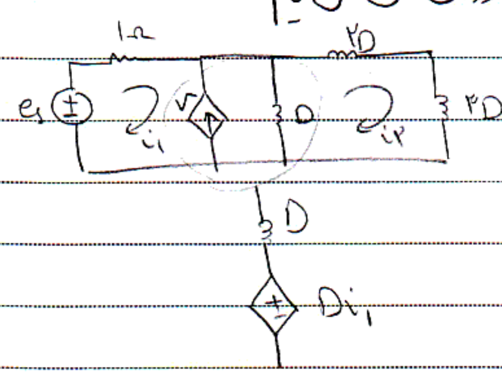


$I_{L_1}(0^-) = 1$

$I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-) = 2$

از روش مش حل می‌کنیم.





$V = 1\times i_1 = i_1$

$$\begin{bmatrix} D+1+D & -D \\ -D-D & 4D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s - \cancel{Di_1} \\ \cancel{Di_1} \end{bmatrix}$$

$I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-) + I_{L_3}(0^-) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2S+1 & -S \\ -2S & 4S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s + 2i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ -2i_1(0^-) + 4i_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2I_{L_1}(0^-) - 2I_{L_2}(0^-) + 4I_{L_3}(0^-) = 10$

$$i_1(0^-) - i_2(0^-) = I_{L_1}(0^-)$$

$$\longrightarrow \quad i_1(0^-) = I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-)$$

$$i_2(0^-) = I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -2s & 6s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Es+5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} Es+5 & -s \\ 10 & 6s \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{6s(Es+5)+10s}{12s^2+6s-2s^2}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{6s(Es+5)+10s}{s(10s+6)}}$$

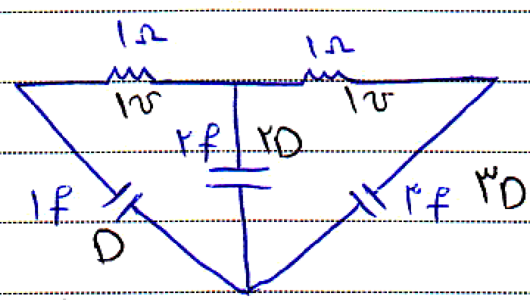
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & Es+5 \\ -2s & 10 \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

$$I_{L_1}(s) = I_1(s) - I_2(s) = \frac{\bigcirc}{s(10s+6)}$$

$$I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

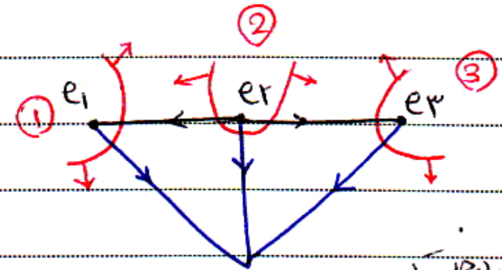
$s=0$ و $s=\frac{-6}{10}$ فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها است.

مثال) فرکانس طبیعی ولتاژ خازن‌ها را بدست آورید.



از روش میانبر طاست استفاده می‌کنیم.

مدار خود در شرایط ورودی صفر است. (ورودی نداریم)



بردار ولتاژ شاخه‌ها در درخت

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2D+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2s+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C_1}(0^-) \\ 2v_{C_2}(0^-) \\ 3v_{C_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

صورت کسر $= A$

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_{C_1}(0^-) & -1 & 0 \\ 2v_{C_2}(0^-) & 2(s+1) & -1 \\ 3v_{C_3}(0^-) & -1 & (3s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2(s+1) & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{vmatrix}} = \frac{v_{C_1}(0^-)\left[2(s+1)(3s+1)-1\right]+\left(2v_{C_2}(0^-)(3s+1)+3v_{C_3}(0^-)\right)}{s+1\left[2(s+1)(3s+1)-1\right]-(-1)\times(-3s-1)}$$

$$= \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-(s+1)-3s-1} = \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-4s-2} = \frac{A}{(2s^2+4s+2)(3s+1)-4s-2} = \frac{A}{6s^3+2s^2+12s^2+4s+6s+2-4s-2}$$

$$= \frac{A}{6s^3+14s^2+6s} = \frac{A}{s(6s^2+14s+6)}$$

$s=0$ ریشه‌ی قطب صفر ولتاژ حاصل از C_1 است یعنی ولتاژ مقدار نهایی این بسته مقدار ثابت خواهد بود.

$$e_1(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_1(s) = \frac{v_{c1}(0^-) + 2v_{c2}(0^-) + 3v_{c3}(0^-)}{6}$$

e۲ و e۳ به عهده خودتان.

فرکانس‌های طبیعی کل مدار = (فرکانس‌های طبیعی موجود در شبکه)

فرکانس‌های طبیعی شبکه، اجتماع ۲ فرکانس‌های طبیعی شاخه‌هایی باشد. ثابت می‌شود برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی شبکه لازم نیست به فرکانس‌های طبیعی ۲ شاخه‌ها را به دست آوریم، زیرا اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان شاخه باشد، فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه هم خواهد بود.

۱) شاخه مقاومت باشد.

$$j_k = I e^{st}$$

$$v_k = R j_k = (RI) e^{st} = v e^{st}$$

۲) شاخه سلف باشد.

$$v_k = L \frac{dj_k}{dt} = L \frac{d}{dt}\left[I e^{st}\right] = (LIs) e^{st} = v e^{st}$$

۳) شاخه خازن باشد.

$$v_k = \frac{1}{C}\int j_k \, dt + v_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_0^t I e^{st} \, dt + v_c(0^-)$$

$$= \left(\frac{I}{C} \times \frac{1}{s}\right) e^{st} + v_c(0^-) = v e^{st} + v_c(0^-) - v$$

به طور مشابه می‌توان اثبات کرد اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه هم خواهد بود.

$S = 0$ ممکن است فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد ولی فرکانس طبیعی جریان همان شاخه نباشد. تحت چه شرایطی؟

و بالعکس. ولتاژ جریان

TABAN

تعمیم: فرکانس های طبیعی غیر صفر هر شبکه خطی و تغییر ناپذیر با زمان همان ریشه های غیر صفر معادله دترمینال $p(s)$

است که $p(s)$ ماتریسی است که در یکی از ۴ روش، معادلات مدار را توصیف می کند

در روش گره: $Y_n(s)E(s)=I_s(s)+\alpha \longrightarrow p(s)=Y_n(s)$

در روش مش: $Z_m(s)I(s)=E_s(s)+\alpha \longrightarrow p(s)=Z_m(s)$

در روش حلقه اساسی: $Z_B(s)I(s)=E_s(s)+\alpha \longrightarrow p(s)=Z_B(s)$

در روش کات ست اساسی: $Y_Q(s)E(s)=I_s(s)+\alpha \longrightarrow p(s)=Y_Q(s)$

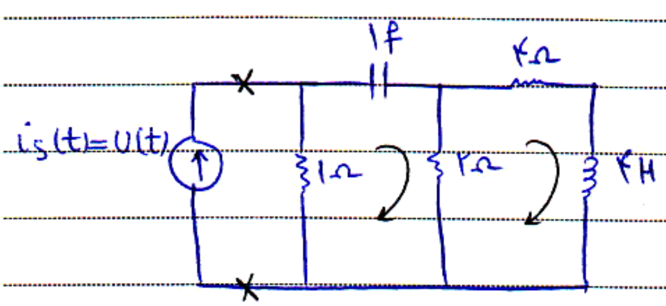
اثبات) مثلاً در روش گره:

$$E(s)=Y_n^{-1}(s)\left(I_s(s)+\alpha\right)$$

$$E(s)=\frac{\text{ماتریس دترمینال کهاد}}{\det(Y_n(s))}\left[I_s(s)+\alpha\right]$$

ریشه های آن فرکانس های طبیعی را می دهد.

مثال) فرکانس های طبیعی شبکه را بدست آورید؟



ورودی را می کشیم دو مش خواهیم

$$Z_m=\begin{bmatrix}\frac{1}{D}+3 & -2\\ -2 & 2+4D+4\end{bmatrix}$$

$$Z_n(s)=\begin{bmatrix}\frac{3s+1}{s} & -2\\ -2 & 4s+6\end{bmatrix}$$

$$\det\left(Z_n(s)\right)=\frac{(3s+1)(4s+6)-4s}{s}=\frac{12s^2+18s+6}{s}=\frac{6(2s^2+3s+1)}{s}$$

$$\left|Z_n(s)\right|=0\ \xrightarrow[\frac{-3\pm 1}{4}]{}\ \begin{cases}s=-\frac{1}{2}\\ s=-1\end{cases}$$

مرتبه‌ی مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی:

