

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مدارهای الکتریکی

فصل I - معرفی اجزاء و عناصر تشکیل دهنده مدارهای الکتریکی :

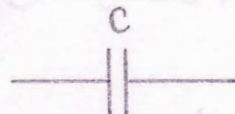
عناصر تشکیل دهنده یک مدار الکتریکی را میتوان در سه گروه شرح زیر طبقه بندی کرد.



1- مقاومت اهمی R

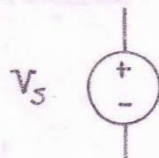


2- سلف یا اندکتیویتی L

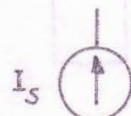


3- خازن یا کاپاسیتیو C

I- عناصر غیرفعال شبکه

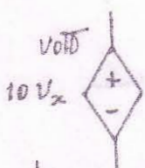


1- منبع ولتاژ ایده آل V_S

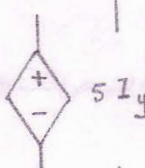


2- منبع جریان ایده آل I_S

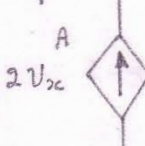
II- عناصر فعال



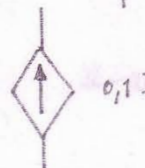
منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ



منبع ولتاژ وابسته به جریان



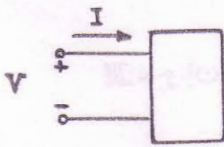
منبع جریان وابسته به ولتاژ



منبع جریان وابسته به جریان

III- عناصر وابسته

تعریف مدار الکتریکی - هر مدار الکتریکی از ترکیب یک یا چند عنصر الکتریکی تشکیل میشود.



و هر مدار الکتریکی توسط دو کمیت ولتاژ V و جریان I بیان میشوند.

●●● معمولاً ولتاژ و در هر مدار الکتریکی با پلاریته های $(+)$ ، $(-)$ و جریان مدار با یک بردار نشان داده میشوند

●●● شکل‌های (۱۱)، (۱۲) تعریف‌های ناصحیح، نامناسب و ناقصی از جریان هستند. دلی شکل (۱۳) تعریف

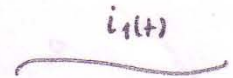
صحیحی از جریان را ارائه می‌دهد.



شکل (۱۳)



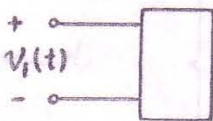
شکل (۱۲)



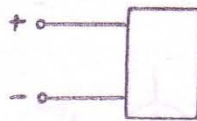
شکل (۱۱)

●●● همچنین شکل‌های (۱۴)، (۱۵) تعاریف ناصحیح و نامناسب و ناقصی از ولتاژ هستند. دلی شکل (۱۶)

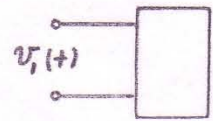
تعریف صحیحی از ولتاژ را ارائه می‌دهد.



شکل (۱۶)

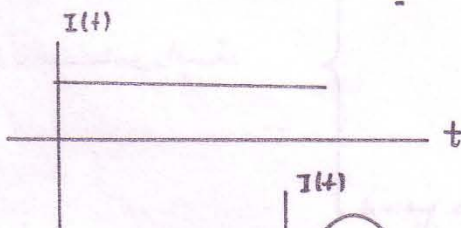


شکل (۱۵)

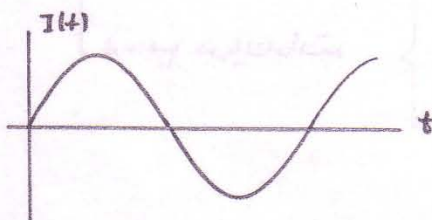


شکل (۱۴)

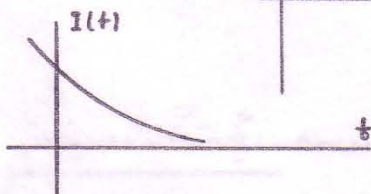
●●● شکل‌های زیر انواع جریان و ولتاژ در مدار نشان می‌دهد.



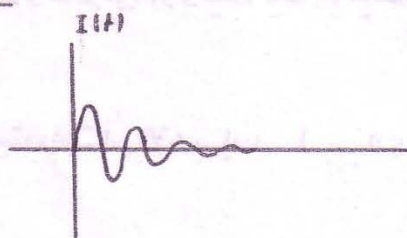
I - جریان مستقیم یا dc



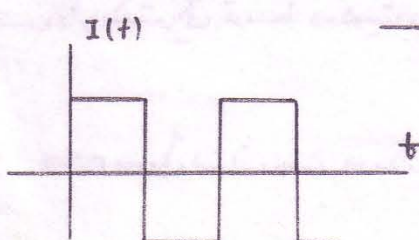
II - جریان تناوب سینوسی ac



III - جریان موقت



IV - جریان سینوسی میرا شونده



V - جریان مربعی

●●● جریان یک باطری از نوع جریان متقیم dc در جریان بوق شهر از نوع جریان متناوب سینوسی در جریان مربوط به

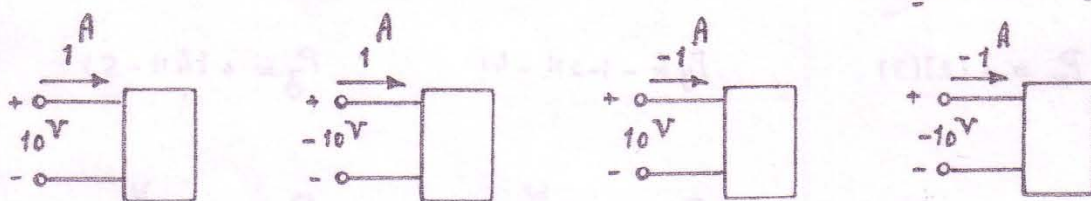
تخلیه یا دشارژ خازن روی مقاومت اسی از نوع جریان غایبی و جریان ناشی از تخلیه سلف و خازن در مدار RLC

روی مقاومت اسی در حالت خاصی از مدار از نوع جریان سینوسی می‌رساننده و جریان خروجی یک مدلی ریسر آدر از نوع

جریان مربعی است.

●●● شکل های زیر مقادیر عددی ولتاژ اختلاف پتانسیل و شدت جریان عبوری از یک عنصر و یا یک

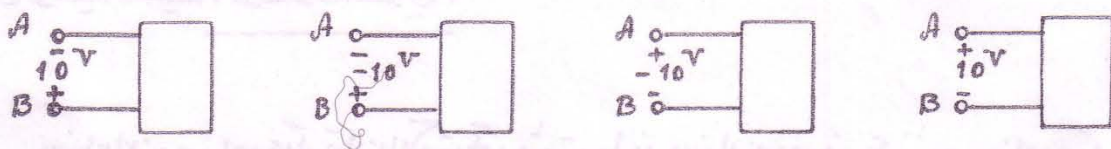
مدار الکتریکی را نشان میدهد.



در شکل های بالا هر کدام از کمیت های ولتاژ V در جریان I می تواند مقادیر مثبت یا منفی را

داشته باشد.

●●● با توجه به تعریف ولتاژ مدارهای شکل زیر را در نظر بگیرید و ولتاژ نقاط A را نسبت به B محاسبه کنید



$$V_{AB} = -(10)$$

$$V_{AB} = -(-10)$$

$$V_{AB} = +(-10)$$

$$V_{AB} = ++(10)$$

$$V_{AB} = -10^V$$

$$V_{AB} = +10^V$$

$$V_{AB} = -10^V$$

$$V_{AB} = +10^V$$

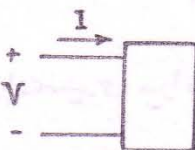
●●● علاوه بر کسیت‌های ولتاژ V ، جریان I کسیت مرکب دیگری در مدارهای الکتریکی بکار گرفته می‌شود

کسیت مورد نظر توان الکتریکی نامیده می‌شود و معمولاً رفتار عناصر مختلف شبکه یا یک مدار الکتریکی را

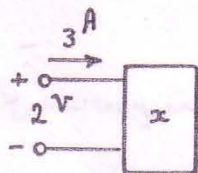
بیان میکند

$$P = V \cdot I$$

توان الکتریکی

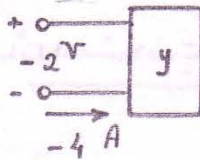


●●● در شکل‌های زیر رفتار هر یک از عناصر x ، y ، z را با توجه به مقدار توان الکتریکی آن‌ها بررسی میکنیم



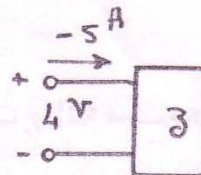
$$P_x = + (2)(3)$$

$$P_x = +6 \text{ W}$$



$$P_y = - (2)(-4)$$

$$P_y = -8 \text{ W}$$



$$P_z = + (4)(-5)$$

$$P_z = -20 \text{ W}$$

در شکل‌های بالا عنصر x معادل 6 وات توان جذب میکند (مصرف‌کننده توان الکتریکی) را می

عنصر y معادل 8 وات توان تولید میکند (مولد توان الکتریکی) و همچنین عنصر z معادل 20 وات

توان تولید میکند (مولد توان الکتریکی)

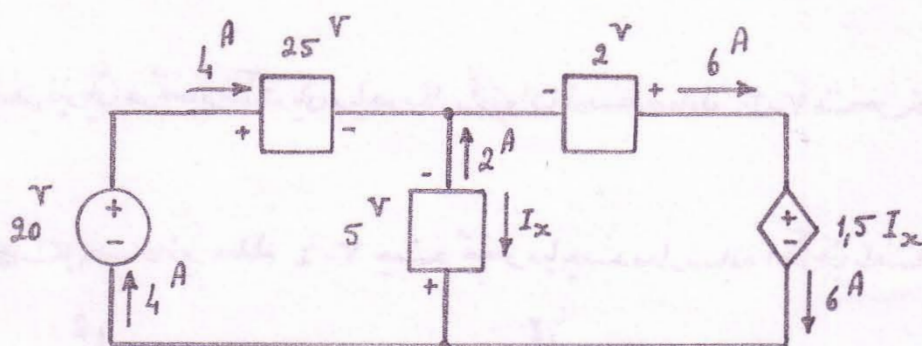
بنابراین عناصری که توان الکتریکی مثبت دارند بعنوان مصرف‌کننده و عناصری که توان

الکتریکی منفی دارند بعنوان مولد نامیده میشوند

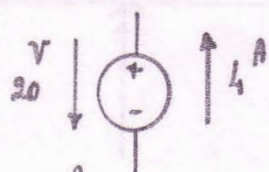
مصرف‌کننده : $P > 0$

مولد : $P < 0$

مثال ۱- توان جذب شده توسط هر یک از عناصر مدار نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



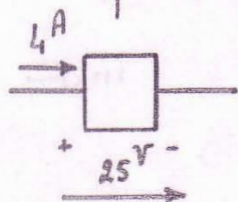
توان الکتریکی هر کدام از عناصر شبکه را با توجه به ولتاژ و جریان تعریف شده در روی شکل مدار محاسبه



$$P_1 = -(20)(4) = -80 \text{ W}$$

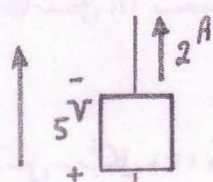
* مولد

میکنیم.



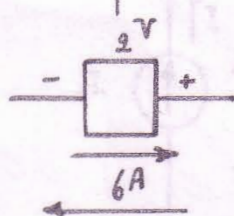
$$P_2 = +(25)(4) = +100 \text{ W}$$

مصرف کننده



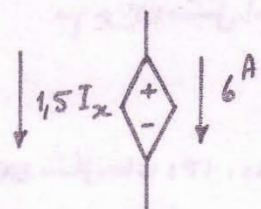
$$P_3 = +(5)(2) = +10 \text{ W}$$

مصرف کننده



$$P_4 = -(2)(6) = -12 \text{ W}$$

* مولد



$$P_5 = +(1.5I_x)(6) = 1.5(-2)(6) = -18 \text{ W}$$

* مولد

$$I_x = -2 \text{ Amp}$$

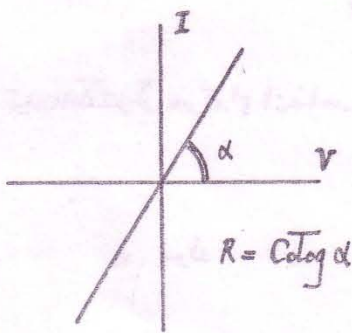
همانطوریکه ملاحظه میشود عناصر شماره ۱، ۴، ۵ نیز توان مولد توان الکتریکی و عناصر شماره ۲، ۳

نیز توان مصرف کننده توان الکتریکی عمل میکنند. ضمناً بهم توان مدار در مدار صفر است. $\Sigma P = 0$.

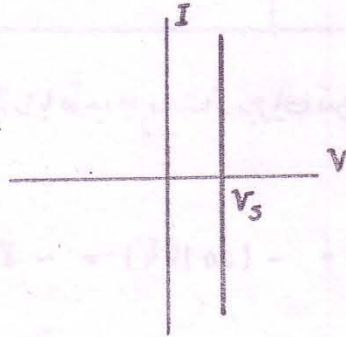
●● معادلات مشخصه ولت-آمپر عناصر الکتریکی و مدارها :

رفتار فیزیکی هر عنصر الکتریکی را با هر مدار آمپرون توسط معادله $V-I$ مشخص کرد.

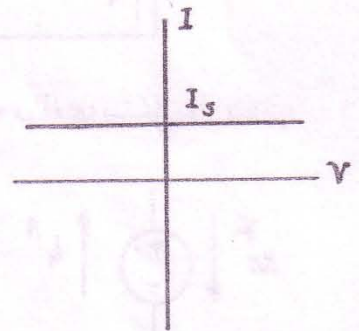
●● شکل های زیر معادله $V-I$ چند عنصر و یا چند مدار ساده الکتریکی را نشان میدهد.



شکل (۱۳)



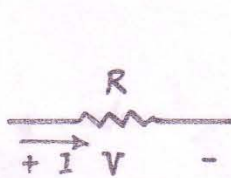
شکل (۱۲)



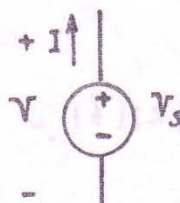
شکل (۱۱)

● شکل (۱۱) مشخصه $V-I$ یک منبع جریان ایده آل و متقل و شکل (۱۲) مشخصه $V-I$ یک منبع ولت ایده آل

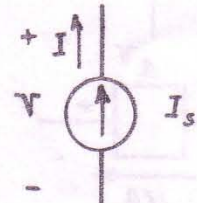
و متقل و شکل (۱۳) مشخصه $V-I$ یک مقاومت اهمی خطی را نشان میدهد.



مقاومت اهمی خطی

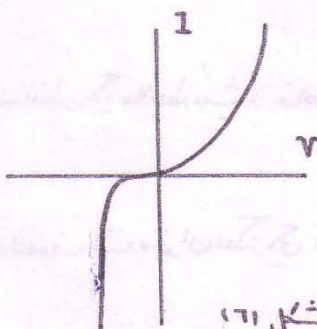


منبع ولت و متقل و ایده آل

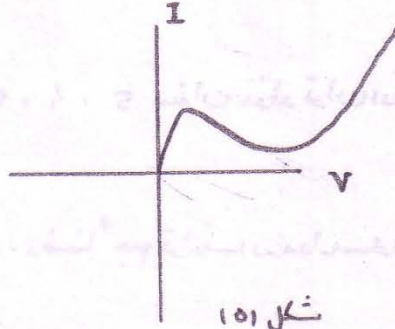


منبع جریان متقل و ایده آل

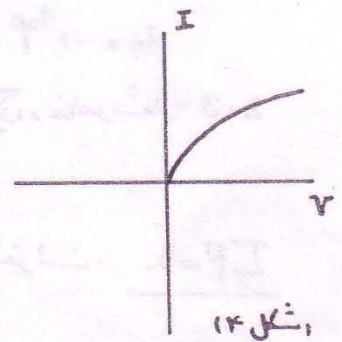
●● شکل های (۱۴)، (۱۵)، (۱۶) مشخصه ولت-آمپر چند عنصر با مقاومت غیر خطی را نشان میدهد.



شکل (۱۶)



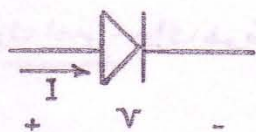
شکل (۱۵)



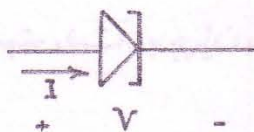
شکل (۱۴)

● شکل (۱۴) مشخصه ولت آمپر دیود نیلامان داخل یک لامپ و شکل (۱۵) مشخصه ولت آمپر دیود یک

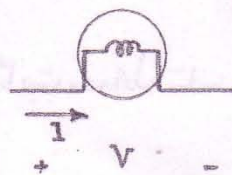
دیود تونل و شکل (۱۶) مشخصه ولت آمپر دیود واقعی را نشان میدهد.



دیود واقعی

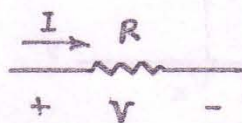


دیود تونل

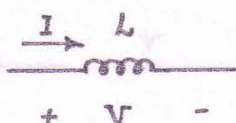


نیلامان لامپ

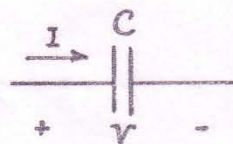
● معادلات زیر معادلات ولت-آمپر مربوط به مقاومت اهمی R ، سلف L ، خازن C می باشد.



$$V = RI$$

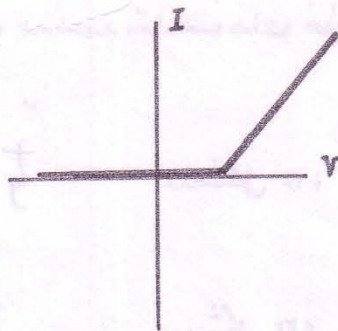
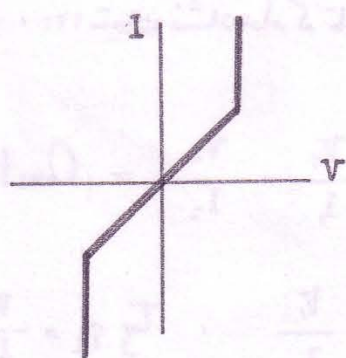
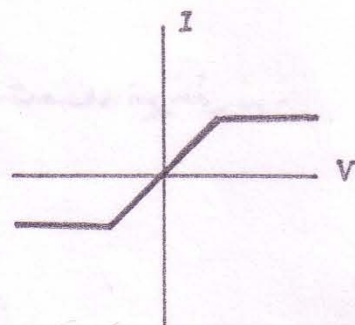
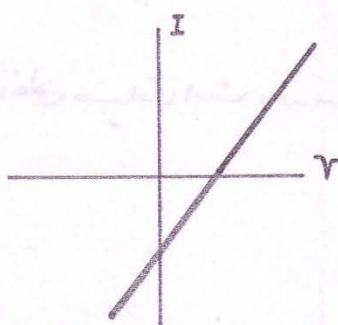
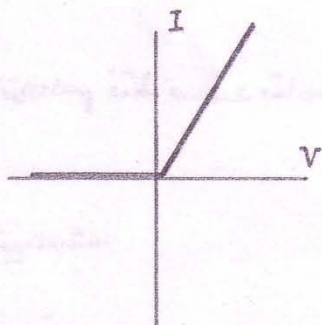


$$V = L \frac{dI}{dt}$$



$$V = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t) dt$$

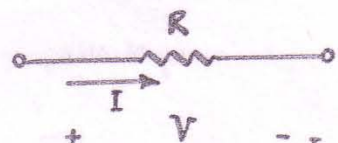
● شکل های زیر نیز هر کدام میتواند معادلات مشخصه $V-I$ یک مدار الکتریکی باشد.



فصل II - مطالعه توان و قضایای شبکه ها و روش های مختلف تحلیل مدارهای DC

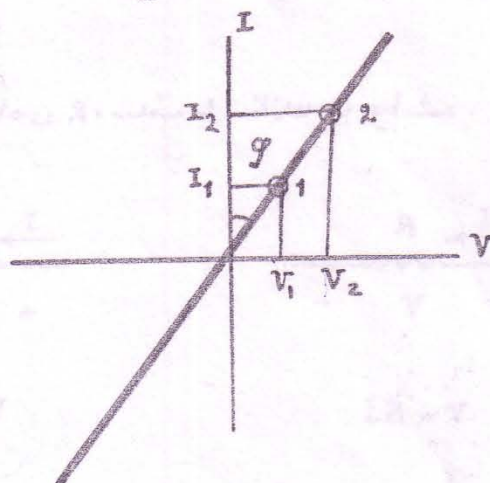
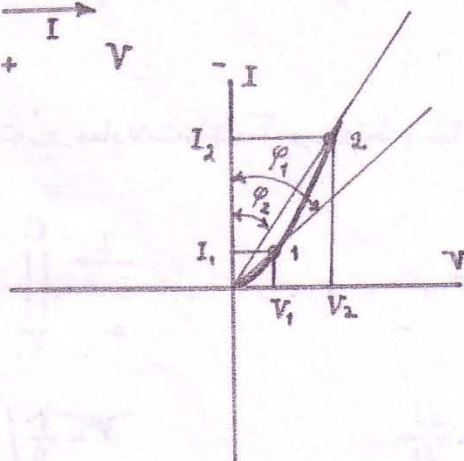
الف - توان تجربی و مدارهای ساده

I - قانون اهم - برای هر مقاومت خطی نسبت ولتاژ به جریان مقداریت ثابت و معادل مقاومت ایسی آن



$$R = \frac{V}{I} = \text{const.}$$

بینی



شکل (۱۲) مقاومت غیر خطی

شکل (۱۱) مقاومت خطی

قانون اهم فقط در مورد مقادیرت های خطی صادق است و در مورد مقادیرت های غیر خطی غیر-

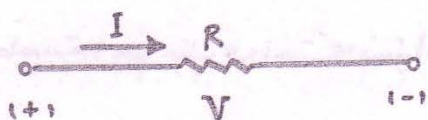
- قابل تعریف است.

در شکل های (۱۱) ، (۱۲) میتوان نشان داد که قانون اهم در مورد مقادیرت های خطی صادق میباشد.

در شکل (۱۱)
$$\tan \varphi = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = \text{const} = R$$

در شکل (۱۲)
$$\tan \varphi_1 = \frac{V_1}{I_1} \quad , \quad \tan \varphi_2 = \frac{V_2}{I_2} \quad \frac{V_1}{I_1} \neq \frac{V_2}{I_2}$$

●●● طبق تعریف و براساس قانون اهم در مقاومت خلی جهت جریان همواره از پتانسیل (+) به پتانسیل (-) است.

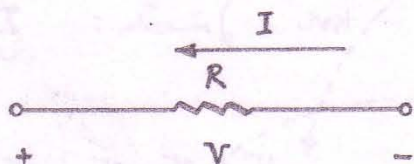


$$V = RI$$

پتانسیل (-) است.

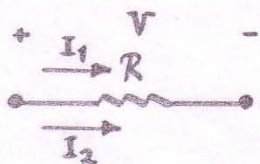
●●● لذا اگر در یک مقاومت جهت جریان خلاف جهت واقعی تعریف شود قانون اهم نقص می شود و این

منافس با علامت (-) بصورت زیر رقم می شود.

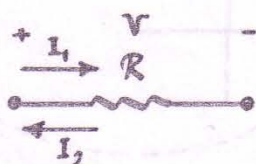


$$V = -RI$$

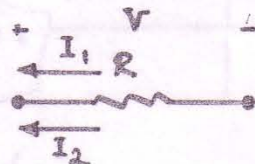
● در دقیقاً براساس همین تعریف می توان نوشت.



$$V = R(I_1 + I_2)$$



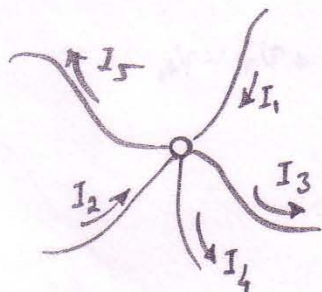
$$V = R(I_1 - I_2)$$



$$V = -R(I_1 + I_2)$$

II - قوانین کیرشوف: 1- قانون ولتاژهای کیرشوف 2- قانون جریانهای کیرشوف

●●● قانون جریانهای کیرشوف: (KCL)



در هر گره (انشاب) جمع جبری جریانهای مادی صفر است.

$$\sum I = 0$$

جبری

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

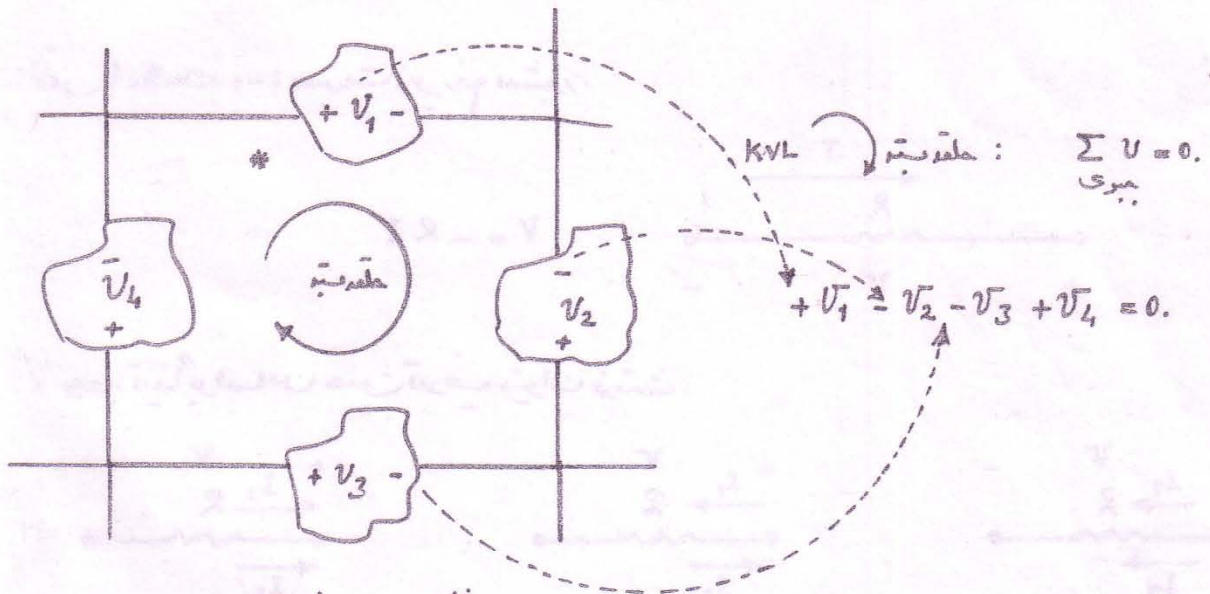
و یا عبارت دیگر در هر گره یا انشاب مجموع جریانهای ورودی مادی مجموع جریانهای خروجی است.

$$\sum I_{\text{ورودی}} = \sum I_{\text{خروجی}} \quad I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

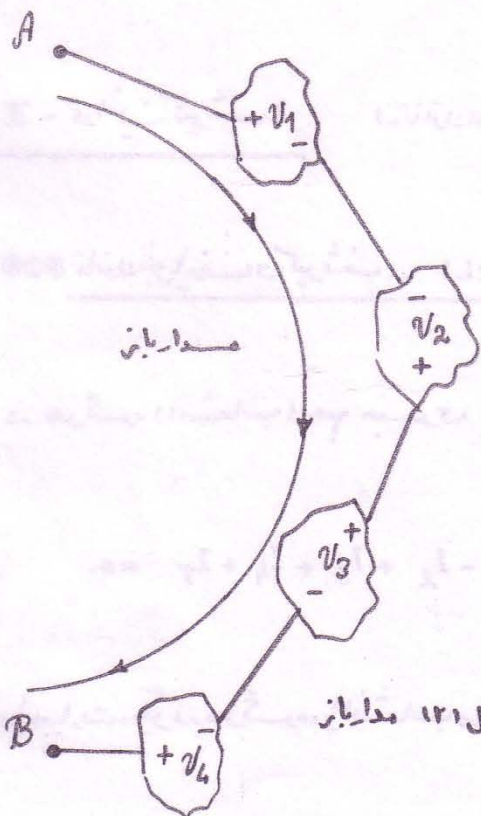
در هر مدار بسته (حلقه بسته) جمع جبری اختلاف پتانسیل‌ها مساوی صفر است. همچنین برای هر مدار

باز اختلاف پتانسیل دو سر مدار مساوی جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر عناصر تشکیل دهنده آن

باشد.



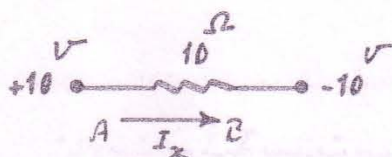
شکل ۱۱۱ مدار بسته



شکل ۱۱۲ مدار باز

چند مثال کاربردی در مورد قوانین اهم، کیروشف:

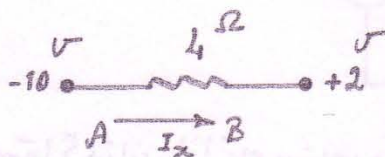
●●● مثال 1- در هر یک از مدارهای زیر I_x را محاسبه کنید.



$$V_{AB} = 10 I_x$$

$$10 - (-10) = 10 I_x$$

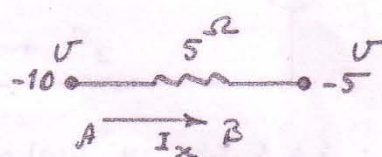
$$I_x = 2 \text{ Amp}$$



$$V_{AB} = 4 I_x$$

$$-10 - (+2) = 4 I_x$$

$$I_x = -3 \text{ Amp}$$

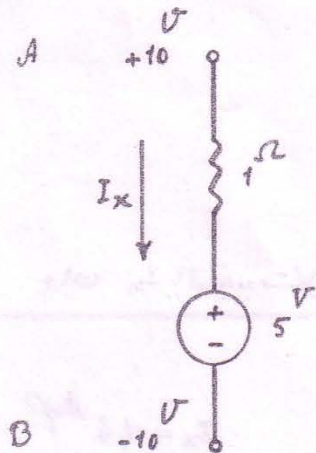


$$V_{AB} = 5 I_x$$

$$-10 - (-5) = 5 I_x$$

$$I_x = -1 \text{ Amp}$$

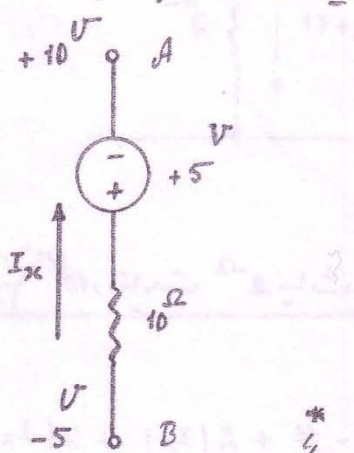
●●● مثال 2- در مدارهای شکل زیر I_x را محاسبه کنید.



$$V_{AB} = (1)(I_x) + 5$$

$$10 - (-10) = I_x + 5$$

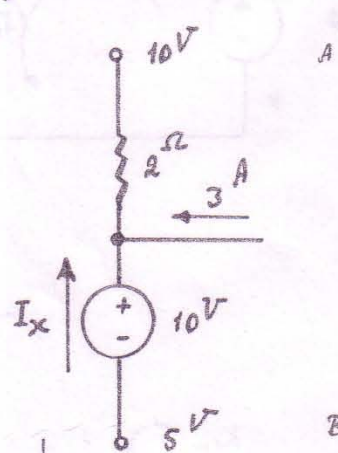
$$I_x = 15 \text{ Amp}$$



$$V_{AB} = -5 + 10(-I_x)$$

$$10 - (-5) = -5 - 10 I_x$$

$$I_x = -2 \text{ Amp}$$

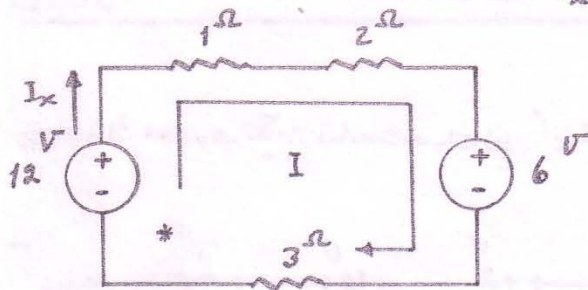


$$V_{AB} = 2(-I_x + 3) + 10$$

$$10 - 5 = -2 I_x - 6 + 10$$

$$I_x = -0.5 \text{ Amp}$$

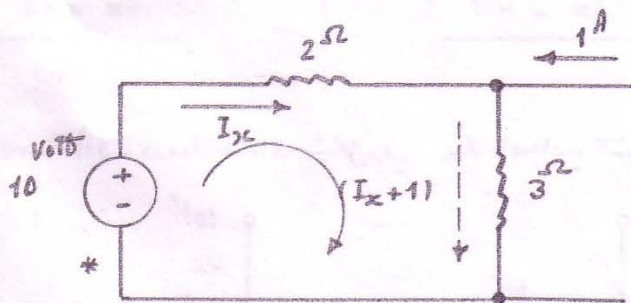
*** مثال 3 - در سریک از مدارهای زیر مطلوب محاسبه I_x



تمام عناصر شبکه بصورت سری باهم قرار گرفته اند. لذا تمام عناصر دارای جریان یکسان و معادل I خواهند داشت.

$$\text{KVL } \bigcirc : -12 + 1(I) + 2(I) + 6 + 3I = 0. \quad \underline{I = 1 \text{ Amp}}$$

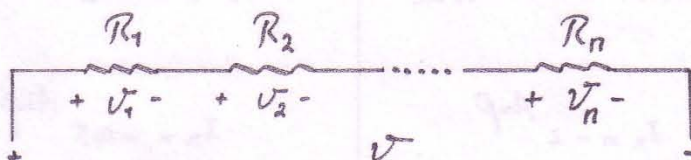
$$\underline{I_x = I = 1 \text{ Amp}}$$



جریان I_x با توجه به شکل شبکه جریان منبع $10V$ و مقاومت 2Ω می باشد

$$\text{KVL } \bigcirc : -10 + 2(I_x) + 3(I_x + 1) = 0. \quad \underline{I_x = 1.4 \text{ Amp}}$$

*** ترکیب مقاومت های اهمی: الف - ترکیب سری مقاومت ها ب - ترکیب موازی مقاومت ها



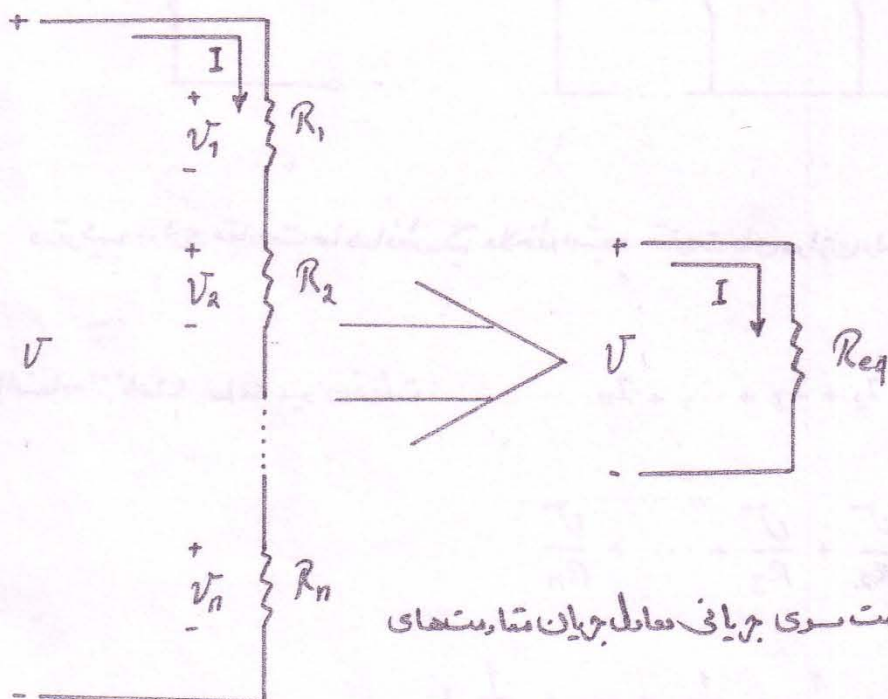
الف - ترکیب سری مقاومت ها:

با توجه باینکه عناصر سری در یک شبکه جریانی یکسان دارند لذا میتوان نوشت

$$\text{KVL : } V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad V = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I$$

$$V = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) I$$

میزان در عمل بجای چند مقاومت سری یک مقاومت معادل قرار داد.