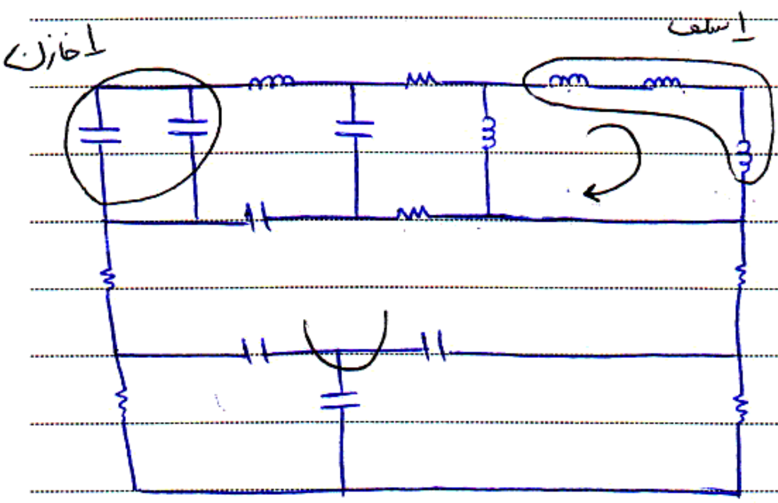
به درجه دترمینان $P(s)$ ($|P(s)|$)، ~~دترمینان~~ مرتبه‌ی مدار می‌گوییم که معادل با:

(تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی) − (تعداد حلقه‌های خازنی) − (تعداد کات‌ست‌های سلفی)

که برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی نیز هست. تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر:

(مرتبه مدار) − (تعداد کات‌ست‌های خازنی) − (تعداد حلقه‌های سلفی)

مثال)



تعداد فرکانس‌های طبیعی = ۹

تعداد فرکانس‌های غیر صفر = ۷

تعداد عناصر ذخیره‌کننده = ۹

تعداد حلقه‌های خازنی = ۰

کات‌ست سلفی = ۰

$\rightarrow$ مرتبه مدار ۹

تعداد کات‌ست خازنی = ۱

حلقه سلفی = ۱

فرکانس‌های طبیعی و معادلات حالت :

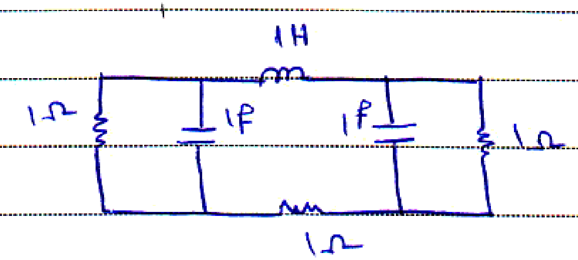
در معادلات حالت داشتیم : $X(S) = (SI - A)^{-1}\left[BU(S) + x(0^-)\right]$

در فرکانس‌های طبیعی $\longrightarrow$ ورودی صفر $\qquad X(S) = (SI - A)^{-1} x(0^-)$

روش دیگر به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی : $|SI - A| = 0$

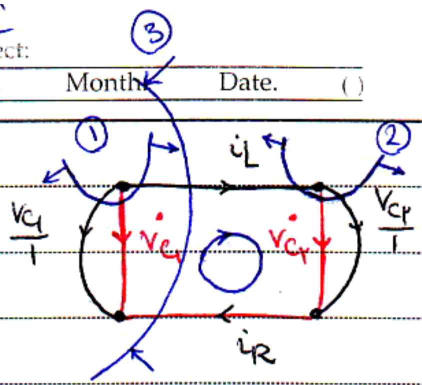
ضمناً مرتبه مدار معادل با درجه $(SI - A)$ است یعنی درجه $|SI - A|$ در نشان

مثال) با استفاده از معادلات حالت، فرکانس‌های طبیعی را پیدا کنید؟



وقتی از طریق معادلات حالت می‌خواهیم فرکانس‌های طبیعی را پیدا کنیم به ماتریس B نیاز نیست، یعنی حتی اگر مدار دارای ورودی باشد، می‌توانیم ورودی‌ها را صفر کنیم. منابع وابسته را نمی‌توانیم صفر کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$KCL: \dot{v}_{C_1} + v_{C} + i_L = 0 \longrightarrow \dot{v}_{C_1} = -v_{C_1} - i_L$

$KCL: \dot{v}_{C_2} + v_{C_2} - i_L = 0 \longrightarrow \dot{v}_{C_2} = -v_{C_2} + i_L$

$KVL: \dot{i}_L + v_{C_2} + i_R \times 1 - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \dot{i}_L = v_{C_1} - v_{C_2} - i_R$

$KCL: i_R - i_L = 0 \longrightarrow i_R = i_L \qquad \dot{i}_L = v_{C_1} - v_{C_2} - i_L$

حال می‌توانیم ماتریس A در بین (SI − A) را اعمال کنیم

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+1 & 0 & 1 \\ 0 & S+1 & -1 \\ -1 & 1 & S+1 \end{bmatrix}$$

$\det(SI - A) = 0 \longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی

$$|SI - A| = (S+1)\left[(S+1)^2 + 1\right] + (S+1)$$

$$= (S+1)\left[S^2 + 2S + 2\right] + (S+1) = (S+1)(S^2 + 2S + 3) \quad \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -1 + j\sqrt{2} \\ S_3 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\, j}{2}$$

معادلات انتگرالی ۳ و حالت صحیح دائم

فصل ۱۵: توابع شبکه

به طور کلی تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(s)=\frac{\mathcal{L}[\text{پاسخ حالت صفر}]}{\mathcal{L}[\text{منبع ورودی}]}$$

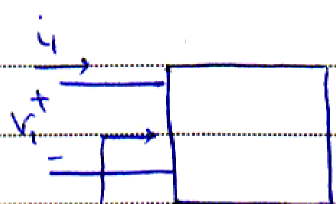
معمول است که در بررسی تابع شبکه، منبع ورودی را تابع ضربه در نظر می‌گیرند

$$H(s)=\frac{\mathcal{L}[h(t)]}{\mathcal{L}[\delta(t)]}=\mathcal{L}[h(t)]$$

$h(t)$ پاسخ ضربه می‌باشد

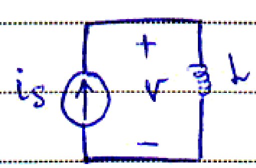
انواع تابع شبکه:

۱) امپدانس نقطه تحریک: (Z_s)



$$H(s)=Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$$

مثال:

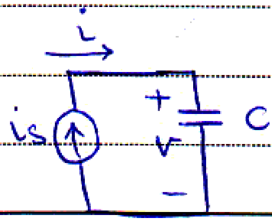


$$v=L\frac{di_s}{dt}\xrightarrow{\mathcal{L}}=Ls\,I_s(s)-\cancel{L\,i_L(0^-)}$$

گفتیم که تابع شبکه در حالت صفر محاسبه می‌شود

$$\Rightarrow Z_s=\frac{V(s)}{I(s)}=Ls$$

مثال:

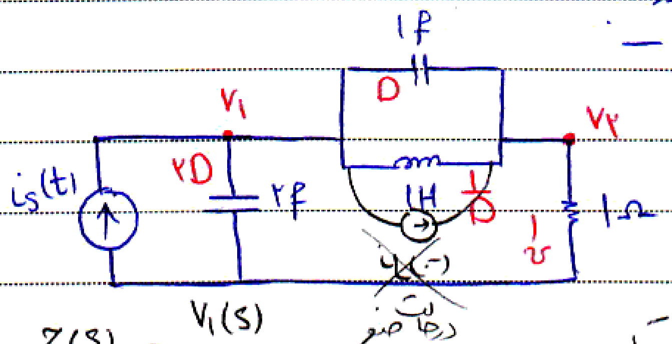


$$v=\frac{1}{C}\int_0^t i_s\,dt+\cancel{v_C(0^-)}$$

TABAN

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s)\longrightarrow Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

مثال) در مدار زیر امپدانس نقطه تحریک را بدست آورید؟



$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}$$

از روش گره حل می‌کنیم. هدف بدست آوردن $Z(s)$ است.

شرایط اولیه نداریم. مستقیماً معادلات حوزه لاپلاس را می‌نویسیم. (D را به s تبدیل می‌کنیم.)

$$\begin{bmatrix}2s+s+\frac{1}{s} & -(s+\frac{1}{s})\\ -(s+\frac{1}{s}) & s+\frac{1}{s}+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s\\ 0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}2V_1(0^-)+\dots\\ \dots\end{bmatrix}}_{\text{بردار شرایط اولیه}\ =\ 0}$$

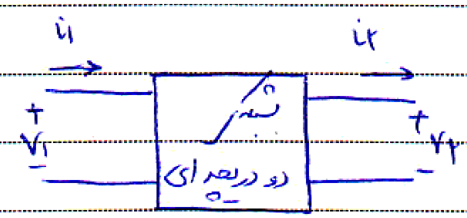
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3s+1 & -\frac{s^2+1}{s}\\ -\frac{s^2+1}{s} & \frac{s^2+s+1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s\\ 0\end{bmatrix}$$

$$V_1=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I_s}{\frac{(3s^2+1)(s^2+s+1)}{s^2}-\frac{(s^2+1)^2}{s^2}}\Rightarrow Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}=\frac{s(s^2+s+1)}{(3s^2+1)(s^2+s+1)-(s^2+1)^2}$$

تعریف توابع شبکه با استفاده از دو قطبی‌ها

برخی توابع شبکه را با استفاده از شبکه‌های دو دریچه‌ای تعریف می‌کنیم

۱) امپدانس نقطه تحریک: (وقتی تحریک از دریچه ۱ اعمال شود)



$$H(S)=Z(S)=\frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

۲) امپدانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{I_1(S)}$$

۳) ادمیتانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{V_1(S)}$$

۴) نسبت انتقال ولتاژ:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{V_1(S)}$$

۵) نسبت انتقال جریان:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{I_1(S)}$$

گاهاً از ترکیب این توابع استفاده می‌کنیم

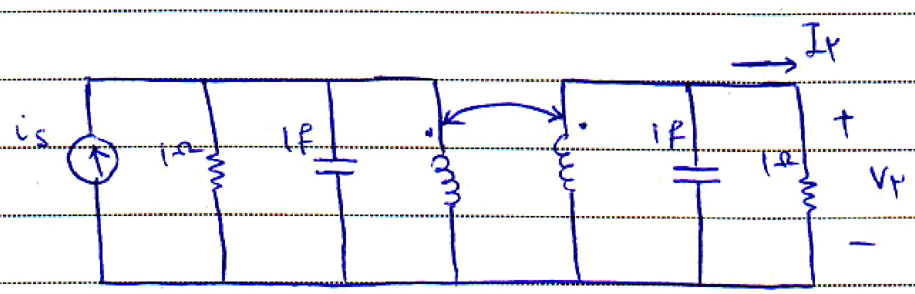
مثلاً

$$\frac{\left(\frac{I_1}{V_2}\right)}{\frac{V_1}{V_2}}=\frac{I_1}{V_1}$$

ادمیتانس نقطه تحریک

مثال) در مدار زیر توابع شبکه زیر را محاسبه کنید.

الف) امپدانس نقطه تحریک $\frac{V_1}{I_1}$ ب) امپدانس انتقالی $\frac{V_2}{I_1}$ ج) نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2}{V_1}$



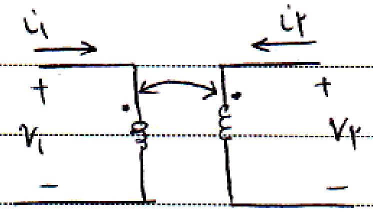
$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

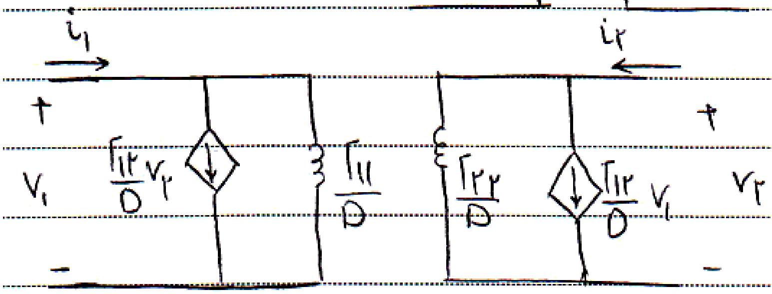
با توجه به ماهیت المان‌ها که به طور موازی اند از یکی از روش‌های گره یا کات ست استفاده می‌کنیم

[illegible] 2

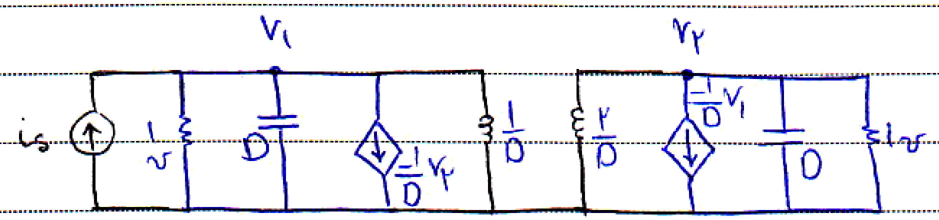
$$L=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = L^{-1} = \frac{۱}{۲-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$





$\Rightarrow$



$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{s}+1 & 0 \\ 0 & \frac{۲}{s}+s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s+\frac{1}{D}V_۲ \\ \frac{1}{D}V_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^۲+s+1}{s} & \frac{-1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{s^۲+s+۲}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)} \qquad H_1(s)=\frac{V_۲(s)}{I_s(s)} \qquad H_۲(s)=\frac{V_۲(s)}{V_1(s)}=\frac{H_1(s)}{Z(s)}$$

$$V_1(s)=\frac{\frac{s^۲+s+1}{s}\,I(s)}{\frac{(s^۲+s+1)(s^۲+s+۲)}{s^۲}-\frac{1}{s^۲}} \Rightarrow Z(s)=\frac{s(s^۲+s+1)}{(s^۲+s+1)(s^۲+s+۲)-1}$$

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{s} I_g(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2} - \frac{1}{s^2}} \Rightarrow H_1(s) = \frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

تشکیلات قطب و صفر:

این یک روش از تابع تبدیل توابع و رسم آن در صفحه مختلط فرم می‌کند

تابع $H(S)$ را در نظر می‌گیرید فرم کلی تابع تبدیل :

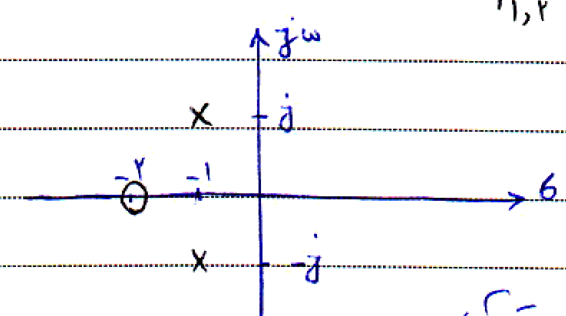
$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} \qquad m \leqslant s \qquad m < n$$

در صفحه مختلط (σ و $j\omega$) صفرهای تابع تبدیل را با علامت O و قطب‌ها را با X نمایش می‌دهیم

بر شکل به دست آمده تشکیلات قطب و صفر می‌گوییم

در تابع تبدیل زیر دقت کنید:

$$H(S) = \frac{K(S+2)}{S^2+2S+2} \quad \begin{cases} z_1 = -2 \\ P_{1,2} = -1 \pm j \end{cases}$$



از روی شکل می‌توانیم به تابع تبدیل برسیم ولی K را نمی‌توانیم به دست آوریم

برای به دست آوردن K باید در یک نقطه مشخص مقدار تابع تبدیل را داشته باشیم

فرض کنید $H(j0)=2$

$$H(j\omega)=\frac{K(2+j\omega)}{2-\omega^2+2j\omega}$$

$$H(j0)=\frac{2K}{2}=2 \longrightarrow K=2 \quad\Rightarrow\quad H(S)=\frac{2(S+2)}{S^2+2S+2}$$

تابع شبکه در حالت دائمی سینوسی و ورودی Sin , Cos است

$$X(S)\longrightarrow \boxed{H(S)} \longrightarrow Y(S)$$

ورودی به صورت ضربه باشد

$$H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)} \qquad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)|\angle X(j\omega)\times|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)||H(j\omega)|\angle\left(\angle X(j\omega)+\angle H(j\omega)\right)$$

در حوزه دائمی سینوسی و

$$\cancel{X(j\omega)}\ x(t)=A\cos(\omega t+\phi)\longrightarrow X(j\omega)=A\angle\phi$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=A|H(j\omega)|\angle\phi+\angle H(j\omega)$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال به رژیم سینوسی}} Y(t)=A|H(j\omega)|\cos(\omega t+\phi+\angle H(j\omega))$$

مثال) فرض کنید

$$y(t)=?\Longleftarrow x(t)=\cos t\,u(t)\ ,\quad H(S)=\frac{S^2+4}{(S+2)(S^2+3S+4)}$$

راه حل سخت و

$$X(S)=\frac{S}{S^2+1}$$

$$Y(S)=X(S)H(S)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

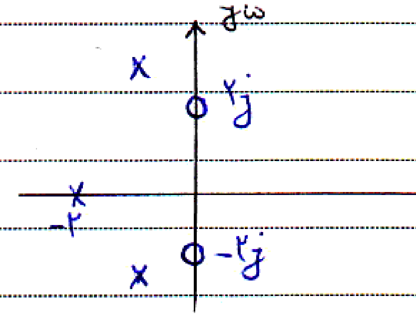
$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta)\Rightarrow X(j\omega)=A\angle\theta$$

راه حل آسان: چون ورودی در فرم سینوسی تک فرکانس است از تحلیل سینوسی حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{4-1}{(2+j1)(4-1+3j\omega)} = \frac{3}{(2+j)(3+3j\omega)} = \frac{1}{(2+j)(1+j)}$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+3j} = \frac{1}{\sqrt{10}\angle 71.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle -71.5^\circ$$



$$X(j1) = 1\angle 0$$

$$Y(j1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \angle\left(0 + (-71.5)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle -71.5^\circ$$

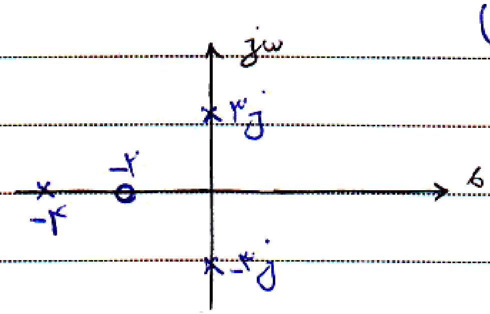
$$\to y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(t - 71.5^\circ)$$

تمرین) اگر $x(t) = \cos 2t \to y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{(2+j\omega)(4-\omega^2+3j\omega)}$$

$$H(j2) = 0 \longrightarrow Y(j2) = 0 \longrightarrow y(t) = 0$$

تمرین) $x(t) = \cos 3t \qquad H(s) = \frac{s+2}{(s^2+9)(s+4)} \to y(t) = ?$



$$H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(9-\omega^2)(4+j\omega)} \longrightarrow H(j3) = \infty$$

$$\longrightarrow Y(j3) = \infty \longrightarrow y(t) = \infty$$

✓ اگر صفر از تابع تبدیل روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس صفر است

✓ اگر قطبی روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس بی‌نهایت است.