مقاومت معادل چند مقاومت سری جریانی معادل جریان مقاومت‌های

سری را خواهد داشت. بنابراین:

$$R_{eq} \cdot I = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) I$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

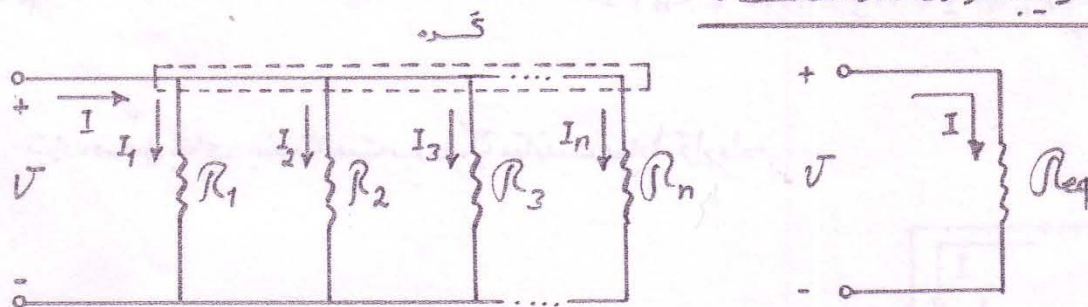
*** قانون تقسیم ولتاژ در مقاومت‌های سری:

بدانگی می‌توان نشان داد که در مقاومت‌های سری ولتاژ به نسبت مقاومت‌ها بین آنها تقسیم می‌شود

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} V, \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} V, \quad \dots, \quad V_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} V$$

یعنی در مدار بالا

●●● ب- ترکیب موازی مقاومت ها :



در ترکیب موازی مقاومت ها همانطوریکه ملاحظه میشود مقاومت های موازی ولتاژهای برابر خواهند داشت.

لذا با استفاده از قانون Kcl میتوان نوشت :

$$Kcl : I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \dots + \frac{V}{R_n}$$

$$I = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

میتوان بجای ترکیب موازی چند مقاومت موازی مقاومت معادل آمپ را قرار داد. بدیهی است مقاومت

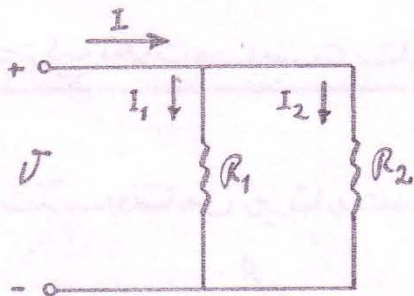
معادل چند مقاومت موازی ولتاژ هر یک از مقاومت ها را خواهد داشت. بنابراین :

$$I = \frac{V}{R_{eq}} \rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

●●● قانون تقسیم جریانها به مقاومت های موازی : بدائی میتوان نشان داد که در مقاومت های موازی

برایان به نسبت عکس مقاومت ها بین آمپ تقسیم میشود.



برای دو مقاومت موازی :

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \quad I_1 = \frac{R_{eq} \cdot I}{R_1}$$

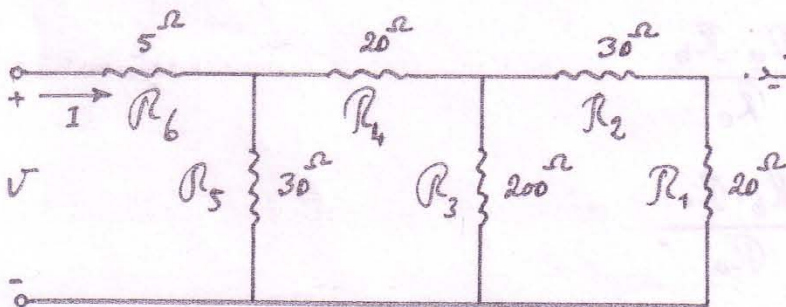
$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} \cdot I \quad , \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} \cdot I$$

دبطریق مشابه برای n مقاومت موازی نیز میتوان اثبات کرد.

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} \cdot I \quad , \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} \cdot I \quad \dots \quad I_n = \frac{R_{eq}}{R_n} \cdot I$$

یعنی در مقاومت‌های موازی جریان به نسبت عکس مقادیر هاین آف تقسیم میشود.

*** ج. ترکیب مختلط مقاومت ها :



به شبکه های معادلتی شکل زیر توجه کنید.

در مدار معادلتی بالا ترکیب مقاومت ها بصورت سری، موازی میباشد یعنی مقاومت های R_2, R_1 سری

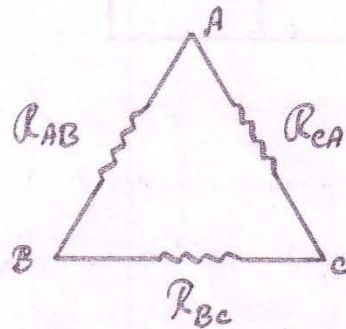
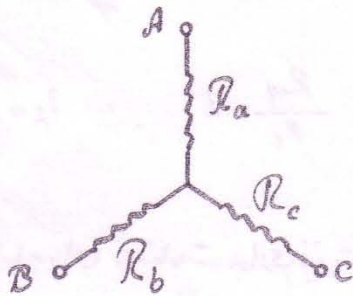
با هم و ترکیب سری R_2, R_1 موازی با R_3 و منتجه آف با سری با R_4 و مقاومت منتجه آف موازی با R_5

در حاصل آف با سری با R_6 میباشد بنابراین میتوان مقاومت معادل را شرح زیر مطالبه کرد.

$$R_{12} = 20 + 30 = 50^{\Omega} \quad , \quad R_{123} = \frac{50 \times 200}{50 + 200} = 40^{\Omega} \quad R_{1234} = 40^{\Omega} + 20^{\Omega} = 60^{\Omega}$$

$$R_{12345} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20^{\Omega} \quad R_{eq} = 5 + 20 = 25^{\Omega} \quad \underline{R_{eq} = 25^{\Omega}}$$

در شبکه های مقاومتی زیر مقاومت ها بصورت ستاره و مثلث با هم ترکیب شده اند



میوان با استفاده از ترکیب سری و موازی مقاومت ها از دیدگاه نقاط A, B, C, A, B, C

مقاومت ها را با هم دیگر تبدیل کرد.

●● تبدیل مقاومت های ستاره به مثلث: برای تبدیل مقاومت های ستاره γ به مثلث Δ از روابط زیر

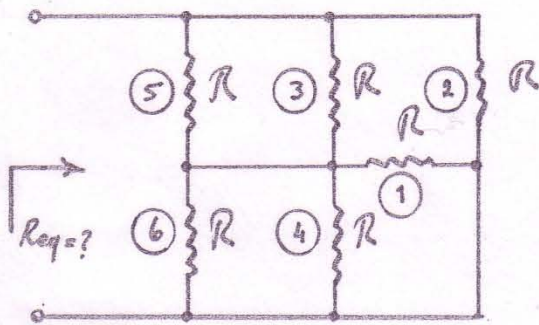
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{AB} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c} \\ R_{BC} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a} \\ R_{CA} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b} \end{array} \right. \quad \text{استفاده میشود.}$$

●● تبدیل مقاومت های مثلث به ستاره: برای تبدیل مقاومت های Δ به مقاومت های γ از روابط زیر

$$\left\{ \begin{array}{l} R_a = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\ R_b = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\ R_c = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \end{array} \right. \quad \text{استفاده میشود.}$$

چند مثال در مورد ترکیب مقارمت ها :

●●● مثال ۱- مقارمت معادل هر یک از مدارهای شکل زیر را معاینه کنید .

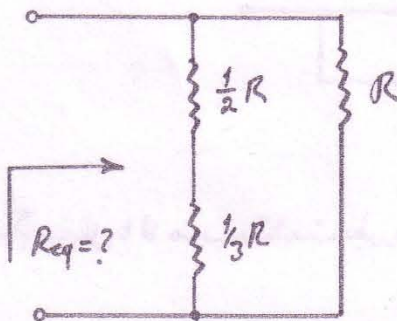


مقارمت های شماره ۱، ۴، ۶ برای با هم مقارمت ۳، ۵ نیز با هم معادینند لذا

$$R_{146} = \frac{1}{3} R \quad R_{35} = \frac{1}{2} R$$

حال با جایگزین کردن مقارمت معادل بجای هر کدام از ترکیب های یاد شده شکل مدار بصورت زیر خلاصه

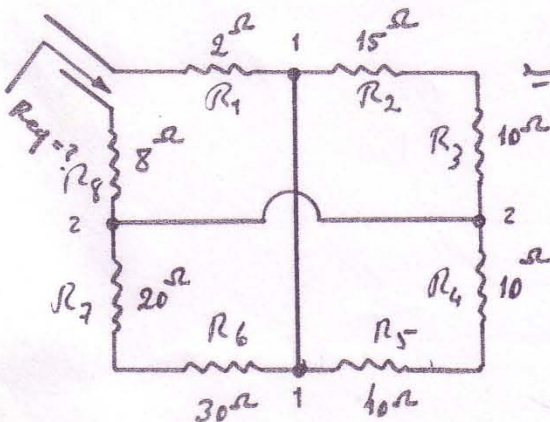
میشود .



$$R_{eq} = \frac{R \left(\frac{1}{2} R + \frac{1}{3} R \right)}{R + \left(\frac{1}{2} R + \frac{1}{3} R \right)} = \frac{5}{11} R$$

$$\underline{R_{eq} = \frac{5}{11} R}$$

●●● مثال ۲- مقارمت معادل شبکه مقارمتی شکل زیر را معاینه کنید



در شبکه مقاومتی بالا ترکیب سری مقاومت‌های R_2, R_3 با ترکیب سری مقاومت‌های R_4, R_5 و آن‌ها با ترکیب سری

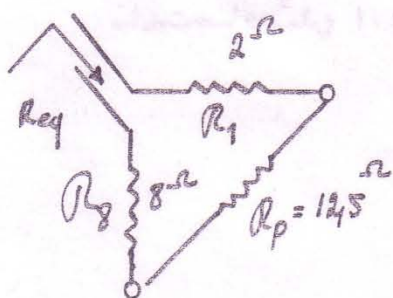
مقاومت‌های R_6, R_7 موازی‌ند لذا $R_{23} = R_2 + R_3 = 15 + 10 = 25 \Omega$

$R_{45} = R_4 + R_5 = 10 + 40 = 50 \Omega$

$R_{67} = R_6 + R_7 = 30 + 20 = 50 \Omega$

$R_p = ?$

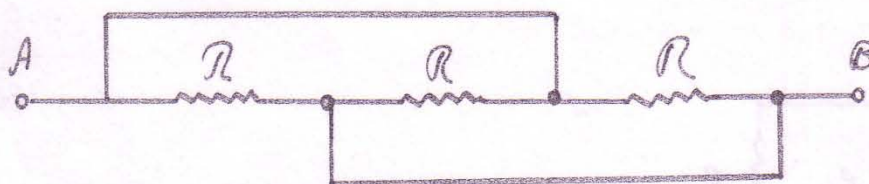
$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{45}} + \frac{1}{R_{67}} = \frac{1}{25} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} \quad \underline{R_p = 12.5 \Omega}$



$R_{eq} = 2 + 8 + 12.5$

$R_{eq} = 22.5 \Omega$

مثال ۳ - مقاومت معادل شبکه را نزدیک‌گاه در نقاط A, B محاسبه کنید.



در شبکه مثل بالا هر سه مقاومت بطور موازی با هم بین نقاط A, B واقع شده‌اند. لذا

$R_{eq} = \frac{1}{3} R$

●●● ب. روش‌های مختلف تحلیل شبکه‌های الکتریکی

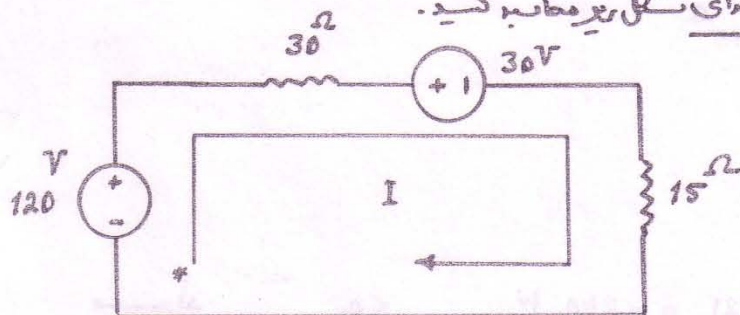
I - روش حلقه‌ای (معادلات جریان حلقه‌ها) II - روش نقطه‌ای (معادلات پتانسیل‌گره‌ها)

●●● مطالعه روش حلقه‌ای در تحلیل مدارهای الکتریکی:

در این روش از معادلات ولتاژهای کیرشوف KVL برای تحلیل شبکه استفاده می‌شود، بطوریکه برای

هر حلقه از شبکه یک جریان تعریف شده و پس معادلات KVL برای هر یک از حلقه‌ها بکار گرفته می‌شود.

●●● مثال ۱- جهت جریان I را در شبکه یک حلقه‌ای شکل زیر مطابق کنید.



جهت جریان I را در شبکه زیر جهت کاملاً اختیاری تعریف می‌کنیم و معادله ولتاژهای کیرشوف را در

حلقه تشکیل می‌دهیم. KVL $\oint I$: $-120 + 30I + 30 + 15I = 0$.

$$45I - 90 = 0. \quad \underline{I = 2 \text{ Amp}}$$

●●● ثانیاً اصل توان در شبکه مثال بالا بررسی کنید.

اصل توان توان‌ها - در یک شبکه همواره مجموع جبری توان‌ها صفر است. $\sum P = 0$.

●●● قضیه تلکان - اصل توازن توانها در هر شبکه بصورت دیگری نیز قابل تعریف است که

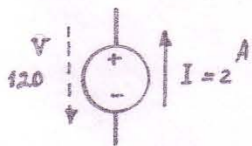
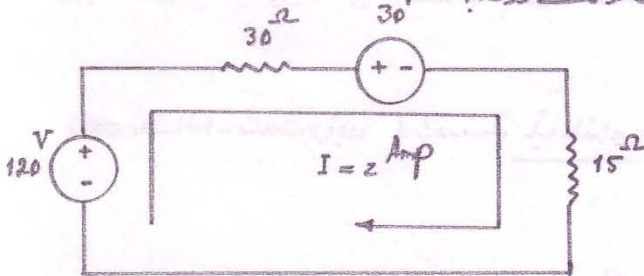
نحت عنوان قضیه تلکان نامیده میشود

$$\sum_{k=1}^n V_k \cdot I_k = 0.$$

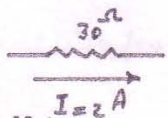
بر اساس این قضیه در هر شبکه رابطه زیر برقرار است.

در رابطه بالا n تعداد عناصر شبکه میباشد.

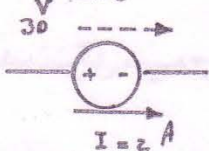
برای رتخیق صحت اصل توازن توانها در شبکه :



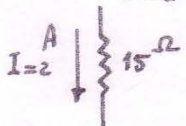
$$P_{120V} = -(120)(2) = -240 \text{ W} < 0. \quad \text{مولد}$$



$$P_{30\Omega} = +RI^2 = 30 \times 2^2 = 120 \text{ W} > 0. \quad \text{مصرف کننده}$$



$$P_{30V} = +(30)(2) = 60 \text{ W} > 0. \quad \text{مصرف کننده}$$



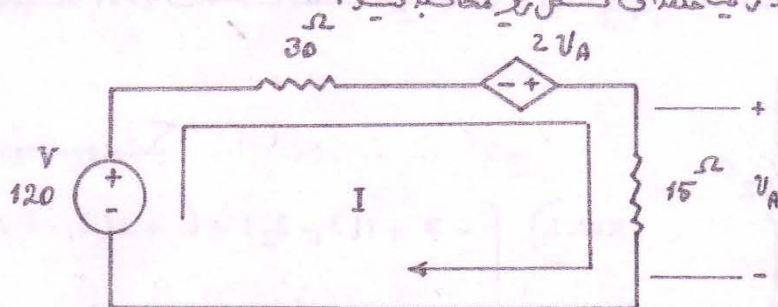
$$P_{15\Omega} = +RI^2 = 15 \times 2^2 = 60 \text{ W} > 0. \quad \text{مصرف کننده}$$

$$\sum P = -240 + 120 + 60 + 60 = 0. \quad \sum P = 0.$$

برای موضع تربط رابطه تلکان :

$$\sum_{k=1}^4 V_k I_k = 0. \quad -(120)(2) + (60)(2) + (30)(2) + (30)(2) = 0.$$

●●● مثال ۲- شدت جریان I را در مدار زیر محاسبه کنید.



— تحلیل شبکه:

$$\text{KVL } (I) : -120 + 30I - 2V_A + 15I = 0.$$

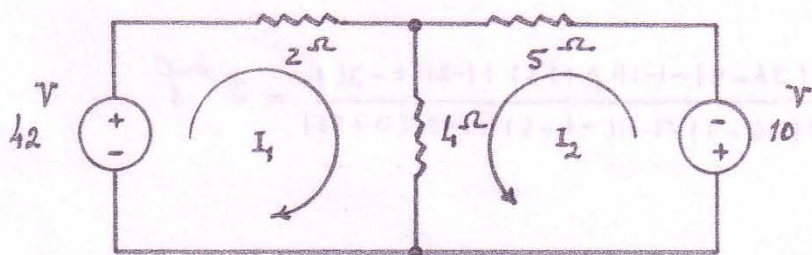
$$V_A = 15I \quad \text{تأثیر اهم در تقاربت } 15\Omega$$

$$-120 + 30I - 2(15I) + 15I = 0.$$

$$I = 8 \text{ Amp}$$

تمرین - صحت اصل توازن توان را در شبکه مثال بالا تحقیق کنید.

●●● مثال ۳- با استفاده از روش حلقه‌ای در مدار در حلقه‌ای شکل زیر شدت جریانهای I_1 ، I_2 را محاسبه کنید.

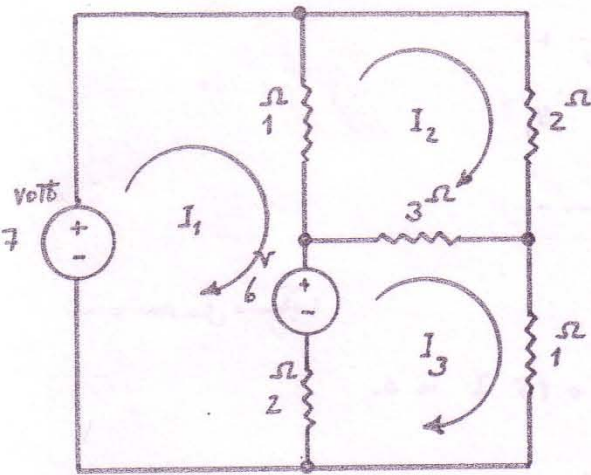


— تحلیل شبکه:

$$\begin{aligned} \text{KVL } (I_1) & \left\{ \begin{aligned} -42 + 2I_1 + 4(I_1 + I_2) &= 0. \\ 6I_1 + 4I_2 &= 42 \end{aligned} \right. \\ \text{KVL } (I_2) & \left\{ \begin{aligned} +10 + 5I_2 + 4(I_2 + I_1) &= 0. \\ 4I_1 + 9I_2 &= -10 \end{aligned} \right. \end{aligned} \rightarrow$$

از حل معادلات بالا $I_2 = -6 \text{ Amp}$ ، $I_1 = 11 \text{ Amp}$ می‌شود.

●●● مثال ۴- بروش قطری شدت جریانه‌های I_1, I_2, I_3 را محاسبه کنید.



تحلیل شبکه:

$$\begin{cases} \text{KVL } I_1 \rightarrow -7 + 1(I_1 - I_2) + 6 + 2(I_1 - I_3) = 0 \\ \text{KVL } I_2 \rightarrow 1(I_2 - I_1) + 2I_2 + 3(I_2 - I_3) = 0 \\ \text{KVL } I_3 \rightarrow -6 + 3(I_3 - I_2) + 1(I_3) + 2(I_3 - I_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3I_1 - I_2 - 2I_3 = 1 \\ -I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0 \\ -2I_1 - 3I_2 + 6I_3 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

●●● محاسبه مقادیر I_1, I_2, I_3 با استفاده از روش دترمینانها:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1(36-9) - (-1)(6+18) + (-2)(0-36)}{3(36-9) - (-1)(-6-6) + (-2)(3+12)} = 3 \text{ Amp}$$

بروش شدت جریانه‌های $I_2 = 2 \text{ Amp}$ ، $I_3 = 3 \text{ Amp}$ تعیین می‌شود.

فرمول کلی برای تشکیل فم ماتریسی معادلات مربوط به جریان حلقه‌ها:

در شبکه‌هایی که فاقد منابع جریان و منابع وابسته می‌توان فم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را تشکیل داد.

*** برای شبکه های n حلقه ای فاقد منابع جریان و منابع وابسته فرمول کلی فرم ماتریسی معادلات مربوط به:

جریان حلقه ها شرح زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} +R_{11} & \pm R_{12} & \pm R_{13} & \dots & \pm R_{1n} \\ \pm R_{21} & +R_{22} & \dots & \dots & \pm R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \pm R_{n1} & \pm R_{n2} & \dots & \dots & +R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \vdots \\ E_{nn} \end{bmatrix}$$

*** در ماتریس های بالا: I_1, I_2, \dots, I_n شدت جریان حلقه ها

R_{11} مجموع مقادیرت های رآم در حلقه 1

R_{nn} مجموع مقادیرت های رآم در حلقه n

R_{13} مجموع مقادیرت های رآم در فصل مشترک حلقه های اول و سوم

E_{11} مجموع نیروی محرکه های رآم در حلقه 1

E_{nn} مجموع نیروی محرکه های رآم در حلقه n

— در فرم ماتریسی بالا علامت ضرایب $R_{11}, R_{22}, R_{33}, \dots, R_{nn}$ همواره مثبت ولی علامت ضرایب

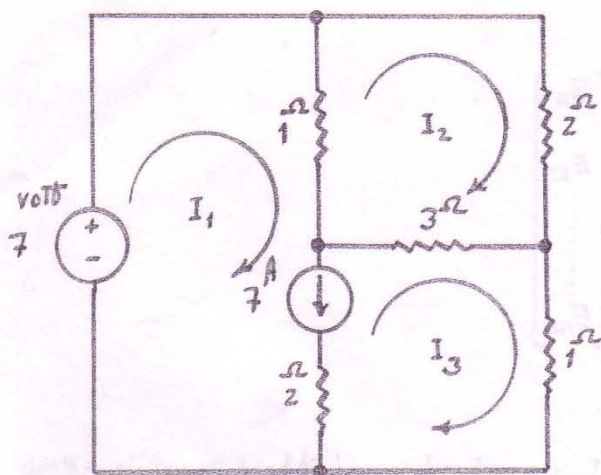
$R_{1j} \ (j \neq 1)$ بر حسب شدت جریان حلقه ها می تواند مثبت یا منفی باشد. مثلاً اگر جهت جریانی

حلقه های اول و سوم در مقاربت R_{13} موافق هم باشد علامت R_{13} مثبت و در غیر این صورت علامت آن منفی

خواهد بود.

□ ترین - با استفاده از فرمول کلی فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را در شبکه مثال بالا تشکیل دهید.

●●● مثال ۵ - مطلوبیت فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها در شبکه شکل زیر:



— تحسین شبکه :

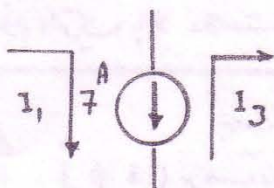
در شبکه داده شده معادلات KVL را در حلقه‌های اِتل رسمیم بواسطه حضور منبع جریان 7 Amp می‌توان

تشکیل داد. و فقط تشکیل KVL در حلقه دوم معتبر می‌باشد.

بنابراین برای تشکیل معادله بشرح زیر باید عمل کرد.

KVL ↻ حلقه دوم : $1(I_2 - I_1) + 2(I_2) + 3(I_2 - I_3) = 0.$ (معادله 1)

KVL ↻ حلقه کلی : $-7 + 2(I_2) + 1(I_3) = 0.$ (معادله 2)

 : $I_1 - I_3 = 7$ (معادله 3)

انزال معادلات : $I_1 = 9 \text{ Amp}$

$I_2 = 2.5 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ Amp}$

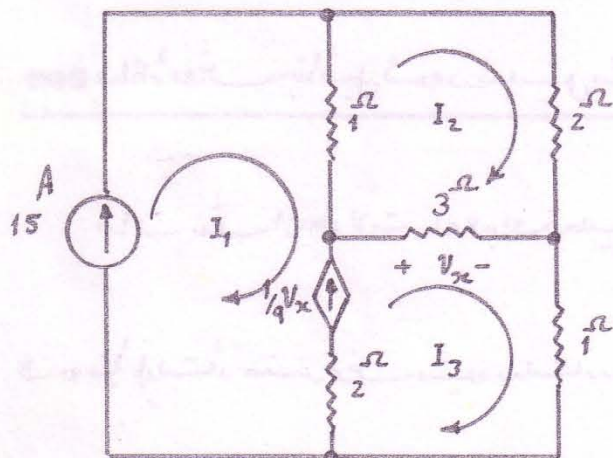
$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی معادلات :

— توجه داشته باشید فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را بتوان متغیاً از روی شبکه و یک جدول کلی

بدست آورد. ابطاعده حضورینم جریان 7 Amp

●●● مثال ۶ - فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه‌ها را در شبکه شکل زیر تشکیل دهید.

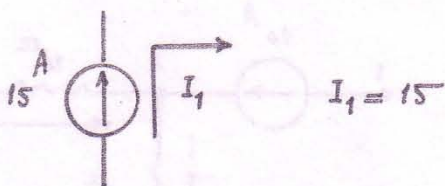


— تحلیل شبکه: بازهم در شبکه بالا بواسطه حضور منابع جریان مستقل 15 Amp وابسته $\frac{1}{4} V_x$ معادلات

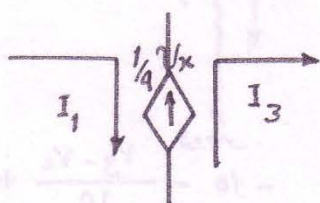
KVL را مختار در حلقه‌های اول و دوم و حتی حلقه کلی تشکیل داد.

بنابراین برای تشکیل معادله بر حسب جریان حلقه‌ها بشرح زیر عمل میکنیم.

KVL حلقه دوم: $1(I_2 - I_1) + 2(I_1) + 3(I_2 - I_3) = 0$ (معادله ۱)

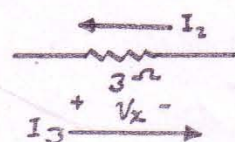


$I_1 = 15$ (معادله ۲)



$I_3 - I_1 = \frac{1}{4} V_x$

$V_x = 3(I_3 - I_2)$



$3I_1 - I_2 - 2I_3 = 0$ (معادله ۳)

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی معادلات جریان حلقه ها:

انزال معادلات: $I_1 = 15^A$, $I_2 = 11^A$, $I_3 = 17^A$ تعیین میشود.

●●● مطالعه روش پتانسیل گره در تحلیل شبکه ها:

در این روش از معادلات KCL برای تحلیل شبکه استفاده میکنند. در این روش یک گره بعنوان

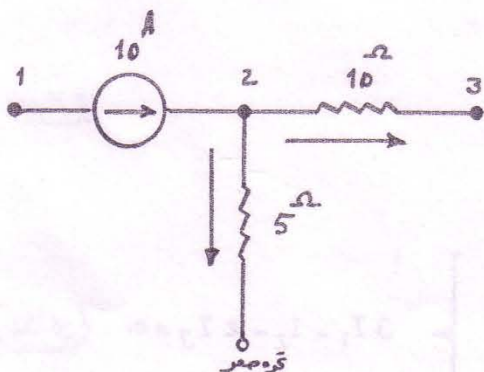
گره مبدا یا ولتاژ صفر فرض میشود و ولتاژ سایر گره ها نسبت به گره فوق محاسب میشود. بنابراین

برای یک شبکه با n گره $(n-1)$ معادله KCL نوشته میشود و از حل معادلات فرق پتانسیل گره ها محاسب میشود.

در تشکیل معادله KCL در هر گره عمده جریان تمام شاخه های غیر فعال را با علامت ها در جهت دور شدن

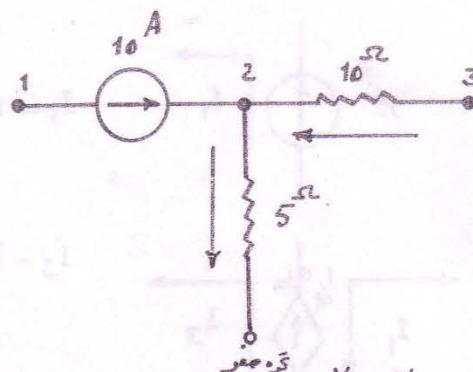
از گره فرض میشود

— شکل زیر نشان میدهد که جهت فرض برای جریان شاخه ها همواره نتیجه درستی خواهد داشت.



$$KCL\ 2: -10 + \frac{V_2 - V_3}{10} + \frac{V_2}{5} = 0.$$

$$0,3 V_2 - 0,1 V_3 = 10$$

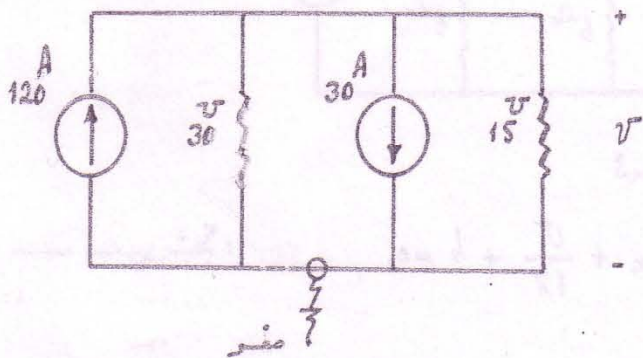


$$KCL\ 2: -10 - \frac{V_3 - V_2}{10} + \frac{V_2}{5} = 0.$$

$$0,3 V_2 - 0,1 V_3 = 10$$

تحلیل تقطری شبکه‌ها با دو گره:

مثال ۱ - با استفاده از روش تقطری این شبکه را تحلیل کنید.

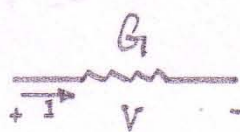
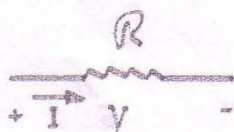


تحلیل شبکه:

گره اصلی KCL: $-120 + 30V + 30 + 15V = 0.$

$V = 2 \text{ Volt}$

توجه داشته باشید که در شبکه فوق بجای مقاومت، هدایت هرتز خذ تعریف شده است.