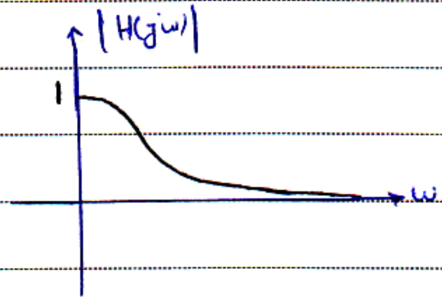
این حالت به معنای تحریک هم‌زمان در فرکانس طبیعی است.

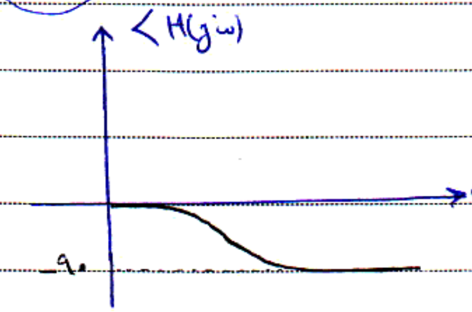
پاسخ فرکانسی: $H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$

به اطلاعات $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$، پاسخ فرکانسی می‌گوییم.

مثال) $H(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{\sqrt{1}\angle 0}{\sqrt{1+\omega^2}\angle tg^{-1}\omega} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{|H(j\omega)|} \angle \underbrace{-tg^{-1}\omega}_{\angle H(j\omega)}$$





در این درس به دنبال $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ دقیق، اگر مستقیم نیستیم بلکه این کار را به صورت تقریبی عمل می‌کنیم:

۱) نقطه‌های صفر و قطب تابع را معین می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

یعنی:

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-p_j)}$$

$$|H(j\omega)| = |K(j\omega)| \cdot \sum_{j=1}^{m} |j\omega - z_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega - p_j|$$

$$\angle H(j\omega) = \angle K(j\omega) + \sum_{j=1}^{m} \angle (j\omega - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle (j\omega - p_j)$$

۲) قطب‌ها و صفرها را در صفحه s مشخص می‌کنیم و از قطب‌ها و صفرها به نقطه $j\omega_0$ یعنی نقطه‌ای که

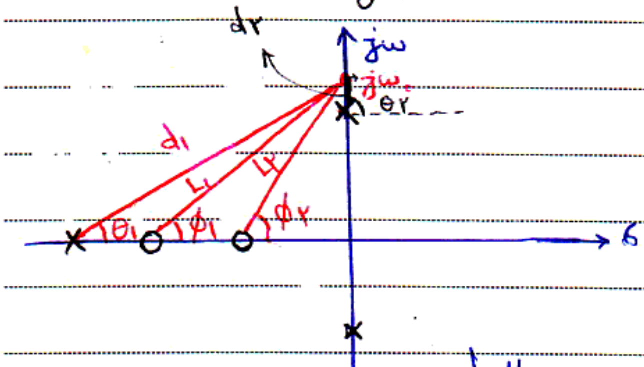
می‌خواهیم اندازه و فاز را در آن به دست آوریم، خطوطی را رسم می‌کنیم. همراه اندازه بردارهایی که از صفرها رسم

می‌شوند را با L_1 و L_2، ...، L_m و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با ϕ_1، ϕ_2 و ...، ϕ_m نشان

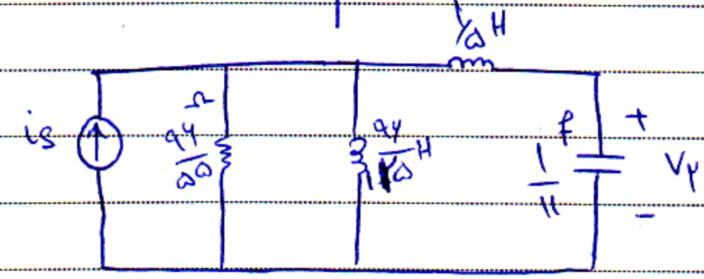
دهیم و همچنین اندازه بردارهایی را که از قطب‌ها رسم می‌شوند با d_1، d_2، ...، d_n نشان دهیم و زوایای

این بردارها را با محور حقیقی با θ_1، θ_2، ...، θ_n نشان دهیم.

$$|H(j\omega_0)| = \frac{|K(j\omega)| \prod_{j=1}^{m} L_j}{\prod_{j=1}^{n} d_j} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$



مثال) برای حل، چون $H(s)$ در حالت صفر خواسته می‌شود پس شرایط اولیه نداریم.



الف) $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{I_s(s)}$

ب) خروجی به ازای $i_s(t)=15\cos(4t-30)$.

الف) حل با روش

$$\begin{bmatrix} \frac{55}{96}+\frac{125}{96s}+\frac{5}{s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{5}{s}+\frac{s}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{525+55s}{96s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{s^2+55}{11s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(s)=\frac{\frac{5}{s}I(s)}{\frac{(55s+525)(s^2+55)}{96\times 11\, s^2}-\frac{25}{s^2}}$$

$$\frac{V_2(s)}{I_s(s)}=\frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)} \quad Z=0,\quad P_1=-5,\quad P_{2,3}=-3\pm 4j$$

$I_s(j\omega)=15\angle -30 \Rightarrow I_s(j4)=15\angle -30$

$I_s(s)=15\angle -30 \qquad \omega_0=4$ ب) حل از طریق اول:

$$H(j4)=\frac{96\times 4j}{(5+4j)(9+24j)}=2.22-0.726j=2.334\angle -18.13$$

$I_s(j4)=15\angle -30$

$$\longrightarrow V_2(j4)=2.334\times 15\angle -30-18.13 \Rightarrow V_2(j4)=35.04\angle -48.13$$

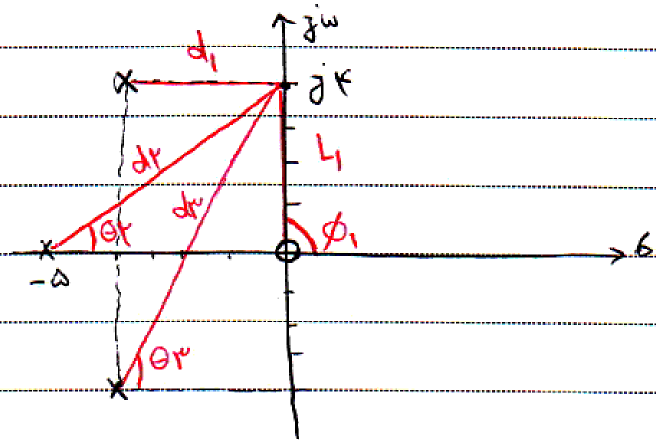
$$\rightarrow v_2(t) = 35.04\cos(4t - 48.13)$$

حل از راه حل دوم: از شکل قطب و صفر استفاده می‌کنیم

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

$z \rightarrow s = 0$

$p \rightarrow -5\ ,\ -3 \pm 4j$



$$\begin{cases} d_1 = 3 \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_2 = \sqrt{5^2+4^2} = 6.4 \\ \theta_2 = tg^{-1}\frac{4}{5} = 38.68 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_3 = \sqrt{8^2+3^2} = 8.54 \\ \theta_3 = tg^{-1}\frac{8}{3} = 69.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = 4 \\ \phi_1 = 90 \end{cases} \qquad |H(j4)| = \frac{|k|\,L_1}{d_1 d_2 d_3} = \frac{96\times 4}{6.4\times 3\times 8.54} = 2.34$$

$$\angle H(j4) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \angle k = 90 - 38.68 - 69.5 = -18.18$$

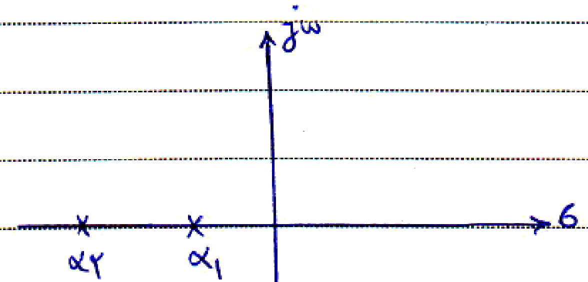
$$H(j4) = 2.34\angle -18.18$$

$$V_2(j4) = 15\angle -30 \times 2.34\angle -18.18 = 35\angle -48.18$$

$$v_2(t) = 35\cos(4t - 48.18)$$

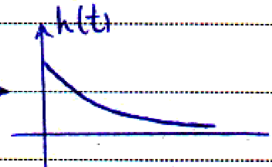
بررسی قطب‌های تابع تبدیل:

الف) قطب‌های حقیقی:



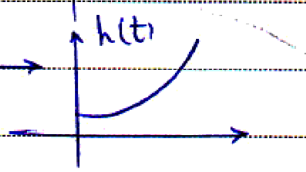
$$H(S)=\frac{K_1}{S-\alpha_1}+\frac{K_2}{S-\alpha_2}\Rightarrow h(t)=K_1e^{\alpha_1 t}+K_2e^{\alpha_2 t}$$

$\alpha_1<0,\ \alpha_2<0 \longrightarrow$



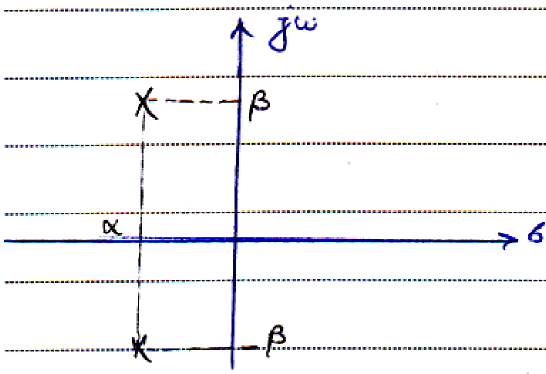
تابع پایدار است.

$\alpha_1>0$ یا $\alpha_2>0$ اگر یکی مثبت باشد $\longrightarrow$



ناپایدار

ب) قطب‌های مزدوج:



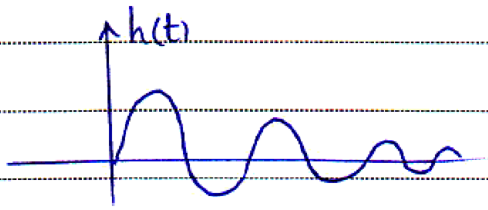
$$S_{1,2}=\alpha\pm j\omega$$

$$H(S)=\frac{K}{S-(\alpha+j\beta)}+\frac{K^*}{S-(\alpha-j\beta)}$$

$$h(t)=2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\angle K)$$

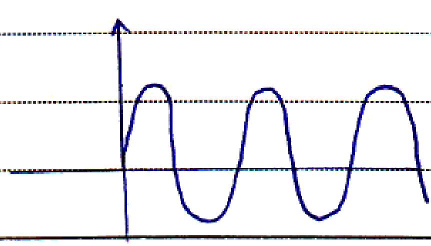
α ضریب میرایی و β فرکانس نوسان می‌گوییم.

$\alpha<0$



قطب‌ها سمت چپ محور $j\omega$ $\longrightarrow$ وضعیت پایدار

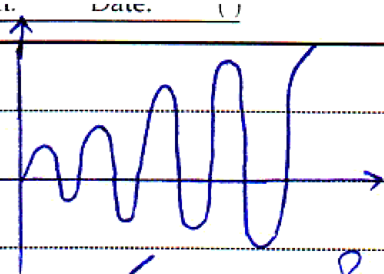
$\alpha=0$



قطب‌ها روی محور $\longrightarrow$ وضعیت مرز پایدار

(در عمل امکان‌ناپذیر است)

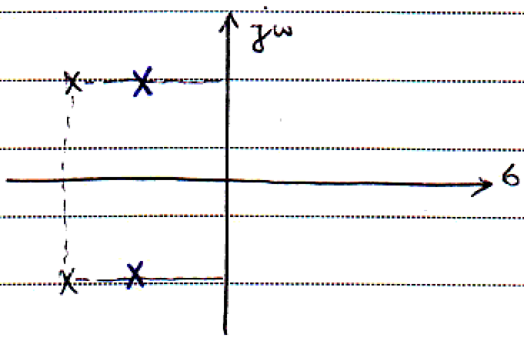
$\alpha > 0$

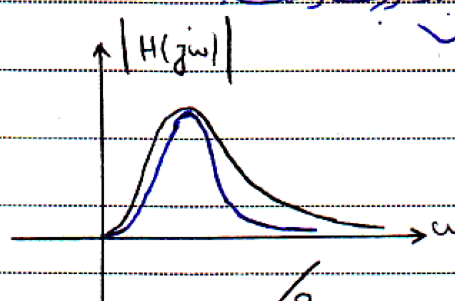


قطب‌ها سمت راست ← وضعیت ناپایدار

✓ بر طبق هر قطب چه حقیقی چه مزدوج اگر سمت راست محور $j\omega$ باشد، ایجاد ناپایداری می‌کند.

✓ وجود قطب مزدوج (مختلط) در پاسخ فرکانسی تابع شبکه ایجاد پیک‌ها و نوسان‌های تندی می‌کند. هرچه این قطب‌ها از محور دورتر باشند پهنای باند بزرگتر است.





فرکانس‌های صفر و قطب‌های تابع شبکه؟

فرکانس‌های صفر را از یکی از روش‌های زیر بدست می‌آوریم؟

$$|Y_n(s)| = 0$$

یا

$$|Z_m(s)| = 0$$

یا

$$|Z_B(s)| = 0$$

یا

$$|Y_Q(s)| = 0$$

قابل فهم است که هر قطب تابع شبکه، فرکانس صفر شبکه نیز هست، اما ممکن است یک فرکانس طبیعی شبکه، قطب تابع شبکه نباشد.

خاصیت تقارن در تابع شبکه:

فرم کلی تابع شبکه:

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0} \qquad m\leq n$$

در حوزه فازور $\quad s\longrightarrow j\omega$

$$(j\omega)=j\omega$$
$$(j\omega)^2=-\omega^2$$
$$(j\omega)^3=-j\omega^3$$
$$(j\omega)^4=\omega^4$$
$$(j\omega)^5=j\omega^5=(j\omega)^3\times(j\omega)^2$$
$$(j\omega)^6=-\omega^6=(j\omega)^4\times(j\omega)^2$$
$$(j\omega)^7=-j\omega^7$$
$$(j\omega)^8=\omega^8=(j\omega)^6\times(j\omega)^2$$
$$\vdots$$

$$H(j\omega)=\frac{(b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\dots)+j\omega(b_1-b_3\omega^2+b_5\omega^4-\dots)}{(a_0-a_2\omega^2-a_4\omega^4-\dots)+j\omega(a_1-a_3\omega^2+a_5\omega^4-\dots)}$$

$$H(j\omega)=\frac{(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)}{(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)}$$

$$\begin{cases}|H(j\omega)|=|H(-j\omega)|\\ Re[H(j\omega)]=Re[H(-j\omega)]\end{cases} \qquad \begin{cases}\angle H(j\omega)=-\angle H(-j\omega)\\ Im[H(j\omega)]=-Im[H(-j\omega)]\end{cases}$$

مثال) اطلاعات زیر از یک تابع شبکه داده شده، حداقل تعداد قطب و صفرها چیست؟

$$|H(j0)|=1$$

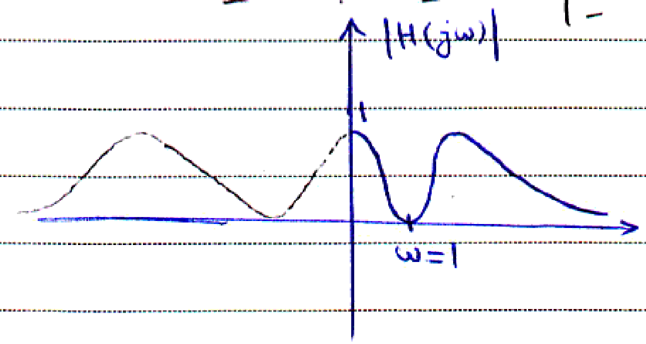
$$|H(j1)|=0 \qquad |H(j\infty)|=0$$

با توجه به خاصیت تقارن ، $|H(-j1)| = 0$

پس (حداقل) دو صفر داریم $S = j$, $S = -j$

با توجه به اینکه $|H(j\infty)| = 0$ یعنی درجه مخرج از درجه صورت حداقل یکی بالاتر است یعنی حداقل ۳ قطب داریم. حتماً یکی از قطب ها حقیقی است و ممکن است دو قطب دیگر مزدوج باشند.

$$H(s) = \frac{(s-j)(s+j) = (s^2+1)}{(s-\gamma)\big(s-(\alpha+j\beta)\big)\big(s-(\alpha-j\beta)\big)}$$



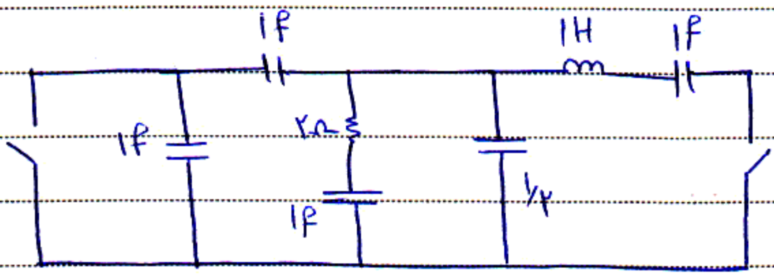
A) در مدار شکل زیر در دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت ۵ است.

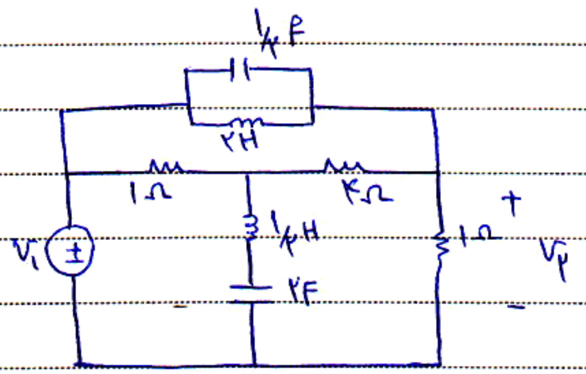
۲) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در یک حالت برابر ۱ است.

۳) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳.