$G = \frac{1}{R}$

$V = RI$

$I = \frac{V}{R}$

$V = RI \Rightarrow V = \frac{1}{G} I$

$I = G \cdot V$

$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$

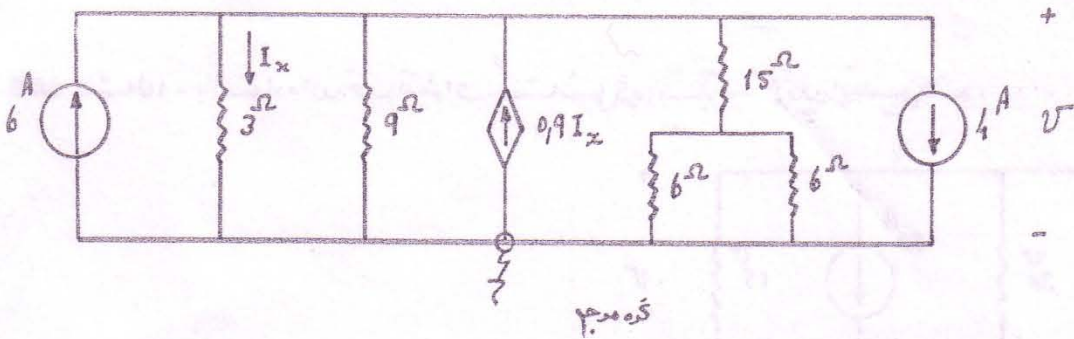
$P = GV^2$

بررسی و تحقیق اصل توازن توانها:

$\Sigma P = 0. \quad -(120 \times 2) + (30 \times 2^2) + (30 \times 2) + (15 \times 2^2) = 0.$

$-240 + 120 + 60 + 60 = 0.$

*** مثال ۲- ولتاژ V را در شبکه شکل زیر محاسب کنید.

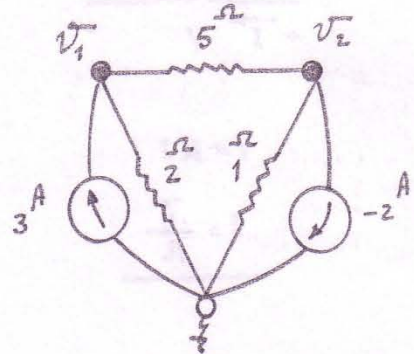
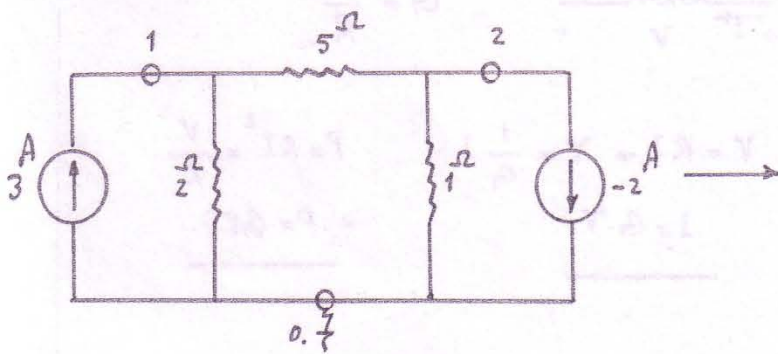


تحلیل شبکه: —
 KCL : $-6 + \frac{V}{3} + \frac{V}{9} - 0.9I_x + \frac{V}{18} + 4 = 0.$ گره اصلی

$I_x = \frac{V}{3} \rightarrow -6 + \frac{V}{3} + \frac{V}{9} - 0.9 \frac{V}{3} + \frac{V}{18} + 4 = 0. \quad \underline{V = 10 \text{ Volt}}$

تحلیل تقطری شبکه‌های الکتریکی با n گره:

*** مثال ۳- فرم ماتریس معادلات مربوط به پتانسیل گره‌ها را در شبکه شکل زیر تشکیل دهید.

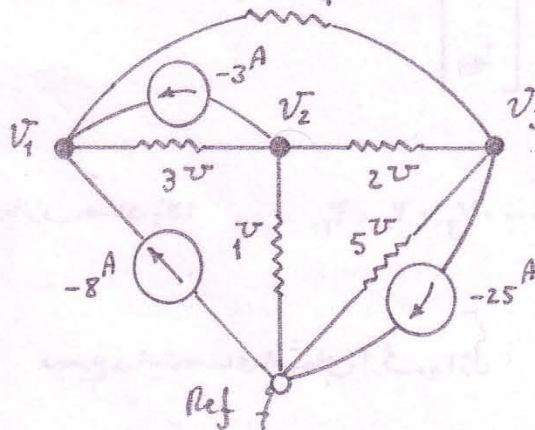
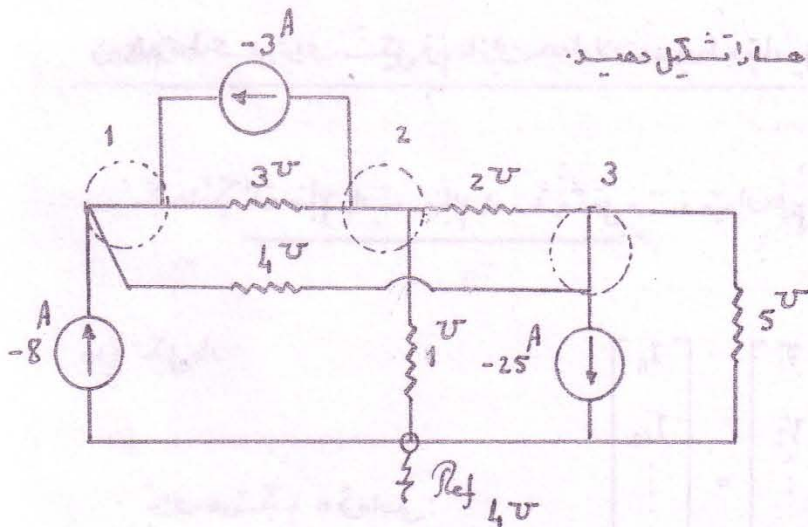


تحلیل شبکه: —
 KCL 1: $-3 + \frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - V_2}{5} = 0.$

KCL 2: $+(-2) + \frac{V_2}{1} + \frac{V_2 - V_1}{5} = 0.$

$$\begin{cases} 0.7V_1 - 0.2V_2 = 3 \\ -0.2V_1 + 1.2V_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = 5 \text{ Volt} \\ V_2 = 2.5 \text{ Volt} \end{cases}$$

●●● مثال ۴ - فرم ماتریسی معادلات پتانسیل گره ها را تشکیل دهید.



تحلیل گره:

$$\begin{aligned} \text{KCL 1: } & -(-8) - (-3) + 3(V_1 - V_2) + 4(V_1 - V_3) = 0 \\ \text{KCL 2: } & +(-3) + 3(V_2 - V_1) + 1(V_2) + 2(V_2 - V_3) = 0 \\ \text{KCL 3: } & +(-25) + 5(V_3) + 2(V_3 - V_2) + 4(V_3 - V_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 7V_1 - 3V_2 - 4V_3 = -11 \\ -3V_1 + 6V_2 - 2V_3 = 3 \\ -4V_1 - 2V_2 + 11V_3 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ماتریس هدایت ها

3x3

ماتریس جریان ها

3x1

ماتریس پتانسیل گره ها

3x1

از حل معادلات بالا $V_3 = 3 \text{ Volt}$ ، $V_2 = 2 \text{ Volt}$ ، $V_1 = 1 \text{ Volt}$ نتیجه میشود.

میتوان فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها را مستقیماً با استفاده از فرمول کلی تشکیل داد.

●●● فرمول کلی برای تشکیل فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها:

در شبکه هایی که فاقد منابع وابسته و منابع ولتاژ متصل هستند می توان فرم ماتریسی معادلات پتانسیل گره ها را طبق فرمول

زیر تشکیل داد:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & \dots & -G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \vdots \\ I_{nn} \end{bmatrix}$$

برای هر شبکه با n گره اصلی:

در ماتریس های بالا: $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ پتانسیل گره های اصلی شبکه

G_{11} مجموع هدایت های انشعابی از گره اول

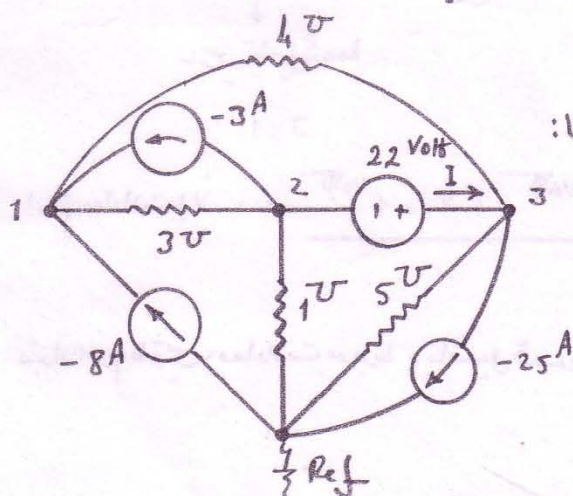
G_{nn} مجموع هدایت های انشعابی از گره n ام

G_{ij} ($i \neq j$) مجموع هدایت های و آم بین گره های i و j

I_{11} مجموع جریان های شبکه از طریق منابع فعال به گره 1 وارد میشوند.

I_{nn} مجموع جریان های شبکه از طریق منابع فعال به گره n وارد میشوند.

●●● مثال - مطلوبیت فرم ماتریسی معادلات مربوط به پتانسیل گره ها:



— تحلیل مدار: بواسطه حضور منبع ولتاژ متصل 22^V نمی توان فرم ماتریسی معادلات پتانسیل گره ها را با استفاده

انفرمول کلی بدست آورد.

همچنین حضور منبع 22^V مابین گره های اصلی 2، 3 باعث میشود که نتوان معادلات KCL را در این گره ها

نوشت. به معادلات زیر توجه کنید. $KCL\ 1: -(-8) - (-3) + 3(V_1 - V_2) + 4(V_1 - V_3) = 0.$

معادله 1

غیر قابل استفاده $KCL\ 2: +(-3) + 3(V_2 - V_1) + 1(V_2) + ? = 0.$

غیر قابل استفاده $KCL\ 3: +(-25) + 5(V_3) + 4(V_3 - V_1) + ? = 0.$

ملاحظه کنید ملاحظه میشود از معادلات بالا فقط معادله KCL در گره 1 قابل استفاده بوده و ما حتی عملاً یک بار

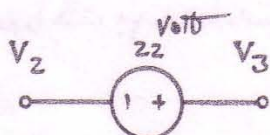
گرفته میشود. البته میتوان با تعریف جریان I در منبع 22^V رنگی ترکیب معادله KCL 2، معادله KCL 3 به معادله دیگری برید.

توجه کنید. $KCL\ 2: +(-3) + 3(V_2 - V_1) + 1(V_2) + I = 0.$

+

$KCL\ 3: +(-25) + 5(V_3) + 4(V_3 - V_1) - I = 0.$

معادله 2 $+(-3) + (-25) + 3(V_2 - V_1) + 5(V_3) + 1(V_2) + 4(V_3 - V_1) = 0.$



معادله 3 با استفاده از منبع 22^V را با توجه به ولتاژ گره های 2، 3 نوشته میشود.

$$V_3 - V_2 = +22$$

معادله 3

حال با حل سه معادله بالا ولتاژهای V_3 ، V_2 ، V_1 محاسبه میشود.

*** تعریف فوق‌گروه: در هر شبکه دو گروه اصلی داریم بین آنها می‌توان یک فوق‌گروه را تعریف کرد.

دقت: k_{CL} را برای آن نوشت.

تشکیل معادله 2 بکجک تعریف فوق‌گروه:

k_{CL} فوق‌گروه: $+(-3) + 3(V_2 - V_1) + 1(V_2) + (-25) + 5(V_3) + 4(V_3 - V_1) = 0.$

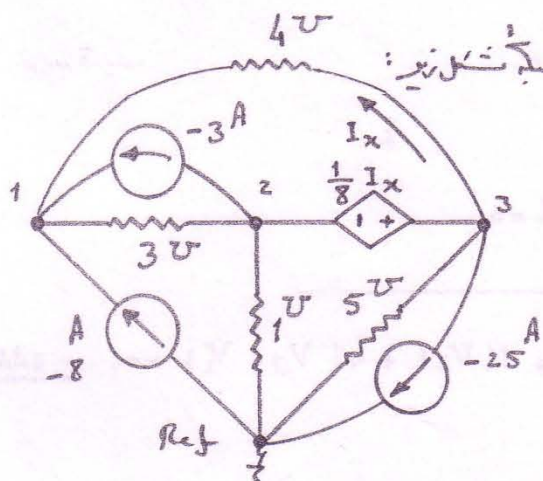
تشکیل هم‌ماتری معادلات مربوط به پتانسیل‌گروه‌ها:

$$\begin{cases} 7V_1 - 3V_2 - 4V_3 = -11 \\ -7V_1 + 4V_2 + 9V_3 = 28 \\ 0V_1 - V_2 + V_3 = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 28 \\ 22 \end{bmatrix}$$

هم‌ماتری معادلات:

از حل ماتریس بالا V_3, V_2, V_1 محاسبه می‌شوند.

*** مثال 6- مطلوبیت محاسبه ولتاژهای V_3, V_2, V_1 در شبکه شکل زیر:



تحلیل شبکه: معادله k_{CL} در گروه 1، فوق‌گروه 2 و 3،

معادله سوم را بکجک هم‌ولتاژ را به در معادله تشکیل می‌دهیم.

معادله 1: $k_{CL1}: -(-3) - (-8) + 3(V_1 - V_2) + 4(V_1 - V_3) = 0.$

معادله 2: $k_{CL2}: +(-3) + 1(V_2) + 3(V_2 - V_1) + 5(V_3) + (-25) + 4(V_3 - V_1) = 0.$

معادله 3: k_{CL3} در هم‌ولتاژ: $V_3 - V_2 = \frac{1}{8} I_x$, $I_x = 4(V_3 - V_1) \rightarrow V_1 - 2V_2 + V_3 = 0.$

هم‌ماتری معادلات بالا:

$$\begin{bmatrix} +7 & -3 & -4 \\ -7 & +4 & +9 \\ +1 & -2 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس هدایت‌ها

ماتریس جریماها

ماتریس پتانسیل‌ها

— از حل معادلات بالا، ترازهای V_1, V_2, V_3 مطالبه میشوند

$$V_1 = 1 \text{ Volt}, \quad V_2 = 2 \text{ Volt}, \quad V_3 = 3 \text{ Volt}$$

*** خاصیت خطی و جهم آثار:

●● الف - خاصیت خطی:

در هر شبکه با عناصر خطی نسبت با هم تحریک به پاسخ آن در هر نقطه از شبکه مقداریت ثابت. بطریقی اگر

مقدار توان تحریک شبکه k برابر شود، پاسخ آن نیز در هر موقعیت از شبکه k برابر خواهد شد.

با استفاده از خاصیت خطی میتوان قضیه جهم آثار را در شبکه های خطی بصورت زیر بیان کرد.

●● ب - قضیه جهم آثار:

در هر شبکه خطی با چندین با هم تحریک، شدت جریان یا اختلاف پتانسیل در هر یکی از عناصر شبکه

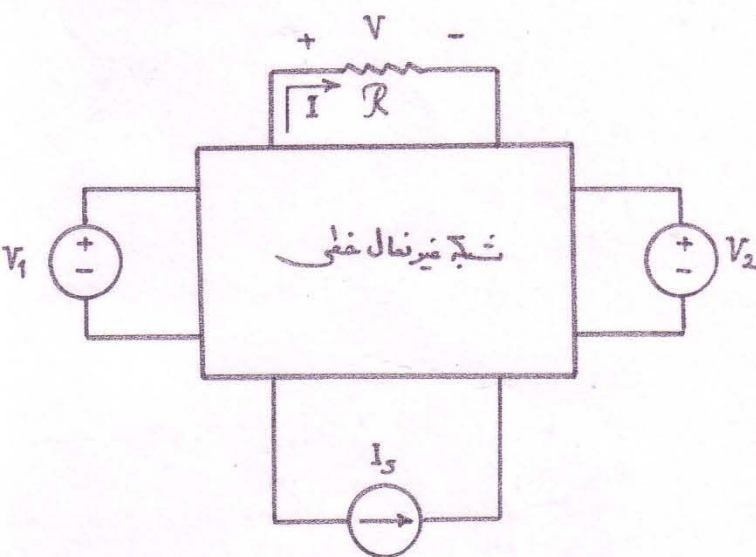
انجم میبری شدت جریان یا اختلاف پتانسیل های ایجاد میشود که هر کدام از منابع (توانم تحریک) به

تلفاتی در آن عنصر ایجاد میکنند.

● برای محاسبه پاسخ مربوط به هر منبع تحریک

باید تمام ولتاژ دیگر را اتصال کوتاه و منابع جریان

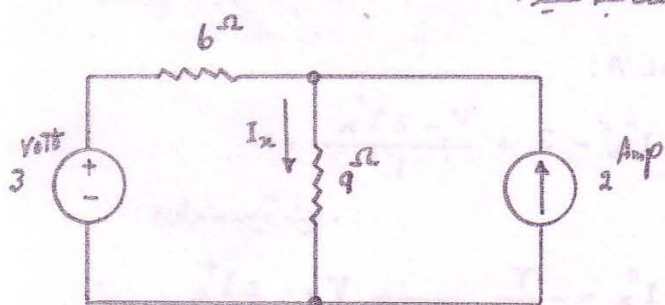
را باز کرد.



$$I = I_1 \left| \begin{array}{c} + I_2 \\ \text{توسط منبع ولتاژ } V_1 \end{array} \right| + I_3 \left| \begin{array}{c} \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \\ \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \end{array} \right| + I_3 \left| \begin{array}{c} \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \\ \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \end{array} \right|$$

$$V = V_1' \left| \begin{array}{c} + V_2' \\ \text{توسط منبع ولتاژ } V_1 \end{array} \right| + V_2' \left| \begin{array}{c} \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \\ \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \end{array} \right| + V_3' \left| \begin{array}{c} \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \\ \text{توسط منبع ولتاژ } V_2 \end{array} \right|$$

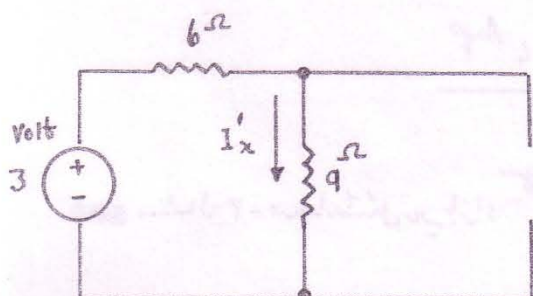
●●● مثال ۱- شدت جریان I_x را با استفاده از تئوری همپ آثر محاسب کنید.



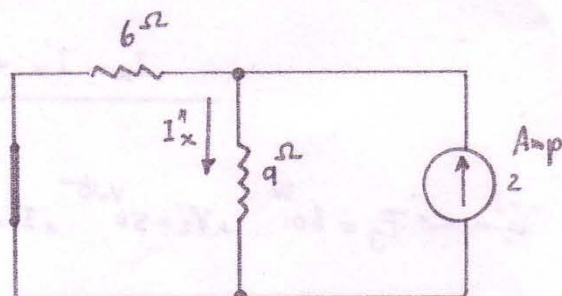
— تعیین شبکه:

$$I_x = I'_x \Big|_{3V} + I''_x \Big|_{2A}$$

تربط ۳V تربط ۲A



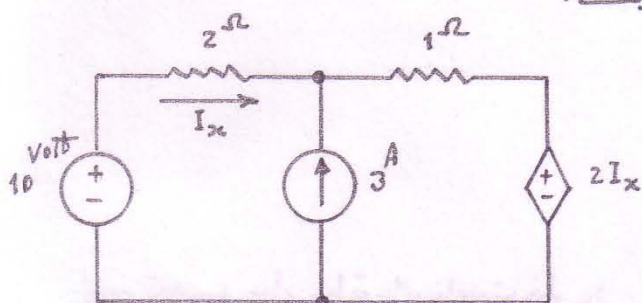
$$I'_x = \frac{3}{6+9} = 0,2 \text{ Amp}$$



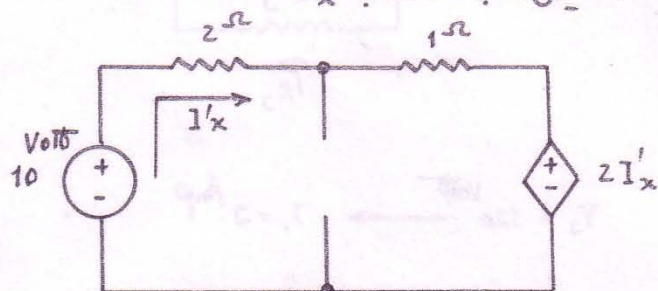
$$I''_x = \frac{6}{6+9} \times 2 = 0,8 \text{ Amp}$$

$$I_x = 0,2 + 0,8 = 1 \text{ Amp}$$

●●● مثال ۲- مطلوبت محاسب I_x با استفاده از اصل همپ اثرها:

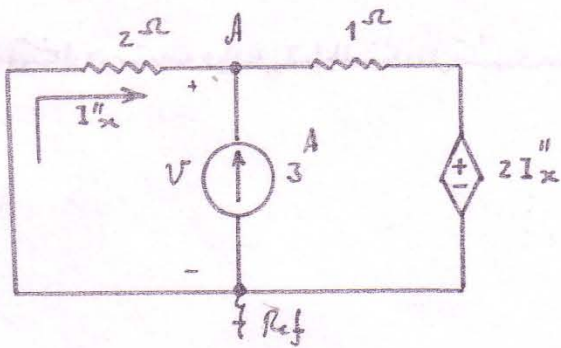


— تعیین شبکه: محاسب I'_x



$$\text{KVL } \bigcirc : -10 + 2I'_x + 1I'_x + 2I'_x = 0.$$

$$I'_x = 2 \text{ Amp}$$



ب - محاسبه I''_x :

KCL A:

$$-I''_x - 3 + \frac{V - 2I''_x}{1} = 0.$$

از طرف دیگر داریم:

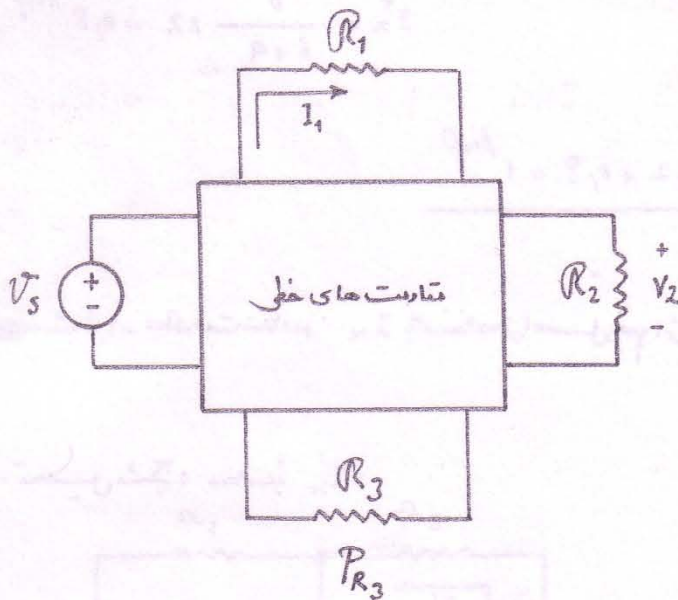
$$I''_x = -\frac{V}{2} \rightarrow V = -2I''_x$$

$$-I''_x - 3 - 2I''_x - I''_x = 0. \quad \underline{I''_x = -0,6 \text{ Amp}}$$

$$\underline{I_x = I'_x + I''_x = 2 - 0,6 = 1,4 \text{ Amp}}$$

مثال ۳ - در مدار شکل زیر، $V_2 = 50 \text{ Volt}$ و $I_1 = 3 \text{ Amp}$ و $V_S = 120 \text{ Volt}$ و $P_3 = 60 \text{ W}$ می‌شود.

حال اگر V_S را کاهش داده به 105 Volt برسانیم مقادیر جدید I_1 ، V_2 ، P_3 را بدست آورید.



تحلیل مدار - با توجه به خاصیت خطی:

$$V_S = 120 \text{ Volt} \rightarrow I_1 = 3 \text{ Amp}, \quad V_2 = 50 \text{ Volt}, \quad P_3 = 60 \text{ W}$$

$$V_S = 105 \text{ Volt} \rightarrow I_1 = \frac{105}{120} \times 3 = 2,625 \text{ A}, \quad V_2 = \frac{105}{120} \times 50 = 43,75 \text{ Volt}$$

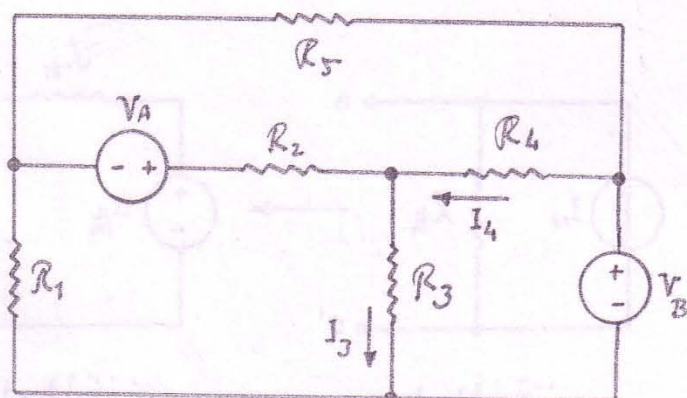
$$P_3 = \left(\frac{105}{120}\right)^2 \times 60 = 45,94 \text{ W}$$

●●● مثال ۴- در مدار شکل زیر: اگر $V_A = 20^V$ ، $V_B = 0$ باشد، مقدار $I_3 = 1,5 \text{ Amp}$ است. اگر

$V_A = 50^V$ ، $V_B = 0$ باشد، I_3 چند آمپر خواهد بود.

ثانیاً اگر $V_A = 20^V$ ، $V_B = 50^V$ باشد، $I_4 = 2 \text{ Amp}$ است. اگر $V_A = 50^V$ ، $V_B = 20^V$

باشد $I_4 = -1^A$ است. اگر $V_A = 30^V$ ، $V_B = 100^V$ باشد، I_4 را مطابق کنید.



— تصویر شبیه: الف —

$$V_A = 20^V , V_B = 0 \rightarrow I_3 = 1,5 \text{ Amp} \xrightarrow{\text{خاصیت خطی}} V_A = 50^V , V_B = 0 \rightarrow I_3 = \frac{50}{20} \times 1,5$$

$$V_A = 20^V , V_B = 50^V \rightarrow I_4 = 2^A$$

$$V_A = 50^V , V_B = 20^V \rightarrow I_4 = -1^A$$

$$V_A = 30^V , V_B = 100^V \rightarrow I_4 = ?$$

با استفاده از خاصیت خطی در شبکه ها:

$$\begin{cases} 20K_1 + 50K_2 = 2 \\ 50K_1 + 20K_2 = -1 \end{cases}$$

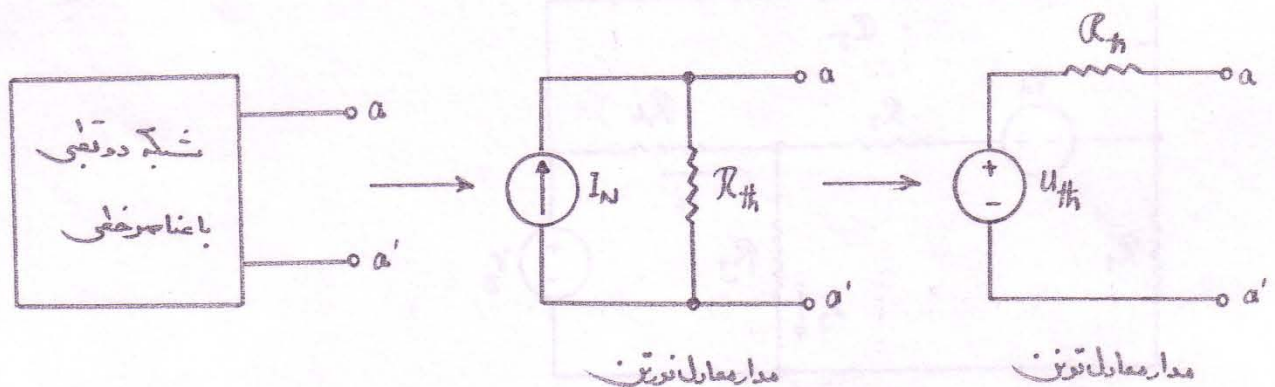
$$\begin{cases} K_1 = -\frac{4,5}{105} \\ K_2 = \frac{6}{105} \end{cases}$$

$$I_4 = 30K_1 + 100K_2 = 30 \times \frac{-4,5}{105} + 100 \times \frac{6}{105} = 4,429 \text{ Amp}$$

هرگاه یک شبکه با عناصر خطی را از دیدگاه دو نقطه a, a' مطابق شکل بصورت یک منبع ولتاژ با یک

مقاومت سری مدلازی کنیم. مدار معادل تون آن شبکه را تعریف کرده ایم را اگر بخواهید آن را بصورت

یک منبع جریان با مقاومت موازی مدلازی کنیم مدار معادل نون شبکه را بدست آورده ایم.



ولتاژ تون V_{th} ، جریان نون I_N ، و R_{th} مقاومت تون را میتوان از روابط زیر محاسبه کرد.

$$\begin{array}{lll} 1 \quad V_{th} = V_{aa'} \Big|_{I_{aa'}=0} & 2 \quad I_N = I_{aa'} \Big|_{V_{aa'}=0} & 3 \quad R_{th} = R_{eq \, aa'} \Big|_{\substack{= \frac{V_{th}}{I_N} \\ \text{! حتماً نام}} \end{array}$$

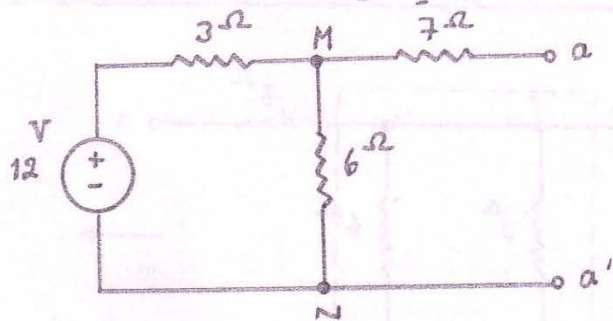
میتوان گفت ولتاژ تون ولتاژی است که توسط ولتسر در نقاط a, a' سنجیده میشود و همچنین جریان

نون I_N جریان سنجش شده توسط آمپر سر در موقعیت a, a' باشد.

برای محاسبه مدار معادل تون و نون علاوه بر روابط بالا میتوان از روش تبدیل منابع، روش معادله

شخص استفاده کرد. مثالهای زیر این روشها را نشان میدهند.

●●● مثال ۱- مطلوبت معادله مدار معادل تونن و نوشتن شبکه شکل زیر از دیدگاه a, a' :



تحلیل شبکه: معادله مدار معادل تونن و نوشتن با استفاده از روابط تعریف شده:

۱) $V_{th} = V_{aa'} \Big|_{I_{aa'} = 0}$ $I_{aa'} = 0 \longrightarrow V_{aa'} = V_{MN} = \frac{6}{3+6} \times 12 = 8 \text{ Volt}$

$V_{th} = 8 \text{ Volt}$

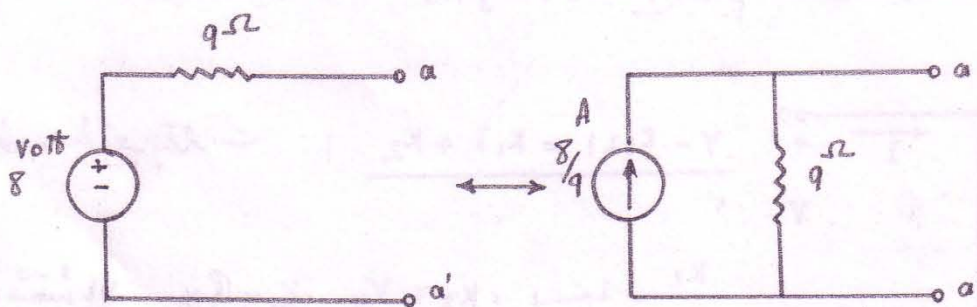
۲) $I_{sc} = I_{aa'} \Big|_{V_{aa'} = 0}$ با اتصال کوتاه کردن a, a' مقدار ایجا در شرط $V_{aa'} = 0$.

برای معادله I_{sc} باید شبکه درحالتی شکل شده تحلیل شود، که این روش نسبتاً طولانی است لذا از رابطه

(۳) ابتدا R_{th} را معادله ریس I_{sc} را با استفاده از رابطه $I_{sc} = \frac{V_{th}}{R_{th}}$ معادله میکنیم.