B) در مدار زیر تابع تبدیل $\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟



1) $\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2}$

2) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

3) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

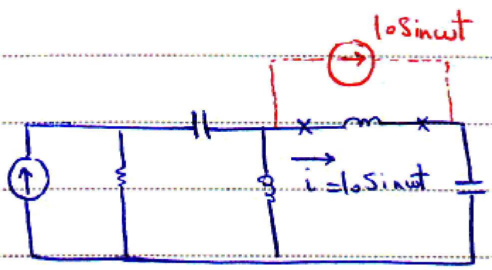
4) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

Subject :   Date : فصل ۱۴

«قضایای شبکه»

قضیه جانشینی : کاربرد در شبکه های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان

قضیه : هرگاه در شبکه N با مشخصات داده شده، عنصر یا شاخه ای مانند k که تزویجی با سایر عناصر شبکه ندارد در نظر بگیریم، جایی که ولتاژ این شاخه برابر با $v_k(t)$ و جریانش برابر با $j_k(t)$ بوده و معادله تغییراتش مشخص باشد، می توان به جای شاخه k، منبع ولتاژی به معادله تغییراتش برابر با $v_k(t)$ یا منبع جریانی به معادله تغییراتش برابر با $j_k(t)$ باشد قرار داد.



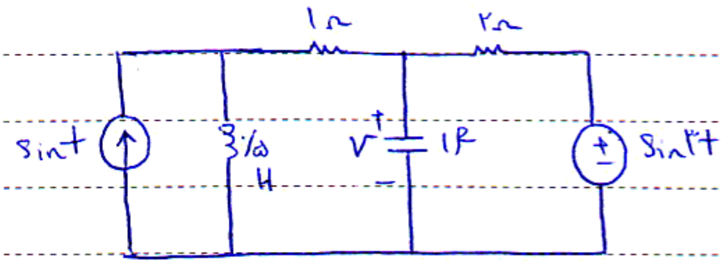
قضیه جمع آثار : کاربرد در شبکه های خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

هرگاه شبکه N با مشخصات داده شده، مفروض باشد اگر این شبکه توسط تعدادی منبع مستقل تحریک شود، پاسخ حالت صفر شبکه برابر است با جمع جبری پاسخ های حالت صفر ناشی از اعمال هر یک از منابع مستقل در صورتیکه به تنهایی بر شبکه اعمال شوند

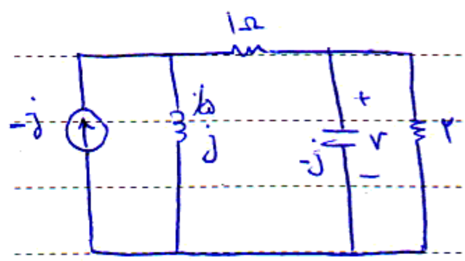
قضیه فرعی : هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان که در حالت دائمی سینوسی باشد، پاسخ حالت صفر (پاسخ حالت دائمی) ناشی از اعمال یک تعداد منابع سینوسی مستقل (حتی با فرکانس های متفاوت) برابر است با،

مجموع جبری پاسخ‌های دائمی سینوسی ناشی از اعمال هر یک از منابع وقتی به تنهایی به شبکه اعمال می‌شوند.

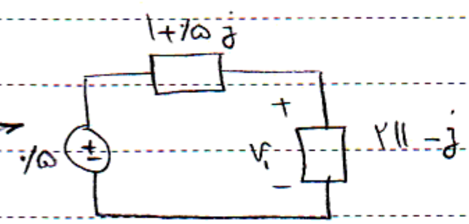
مثال) $v(t)$ را در مدار زیر بیابید؟

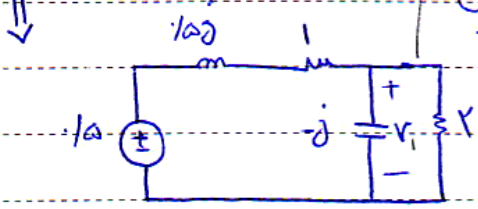


حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم و از تحلیل سینوسی حالت ماندگار.



$\omega = 1$





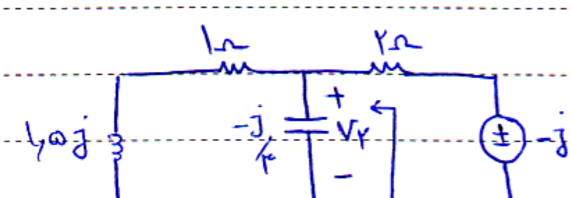
V ناشی از منبع جریان

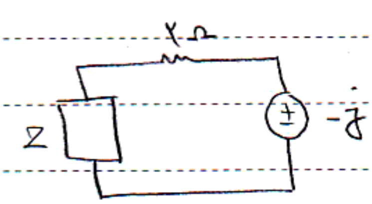
$$V_1 = \frac{(2 \| -j)}{0.5j + 1 + (2 \| -j)} \times 0.5 = \frac{0.4 - 0.8j}{0.5j + 1 + 0.4 - 0.8j} \times 0.5$$

$$V_1 = \frac{8}{41} - \frac{10}{41}j = 0.31 \angle -51.34$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 0.31 \cos(t - 51.34)$$

$\omega = 3$





$$Z = (1 + 1.5j) \| (-j/3) = 0.047 - 0.388j$$

V ناشی از منبع ولتاژ

$$V_2 = -j \times \frac{(0.047 - 0.388j)}{2 + (0.047 - 0.388j)} = -0.178 - 0.0598j = 0.187 \angle 197.7$$

NADERI

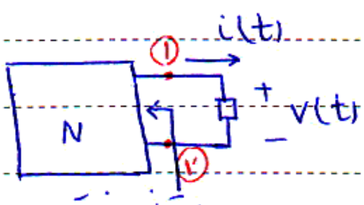
$v_2(t) = 0/187 \cos(3t + 197/7)$

چون فرکانس‌ها متفاوت اند مجموع در حوزه زمان آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم. $v(t) = v_1(t) + v_2(t) =$

$v(t) = 0/31 \cos(t - 51/34) + 0/187 \cos(3t + 197/7)$

قضیه جایگزینی شبکه‌ها، معادل تونن و نورتن : کاربرد در شبکه‌های خطی، تغییرناپذیر یا تغییرپذیر با زمان

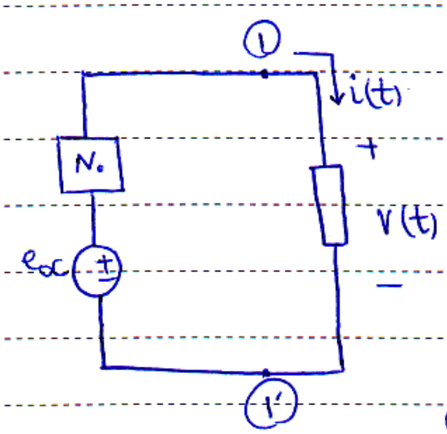
براساس این قضیه اگر شبکه N را با شبکه معادل تونن یا نورتن تعویض کنیم، هیچگونه تغییر در شکل موج جریان (یعنی $i(t)$) و شکل موج ولتاژ (یعنی $v(t)$) در مدار بیرونی شکل زیر حاصل نمی‌شود.



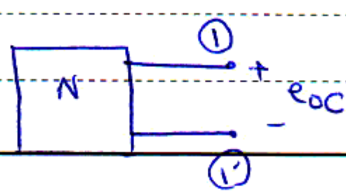
معادل تونن یا نورتن

شرط این است که بار هیچگونه ارتباطی با سایر عناصر شبکه نداشته باشد.

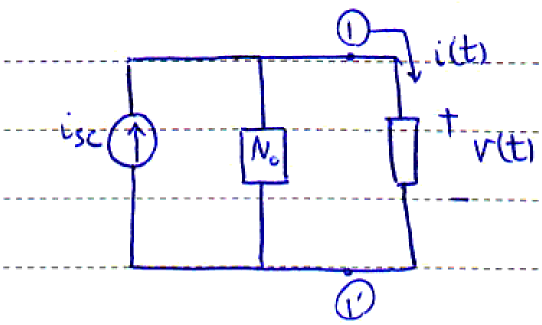
قضیه تونن: شبکه معادل تونن هر شبکه با مشخصات فوق‌الذکر را می‌توان با شبکه زیر معادل نمود، که در آن شبکه N_0 شبکه در حالت استراحت یا شبکه معادل ورودی صفر و حالت صفر شبکه اولیه است.

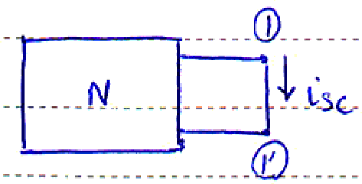


منبع ولتاژ e_{oc}، ولتاژ مدار باز دو سر ① و ①' است که به وسیله منابع مستقل شبکه و شرایط اولیه به وجود می‌آید.

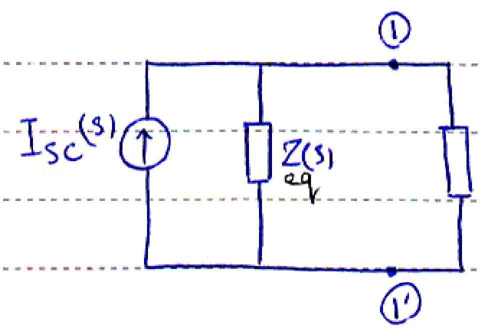


تفسیر شبکه معادل نورتن: هر شبکه با مشخصات مفروض را می‌توان با شبکه زیر معادل کرد که در آن شبکه N_0 شبکه با حالت قبل است و I_{sc} جریان اتصال کوتاه دو سر (11') ناشی از منابع مدار و شرایط اولیه آن است.