۳) $R_{th} = R_{eqaa'} \Big|_{\text{منبع ۱۲V اتصال کوتاه}}$ $= 7 + \frac{6 \times 3}{6+3} = 9 \Omega$ $R_{th} = 9 \Omega$

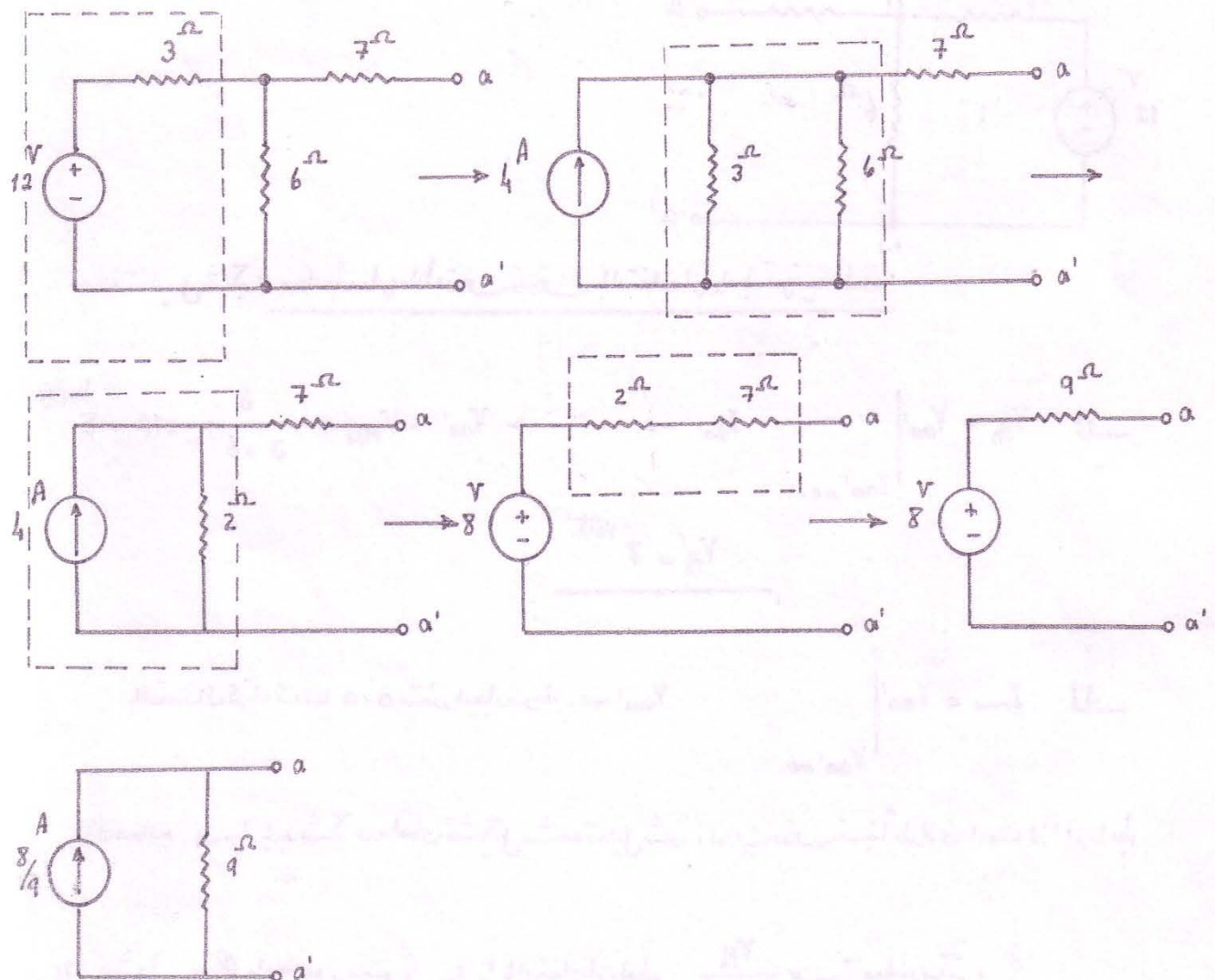
۴) $I_{sc} = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{8}{9} \text{ A}$ $I_{sc} = \frac{8}{9} \text{ Amp}$



مدار معادل تونن

مدار معادل نونن

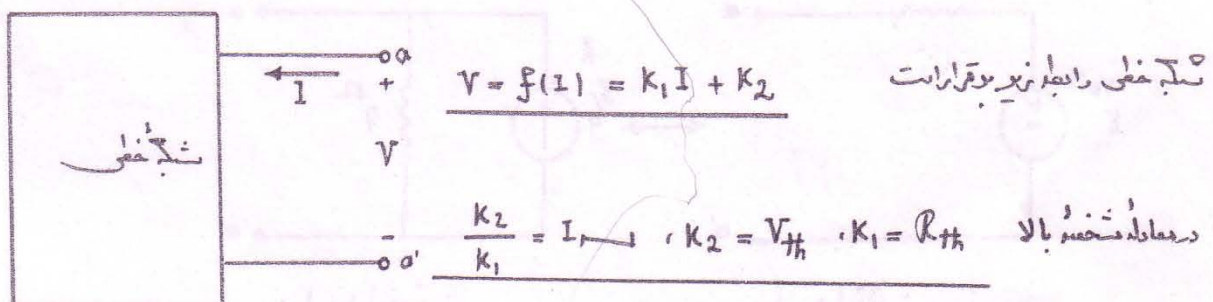
روش دوم - معاینه مدار معادلتهای دوتن درون با استفاده از روش تبدیل نیام :



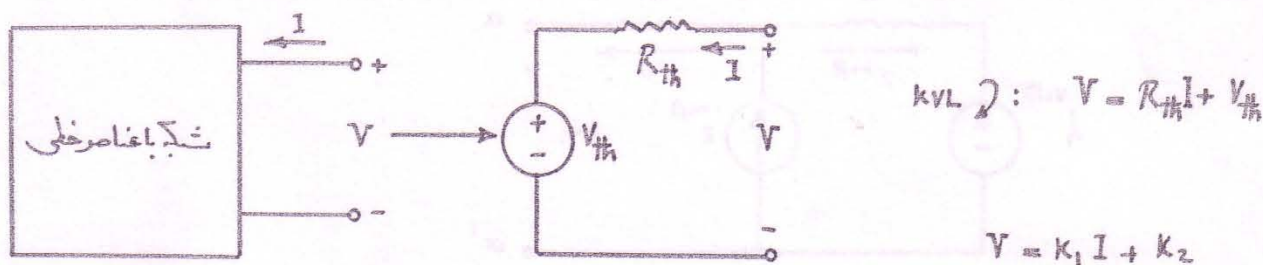
روش سوم - روش معادله مشخصه :

در این روش شبکه را از دیدگاه نقاط a, a' به ولتاژ V وصل کرده سپس با فرض اینکه شبکه جریان I

به آن به ولتاژ V دریافت میکند رابطه $V = f(I)$ را تشکیل میدهیم. با دقت میتوان اثبات کرد که برای هر



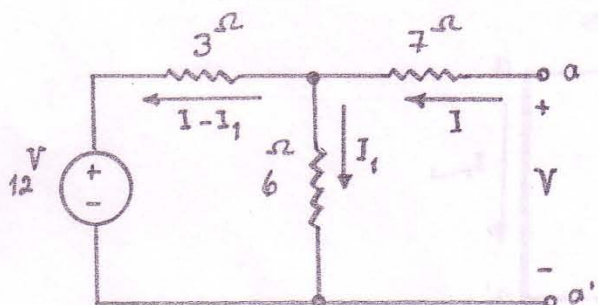
برای اثبات مطلب فوق کافیت مدار معادل تونن شبکه را در نظر گرفته و معادله KVL را تشکیل میدهیم.



معادله روابط بالا نشان میدهد که

$$K_1 = R_{th} \quad , \quad K_2 = V_{th} \quad , \quad I_L = \frac{K_2}{K_1}$$

روش معادله شخصه در معادله مدار معادل تونن و نوتن:



برای تشکیل رابطه $V = f(I) = K_1 I + K_2$

معادلات KVL را در حلقه های شخص شده در

شکل تشکیل میدیم.

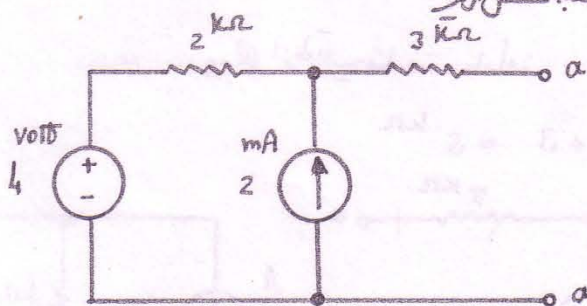
$$\text{KVL } \zeta 1: \begin{cases} V = 7I + 6I_1 \end{cases}$$

با حذف $I_1 \rightarrow V = 9I + 8$

$\text{KVL } \zeta 2: \begin{cases} V = 7I + 3(1 - I_1) + 12 \end{cases}$

بنابراین: $I_L = \frac{K_2}{K_1} = \frac{8}{9} \text{ Amp}$, $V_{th} = K_2 = 8 \text{ Volt}$, $R_{th} = K_1 = 9 \Omega$

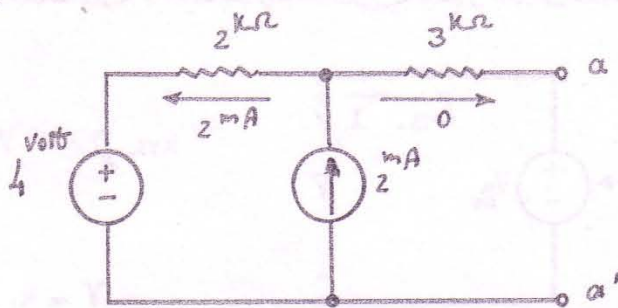
مثال ۲- مطلوبیت معادله مدار معادل تونن و نوتن شبکه شکل زیر:



تعیین شبکه:

① $V_{th} = V_{a-a'} \Big|_{I_{a-a'} = 0}$

$$I_{a'c'} = 0.$$

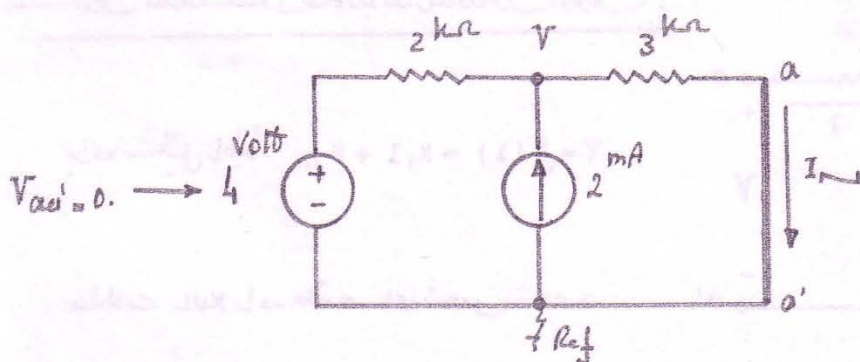


$$\text{KVL } \odot : V_{a'c'} = 3000 \times 0 + 2000 \times \frac{2}{1000} + 4$$

$$\underline{V_{th} = 8 \text{ Volt}}$$

②

$$I_{\text{in}} = I_{a'c'} \mid V_{a'c'} = 0.$$



$$\text{KVL } \odot : \frac{V-4}{2000} - \frac{2}{1000} + \frac{V}{3000} = 0,$$

$$\underline{V = 4,8 \text{ Volt}}$$

$$I_{\text{in}} = \frac{V}{3000} = \frac{4,8}{3000}$$

$$\underline{I_{\text{in}} = 1,6 \text{ mA}}$$

③

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{\text{in}}} = \frac{8}{1,6 \text{ mA}} = 5 \text{ k}\Omega$$

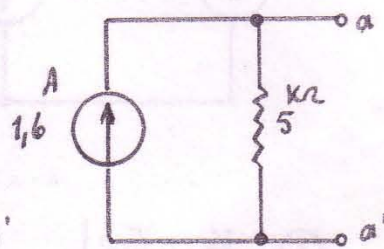
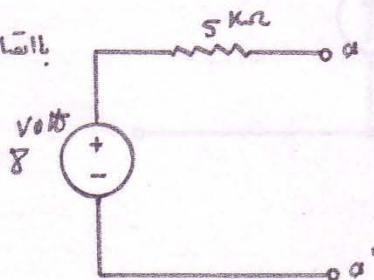
$$\underline{R_{th} = 5 \text{ k}\Omega}$$

حساب R_{th} از طریق تعادل کردن:

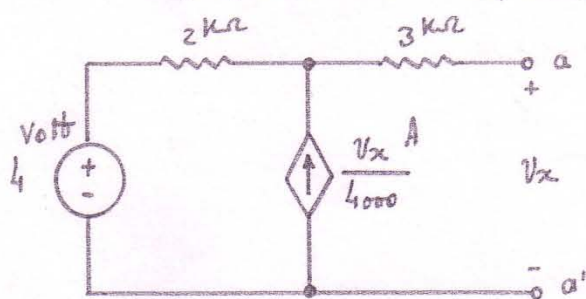
$$R_{th} = R_{eq a'c'}$$

$$= 2 + 3 = 5 \text{ k}\Omega$$

با اتصال کوتاه بین 4V و 2A



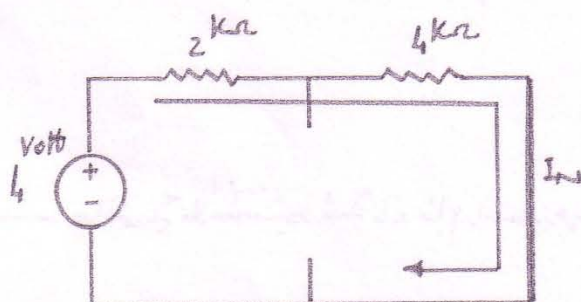
●●● مثال 3 - مدار معادل تونین و فرکانس شبکه شکل زیر را از این مدار a, a' میابید.



$$\textcircled{1} \quad V_{th} = V_{aa'} \Big|_{I_{aa'}=0} \quad I_{aa'}=0 \rightarrow V_x = 0 + 2000 \times \frac{V_x}{4000} + 4$$

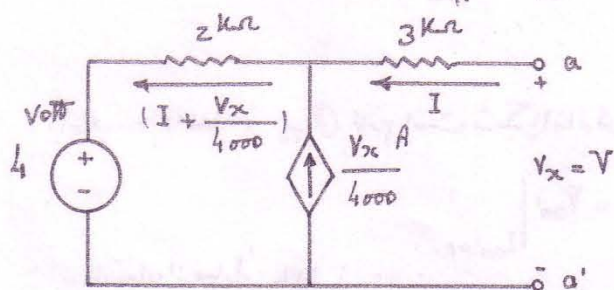
$$V_x = \frac{1}{2} V_x + 4 \quad V_x = 8 \quad \underline{V_{th} = 8 \text{ Volt}}$$

$$\textcircled{2} \quad I_N = I_{aa'} \Big|_{V_{aa'}=0} \quad V_{aa'}=0 \rightarrow V_x = 0 \rightarrow \text{نیروی داینامیک به صفر می‌رسد.}$$



$$\underline{I_N = \frac{4}{2+3} = 0,8 \text{ mA}}$$

$$R_{th} = R_{eq_{aa'}} \Big|_{4V \text{ حذف می‌شود}} \quad R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = 10 \text{ k}\Omega$$



تحلیل به روش معادله مشغول:

$$\text{KVL} \rightarrow V_x = 3000 I + 2000 \left(1 + \frac{V_x}{4000} \right) + 4$$

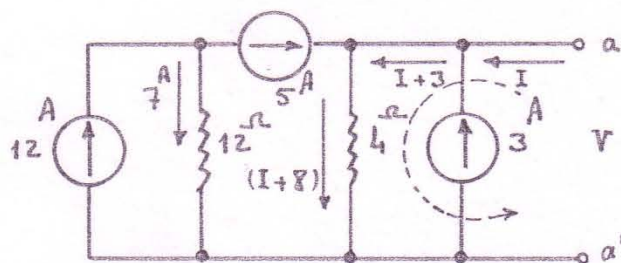
$$V_x = 3000 I + 2000 I + \frac{1}{2} V_x + 4$$

$$V = V_x = 10,000 I + 8$$

$$V = k_1 I + k_2$$

$$\underline{R_{th} = k_1 = 10 \text{ k}\Omega, \quad V_{th} = k_2 = 8 \text{ Volt}, \quad I_N = \frac{k_2}{k_1} = 0,8 \text{ mA}}$$

●●● مثال 4 - معادله مشخصه شبکه زیر را تشکیل داده و مدار معادل تفریق و تفریق آن را بدست آورید.



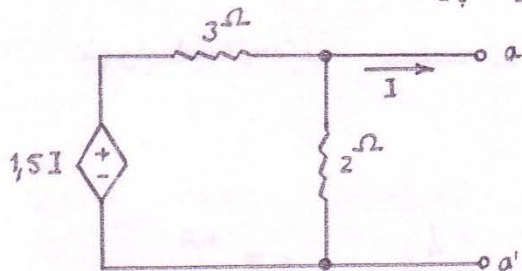
$$V = f(I) = K_1 I + K_2$$

— تشکیل معادله مشخصه:

$$\text{KVL } \curvearrowleft : \quad V = 4(I + 8) \longrightarrow V = 4I + 32$$

$$R_{th} = 4 \Omega, \quad V_{th} = 32 \text{ Volt}, \quad I_{sc} = \frac{V_{th}}{R_{th}} = 8 \text{ Amp}$$

●●● مثال 5 - مطهرت مطابق مدار معادل تفریق و تفریق شبکه از دیدگاه پایانه های a, a' :



— همانطوریکه ملاحظه میشود شبکه فاقد منابع ولتاژ در جریان متغیر می باشد. لذا شبکه غیرفعال بوده و ولتاژ تفریق و جریان

تفریق معادل صفر می باشد و مدار معادل تفریق و تفریق شبکه نقطه شامل مقارنت اصلی R_{th} خواهد بود.

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{0}{0} \quad \text{بهم}, \quad R_{th} = R_{eq a a'}$$

بنابراین برای محاسبه R_{th} لازم است شبکه را اضافه کردن منبع جریان 1 Amp فعال گردد.

$$V_{th} = V_{aa'} \Big|_{I_{aa'}=0}$$

با استفاده از معادله KVL:

$$V_{aa'} = 2I' \quad , \quad V_{aa'} = 3(1-I') + 1.5(-1)$$

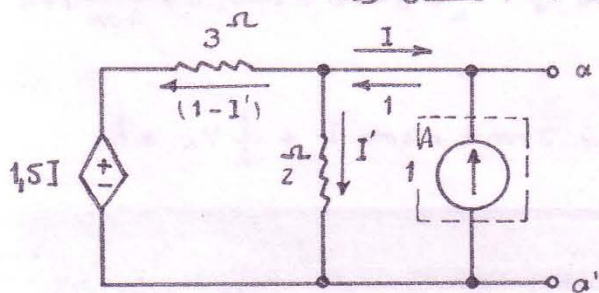
$$2I' = 3(1-I') - 1.5 \longrightarrow I' = 0.3 \text{ A}$$

$$V_{th} = V_{aa'} = 2I' = 0.6 \text{ Volt}$$

$$V_{th} = 0.6 \text{ V}$$

$$I_{sc} = I_{aa'} \Big|_{V_{aa'}=0}$$

$$I_{sc} = 1 \text{ Amp}$$



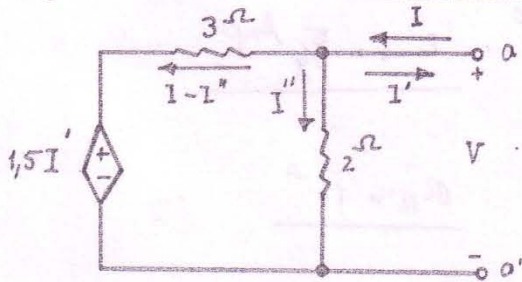
$$I_{sc} = 1 \text{ Amp}$$

توجه داشته باشید با اتصال کوتاه کردن a, a' کلی شبکه غیرفعال از مدار خارج شده، اتصال a, a' از طریق منبع 1 Amp

تغذیه میشود.

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} \longrightarrow R_{th} = 0,6 \Omega$$

روش معادله مشخصه: عموماً مطابق مدار معادله تغذیه رفتن شبکه های غیرفعال با استفاده از معادله مشخصه انجام



$$V = f(I) = k_1 I + k_2$$

$$V = 2I'' \quad ; \quad V = 3(1-I'') + 1,5(-I')$$

مغذی

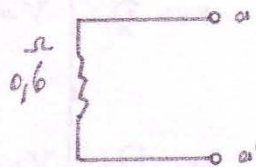
$$V = 0,6 I \quad ; \quad V = k_1 I + k_2$$

لپس

$$R_{th} = 0,6$$

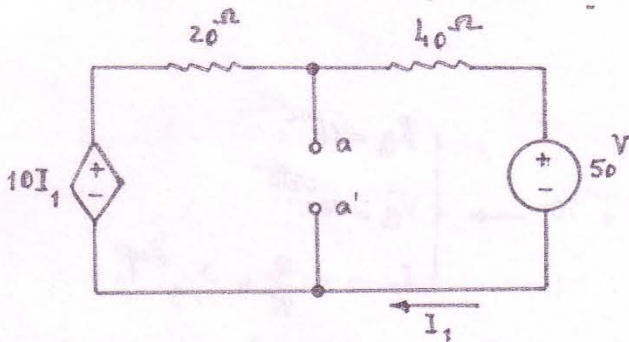
$$V_{th} = 0$$

$$I_{sc} = 0$$



مدار معادله تغذیه رفتن از دیدگاه a, a'

مثال 6 - مطلوبیت مطابق مدار معادله تغذیه رفتن از دیدگاه a, a' :



$$\textcircled{1} \quad V_{th} = V_{a,a'} \Big|_{I_{a,a'}=0} \quad I_{a,a'} = 0 \quad \text{KVL} \curvearrowright : -10I_1 + 20I_1 + 40I_1 + 50 = 0$$

$$I_1 = -1 \text{ Amp}$$

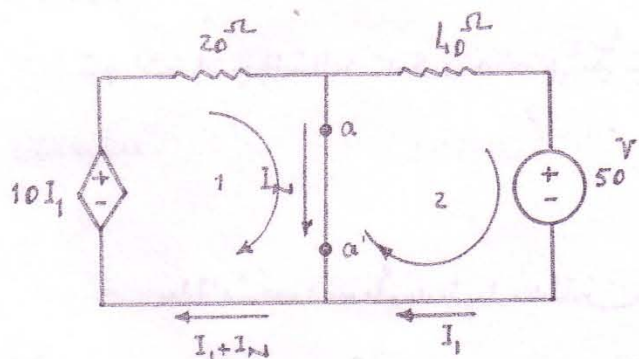
$$V_{th} = V_{a,a'} = 40(-1) + 50 = 10 \text{ Volt}$$

$$V_{th} = 10$$

$$\textcircled{2} \quad I_{sc} = I_{a,a'} \Big|_{V_{a,a'}=0}$$

برای مطابق I_{sc} نقاط a, a' را اتصال کوتاه میکنیم.

مطابق: I_1

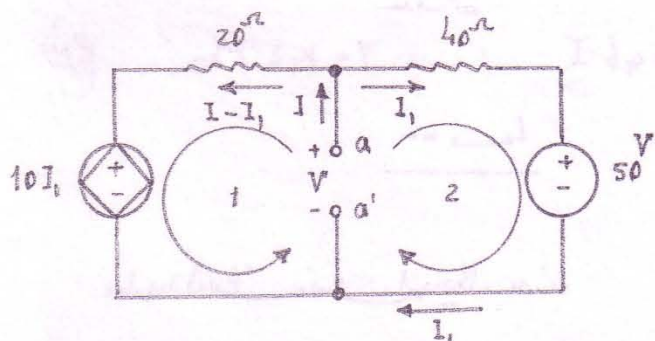


$$\begin{aligned} \text{KVL } 1) : & \begin{cases} -10 I_1 + 20 (I_1 + I_1) = 0. \end{cases} \\ \text{KVL } 2) : & \begin{cases} +50 + 40 I_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$I_1 = -5/4 \text{ Amp}, \quad I_1 = 5/8 \text{ Amp}$$

$$R_{th} = 16 \Omega$$

$$3) \quad R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{10}{5/8} = 16 \Omega$$



روش معادله مشق: $V = f(I) = k_1 I + k_2$

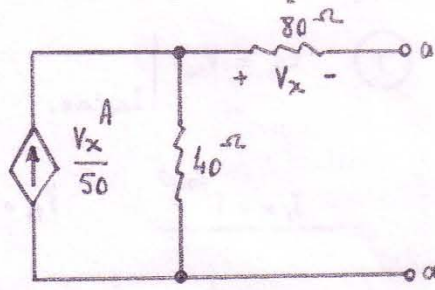
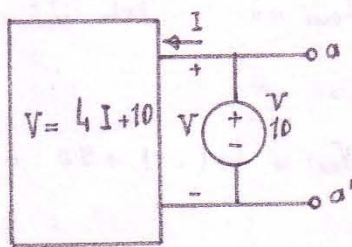
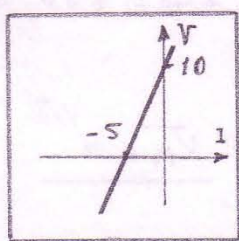
$$\begin{aligned} \text{KVL } 1) : & \begin{cases} V = 20 (I - I_1) + 10 I_1, \end{cases} \\ \text{KVL } 2) : & \begin{cases} V = 40 I_1 + 50 \end{cases} \end{aligned}$$

$$4 \begin{cases} V = 20 I - 10 I_1, \\ V = 40 I_1 + 50 \end{cases}$$

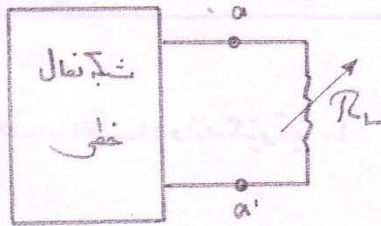
$$5V = 20 \times 4I + 50$$

$$V = 16I + 10 \rightarrow \begin{cases} R_{th} = 16 \Omega \\ V_{th} = 10 \text{ volt} \\ I_{sc} = \frac{10}{16} = 5/8 \text{ Amp} \end{cases}$$

نمونه مدار معادله مشق: هر یک از مدارهای زیر را اندیکه با اینتهای a, a' مطابق کنید.

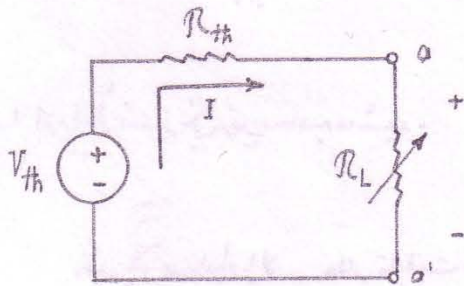


*** قضیه انتقال حداکثر توان :



در یک شبکه فعال خطی وقتی حداکثر توان به بار R_L تحویل داده میشود که

$$\underline{R_L = R_{th}}$$



اثبات: مدار معادل تن شبکه فعال خطی را اندیدگ a, a' در نظر میگیریم.

$$P = R_L I^2 = R_L \left(\frac{V_{th}}{R_L + R_{th}} \right)^2 \rightarrow P = \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2} \cdot V_{th}^2$$

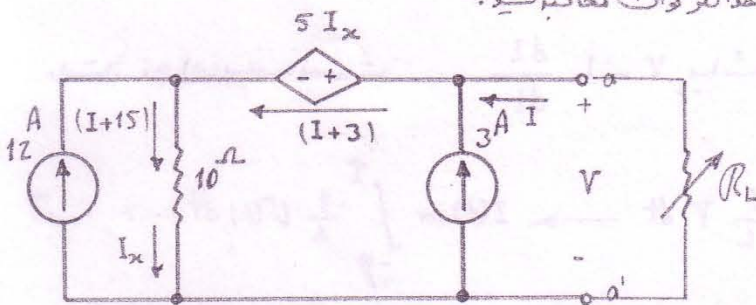
$$\frac{dP}{dR_L} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_L + R_{th})^2 - 2R_L(R_L + R_{th})}{(R_L + R_{th})^4} V_{th}^2 = 0$$

$$R_L^2 + R_{th}^2 + 2R_L R_{th} - 2R_L^2 - 2R_L R_{th} = 0$$

$$\boxed{R_L = R_{th}}$$

رابطه بالا در مدارهای علی تحت عنوان تطبیق امپدانس نامیده میشود.

*** مثال - در مدار شکل زیر R_L را بازنش انتقال حداکثر توان محاسب کنید.



معادله مشخصه $V = f(I)$ را شکل میدهیم.

$$V = +5I_x + 10I_x \quad , \quad I_x = I + 15$$

$$V = 15(I + 15)$$

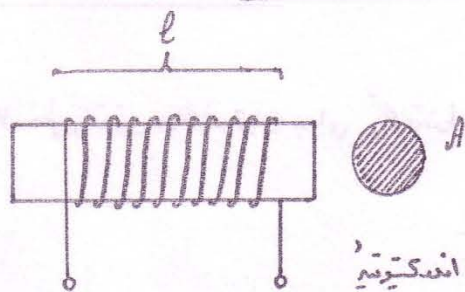
$$\underline{V = 15I + 225}$$

$$R_{th} = 15 \, \Omega$$

$$\underline{R_L = R_{th} = 15 \, \Omega}$$

بازنش انتقال حداکثر

فصل سوم - القا و ضریب و مطالعات رفتار آن‌ها در شبکه‌ها:



الف - القا و اندرکیتوب: L :

برای یک جریان یا سیم پچ با مشخصات فیزیکی مطابق شکل بالا اندرکیتوب

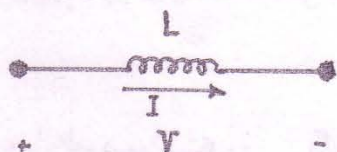
$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

ما از رابطه فیزیکی زیر محاسبه می‌شود.

بطوریکه در رابطه بالا μ_0 قابلیت نفوذ مغناطیسی خلأ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})$ و μ_r قابلیت نفوذ

مغناطیسی نبی، N تعداد حلقه‌ها، l طول جریان، A سطح مقطع جریان باشد.

واحد ما صانری بوده و با H نشان داده می‌شود و در مدارهای الکتریکی سبیل آن بصورت زیر می‌باشد.



رابطه الکتریکی سلف: تجربه نشان می‌دهد که رابطه بین

ولتاژ و جریان سلف بصورت $V = L \frac{dI}{dt}$ می‌باشد. ولتاژ توان جریان $I(t)$ را از رابطه زیر به دست

$$V = L \frac{dI}{dt} \longrightarrow dI = \frac{1}{L} V \cdot dt \longrightarrow I(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} V(t) dt \longrightarrow \text{آمد.}$$

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V(t) dt \longrightarrow I(t) = I(0^+) + \frac{1}{L} \int_{0^+}^t V(t) dt$$

بنابراین:

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

$$I(t) = I(0^+) + \frac{1}{L} \int_{0^+}^t V(t) dt$$

I - اختلاف پتانسیل در سلف قنایب است با تغییرات جریان عبوری از آن، بطوریکه هرچه تغییرات جریان

عبوری از آن بیشتر باشد اختلاف پتانسیل در آن بیشتر باشد.

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

II - در شبکه‌های جریان مستقیم با توجه باینکه $\frac{dI}{dt} = 0$ باشد، اختلاف پتانسیل در سلف صاف صفر باشد.

عبارت دیگر در شبکه‌های جریان مستقیم سلف به مثابه اتصال کوتاه عمل میکند.

III - سلف با تغییرات سریع رآفی (اجتش) جریان بشت مخالفت میکند.

$$I(0^+) = I(0^-)$$

IV - سلف برخلاف مقاومت هرگز مصرف کننده انرژی نبوده بلکه آنرا در خود ذخیره میکند.

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2$$

— محاسبه انرژی ذخیره شده در سلف: میدانیم:

$$p = v \cdot i$$

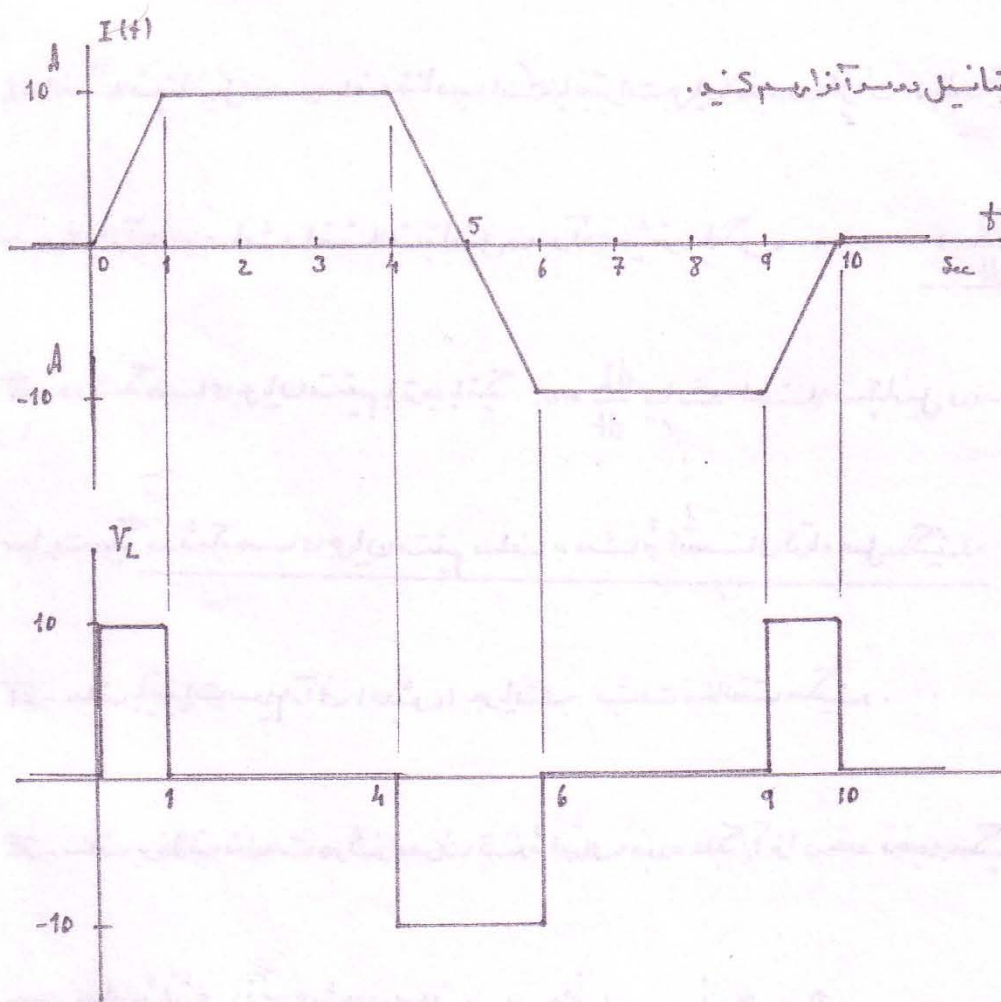
$$p = v \cdot i \longrightarrow p = L \frac{dI}{dt} \cdot I \longrightarrow p \cdot dt = L I dI$$

$$W_L(t) = \int_0^t p \cdot dt = \int_{I(0^+)}^{I(t)} L I dI = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2 + W_L(0^+)$$

مثالهای زیر خواص فنریکی سلف را بطور کامل مورد بررسی قرار میدهد.

●●● مثال ۱- از یک سلف با اندکیتوی ۱ H شدت جریانی که تغییرات آن مطابق شکل زیر می باشد، مسووم کنید



خودار تغییرات اختلاف پتانسیل و مسووم آنرا رسم کنید.

تحلیل ماله:

$$① \quad 0 < t < 1 \text{ Sec} \quad V_L = L \frac{dI}{dt} = 1 \frac{10 - 0}{1 - 0} = 10 \text{ Volt}$$

$$② \quad 1 < t < 4 \text{ Sec} \quad (I = 10 \text{ Amp} \equiv \text{const.}) \quad \frac{dI}{dt} = 0 \quad V_L = L \frac{dI}{dt} = 0.$$

$$③ \quad 4 < t < 6 \text{ Sec} \quad V_L = L \frac{dI}{dt} = 1 \frac{(-10) - (+10)}{6 - 4} = -10 \text{ Volt}$$

$$④ \quad 6 < t < 9 \text{ Sec} \quad V_L = L \frac{dI}{dt} \quad V_L = 0. \quad \left(\frac{dI}{dt} = 0 \right)$$

$$⑤ \quad 9 < t < 10 \text{ Sec} \quad V_L = L \frac{dI}{dt} = 1 \frac{0 - (-10)}{10 - 9} = 10 \text{ Volt}$$

از مطالعه نمودار بالا میتوان به نتایج زیر رسید.

I - همانطوریکه ملاحظه میشود تغییرات جریان سلف از صفر به 10 آمپر در مدت یک ثانیه ولتاژی

معادل 10 V در سلف ایجاد میکند. حال اگر این تغییر جریان 10 آمپری به عرض یک ثانیه در مدت زمان

محدوده زمانی 0.1 ، 0.01 ، 0.001 ثانیه انجام گیرد. اختلاف پتانسیل در سلف به عرض 10 V به ترتیب به 100

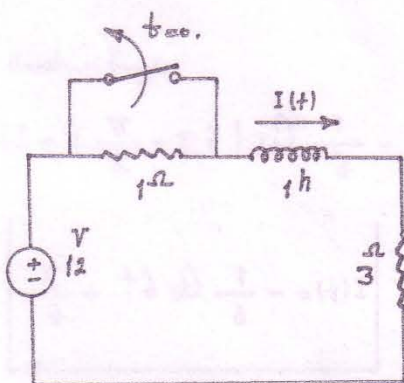
1000 V ، 10,000 V میرسد. بنابراین یکم میشود.

ولتاژ در سلف با تغییرات جریان عبوری از آن تناسب میابد. به طوری که هر چه میزان تغییرات بیشتر باشد

اختلاف پتانسیل در سلف بیشتر خواهد بود و بالعکس

II - همانطوریکه ملاحظه میشود در محدوده ای از زمان که شدت جریان عبوری ثابت است مقدار اختلاف پتانسیل در سلف

صفر می باشد.



●●● مثال ۲ - در مدار شکل زیر کلید k در $t=0$ باز میشود مطلوب $I(0^+)$:

تحلیل مدار: $I(0^+)$ جریان در اولین لحظه بعد از باز شدن کلید.

$I(0^-)$ جریان در آخرین لحظه قبل از باز شدن کلید.

در $t < 0$ کلید k وصل است و مقاومت 1Ω از طریق کلید k اتصال کوتاه می باشد. لذا:

$$I(t < 0) = \frac{12}{3} = 4 \text{ Amp}$$

$$I(0^-) = 4 \text{ Amp}$$

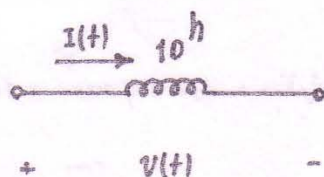
با توجه باینکه سلف با جهش جریان مخالفت میکند.

$$\underline{I(0^+) = I(0^-) = 4 \text{ Amp}}$$

توجه داشته باشید که در طول زمان $t < 0$ بهت ثابت بودن جریان مدار تلف مشابه اتصال کوتاه عمل میکند

در هنگام در موقم قطع وصل کلید K بهت تغییرات جریان در مدار ظاهر میشود.

●●● مثال ۳- در سری یک سلف با اندکیتیم 10 هاری بدولت آرمینوی بد معادله $v(t) = 10 \sin 6t$



وصل شده است. بهت جریان عبوری را مطابق کنید.

— تحلیل شبکه:

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{0^+}^t v(t) dt + I(0^+) \rightarrow I(t) = \frac{1}{10} \int_{0^+}^t 10 \sin 6t dt + I(0^+)$$

$$I(t) = \frac{1}{10} \times 10 \times \frac{1}{6} (-\cos 6t) + I(0^+) \rightarrow I(t) = -\frac{1}{6} \cos 6t + I(0^+)$$

●●● مثال ۴- اگر در مثال بالا مقدار جریان عبوری از سلف در $t = -\frac{\pi}{3}$ معادل 1 Amp باشد مقدار $I(t)$

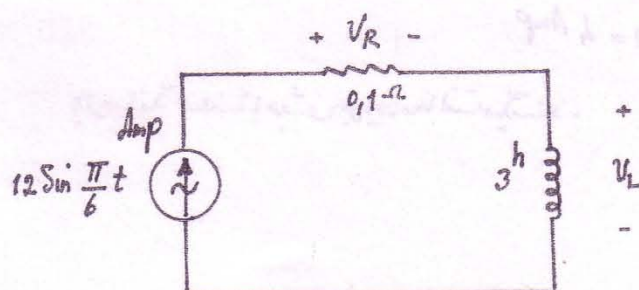
را مطابق کنید.

$$I(t) = -\frac{1}{6} \cos 6t + I(0^+) \rightarrow I(t = -\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{6} \cos (6 \times -\frac{\pi}{3}) + I(0^+)$$

$$\rightarrow 1 = -\frac{1}{6} \times 1 + I(0^+) \rightarrow I(0^+) = \frac{7}{6}$$

$$I(t) = -\frac{1}{6} \cos 6t + \frac{7}{6}$$

●●● مثال ۵- در مدار شکل زیر افت ولت R و افت ولت در سلف را حداکثر انرژی

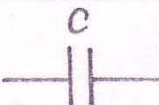


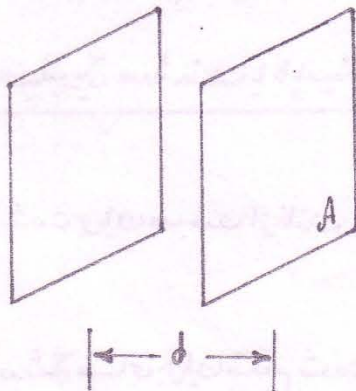
بشار شده در سلف را مطابق کنید.

— قطبیل مدار: $V_R = R \cdot I(t) = 0.1 \times 12 \sin \frac{\pi}{6} t = 1.2 \sin \frac{\pi}{6} t$ ^{Volts}

$V_L = L \frac{dI}{dt} = 3 \times \frac{d}{dt} (12 \sin \frac{\pi}{6} t) = 3 \times 12 \times \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t = 6\pi \cos \frac{\pi}{6} t$ ^{Volts}

$W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times (12 \sin \frac{\pi}{6} t)^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$ $W_L(t) = 216 \text{ Joule}$

ب. ظرفیت الکتریکی: 



رابطه فیزیکی خازن: برای هر خازن صفحه‌ای مطابق

شکل متقابل ظرفیت از رابطه زیر بدست می‌آید.

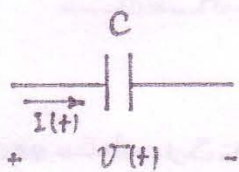
$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

بطوریکه در رابطه فوق C ظرفیت خازن بر حسب F (فاراد)، A سطح مقطع جریان‌های خازن بر حسب مترمربع

d ضخامت عایق بر حسب m ، ϵ_0 ضریب دی‌الکتریک خلأ $= 8.85 \times 10^{-12} F/m$ ، ϵ_r ضریب دی‌الکتریک عایق باشد.

عایق باشد.

رابطه الکتریکی خازن: رابطه بین ولت‌ژر جریان خازن بصورت زیر بیان میشود



$I = C \frac{dV}{dt}$ یا $V(t) = \frac{1}{C} \int_{0^+}^t I(t) dt + V_C(0^+)$

$I(t) = C \frac{dV}{dt} \rightarrow dV = \frac{1}{C} \cdot I(t) dt \rightarrow V(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t) dt = \frac{1}{C} \int_{0^+}^t I(t) dt + V_C(0^+)$

انرژی ذخیره شده در خازن:

$$p = v \cdot i$$

$$p = v \cdot c \frac{dv}{dt}$$

$$p \cdot dt = c v dv$$

$$\int_0^t p \cdot dt = \int_{v_0}^v c v dv$$

$$\boxed{W_c(t) = \frac{1}{2} c v^2 + W_c(0^+)}$$

خواص فیزیکی سده خازن یا کاپاسیتور C:

I - شدت جریان عبوری از خازن با تغییرات اختلاف پتانسیل و جریان متناوب است. $(I = c \frac{dv}{dt})$

II - در شبکه های جریان متعیم شدت جریان عبوری از خازن صفر است. به عبارت دیگر جریان متعیم از خازن عبور

نمیکند. در خازن در شبکه های DC به مثابه مدار باز عمل میکند.

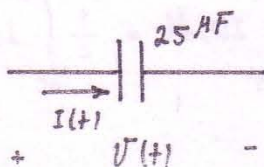
III - خازن با تغییرات دیر زمانی (احش) ولتاژ شدت مخالفت میکند. یعنی $V_c(0^+) = V_c(0^-)$

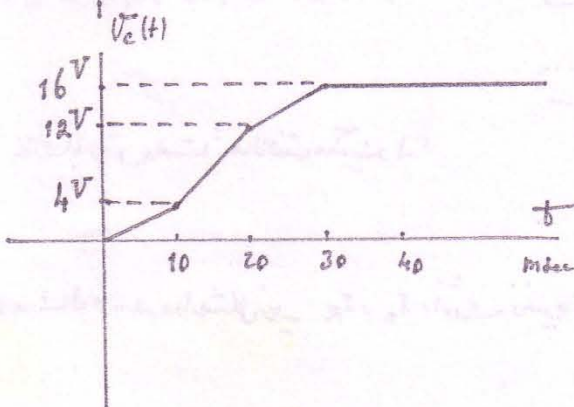
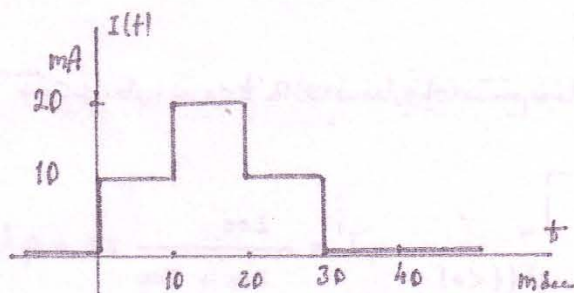
IV - خازن هرگز انرژی را تلف نمی کند بلکه آنرا ذخیره ذخیره میکند. $W_c(t) = \frac{1}{2} c v^2$

مسئله های زیر خواص فیزیکی خازن را بطور کامل مورد تجزیه و تحلیل و بررسی قرار میدهد.

●●● مثال ۱ - از یک خازن $25 \mu F$ (میکرو فارادی) بدون ولتاژ اولیه شدت جریانی مطابق شکل زیر عبور میکند. نمودار

تغییرات ولتاژ و در خازن را مطابق رسم غاسید. و مقدار آن را در $t = 40 \text{ ms}$ محاسبه غاسید.





تحليل :

1) $V_c(0) = 0.$

مطلب :

2) $V_c(t=10 \text{ msec}) = \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int_0^{10 \times 10^{-3}} I(t) \cdot dt = \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \times 10 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} = 4 \text{ Volt}$

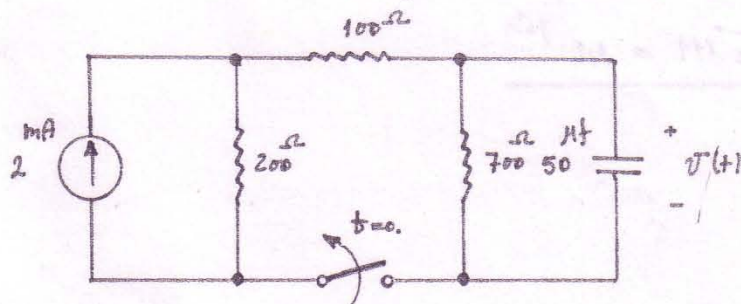
3) $V_c(t=20 \text{ msec}) = \frac{1}{C} \int_{10 \times 10^{-3}}^{20 \times 10^{-3}} I(t) \cdot dt + V_c(t=10 \text{ msec}) = 8 + 4 = 12 \text{ Volt}$

4) $V_c(t=30 \text{ msec}) = \frac{1}{C} \int_{20 \times 10^{-3}}^{30 \times 10^{-3}} I(t) \cdot dt + V_c(t=20 \text{ msec}) = 4 + 12 = 16 \text{ Volt}$

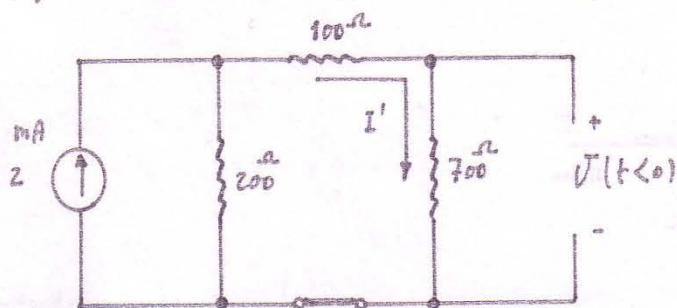
5) $V_c(t=40 \text{ msec}, \text{ for } t > 30 \text{ msec}) = 16 \text{ Volt}$

$V_c(t=40 \text{ msec}) = 16 \text{ Volt}$

●●● مثال ۲- در مدار شکل زیر کید K در $t=0$ باز می شود. $V(t)$ را محاسبه کنید.



تعیین مدار: در $t < 0$ خازن در مدار جریان مستقیم و بتوان مدار را به عمل می‌کند و مقدار $V(t < 0)$ را جابجایی است:



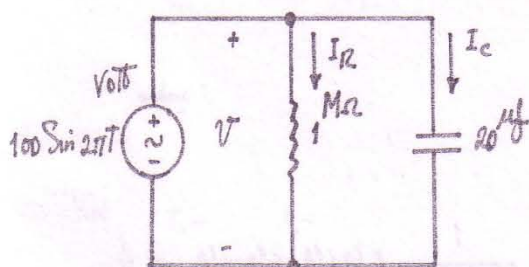
$$I' = \frac{200}{200 + 800} \times 2 = 0,14 \text{ mA}$$

$$V(t < 0) = 700 \times 0,14 = 280 \text{ mV}$$

$$\underline{V(0^+) = V(0^-) = V(t < 0) = 280 \text{ mV}}$$

خازن با جهش ولت مخالفت می‌کند لذا

●●● مثال ۳- در مدار شکل زیر I_R ، I_C انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه کنید.



تعیین شده:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{100 \sin 2\pi t}{1 \times 10^{-6}} = 0,1 \sin 2\pi t \text{ mA}$$

$$\underline{I_R = 0,1 \sin 2\pi t \text{ mA}}$$

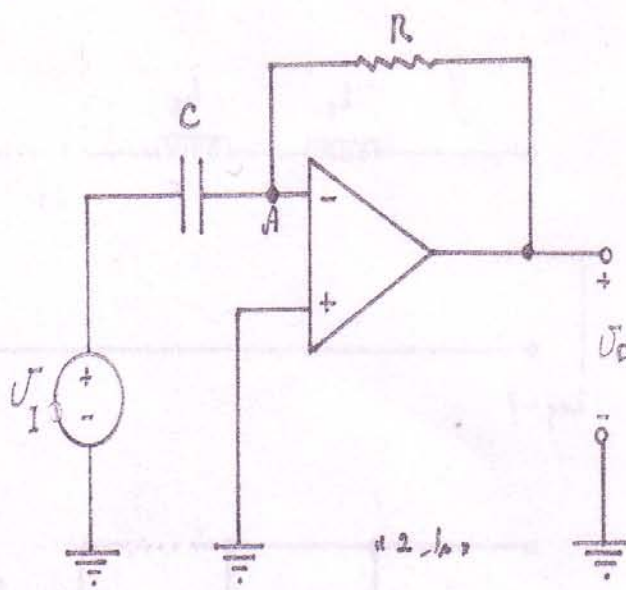
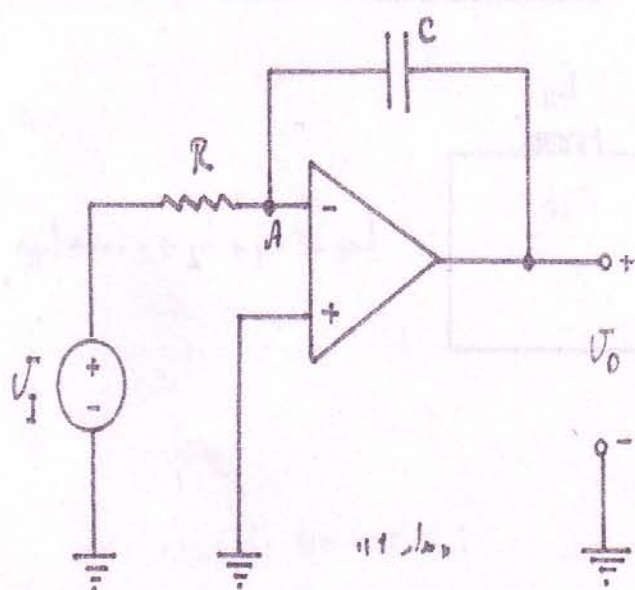
$$I_C = C \frac{dV}{dt} = 20 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (100 \sin 2\pi t) = 20 \times 10^{-6} \times 100 \times 2\pi \cos 2\pi t$$

$$\underline{I_C = 4\pi \cos 2\pi t \text{ mA}}$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times (100 \sin 2\pi t)^2 = 0,1 \sin^2 2\pi t$$

$$\underline{W_C(t) = 0,1 \text{ Jole}}$$

مثال 4- نشان دهید که مدارهای شکل زیر می‌توان مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر عمل می‌کنند.



تحلیل مدار (۱):

$$\text{KCL A: } I_C + I_R = 0. \quad C \frac{dV_O}{dt} + \frac{V_I}{R} = 0. \quad dV_O = \frac{-1}{R C} V_I \cdot dt$$

$$V_O = -\frac{1}{R C} \int_0^t V_I \cdot dt$$

مدار انتگرال‌گیر

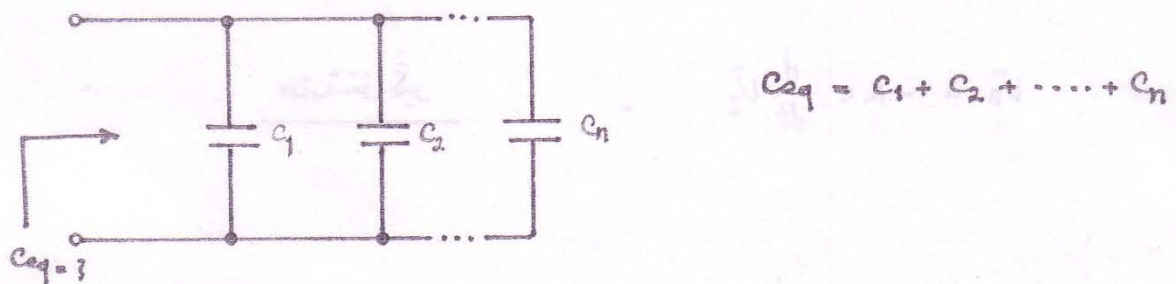
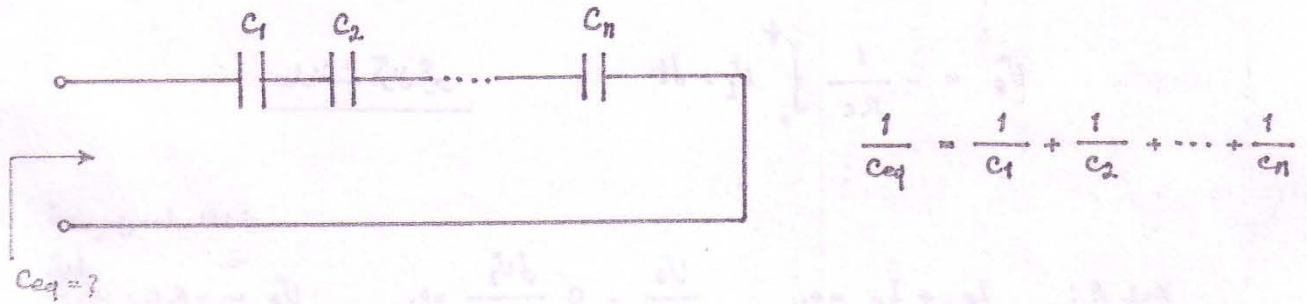
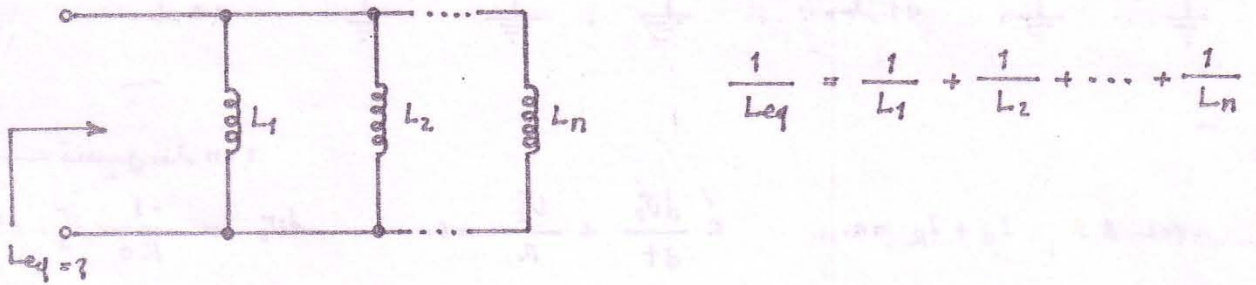
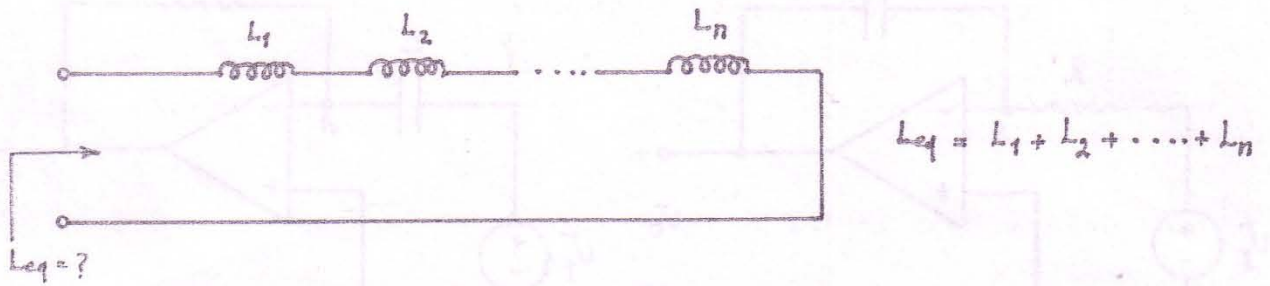
تحلیل مدار (۲):

$$\text{KCL A: } I_R + I_C = 0. \quad \frac{V_O}{R} + C \frac{dV_I}{dt} = 0. \quad V_O = -R C \cdot \frac{dV_I}{dt}$$

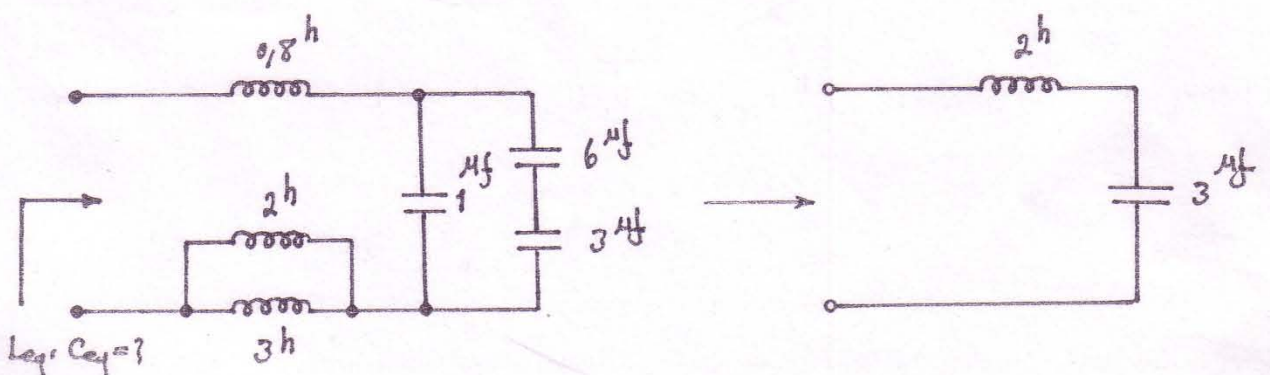
$$V_O = -R C \frac{dV_I}{dt}$$

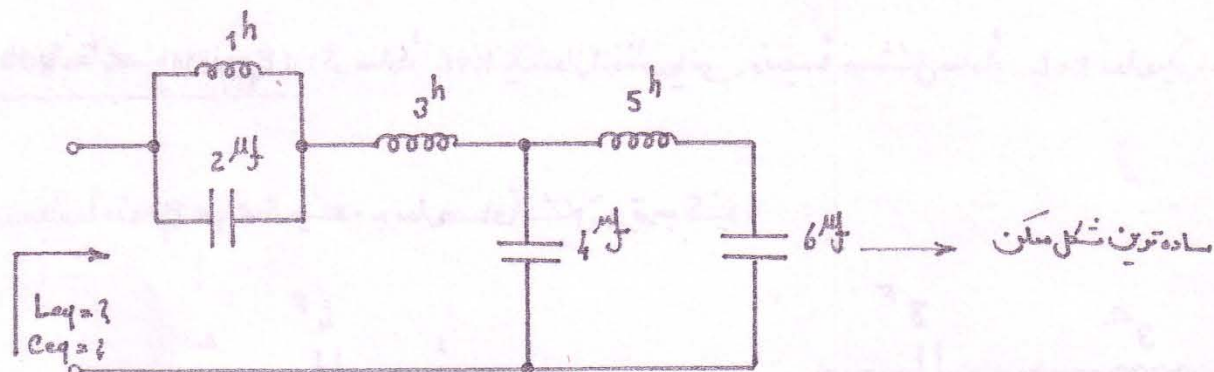
مدار مشتق‌گیر

ترکیب سری رموازی ملف‌ها ر خازن‌ها:



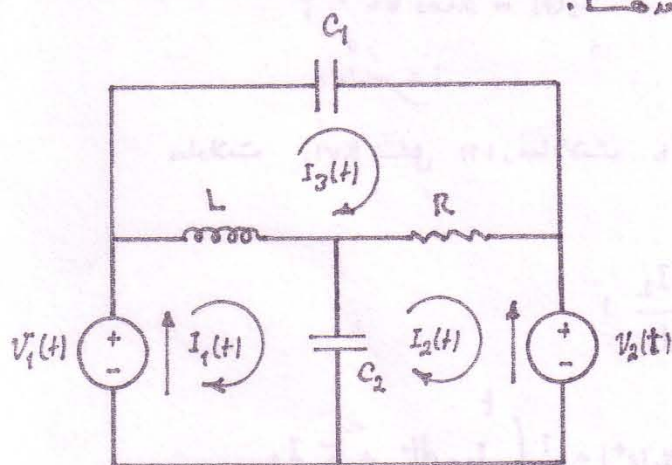
مثال - مدار معادل هریک از مدارهای زیر را محاسبه کنید.





تشکیل معادلات ولتاژهای کیرشوف و جریانهای کیرشوف در مدارهای R, L, C با نام تحریک زمانی

*** مثال - مطلوبیت فرم ماتریسی معادلات مربوط به جریان حلقه ها :



تشکیل معادلات KVL :

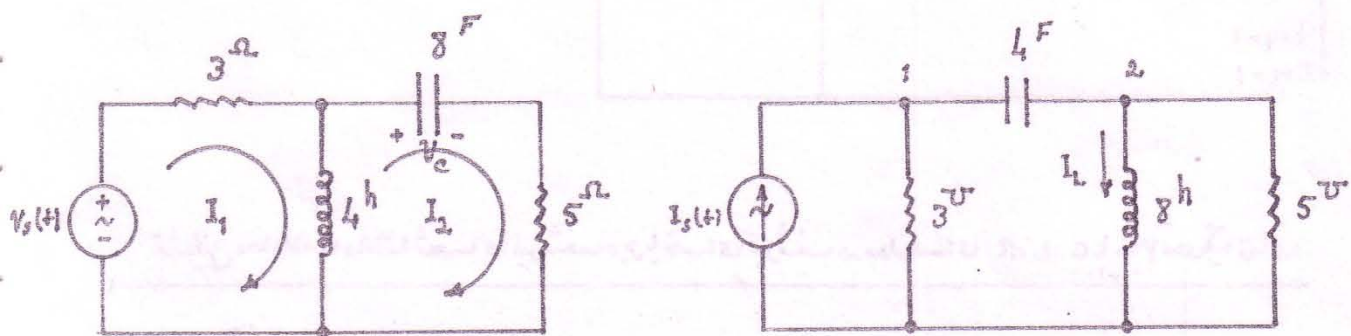
$$\begin{aligned} \text{KVL } I_1 & \left\{ \begin{aligned} V_1(t) &= L \frac{d}{dt} (I_1(t) - I_3(t)) + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t (I_1(t) - I_2(t)) dt \\ \text{KVL } I_2 & \left\{ \begin{aligned} -V_2(t) &= \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t (I_2(t) - I_1(t)) dt + R (I_2(t) - I_3(t)) \\ \text{KVL } I_3 & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t I_3(t) dt + R (I_3(t) - I_2(t)) + L \frac{d}{dt} (I_3(t) - I_1(t)) \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

با تبدیل معادلات بالا به معادلات کلاسیک دریاغنی متغیاریا به روش های مختلف روش تبدیل لاپلاس

میوان شدت جریانهای $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ را محاسبه کرد.

●●● مدارهای مزبور: اگر معادله KVL یک مدار از نظریاتی دقیقاً همگن معادله KCL مدار دیگر باشد

در مدار را مزبور هم می‌گویند. به مدارهای شکل زیر توجه کنید.



$$v_s(t) = 2 \cos 6t \text{ volt}$$

(مارس ۱)

$$i_s(t) = 2 \cos 6t \text{ Amp}$$

(مارس ۲)

معادلات KVL شکل (۱) و معادلات KCL شکل (۲) را شکل داده و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\text{KVL } I_1 \left[2 \cos 6t = 3 I_1 + 4 \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) \right]$$

$$\text{KVL } I_2 \left[0 = 4 \left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_1}{dt} \right) + v_c(0^+) + \frac{1}{8} \int_{0^+}^t I_2 \cdot dt + 5 I_2 \right]$$

$$\text{KCL } 1: \left[2 \cos 6t = 3 V_1 + 4 \left(\frac{dV_1}{dt} - \frac{dV_2}{dt} \right) \right]$$

$$\text{KCL } 2: \left[0 = 4 \left(\frac{dV_2}{dt} - \frac{dV_1}{dt} \right) + I_L(0^+) + \frac{1}{8} \int_{0^+}^t V_2 \cdot dt + 5 V_2 \right]$$

مقایسه معادلات بالا نشان می‌دهد که جفت تعریف مدارهای (۱) و (۲) مزبور هم هستند.

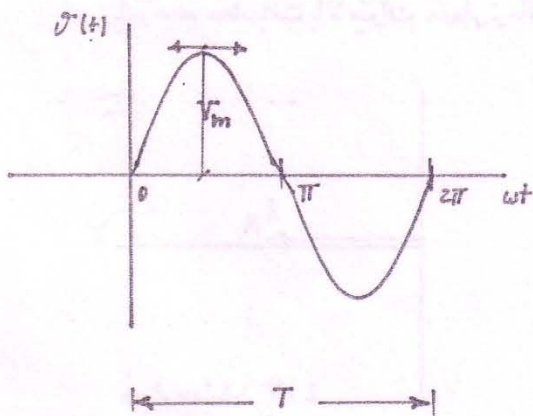
برای هم مزبور هر مدار باید به هم ولتاژ به هم جریان و به همکی به هم ولتاژ و همچنین سلف به خازن

و خازن به سلف، مقاومت به هدایت و هدایت به مقاومت تبدیل شود. تعداد گره ها مدار (۲) = تعداد حلقه های مدار (۱)

الف - مطالعه شبکه های جریان متناوب سینوسی AC صفحه اعداد حقیقی (حوزه زمانی):

قبل از مطالعه شبکه های جریان متناوب سینوسی ابتدا فرم های مختلف غایش جریان متناوب سینوسی را

بررسی میکنیم.

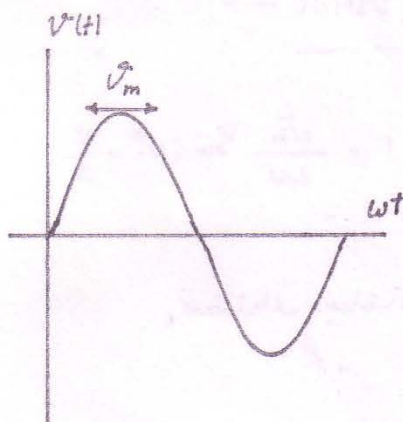


در لحظه $v(t) = V_m \sin \omega t$

مقدار اثر $V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707 V_m$

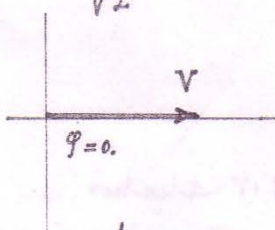
فرکانس $f = \frac{1}{T}$ T دوره تناوب

شکل های زیر فرم های مختلف غایش جریان متناوب سینوسی را نشان میدهند.

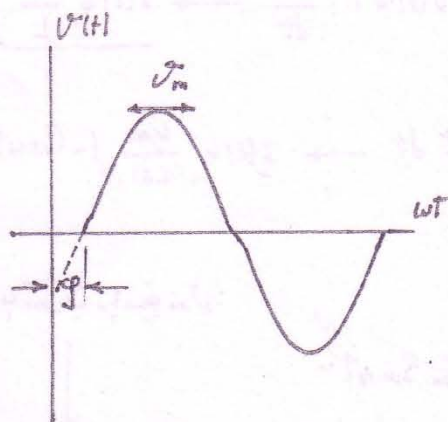


$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0$$

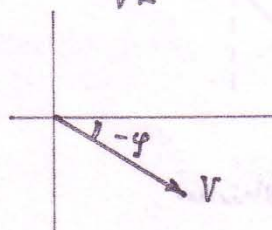


غنازیبدا

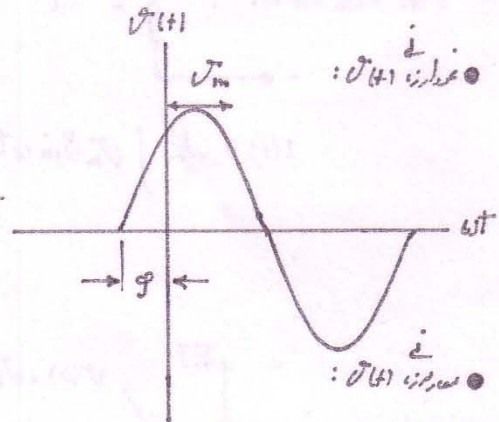


$$v(t) = V_m \sin (\omega t - \varphi)$$

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle -\varphi$$

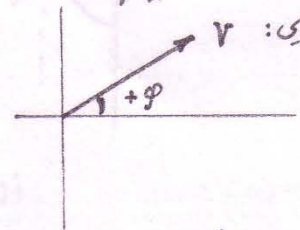


پیشاز



$$v(t) = V_m \sin (\omega t + \varphi)$$

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle +\varphi$$

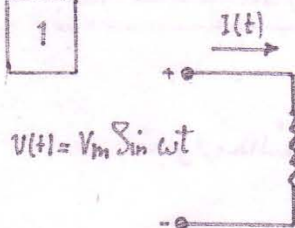


تأخیر

حال ابتدا رفتار هر یک از عناصر غیر فعال شبکه را در مقابل جریان متناوب سینوسی مورد مطالعه قرار داده

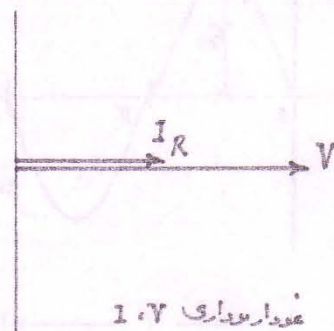
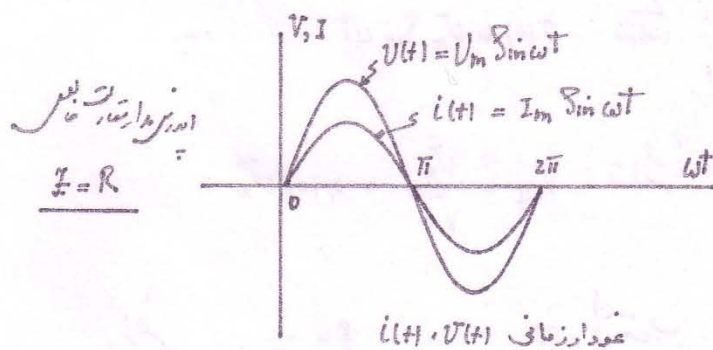
و پاسخ هر یک از عناصر R, L, C را در مقابل تمام تحریک سینوسی مطابق میکنیم.