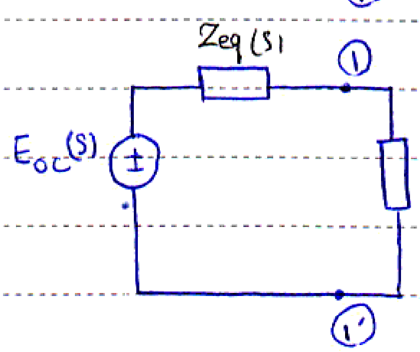




تفسیر دوم: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و مدارهای معادل تونن و نورتن را به صورت زیر حاصل کرد



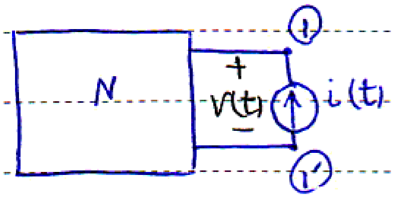
$$Z_{eq}(S) = \frac{E_{oc}(S)}{I_{sc}(S)}$$



روش‌های به دست آوردن $Z_{eq}(S)$:

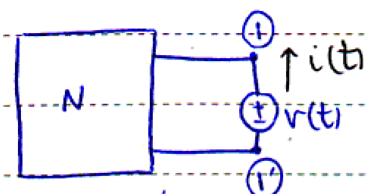
1) روش اعمال منبع: به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) یک منبع جریان $i(t)$ به دو سر (11') اعمال می‌کنیم و ولتاژ دو سر آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم



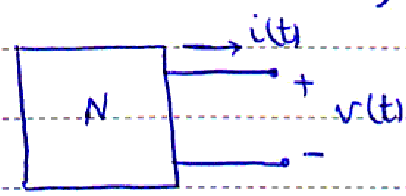
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

ب) یک منبع ولتاژ $v(t)$ به دو سر اعمال می‌کنیم و جریان آن را با شکل زیر بدست می‌آوریم :



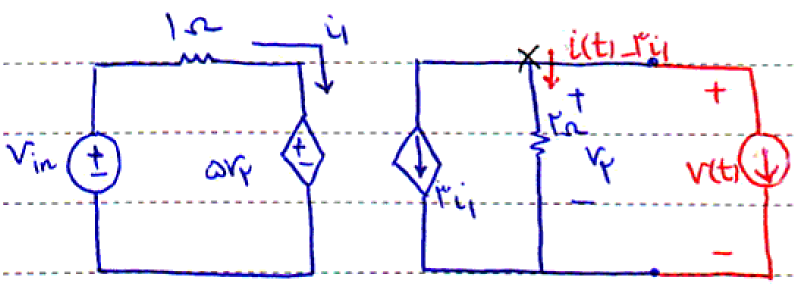
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

۲) معادله ولتاژ و جریان دو سر 1 1' را به صورت زیر به دست می‌آوریم. (e_{oc} و i_{sc} را جداگانه به دست می‌آوریم.)



$$v(t) = e_{oc} - Z_{eq}\, i(t)$$

مثال) معادل تونن از دریچه 1 1'



حل از طریق روش اعمال منبع : منبع جریان اعمال می‌کنیم.

$$V_2 = v(t) = 2(+i(t) - 3i_1)$$

$$\boxed{v(t) = +2i(t) - 6i_1} \quad (1)$$

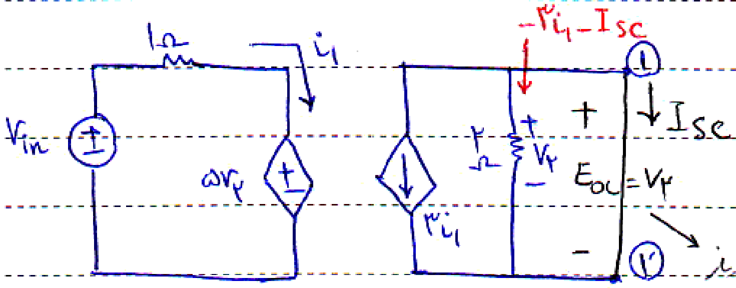
$$KVL: \; V_{in} = i_1 + 5v(t) \longrightarrow \boxed{i_1 = V_{in} - 5v(t)} \quad (2)$$

(1) و (2) : $v(t) = \cancel{-}^{+}2i(t) - 6V_{in} + 30v(t) \Rightarrow 29v(t) = 6V_{in} \cancel{+} 2i(t)$

$$v(t) = \frac{6}{29}V_{in} - \cancel{+}\frac{2}{29}\,i(t)$$

E_{oc} $\quad$ Z_{eq}

حل از طریق بدست آوردن معادل :
(روش دوم)



برای حالت اتصال کوتاه

برای حالت مدار باز

$$V_2 = -2\times 3i_1 = -6i_1 \qquad i_1 = \frac{V_{in} - 5V_2}{1} = V_{in} - 5(-6i_1)$$

E_{oc} $\qquad V_2 = e_{oc}$

$$i_1 = V_{in} + 30 i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{-V_{in}}{29} \qquad V_2 = \frac{6}{29}V_{in} \longrightarrow E_{oc} = \frac{6}{29}V_{in}$$

$$V_2 = 0 \longrightarrow 2(-3i_1 - I_{sc}) = 0 \Rightarrow -6i_1 - 2I_{sc} = 0 \longrightarrow I_{sc} = -3i_1$$

$$KVL:\ i_1 = V_{in} - \cancel{5V_2} \Rightarrow i_1 = V_{in} \longrightarrow I_{sc} = -3V_{in}$$

$$Z_{eq} = \frac{E_{oc}}{I_{sc}} = \frac{6/29}{-3} = -2/29$$

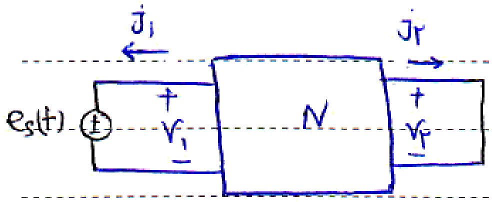
تعمیم هم ارزی: کاربرد در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، بدون منابع وابسته و مستقل و بدون عنصری

با نام ژیراتور و شرایط اولیه صفر. این تعمیم به سه نوع بیان دارد:

بیان ۱) هرگاه به شبکه N با مشخصات ذکر شده در ترکیبات الف و ب منابع زیر را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t)$$

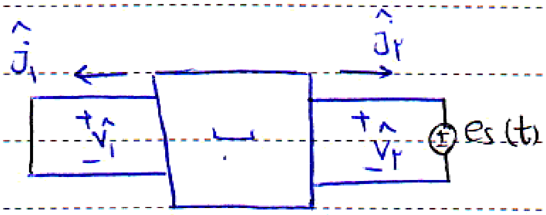
صورت تعمیمی تلگان :



(الف)

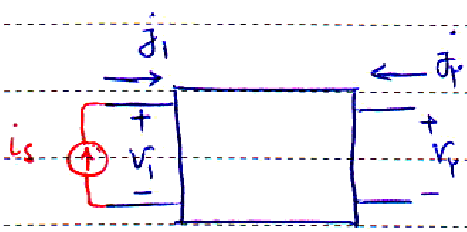
$$\underset{e_s}{v_1}\hat{j}_1 + \underset{0}{v_2}\hat{j}_2 = \underset{0}{\hat{v}_1} j_1 + \underset{e_s}{\hat{v}_2} j_2$$

$$e_s\hat{j}_1 = e_s j_2 \longrightarrow \hat{j}_1 = j_2$$

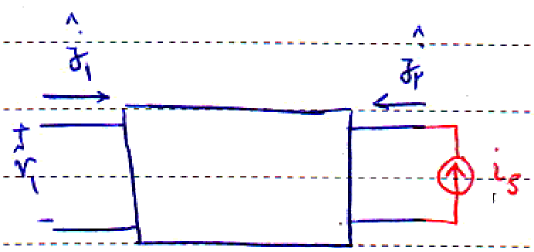


مثال ۲)

صورت تعمیمی تلگان :

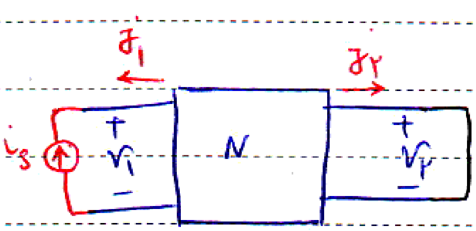


$$v_1\underset{0}{\hat{j}_1} + v_2\underset{i_s}{\hat{j}_2} = \hat{v}_1\underset{i_s}{j_1} + \hat{v}_2\underset{0}{j_2}$$



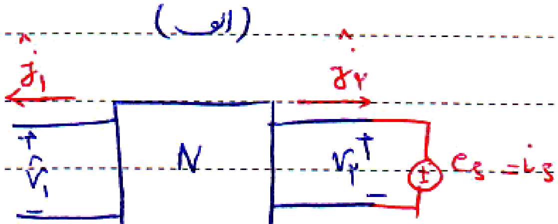
$$\boxed{v_2 i_s = \hat{v}_1 i_s \longrightarrow v_2 = \hat{v}_1}$$