1

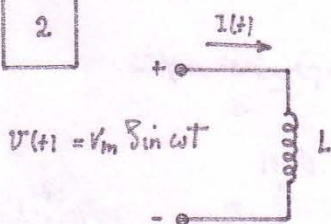


$$V(t) = V_m \sin \omega t \quad V(t) = R \cdot i(t) \rightarrow V_m \sin \omega t = R \cdot i(t) \rightarrow i(t) = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$$

با توجه به معادلات بالا میتوان مقدار زمانی و برداری تمام تحریک شبکه و پاسخ آن را بصورت زیر رسم کرد.



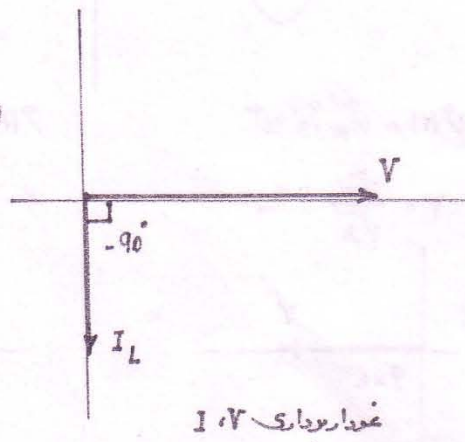
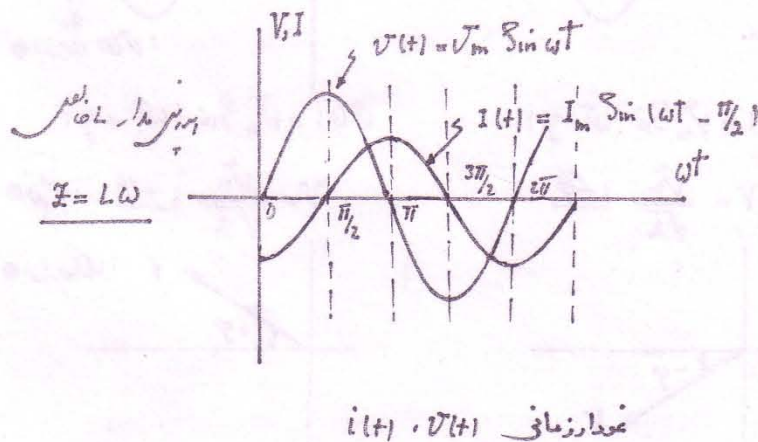
2



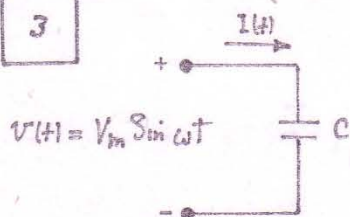
$$V(t) = L \cdot \frac{dI}{dt} \rightarrow I(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt \rightarrow$$

$$I(t) = \frac{1}{L} \int V_m \sin \omega t dt \rightarrow I(t) = \frac{V_m}{L\omega} (-\cos \omega t) = \frac{V_m}{L\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

مقدار زمانی و برداری تمام تحریک و پاسخ مدار:



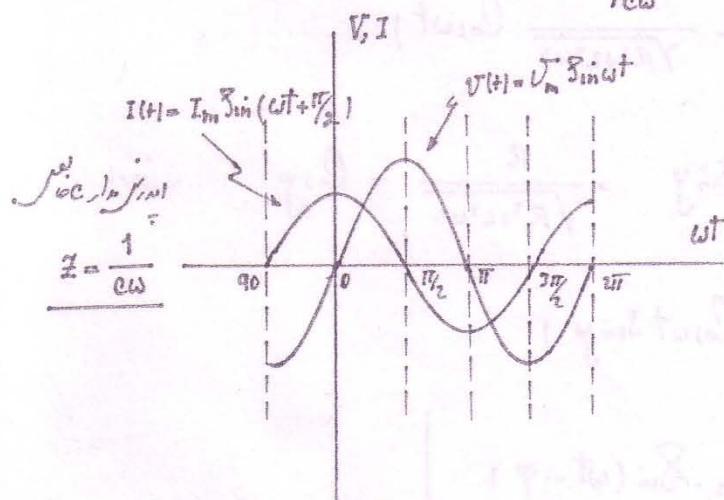
3



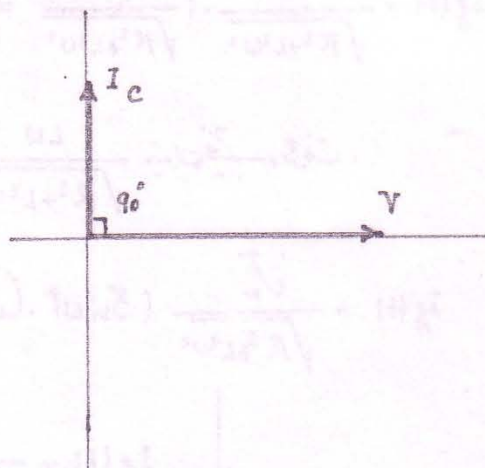
$$v(t) = \frac{1}{c} \int I(t) dt \longrightarrow I(t) = c \frac{dv}{dt} \longrightarrow$$

$$I(t) = c \cdot \frac{d}{dt} (V_m \sin \omega t) = c \omega \cdot V_m \cos \omega t = \frac{V_m}{\frac{1}{c\omega}} \cos \omega t$$

$$I(t) = \frac{V_m}{\frac{1}{c\omega}} \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

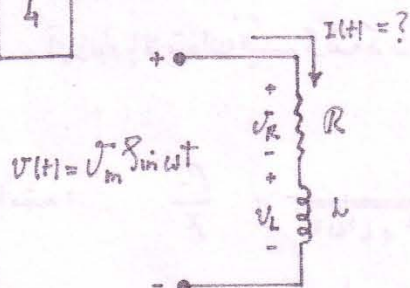


فقدان زمانی $i(t)$ ، $v(t)$



فقدان برداری I ، V

4



$$v(t) = v_R + v_L \longrightarrow V_m \sin \omega t = R I(t) + L \frac{dI}{dt}$$

$$L \frac{dI}{dt} + R I(t) = V_m \sin \omega t \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول}$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی بالا بصورت $I(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t$ باشد که در آن k_1 ، k_2 با

قراردادن پاسخ فوق در معادله دیفرانسیل مطابقت می‌شود.

$$L(k_1 \omega \cos \omega t - k_2 \omega \sin \omega t) + R(k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t) = V_m \sin \omega t$$

$$(k_1 R - k_2 L \omega) \sin \omega t + (k_2 R + k_1 L \omega) \cos \omega t = V_m \sin \omega t$$

برای اینکه طرف اول تساوی بالا بازنه همه مقادیر ω برقرار باشد باید:

$$1 \text{ معادله} \quad k_1 R - k_2 L \omega = V_m$$

$$2 \text{ معادله} \quad k_2 R + k_1 L \omega = 0$$

$$R \begin{cases} k_1 R - k_2 L \omega = \mathcal{I}_m \\ k_2 R + k_1 L \omega = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{از چل معادلات}} \begin{cases} k_1 = \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} \mathcal{I}_m \\ k_2 = -\frac{L \omega}{R^2 + L^2 \omega^2} \mathcal{I}_m \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_f(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t \rightarrow \mathcal{I}_f(t) = \frac{R \mathcal{I}_m}{R^2 + L^2 \omega^2} \sin \omega t - \frac{L \omega \mathcal{I}_m}{R^2 + L^2 \omega^2} \cos \omega t$$

$$\mathcal{I}_f(t) = \frac{\mathcal{I}_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \omega t - \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t \right)$$

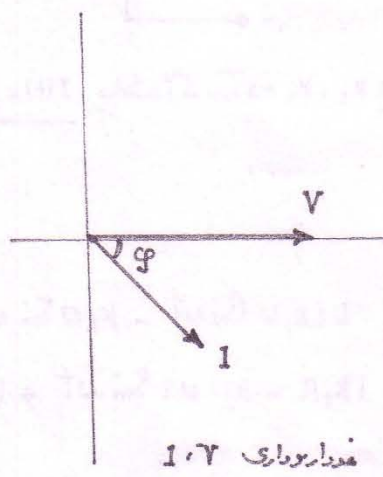
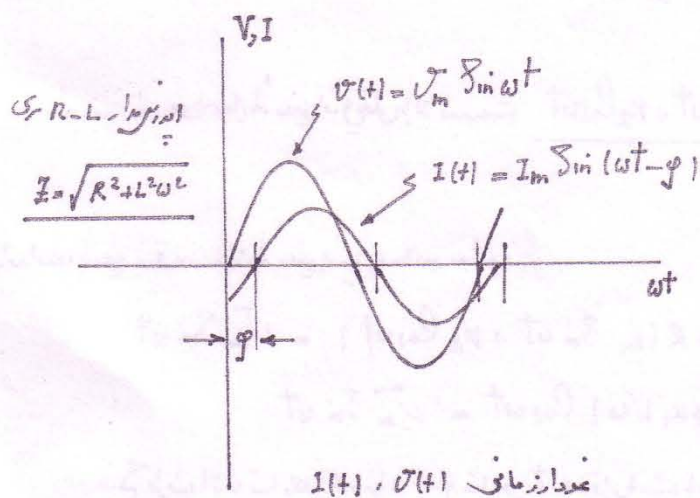
با توجه به اینکه $\frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \sin \varphi$ و $\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \cos \varphi$ می‌توان قیاس گرفت.

$$\mathcal{I}_f(t) = \frac{\mathcal{I}_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} (\sin \omega t \cdot \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi)$$

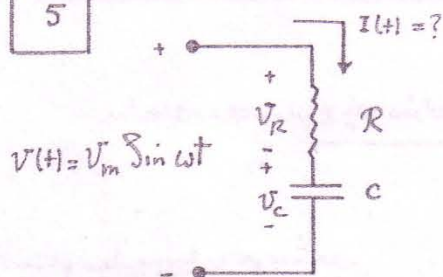
$$\boxed{\mathcal{I}_f(t) = \frac{\mathcal{I}_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

اثر رابط را بالا می‌توان قیاس گرفت که در مدار R-L سری شدت جریان مدار نسبت به ولت $\mathcal{I}(t)$ با تاخیر φ پس‌نماز

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{R}{Z} \quad \text{می‌باشد}$$



5

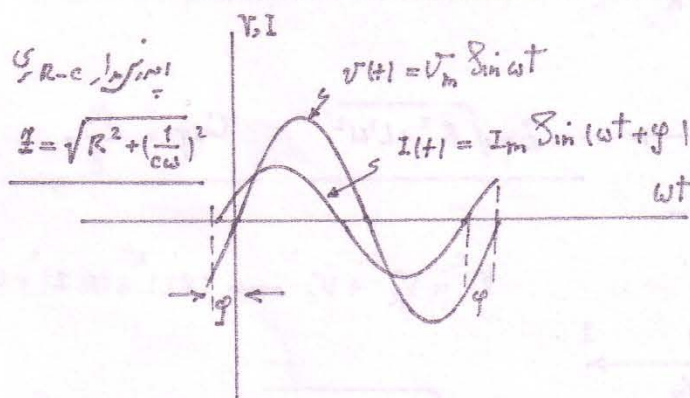


$$v(t) = v_R + v_C \rightarrow v_m \sin \omega t = R I(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

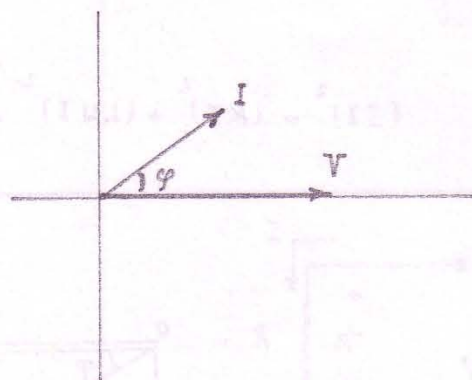
جواب خصوصی معادله بالا $I(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t$ باشد که با

قراردادن آن در معادله بالا مقدار $I(t)$ بصورت زیر می‌آید.

$$I_f(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

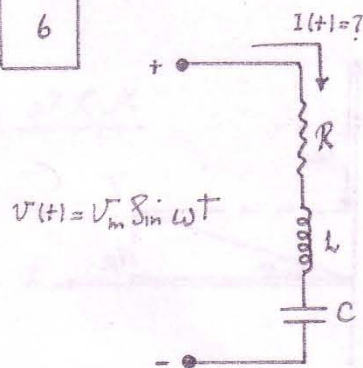


مقدار زمانی $I(t) \cdot v(t)$



مقدار برداری $I \cdot V$

6



$$v(t) = v_R + v_L + v_C \rightarrow v_m \sin \omega t = R I(t) + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

$$I_f(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t \pm \varphi)$$

در مدارهای RLC اگر $X_L > X_C$ باشد جریان نسبت به ولت ژمنه می‌خورد و اگر $X_L < X_C$

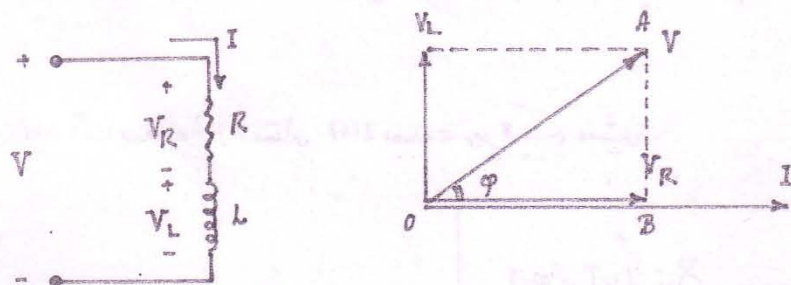
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{R}{Z} \\ I = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{cases}$$

باشد جریان نسبت به ولت ژمنه می‌خورد و خواهد بود

●●● رسم دیاگرام برداری مدارهای $R-L$ ، $R-C$ ، $R-L-C$ سری و برداری روابط آمپا :

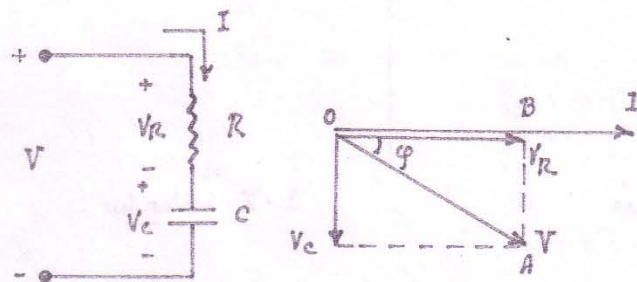
در مدارهای سری بردار جریان به عنوان بردار مبدا در نظر گرفته میشود و بردار افت ولتاژ عناصر تشکیل دهنده شبکه

نسبت به بردار مبدا رسم میشود.



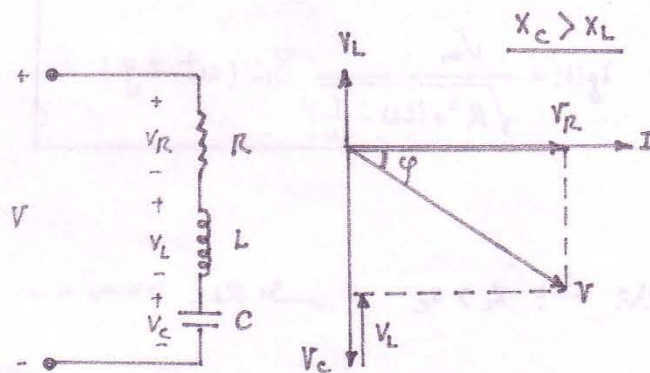
$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \rightarrow V^2 = V_R^2 + V_L^2 \rightarrow \text{در مثلث } OAB :$$

$$(\angle I)^2 = (RI)^2 + (L\omega I)^2 \rightarrow \underline{Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \underline{\cos\phi = \frac{R}{Z}}$$



$$V^2 = V_R^2 + V_C^2 \rightarrow (\angle I)^2 = (RI)^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2$$

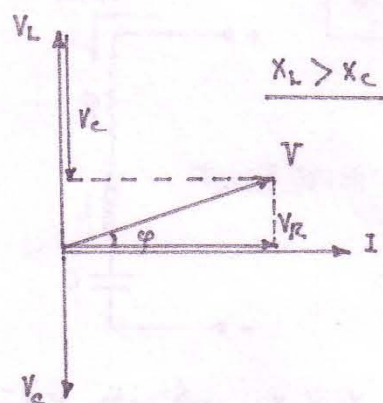
$$\underline{Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \underline{\cos\phi = \frac{R}{Z}}$$



$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \rightarrow (\angle I)^2 = (RI)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\underline{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

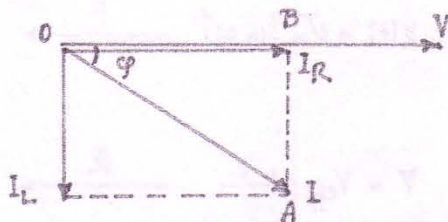
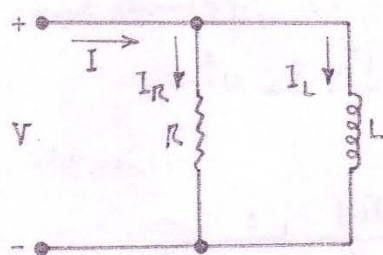
$$\underline{\cos\phi = \frac{R}{Z}}$$



$$\underline{X_L > X_C}$$

در مدارهای موازی بردار ولتاژ به عنوان بردار مبدا متغیر گرفته میشود. و بردار جریانهای عناصر موازی

تشکیل دهنده مدار نسبت به آن قرار میگیرد.



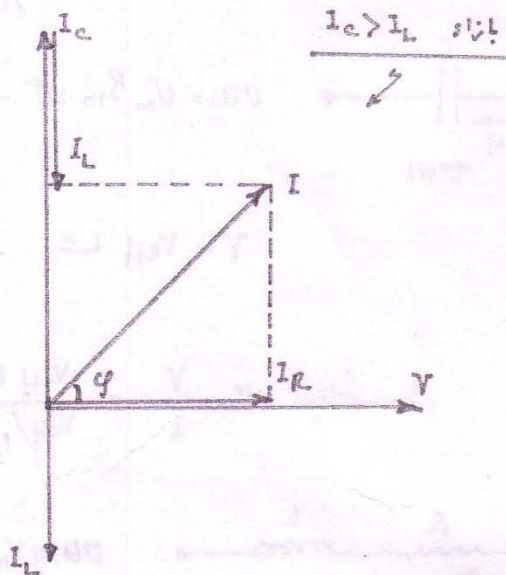
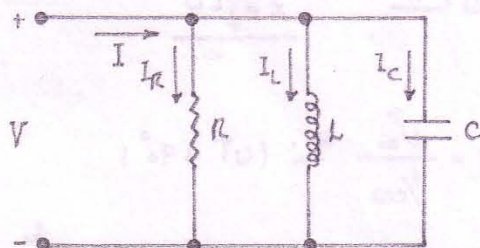
$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \rightarrow I^2 = I_R^2 + I_L^2 \rightarrow \left(\frac{V}{Z}\right)^2 = \left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{L\omega}\right)^2$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}$$

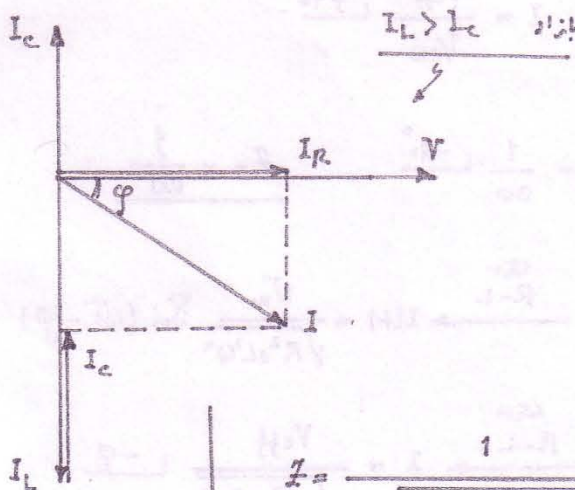
$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}}$$

مثبت OAB: $\cos\varphi = \frac{\text{نمای مجانب}}{\text{مقدار}} = \frac{I_R}{I} = \frac{V/R}{V/Z} = \frac{Z}{R}$

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R}$$



$$I_C > I_L \text{ باشد}$$



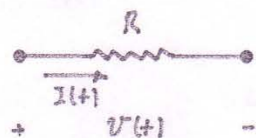
$$I_L < I_C \text{ باشد}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R}$$

ب- مطالعه شبکه های جریان قناب سینوی AC در حوزة اعداد مختلط اعززة تركابى لاجل :

قبلاً آموخته ایم :



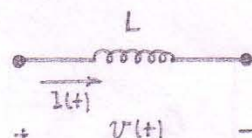
$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{R} i(t) = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$$

یا :

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{R} I = \frac{V_{eff}}{R} \angle 0$$

امپدانس مدار

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{eff} \angle 0}{\frac{V_{eff}}{R} \angle 0} = R \angle 0 \quad \underline{Z = R}$$



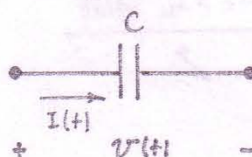
$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{L} i(t) = \frac{V_m}{L\omega} \sin (\omega t - 90^\circ)$$

یا :

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{L} I = \frac{V_{eff}}{L\omega} \angle -90^\circ$$

امپدانس مدار

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{eff} \angle 0}{\frac{V_{eff}}{L\omega} \angle -90^\circ} = L\omega \angle 90^\circ \quad \underline{Z = jL\omega}$$



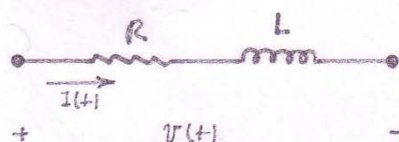
$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{C} i(t) = \frac{V_m}{1/c\omega} \sin (\omega t + 90^\circ)$$

یا :

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{C} I = \frac{V_{eff}}{1/c\omega} \angle +90^\circ$$

امپدانس مدار

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{eff} \angle 0}{\frac{V_{eff}}{1/c\omega} \angle +90^\circ} = \frac{1}{c\omega} \angle -90^\circ \quad \underline{Z = -\frac{j}{c\omega}}$$



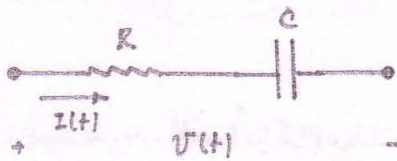
$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{R-L} i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin (\omega t - \phi)$$

$$V = V_{eff} \angle 0 \xrightarrow{R-L} I = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \angle -\phi$$

امپدانس مدار

$$Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \angle +\phi \quad \underline{Z = R + jL\omega}$$

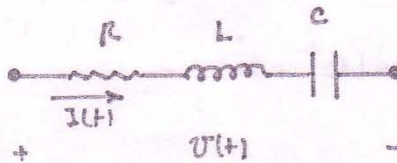
و به طریق مشابه می‌توان نشان داد.



$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{R-C} i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \sin(\omega t + \phi)$$

$$V = V_{eff} \xrightarrow{R-C} I = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \angle +\phi$$

امپدانس مدار $Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \angle -\phi$ $Z = R - \frac{j}{C\omega}$



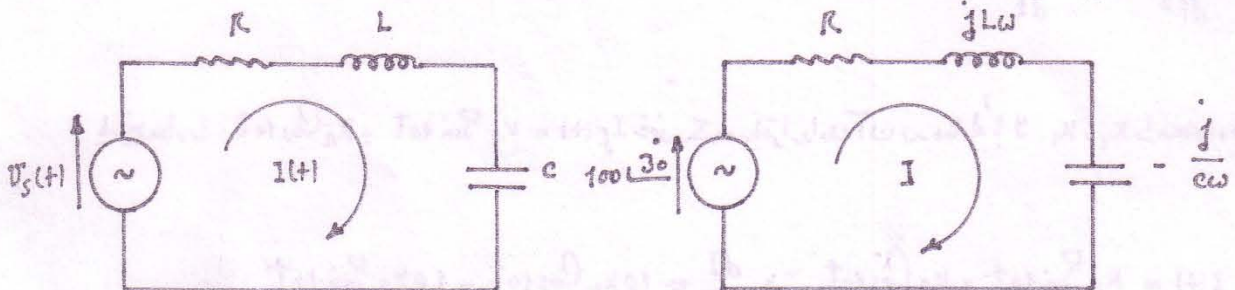
$$v(t) = V_m \sin \omega t \xrightarrow{R-L-C} i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \sin(\omega t \pm \phi)$$

$$V = V_{eff} \xrightarrow{R-L-C} I = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \angle \pm \phi$$

امپدانس مدار $Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \angle \pm \phi$ $Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$

از مطالعه مطالب بالا می‌توان نتیجه گرفت که مدار معادل یک شبکه RLC در حوضه زمانی بسویت نیز در حوضه ω

حوضه فرکانسی تعریف می‌شود.



$$V_s(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ)$$

حال اگر در حوضه زمانی $R = 3 \Omega$ ، $L = 70 \text{ mH}$ ، $C = \frac{1}{3} \text{ mF}$ باشد متناظر آن‌ها در حوضه ω

$$\underline{R = 3 \Omega} \quad \underline{jL\omega = j7 \Omega} \quad \underline{-\frac{j}{C\omega} = -j3 \Omega}$$

برابر خواهد بود با:

*** مثال ۱- مدار RLC سری شکل زیر در حوزه زمانی معین است. ابتدا شیت جریان $I(t)$ را در حوزه زمانی

محاسبه کنید. ثانیاً دیاگرام بودای مدار را رسم کرده و Z ، ϕ و P را با کمک دیاگرام بودای محاسبه کنید، ثالثاً

مدار معادل شبکه را در حوزه ω رسم کرده و شیت جریان مدار را در حوزه ω بدست آورید. ثالثاً مقدار نازی $V_s I$

Z را رسم کنید.

$$V_s(t) = 10\sqrt{2} \sin(10t + 90^\circ)$$

تحلیل شبکه:

حالت ۱ تحلیل شبکه معادله $I(t)$ در حوزه زمانی:

$$V_s(t) = V_R + V_L + V_C \quad 10\sqrt{2} \sin(10t + 90^\circ) = 8I(t) + \frac{dI}{dt} + 40 \int I(t) dt$$

$$10\sqrt{2} \times 10 \cos(10t + 90^\circ) = 8 \frac{dI}{dt} + \frac{d^2 I}{dt^2} + 40 I(t)$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 8 \frac{dI}{dt} + 40 I(t) = 100\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ) = 100\sqrt{2} (-\sin 10t) = -100\sqrt{2} \sin 10t$$

پس مدار را $I_f(t) = K_1 \sin 10t + K_2 \cos 10t$ فرض کرده با قرار دادن آن در معادله بالا K_1 ، K_2 را محاسبه میکنیم.

$$I(t) = K_1 \sin 10t + K_2 \cos 10t \quad , \quad \frac{dI}{dt} = 10K_1 \cos 10t - 10K_2 \sin 10t$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -100K_1 \sin 10t - 100K_2 \cos 10t$$

$$(-100K_1 \sin 10t - 100K_2 \cos 10t) + (80K_1 \cos 10t - 80K_2 \sin 10t) + (40K_1 \sin 10t + 40K_2 \cos 10t) = -100\sqrt{2} \sin 10t$$

$$-(60k_1 + 80k_2) \sin 10t + (80k_1 - 60k_2) \cos 10t = -100\sqrt{2} \sin 10t$$

برای اینکه تارهای بالا با زوایای مختلف موازی باشند باید:

$$\begin{cases} 3 & 60k_1 + 80k_2 = 100\sqrt{2} \\ 4 & 80k_1 - 60k_2 = 0 \end{cases}$$

$$500k_1 = 300\sqrt{2} \quad k_1 = 0,6\sqrt{2} \quad k_2 = 0,8\sqrt{2}$$

$$I(t) = k_1 \sin 10t + k_2 \cos 10t \quad I(t) = 0,6\sqrt{2} \sin 10t + 0,8\sqrt{2} \cos 10t$$

$$I(t) = \sqrt{2} (0,6 \sin 10t + 0,8 \cos 10t) = \sqrt{2} \sin(10t + 53,1^\circ) \text{ Amp}$$

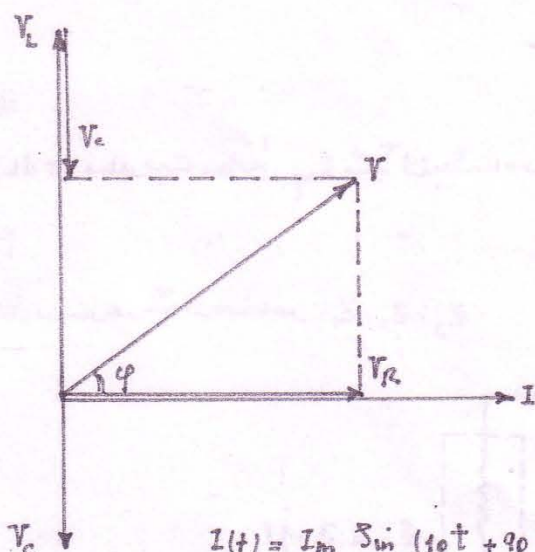
$$I(t) = \sqrt{2} \sin(10t + 53,1^\circ) \text{ Amp}$$

حالت II: تحلیل شبکه توسط دیاگرام برداری:

$$R = 8 \Omega$$

$$X_L = L\omega = 10 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = 4 \Omega$$



$$V_{eff} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10 \text{ Volt}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{8^2 + (10 - 4)^2} = 10 \Omega$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{10}{10} = 1 \text{ Amp} \quad I_m = \sqrt{2}$$

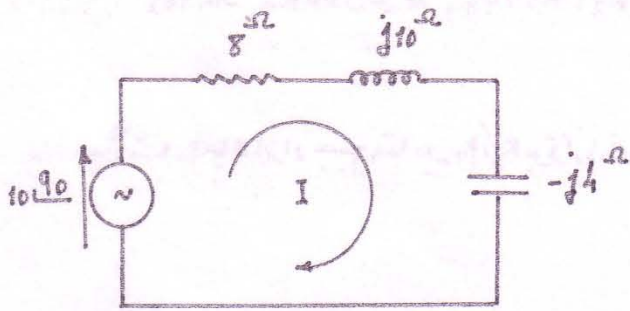
$$I(t) = I_m \sin(10t + 90 - \phi)$$

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = 0,8$$

$$I(t) = \sqrt{2} \sin(10t + 53,1^\circ) \text{ Amp}$$

$$\phi = 36,9^\circ$$

حالت III تحلیل شبکه و محاسبه فرکانسی $j\omega$:



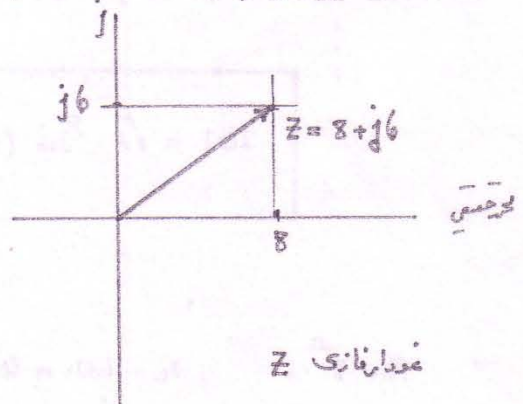
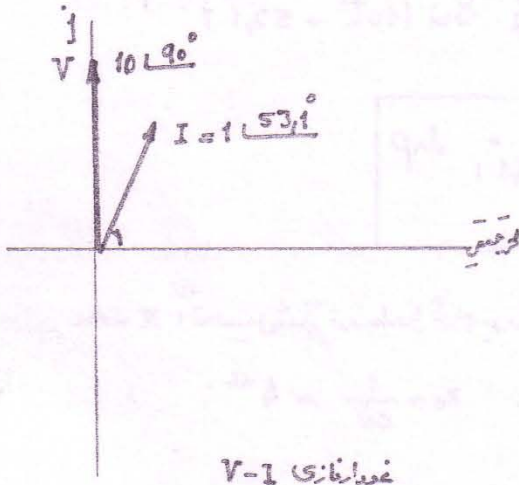
$$jL\omega = j \cdot 1 \times 10 = j10\Omega$$

$$-\frac{j}{C\omega} = -\frac{j}{\frac{1}{40} \times 10} = -j4\Omega$$

$$I = \frac{10 \angle 90^\circ}{8 + j10 - j4} = \frac{10 \angle 90^\circ}{8 + j6} = \frac{10 \angle 90^\circ}{10 \angle 36.9^\circ} = 1 \angle 53.1^\circ \text{ Amp}$$

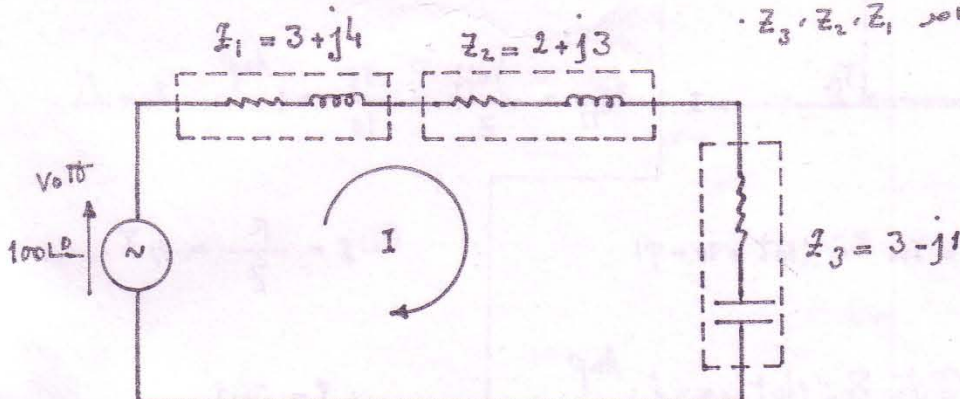
$$I(t) = 1 \times \sqrt{2} \sin(10t + 53.1^\circ) \text{ Amp}$$

حالت IV رسم نمودار فازی V, I, Z



●●● مثال ۲- مطلوبیت محاسبه Z_{eq} شبکه از دیدگاه دسروم، شدت جریان مدار، نمودار فازی $V-I$ ، Z_{eq}

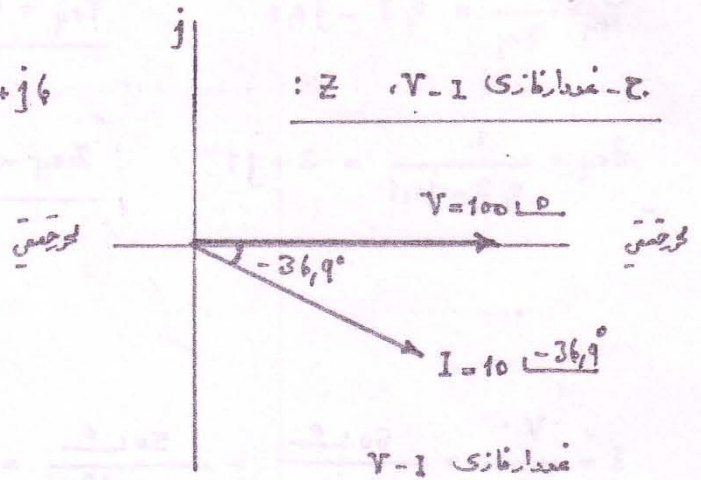
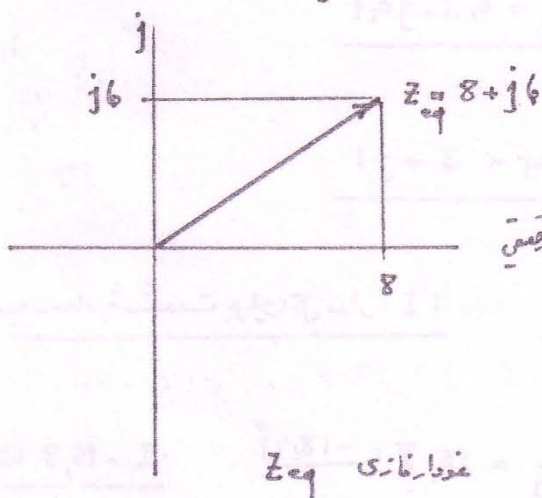
دافت مستر دسرومیک از عناصر Z_1, Z_2, Z_3 .



تحلیل مدار: الف - مطابق Z_{eq} از دیدگاه سرین:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = (3 + j4) + (2 + j3) + (3 - j1) = 8 + j6$$

ب - مطابق شدت جریان مدار: $I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{8 + j6} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle 36.9^\circ} = 10 \angle -36.9^\circ$



ج - غدارفازی $V-I$ ، Z :

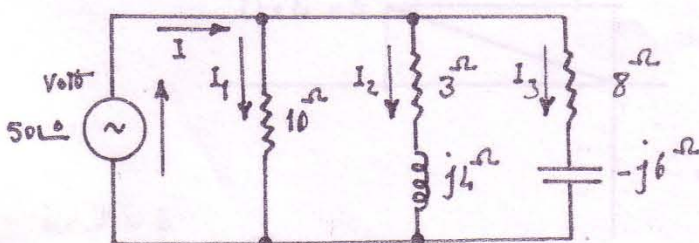
د - مطابق افت ولتاژ در مدارها:

$$V_1 = Z_1 \cdot I = (3 + j4)(10 \angle -36.9^\circ) = 5 \angle 53.1^\circ \times 10 \angle -36.9^\circ = 50 \angle +16.2^\circ$$

$$V_2 = Z_2 \cdot I = (2 + j3)(10 \angle -36.9^\circ) = 3.61 \angle 56.3^\circ \times 10 \angle -36.9^\circ = 36.1 \angle 19.4^\circ$$

$$V_3 = Z_3 \cdot I = (3 - j1)(10 \angle -36.9^\circ) = 3.16 \angle -18.4^\circ \times 10 \angle -36.9^\circ = 31.6 \angle -55.3^\circ$$

●●● مثال 3 - مطلوبیت مطابق امپدانس کل شبکه، شدت جریان کل و شدت جریان هر یک از شاخه‌ها، رسم



غدارفازی $V-I$ ، Z_{eq}

تحلیل مدار: الف - محاسبه Z_{eq} :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{8-j6}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{3-j4}{25} + \frac{8+j6}{100} = 0,1 + j0,1 + (0,12 - j0,16) + (0,08 + j0,06)$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}} = 0,3 - j0,1$$

$$Y_{eq} = 0,3 - j0,1$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{0,3 - j0,1} = 3 + j1$$

$$Z_{eq} = 3 + j1$$

ب - محاسبه شدت جریان کل مدار 1:

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{50 \angle 0^\circ}{3+j1} = \frac{50 \angle 0^\circ}{3,16 \angle 18,43^\circ} = 15,8 \angle -18,43^\circ \quad I = 15,8 \angle -18,43^\circ$$

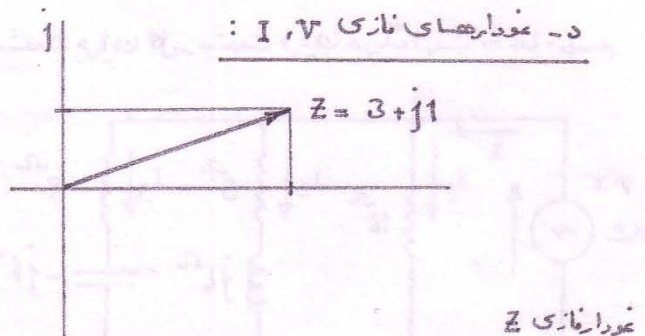
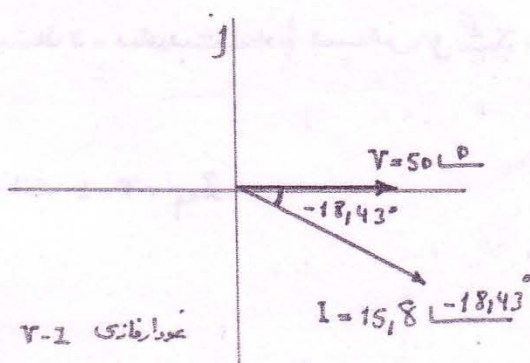
ج - شدت جریان شاخه ها:

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{50 \angle 0^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 5 \angle 0^\circ \text{ Amp}$$

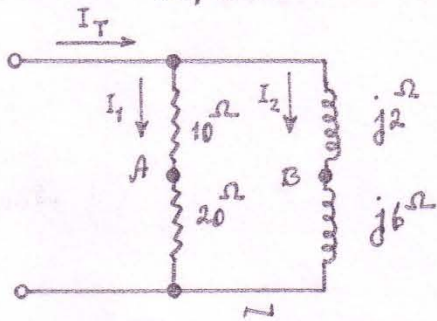
$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{50 \angle 0^\circ}{3+j4} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,1^\circ} = 10 \angle -53,1^\circ \text{ Amp}$$

$$I_3 = \frac{V}{Z_3} = \frac{50 \angle 0^\circ}{8-j6} = \frac{50 \angle 0^\circ}{10 \angle -36,9^\circ} = 5 \angle +36,9^\circ \text{ Amp}$$

د - نمودارهای فاز I, V :



●●● مثال 4 - مطلوبیت محاسبه ولتاژ V_{AB} در مدار شکل زیر: $(I_T = 18 \angle 45^\circ)$



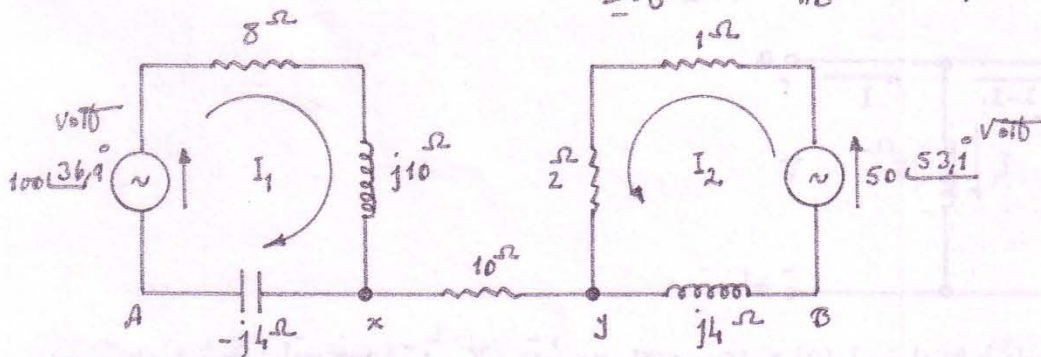
تحلیل شبکه:

$$I_1 = 18 \angle 45^\circ \times \frac{j8}{30 + j8} = 18 \angle 45^\circ \times \frac{8 \angle 90^\circ}{30 + j8} = 4.66 \angle 120^\circ \text{ Amp}$$

$$I_2 = 18 \angle 45^\circ \times \frac{30}{30 + j8} = 18 \angle 45^\circ \times \frac{30 \angle 0^\circ}{30 + j8} = 17.5 \angle 3^\circ \text{ Amp}$$

$$V_{AB} = V_{AN} + V_{NB} = 20(4.66 \angle 120^\circ) + j6(-17.5 \angle 3^\circ) = 11.8 \angle -60^\circ \text{ Volt}$$

●●● مثال 5 - مطلوبیت محاسبه ولتاژ V_{AB} در مدار شکل زیر:



تحلیل مدار:

$$V_{AB} = V_{Ax} + V_{xy} + V_{yB}$$

$$(I_{xy} = 0 \rightarrow V_{xy} = 0 \text{ چرا؟})$$

$$I_1 = \frac{100 \angle 36.9^\circ}{8 + j6} = 10 \angle 0^\circ \text{ Amp}$$

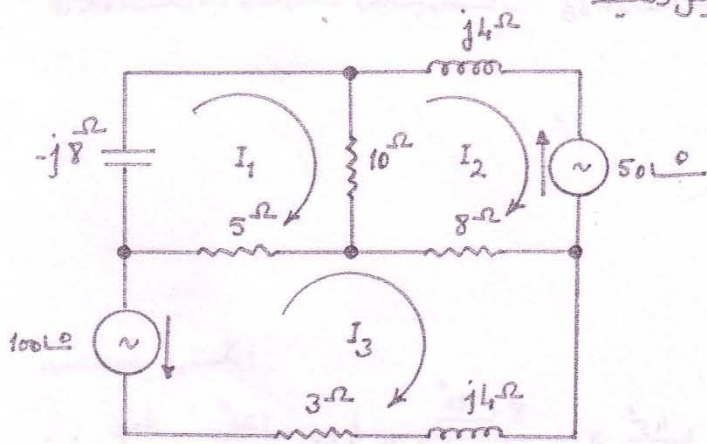
$$I_2 = \frac{50 \angle 53.1^\circ}{3 + j4} = 10 \angle 0^\circ \text{ Amp}$$

$$V_{AB} = (-j4)(-10 \angle 0^\circ) + 0 + (j4)(10 \angle 0^\circ)$$

$$V_{AB} = 4 \angle 90^\circ \times 10 \angle 0^\circ + 4 \angle 90^\circ \times 10 \angle 0^\circ$$

$$V_{AB} = 80 \angle 90^\circ \text{ Volt}$$

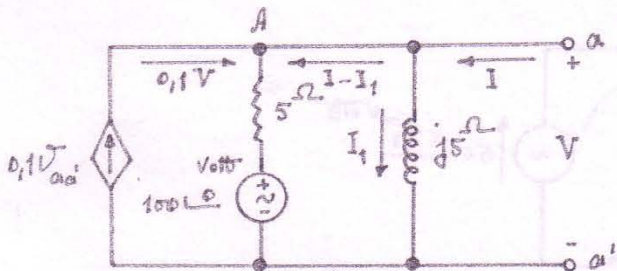
●●● مثال 6 - فیم مارتی معادلات جریان حلقه هار تشکیل دمیید.



— فیم مارتی معادلات KVL :

$$\begin{bmatrix} (15-j8) & -10 & -5 \\ -10 & (18+j4) & -8 \\ -5 & -8 & (16+j4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \angle 0^\circ \\ -10 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

●●● مثال 7 - مدار معادل نودن و فیلتر شبکه شکل زیر را بدست آورید.



— تحلیل شبکه : با تعریف رانشار V در قطب های ورودی جریان I بتوان جریان ورودی تیوان نوشت.

$$\text{KCL A: } 0.1V + (I - I_1) = \frac{V - 100 \angle 0^\circ}{5} \quad , \quad I_1 = \frac{V}{j5}$$

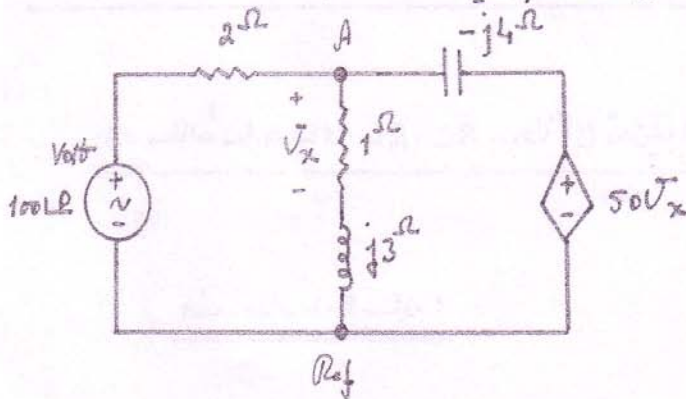
$$\frac{1}{10}V + I - \frac{V}{j5} = \frac{V}{5} - 20 \angle 0^\circ$$

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{j5} \right) V = I + 20 \angle 0^\circ \rightarrow (0.1 - j0.2) V = I + 20 \angle 0^\circ$$

$$V = \frac{1}{0.1 - j0.2} I + \frac{20 \angle 0^\circ}{0.1 - j0.2}$$

$$\underline{V = (2 + j4) I + 89.4 \angle 63.4^\circ}$$

●●● مثال 8- با استفاده از روش تحلیل گره ولتاژ V_x را محاسبه کنید.



— معادله KCL را در گره A تشکیل می‌دهیم.

$$\text{KCL A: } \frac{V_A - 100 \angle 0^\circ}{2} + \frac{V_A}{1+j3} + \frac{V_A - 50V_x}{-j4} = 0.$$

از طرف دیگر، V_A در شاخه $(1+j3)$ فرست. $V_A = V_x + j3V_x = (1+j3)V_x$

$$\frac{(1+j3)V_x - 100 \angle 0^\circ}{2} + V_x + \frac{(1+j3)V_x - 50V_x}{-j4} = 0. \quad \text{بنابراین:}$$

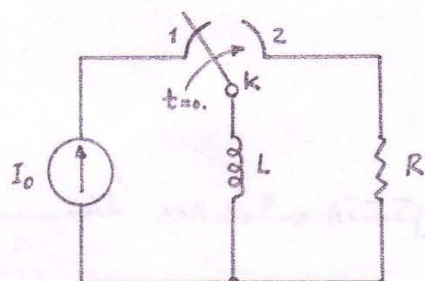
$$(0,5 + j1,5 + 1 + j0,25 - 0,75 - j12,5)V_x = 50$$

$$(0,75 - j10,75)V_x = 50$$

$$V_x = \frac{50}{0,75 - j10,75} =$$

فصل پنجم - مطالعه مدارهای RL ، RC و تطابق پاسخ طبیعی پاسخ اجباری:

1 - مطالعه مدارهای RL ، RC بدون تابع تحریک (واردی صفر):



الف - مدار $R-L$ ساده:

فرض میکنیم که کلید K در لحظه $t=0$ تغییر وضعیت داده و وصل

شاز شده را به دوسر مقاومت اصلی R وصل کند. میخواهیم جریان $I(t)$ را که در $t > 0$ در مدار $R-L$ برقرار میشود

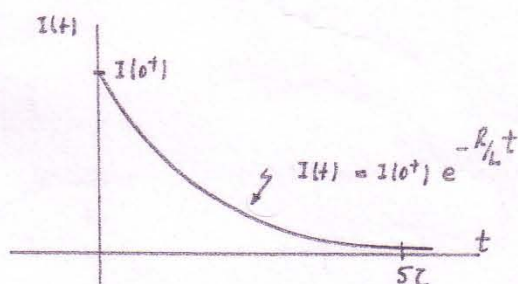
مطابق کنیم. $KVL \curvearrowright : V_R + V_L = 0 \rightarrow R I(t) + L \frac{dI}{dt} = 0.$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با طرف ثانی صفر $L \frac{dI}{dt} + R I(t) = 0.$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot dt \rightarrow \int_{I(0^+)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_{0^+}^t -\frac{R}{L} \cdot dt \rightarrow \ln I(t) - \ln I(0^+) = -\frac{R}{L} t$$

$$\ln \frac{I(t)}{I(0^+)} = -\frac{R}{L} t \rightarrow \underline{I(t) = I(0^+) e^{-\frac{R}{L} t}}$$

پاسخ $I(t)$ را پاسخ طبیعی مدار $R-L$ و یا پاسخ ورودی صفر می نامند. با توجه باینکه پاسخ فوق مایه میراثشده

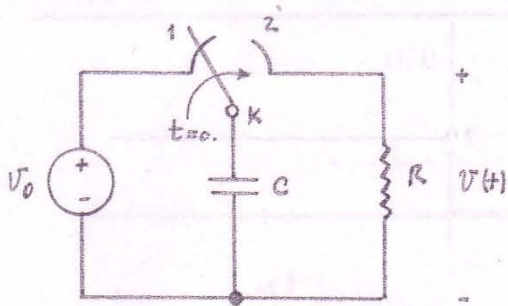


است. آنرا پاسخ گذرا نیز می نامند.

ثابت زمانی $\tau = \frac{L}{R}$: ثابت زمانی τ مدت زمانی است که پس از گذشت آن سلف 63.2% جریان اولیه²

خود را از دست میدهد و طبق محاسبه 5τ طول میکشد تا سلف 99% انرژی اولیه خود را از دست بدهد.

ب- مدار RC ساده:



فرض میکنیم که کلید K در لحظه $t=0$ تغییر وضعیت داده و

خازن شارژ شده را به دوسر مقاومت اهمی R وصل کند.

میخواهیم ولتاژ دوسر مقاومت R را با زمان $t > 0$ محاسبه کنیم.

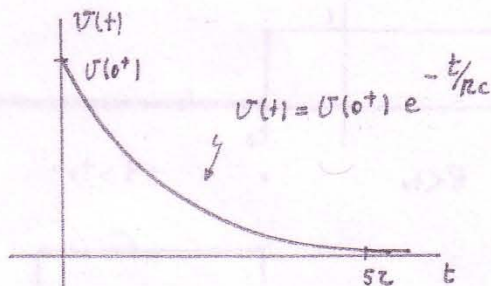
$$KCL: I_R + I_C = 0 \rightarrow \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R} V(t) = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابتی صفر}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC} dt \rightarrow \int_{V(0^+)}^{V(t)} \frac{dV}{V} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt \rightarrow \ln V(t) - \ln V(0^+) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \frac{V(t)}{V(0^+)} = -\frac{t}{RC} \quad \underline{V(t) = V(0^+) e^{-t/RC}}$$

پایخ $V(t)$ را پایخ طبیعی یا پایخ وریدی صفر و بنا بر ماهیت فیزیکی میراثشونده اش پایخ گذرای مدار RC- می نامند.



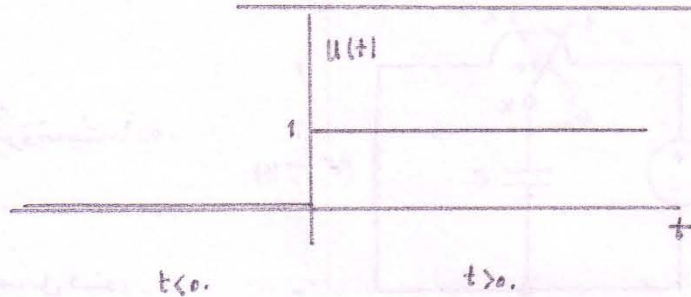
در مدارهای RC، ثابت زمانی $\tau = RC$ مدت زمانی است که پس از گذشت آن خازن 63,2٪ ولتاژ اولیه خود را از دست میدهد و فقط 36,8٪ باقی میماند.

خود را از دست میدهد و فقط 36,8٪ باقی میماند. 5\tau طول می کشد تا خازن 99٪ ولتاژ اولیه خود را از دست بدهد.

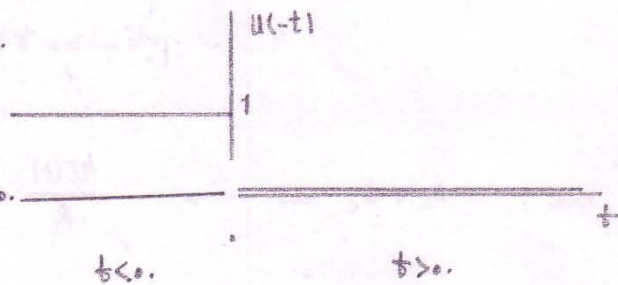
در مدارهای RL و RC به ترتیب $S_1 = -\frac{R}{L}$ ، $S_2 = -\frac{1}{RC}$ را از کانن های طبیعی مدارهای RL، RC می نامند.

تأثیر یک پله‌ای واحد و یک پله‌ای آن در مدارها:

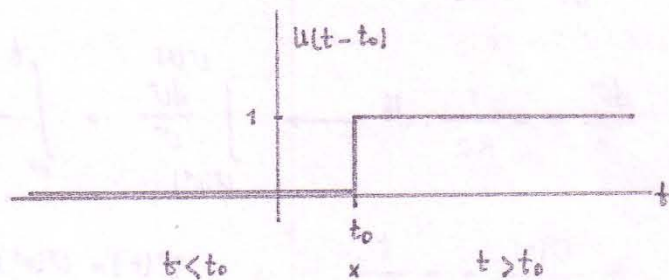
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0. \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$



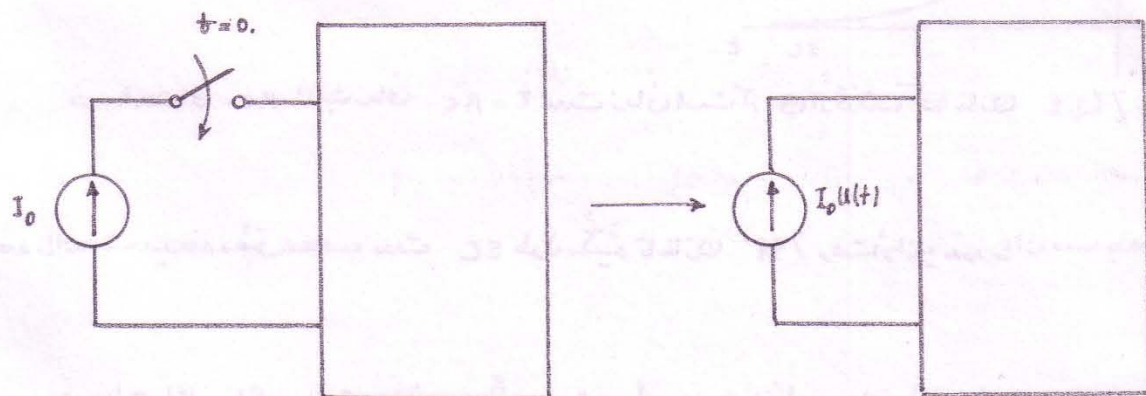
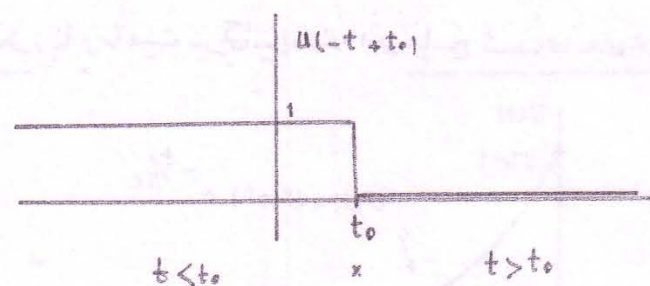
$$u(-t) = \begin{cases} 1 & -t > 0. \rightarrow t < 0. \\ 0 & -t < 0. \rightarrow t > 0. \end{cases}$$



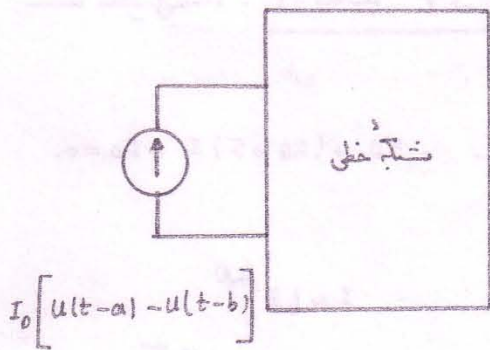
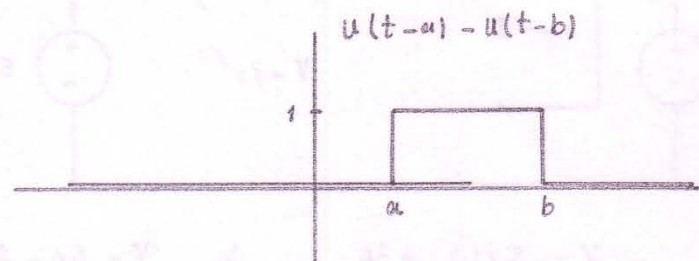
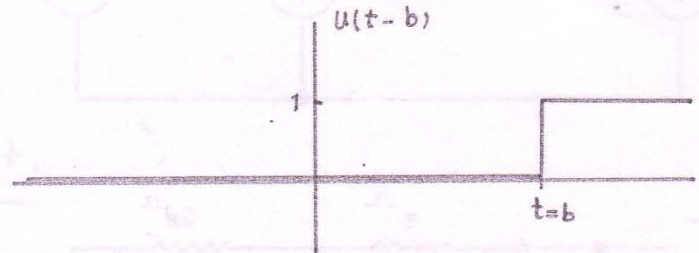
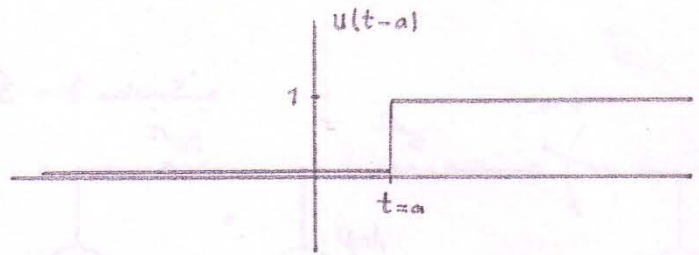
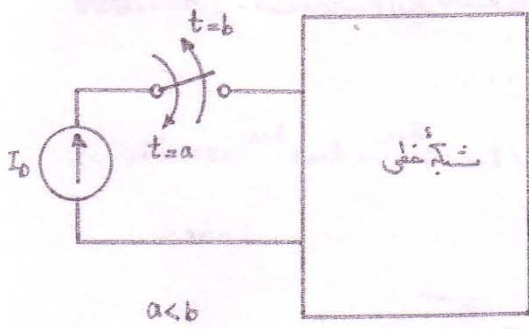
$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$



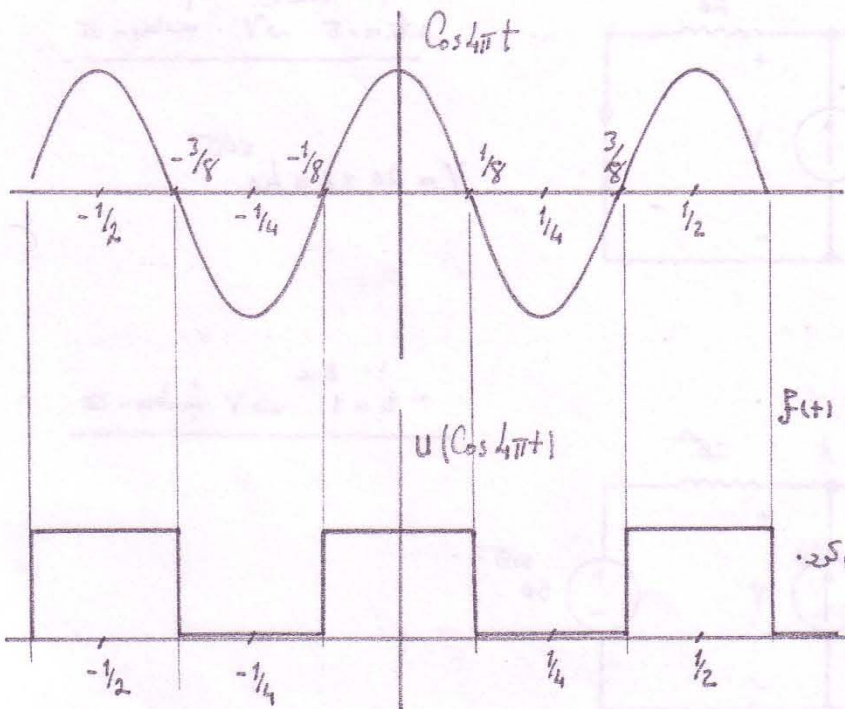
$$u(-t+t_0) = \begin{cases} 1 & t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$



●●● مثال ۱- در مدار شکل زیر کلید را با بصورت تمام پله‌ای واحد بیان کنید.



●●● مثال ۲- نمودار تمام پله‌ای $f(t) = u(\cos 4\pi t)$ را رسم کنید.



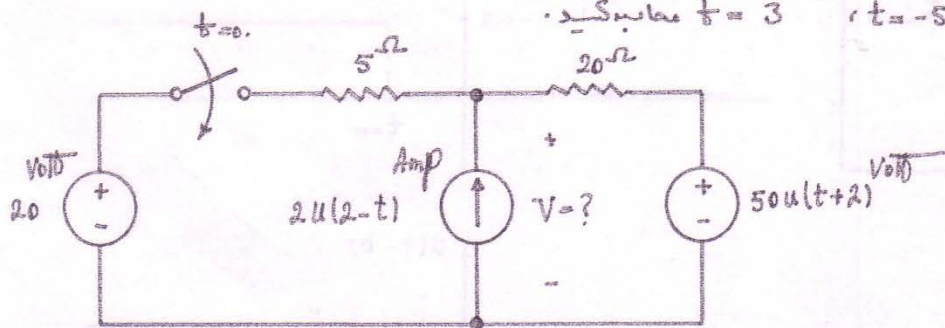
$$u(\cos 4\pi t) = \begin{cases} 1 & \cos 4\pi t > 0 \\ 0 & \cos 4\pi t < 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف تمام پله‌ای می‌توان نمودار تمام پله‌ای $f(t)$

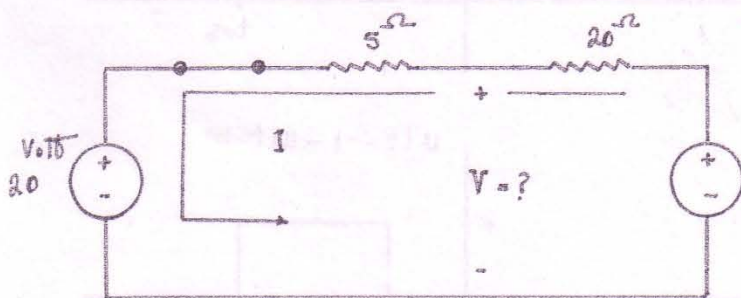
را بصورت زیر به کمک نمودار تمام پله‌ای $\cos 4\pi t$ رسم کرد.

●●● مثال 3- در مدار شکل زیر کلید K در $t=0$ بسته میشود. با توجه به تعریف بام پله‌ای واحد مقدار ولتاژ V

را در زمانهای $t=1^{sec}$ ، $t=-5^{sec}$ ، $t=3^{sec}$ معاینه کنید.