مثال سوم : با استفاده از تعمیم تلگان می‌توان نشان داد :



(الف)

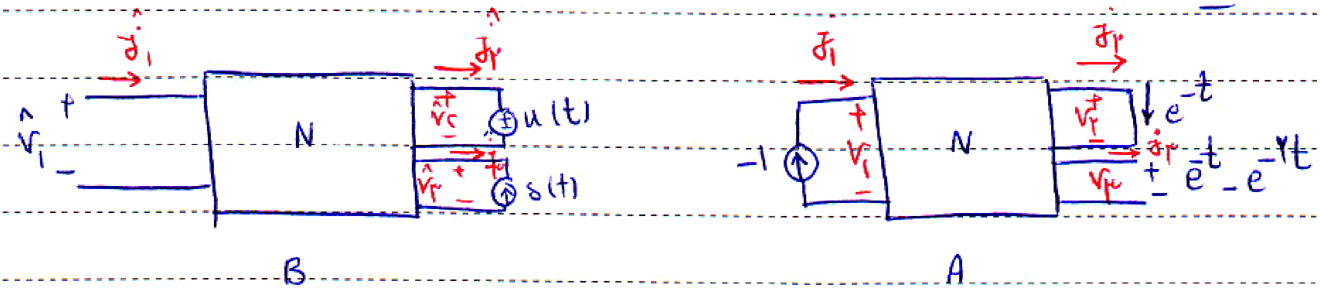
$$v_1\underset{0}{\hat{j}_1} + v_2\underset{0}{\hat{j}_2} = \hat{v}_1\underset{-i_s}{j_1} + \hat{v}_2\underset{e_s}{j_2}$$



$$-\hat{v}_1 i_s + i_s j_2 = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{v}_1 = j_2}$$

(ب)

مثال) در مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان شکل A، اطلاعات زیر داده شده. اگر همان مدار را به صورت B درآوریم. ولتاژ $\hat{V}_1$ چیست؟



چون قضیه هم پاسخی تحت شرایط خطی و تغییرناپذیر بودن با زمان است می‌توان به جای آن قضیه تلگان را در حوزه s به کار برد.

$$V_1\hat{j}_1+V_2\hat{j}_2+V_3\hat{j}_3=\hat{V}_1 j_1+\hat{V}_2 j_2+\hat{V}_3 j_3$$

$$0+0+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\times(-1)=\hat{V}_1\left(-\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)+0$$

$$\frac{-1}{(s+1)(s+2)}=\hat{V}_1\times\frac{-1}{s}+\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{\hat{V}_1}{s}=\frac{1}{s(s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+2+s}{s(s+1)(s+2)}$$

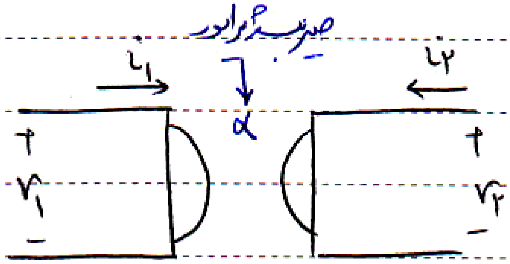
$$\hat{V}_1=\frac{2}{s+2}\longrightarrow \hat{V}_1(t)=2e^{-2t}u(t)$$

دو سر متقابل؟

تعریف: هر شبکه‌ای که در قضیه هم پاسخی صدق کند شبکه متقابل گفته می‌شود.

$$\begin{cases} Z_{ij}=Z_{ji} \\ Y_{ij}=Y_{ji} \end{cases}$$

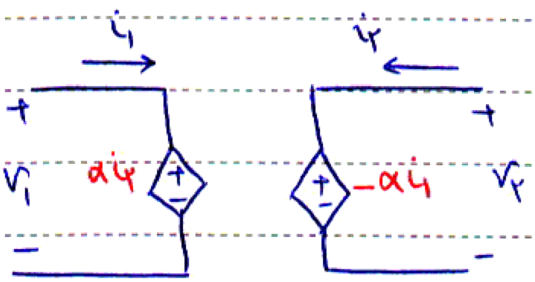
ژیراتور: یک عنصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.



$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2 = \dfrac{1}{\alpha} v_1 \\ i_1 = \dfrac{-1}{\alpha} v_2 \end{cases}$$

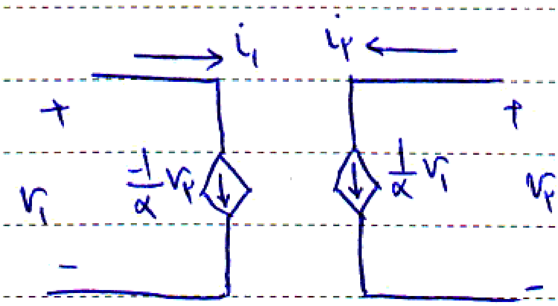
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور با منبع‌ها در مش و حلقه‌ی اساسی:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور با منبع‌های گره و کات‌ست اساسی:

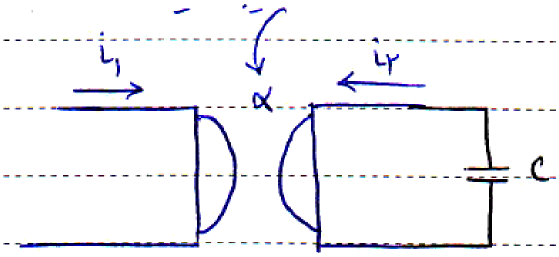


در ژیراتور:

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \alpha i_2 i_1 - \alpha i_2 i_1 = 0$$

مفهوم این رابطه این است که ژیراتور به شبکه توان نمی‌دهد.

مثال) عملکرد مدار زیر را بررسی کنید.



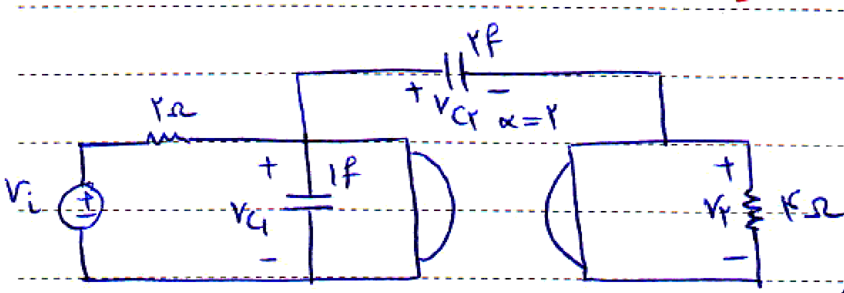
$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow -i_2 = C\frac{dv_2}{dt}$$

$$\longrightarrow i_2 = -C\frac{dv_2}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 = -\alpha C\frac{dv_2}{dt} \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow v_1 = -\alpha C\frac{d}{dt}(-\alpha i_1)$$

$$\longrightarrow v_1 = \underbrace{\alpha^2 C}_{L}\frac{di_1}{dt}$$

مثال) در مدار زیر:

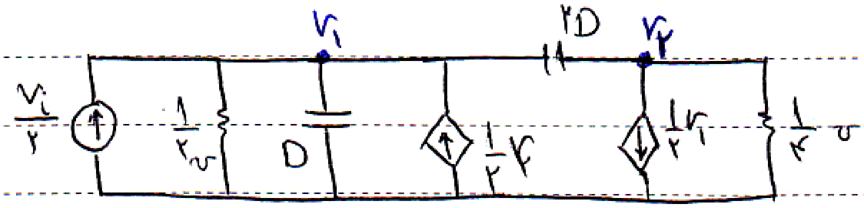


الف) فرکانس‌های طبیعی سیستم را بیابید.

ب) تابع شبکه $\frac{V_o}{V_i}$ را بیابید.

ج) اگر $v_i = 2\sin(t - 40)$ باشد، $V_o(t)$ را بیابید.

از روش پتانسیل گره استفاده می‌کنیم.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+3D & -\frac{1}{2}-2D \\ -2D+\frac{1}{2} & 2D+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+\cancel{\frac{1}{2}V_2} \\ \cancel{-\frac{1}{2}V_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-2s \\ -2s+\frac{1}{2} & 2s+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+\underbrace{2V_1(0^-)-2V_2(0^-)}_{2V_{C2}(0^-)+V_{C1}(0^-)} \\ \underbrace{-2V_1(0^-)+2V_2(0^-)}_{-2V_{C2}(0^-)} \end{bmatrix}$$

$$V_1(0^-)-V_2(0^-)=V_{C2}(0^-) \qquad V_1(0^-)=V_{C1}(0^-)$$

ادامه سؤال

$$\begin{bmatrix} \frac{6s+1}{2} & -\frac{4s+1}{2} \\ -\frac{4s-1}{2} & \frac{8s+1}{4} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرکانس‌های طبیعی

$$\frac{(6s+1)(8s+1)}{8}-\frac{(4s+1)(4s-1)}{4}=0$$

$$(6s+1)(8s+1)-2(4s+1)(4s-1)=0$$

$$48s^2+14s+1-16s^2+2=0 \longrightarrow 32s^2+14s+3=0 \begin{cases} s_1= \\ s_2= \end{cases}$$

برای به دست آوردن تابع شبکه سؤال الف ادامه را اصلاح می‌کنیم