تحلیل شبکه: I- معاینه V در $t=3^{sec}$



$$-50 + (20+5)I + 20 = 0.$$

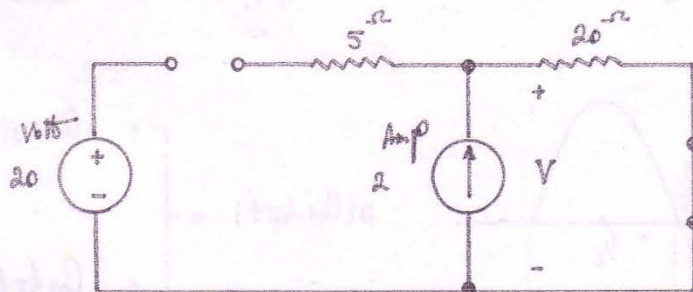
$$I = 1,2 \text{ Amp}$$

$$V = 5 \times 1,2 + 20$$

$$V = 50 - 20 \times 1,2$$

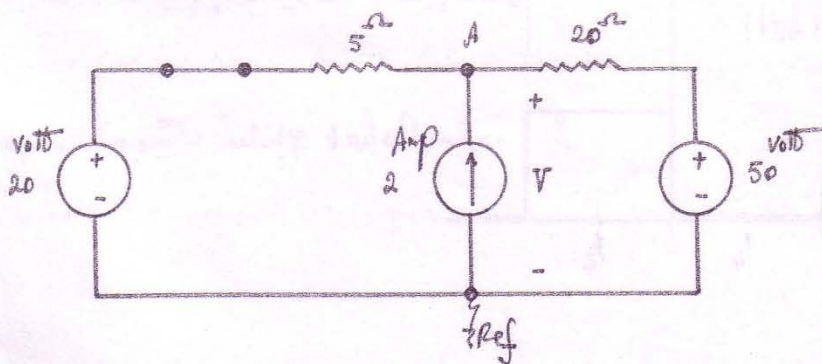
$$V = 26 \text{ Volt}$$

II- معاینه V در $t=-5^{sec}$



$$V = 20 \times 2 = 40 \text{ Volt}$$

III- معاینه V در $t=1^{sec}$

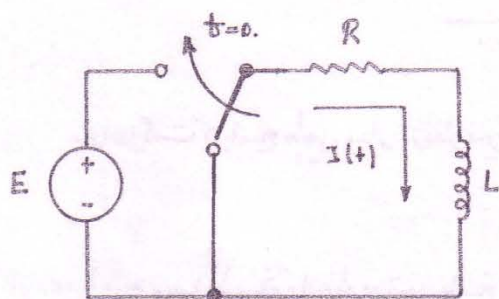


کحل A:

$$\frac{V-20}{5} - 2 + \frac{V-50}{20} = 0.$$

$$V = 34 \text{ Volt}$$

II- مطالعه مدارهای RC, RL با تابع تحریک DC پله‌ای واحد $u(t)$:



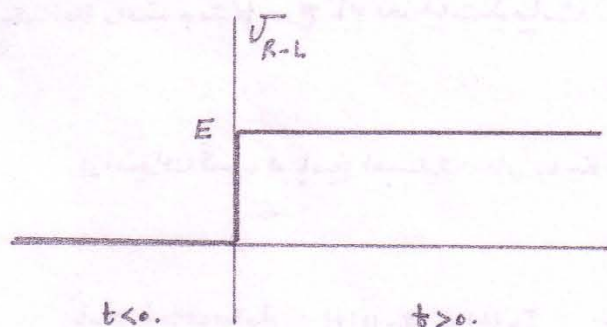
الف- مدار R-L ساده با تابع تحریک DC:

فرض می‌کنیم در لحظه $t=0$ کلید K یک مدار R-L ساده را

به دوسو پلش‌رشته‌ای E وصل کند. می‌خواهیم شدت جریان $I(t)$ را برای $t > 0$ محاسبه کنیم.

$$\text{KVL } \textcircled{I} : E = RI(t) + L \frac{dI}{dt} \longrightarrow L \frac{dI}{dt} + RI(t) = E \quad (t > 0 \text{ بازاء})$$

با توجه به عملکرد کلید و موقعیت آن در مدار تیوان ولتاژ دوسو مدار R-L را برای تمام زمانها بصورت نمودار



زیر بیان کرد پس آنرا بصورت تابع پله‌ای واحد تعریف نمود.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0. \\ 1 & t > 0. \end{cases} \quad \text{با توجه به تعریف تابع پله‌ای واحد}$$

تیوان نمودار فوق ولتاژ دوسو مدار R-L را بصورت $\mathcal{U}_{R-L} = E \cdot u(t)$ برای تمام زمانها تعریف کرد.

$$\text{لذا:} \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با طرف ثانی پله‌ای} \quad L \frac{dI}{dt} + RI(t) = E \cdot u(t)$$

می‌توان نشان داد که معادله بالا دارای درنوع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری است. و یا بصورت دیگر پاسخ کامل $I(t)$

$$I(t) = I_p + I_n(t) \quad \text{از معادله طبیعی را اجباری تشکیل میدهد.}$$

محاسبه پاسخ طبیعی مدار: پاسخ طبیعی مدار همان پاسخ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بدون طرف ثانی است که آنرا

پاسخ معادله همگن نیز می نامند. بنابراین:

$$L \frac{dI}{dt} + R I(t) = 0 \longrightarrow \underline{I_h(t) = A e^{-R/L t}}$$

می توان گفت که پاسخ طبیعی مدار از نظر فیزیکی همان پاسخ مربوط به محلی العمل مدار مخالفت L در مقابل تغییرات

جریان باشد و همانند یک ملاحظه می شود پاسخ فوق فقط تابع مشخصات فیزیکی عناصر غیرفعال شبکه (L, R) بوده

و کاملاً متغیر از شکل موج تابع تحریک می باشد.

معادله پاسخ اجباری مدار: پاسخ اجباری مدار همان پاسخ معادله دیفرانسیل شبکه بازنه تابع تحریک پله ای بوده

و کاملاً وابسته به شکل موج تابع تحریک شبکه می باشد.

لذا می توان گفت که پاسخ اجباری مدار $R-L$ بازنه تابع تحریک پله ای بصورت پاسخ پله ای می باشد. یعنی

$$L \frac{dI}{dt} + R I(t) = E \cdot u(t) \longrightarrow \underline{I_f(t) = K \cdot u(t)}$$

بازار $0 < t$ می توان بازنه ابرادان $I_f(t)$ در معادله دیفرانسیل بالا مقدار ضریب K را محاسبه کرد.

$$L \times 0 + R \cdot K \cdot u(t) = E \cdot u(t) \longrightarrow K = \frac{E}{R} \longrightarrow \underline{I_f(t) = \frac{E}{R} u(t)}$$

پاسخ اجباری مدار که همان پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل می باشد ما هیتاً از نظر فیزیکی ماندگار بوده و لذا آزاد

اکثر موارد پاسخ ماندگار شبکه نیز خواهیم نامید.

$$I(t) = \frac{E}{R} u(t) + A e^{-R/L t}$$

معادله پاسخ کامل مدار:

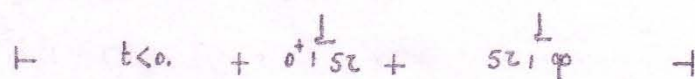
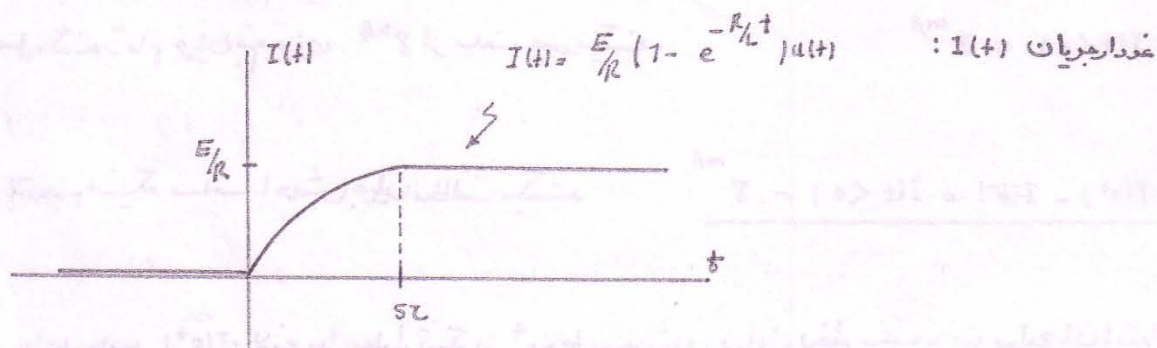
اگر مقدار اولیه جریان در مدار R-L در $t < 0$ معادل صفر باشد میتوان $I(t)$ را بصورت زیر تجزیه گرفت.

$$I(t) = \frac{E}{R} u(t) + A e^{-R/L t}$$

$$t=0^+ \longrightarrow I(0^+) = \frac{E}{R} + A \longrightarrow 0 = \frac{E}{R} + A \longrightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$I(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-R/L t} \right) u(t) \longrightarrow \underline{I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-R/L t}) u(t)}$$

$I(t)$ را بصورت شرایط بالا پاسخ حالت صفر مدار نیز می نامند. (شرایط اولیه مدار صفر باشد)



شرایط اولیه

پایخ اجباری (ان گذرا)

پایخ طبیعی

(گذرا)

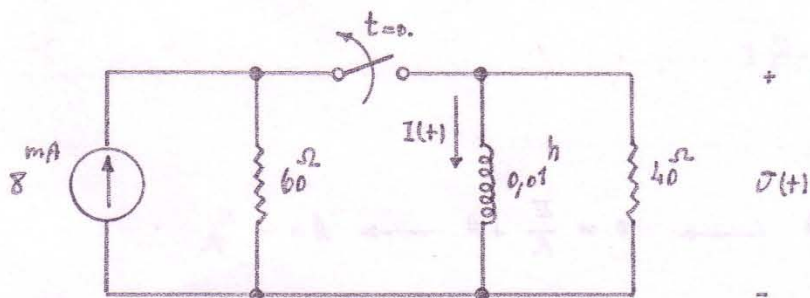
خودار بالا نشان میدهد که برای محاسبه پاسخ کامل $I(t)$ در مدار R-L با تحریک DC (پله ای واحد) و مدارهای

مشابه آن لازم است شبکه در معده های زمانی زیر مورد مطالعه قرار گیرد.

- 1) حالت آرامش اولیه: $t < 0$: $I(0^-)$, $V(0^-)$
- 2) حالت غیر آرامش: $0 < t < \tau$: پهنای پایخ طبیعی
- 3) حالت آرامش نهایی: $t > \tau$: پهنای پایخ اجباری

$$\underline{I(t) = I_p + I_n(t)}$$

●●● مثال 1- در مدار شکل زیر کلید K در $t=0$ باز می‌شود. مطلوب محاسبه $V(t)$, $I(t)$, $V(0^+)$, $I(0^+)$



برای $t > 0$

تحلیل شبکه: الف- مطالعه مدار در $t < 0$ بمقتضای مطالبه $I(0^+)$, $V(0^+)$:

در $t < 0$ کلید K بسته است و چون از مدت قبل کلید K در این وضعیت قرار دارد لذا سلف مشابه اتصال

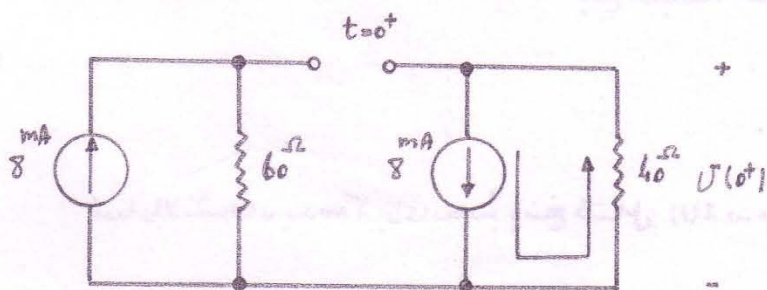
کناه عمل می‌کند. تمام جریان به جریان 8 mA از سلف عبور می‌کند.

با توجه به اینکه سلف با جهش جریان مخالفت می‌کند

$$\underline{I(0^+) = I(0^-) = I(t < 0) = 8 \text{ mA}}$$

برای محاسبه $V(0^+)$ لازم مدار معادل شبکه در $t=0^+$ رسم شود. در این لحظه سلف به یک مدار جریان با مقدار $I(0^+)$

تبدیل می‌شود و معادله باز شدن کلید K تمام انرژی شارژ شده خود را روی مقاومت 40Ω دشارژ می‌کند.



$$\underline{V(0^+) = 40 \times (-8 \text{ mA}) = -320 \text{ mV}}$$

مدار معادل در $t=0^+$

توجه داشته باشید که $V(0^-) = V(t < 0) = 0$ و در نتیجه $\underline{V(0^+) \neq V(0^-)}$ داریم

تقارنت 60Ω : $I'(0^-) = I(t < 0) = 0$, $I'(0^+) = 8 \text{ mA}$ زیرا $I(0^+) = 8 \text{ mA}$

$$\underline{I'(0^+) \neq I'(0^-)}$$

ب- مطالعه مدار در $t > 0$: در $t > 0$ کلید K باز می‌شود و اندازۀ منبع فعال 8 mA از مدار $R-L$ خارج

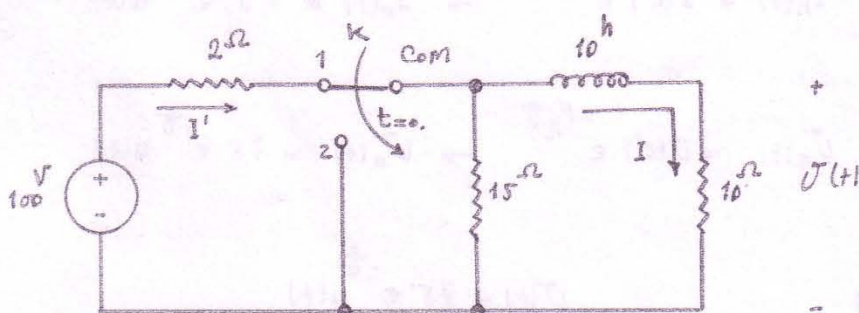
می‌شود بنابراین سلف انرژی ذخیره شده را در مقاومت 40Ω تخلیه می‌کند. لذا $I_f = 0$ ، $V_f = 0$.

$$I_n(t) = I(0^+) e^{-\frac{R}{L}t} \quad \underline{I_n(t) = 8 e^{-4000t}} \quad t > 0 \quad \text{مهر}$$

$$V_n(t) = V(0^+) e^{-\frac{R}{L}t} \quad \underline{V_n(t) = -320 e^{-4000t}} \quad t > 0 \quad \text{مهر}$$

$$\underline{I(t) = 8 e^{-4000t} u(t) \quad , \quad V(t) = -320 e^{-4000t} u(t)}$$

*** مثال 2- مطلوبیت محاسبه $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ ، $I(t)$ ، $V(t)$ مهر $t > 0$:



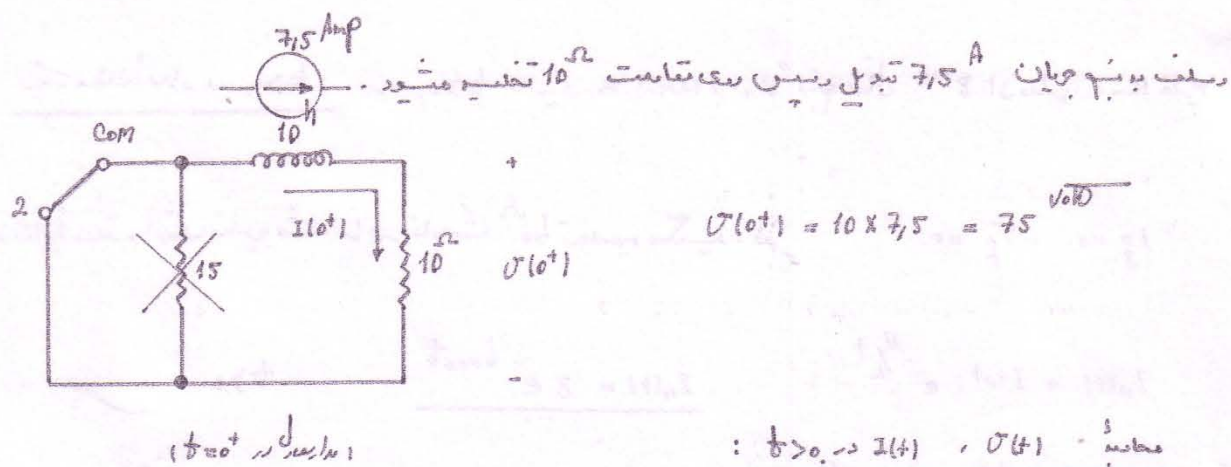
تحلیل شبکه: مطالعه مدار در $t < 0$ و محاسبه $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ در $t < 0$ کلید K در وضعیت 1 قرار دارد.

$$I'(t < 0) = \frac{100}{2 + \frac{10 \times 15}{10 + 15}} = 12.5 \quad \text{در سلف تغییرات اتصال کوتاه عمل می‌کند.}$$

$$I(0^-) = 12.5 \quad , \quad I(t < 0) = \frac{15}{10 + 15} \times 12.5 = 7.5 \text{ Amp} \quad I(0^-) = 7.5 \text{ Amp}$$

$$I(0^+) = I(0^-) = I(t < 0) = 7.5 \text{ Amp} \quad \text{سلف با جفتی جریان مغایرت نمی‌کند لذا:}$$

محاسبه $V(0^+)$ در لحظه $t = 0^+$ کلید در وضعیت (2) قرار می‌گیرد و مقاومت 15Ω از طریق کلید اتصال کوتاه می‌شود.



در $t > 0$ به ولتاژ 100 V مقاومت 2Ω از طریق کلید از مدار خارج شده و تقاضا 15Ω نیز به پهن کلید اتصال

داده میشود. بنابراین رشد 10 H فقط به تقاضا 10Ω داشته میشود ، $R/L = 1 \text{ s}^{-1}$

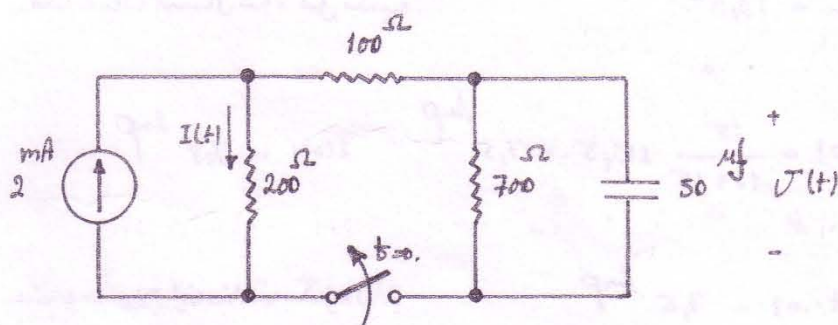
$$I_f = 0, \quad V_f = 0, \quad I_n(t) = I(0^+) e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow I_n(t) = 7.5 e^{-t} u(t)$$

$$V_n(t) = V(0^+) e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow V_n(t) = 75 e^{-t} u(t)$$

$$I(t) = 7.5 e^{-t} u(t)$$

$$V(t) = 75 e^{-t} u(t)$$

●●● مثال 3- در شبکه شکل زیر کلید K در لحظه $t = 0$ باز میشود ، $I(t)$ ، $V(t)$ ، $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ را

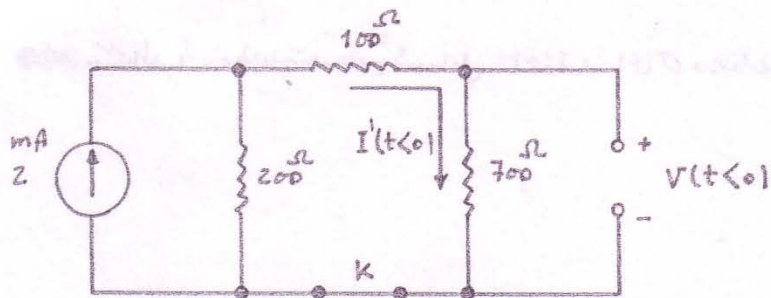


بای $t > 0$ مطابق کنید .

تحلیل مدار - الف - مطابق مدار در $t < 0$:

در $t < 0$ کلید K بسته است و ولتاژ معطوفه

ت برابر است با :



$$I'(t < 0) = \frac{200}{200 + (100 + 700)} \times 2 \text{ mA}$$

$$I'(t < 0) = 0,4 \text{ mA}$$

1 مدار معادل در $t < 0$

$$V(t < 0) = 700 \times 0,4 = 280 \text{ mVolt}$$

$$V(0^-) = V(t < 0) = 280 \text{ mVolt}$$

$$V(0^+) = V(0^-) = 280 \text{ mVolt}$$

خازن با حفظ ولت‌مخافت می‌کند.

مطلب $I(0^+)$ با استفاده از مدار معادل در $t = 0^+$: در $t = 0^+$ کلید K باز می‌شود، مقاومت 200Ω متغیر

$$I(0^+) = 2 \text{ mA}$$

به سربسته 2 mA وصل می‌گردد. لذا:

مطلب $V(t), I(t)$ در $t > 0$:

در $t > 0$ مدار خازن $50 \mu\text{F}$ نقطه تنبیط مقاومت 700Ω بسته می‌شود و لذا:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{700 \times 50 \times 10^{-6}} = 28,6 \text{ } \frac{1}{\text{sec}} \rightarrow V_n(t) = V(0^+) e^{-\frac{t}{R_c}}$$

$$V(t) = 280 e^{-28,6t} \text{ mVolt} \quad u(t)$$

باتوجه به اینکه جریان $I(t)$ در $t > 0$ نقطه تنبیط به 2 mA برقرار می‌شود هیچ ارتباطی با خازن و اثری

$$I(t) = 2 \text{ mA}$$

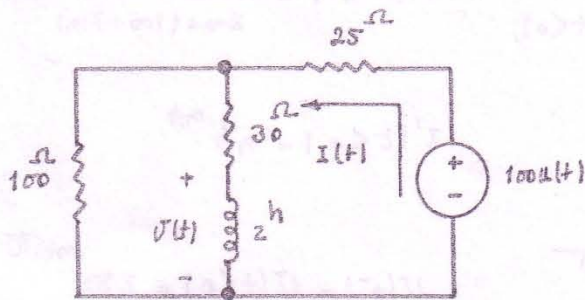
$t > 0$

لذا

$$I(t) = 2 u(t) \text{ mA}$$

مربوط به آن ندارد لذا:

●●● مثال 4- مطلوبت مطابق کامل $I(t)$ ، $V(t)$ در مدار شکل زیر:



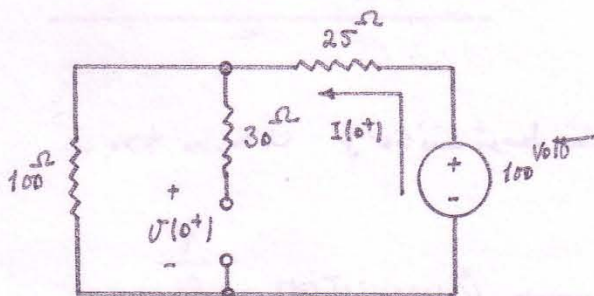
I مطالعه مدار در $t < 0$ بختقر مطابق $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ (شرایط اولیه):

در $t < 0$ شبکه غیرفعال بوده و لذا $I_L(t < 0) = 0$. باشد و با توجه بانیک سلف با جفت جریان مخالفت میکند

$$I_L(0^+) = I_L(0^-) = I_L(t < 0) = 0.$$

$$\underline{I_L(0^+) = 0.}$$

برای مطابق $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ مدار معادل را در $t = 0^+$ در نظر میگیریم. در این لحظه سلف بعنوان منبع جریان صفر



آمپری (مدار باز) عمل میکند.

$$V(0^+) = ? \quad , \quad I(0^+) = ?$$

$$I(0^+) = \frac{100}{100 + 25} = 0,8 \text{ Amp}$$

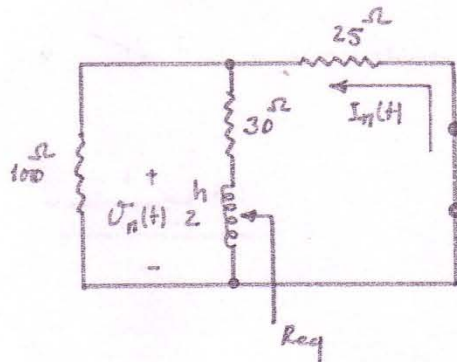
$$V(0^+) = 100 \times 0,8 = 80 \text{ Volt}$$

$$\underline{I(0^+) = 0,8 \text{ Amp}}$$

$$\underline{V(0^+) = 80 \text{ Volt}}$$

II مطالعه مدار در فاصله زمانی $0^+ \leq t$ ببعن حضور فنام فعال بختقر مطابق پانخ جعی یا پانخ گذرای مدار:

مدار معادل شبکه را ببعن حضور منبع 100 Volt در فاصله زمانی $0^+ \leq t$ در نظر میگیریم.



$$R_{eq} = \frac{25 \times 100}{100 + 25} + 30 = 50 \, \Omega$$

$$\frac{R_{eq}}{L} = \frac{50}{2} = 25$$

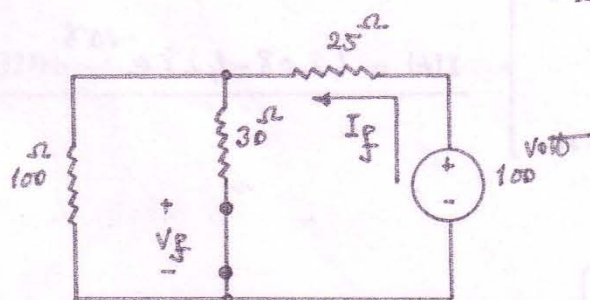
$$I_n(t) = A e^{-25t}$$

$$V_n(t) = B e^{-25t}$$

III. مطالعه مدار در فاصله زمانی 52: بنظر مطابق پاسخ اجباری ماندگار: حالت آرامش نهایی

در این فاصله زمانی 52 از وصل کلید سبزی شده و مدار به حالت آرامش نهایی رسیده است لذا سلف در مدار به عنوان

اتصال کوتاه عمل میکند. و مدار معادل بصورت زیر می باشد.



$$I_f = \frac{100}{\frac{100 \times 30}{100 + 30} + 25} = 2,08 \, \text{Amp}$$

$$V_f = 0.$$

$$I_f = 2,08 \, \text{Amp}$$

$$V_f = 0.$$

$$V(t) = V_f + V_n(t) = 0 + B e^{-25t}$$

مطابق پاسخ کامل:

$$I(t) = I_f + I_n(t) = 2,08 + A e^{-25t}$$

$$I(t) = 2,08 + A e^{-25t}$$

مطابق ضرایب A, B توسط $I(0^+)$, $V(0^+)$

$$t=0^+ \rightarrow I(0^+) = 2,08 + A \rightarrow 0,8 = 2,08 + A \rightarrow A = -1,28$$

$$\underline{I(t) = 2,08 - 1,28 e^{-25t} \quad t > 0.}$$

$$V(t) = B e^{-25t}$$

مکانی ضرب B:

$$t = 0^+ \longrightarrow V(0^+) = B \longrightarrow B = 80 \quad V_{0.70}$$

$$\underline{V(t) = 80 e^{-25t} \quad t > 0.}$$

با توجه باینکه مقدار $I(t)$ و $V(t)$ در زمانی صفر باشد لذا می توان $I(t)$ و $V(t)$

با استفاده از تمام زمانها بصورت زیر نوشت.

$$I(t) = 0. \quad t < 0.$$

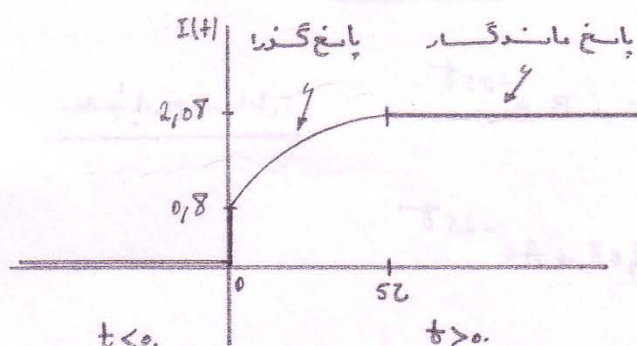
$$I(t) = 2,08 - 1,28 e^{-25t} \quad t > 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} I(t) = 0. \quad t < 0. \\ I(t) = 2,08 - 1,28 e^{-25t} \quad t > 0. \end{array} \right\} \underline{I(t) = (2,08 - 1,28 e^{-25t}) u(t)}$$

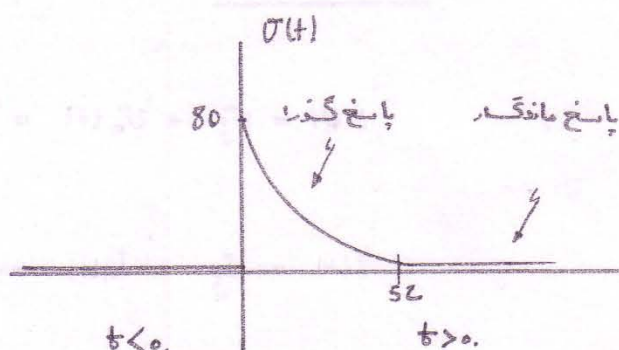
$$V(t) = 0. \quad t < 0.$$

$$V(t) = 80 e^{-25t} \quad t > 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = 0. \quad t < 0. \\ V(t) = 80 e^{-25t} \quad t > 0. \end{array} \right\} \underline{V(t) = 80 e^{-25t} u(t)}$$

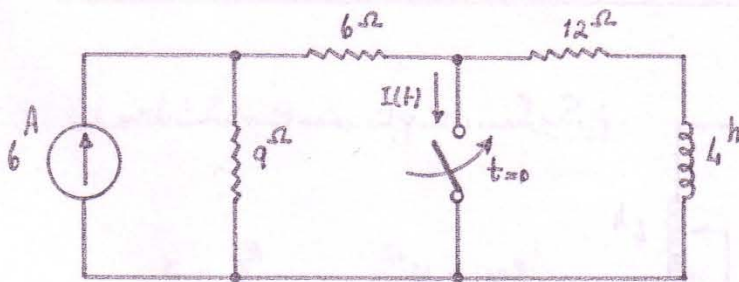


$$I(t) = (2,08 - 1,28 e^{-25t}) u(t) \quad \text{عندئذ}$$



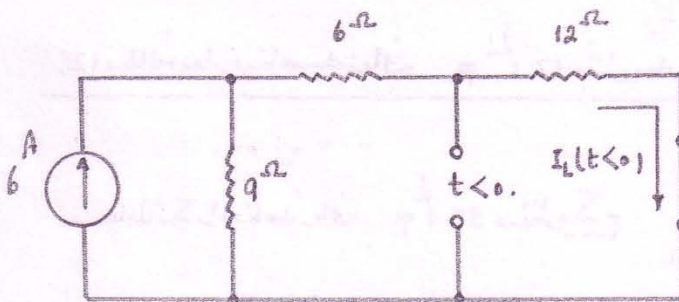
$$V(t) = 80 e^{-25t} u(t) \quad \text{عندئذ}$$

●●● مثال 5- در مدار شکل زیر کلید K در $t=0$ بسته میشود. پاسخ کامل $I(t)$ را محاسبه کنید.



تحلیل شبکه: I مطالعه مدار در $t < 0$ حالت آرامش اولیه (منظور مطابق $I(0^+)$:

الف- مطابق $I_L(0^+)$ مدار معادل را در $t < 0$ در نظر میگیریم. با توجه باینکه مدار در حالت آرامش است سلف

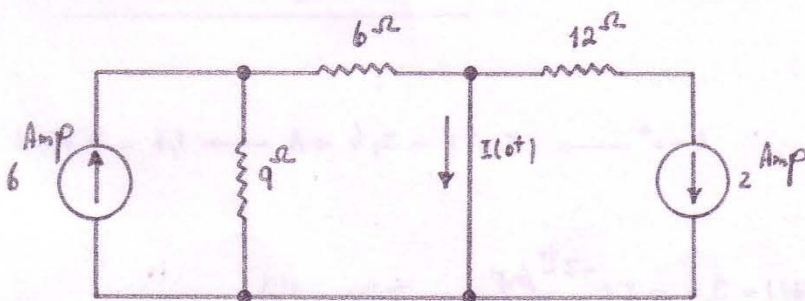


معنای اتصال کوتاه عمل میکند.

$$I_L(t < 0) = \frac{9}{9 + (6 + 12)} \times 6 = 2 \text{ Amp}$$

$$\underline{I_L(0^+) = 2 \text{ Amp}}$$

ب- مطابق $I(0^+)$ بجز مدار معادل شبکه در $t=0^+$: مدار معادل را در $t=0^+$ در نظر میگیریم. در این لحظه سلف



معنای منبع جریان 2 Amp عمل میکند.

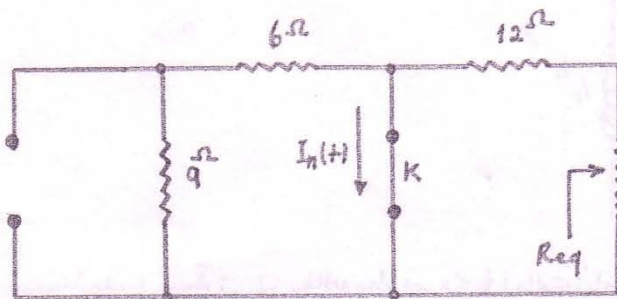
$$I(0^+) = I'(0^+) \Big|_{\substack{6A \\ \text{تویست}}} + I''(0^+) \Big|_{\substack{2A \\ \text{تویست}}}$$

$$I'(0^+) = \frac{9}{9 + 6} \times 6 = 3,6 \text{ Amp}$$

$$I''(0^+) = -2 \text{ Amp}$$

$$\underline{I(0^+) = 1,6 \text{ Amp}}$$

II مطالعه مدار در فاصله زمانی $0^+ \leq t < \infty$ بنظر مطابق پاسخ طبیعی مدار:



مدار معادل شبکه را بین حضور و غایب فعال در نظر میگیریم.

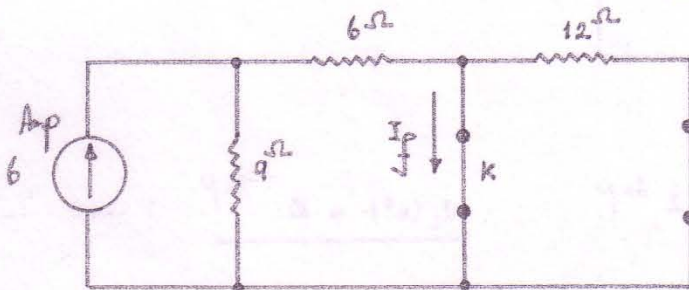
$$R_{eq} = 12 \Omega$$

$$R/L = 3$$

$$I_n(t) = A e^{-3t}$$

III مطالعه مدار در فاصله زمانی $t = 0^+$ بنظر مطابق پاسخ اجباری: حالت آرایش نهایی

مدار معادل شبکه را در فاصله زمانی $t = 0^+$ در نظر میگیریم.



$$I_f = \frac{9}{9+6} \times 6 = 3,6 \text{ Amp}$$

$$I_f = 3,6 \text{ Amp}$$

$$I(t) = I_f + I_n(t)$$

محاسبه پاسخ کامل: $I(t)$

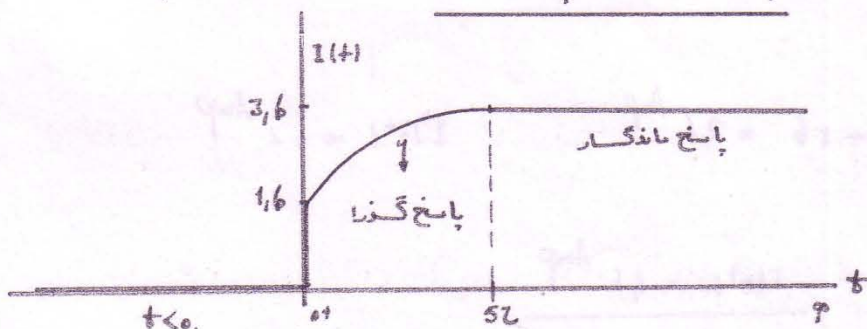
$$I(t) = 3,6 + A e^{-3t}$$

$$t = 0^+ \rightarrow I(0^+) = 3,6 + A \rightarrow 1,6 = 3,6 + A$$

$$A = -2$$

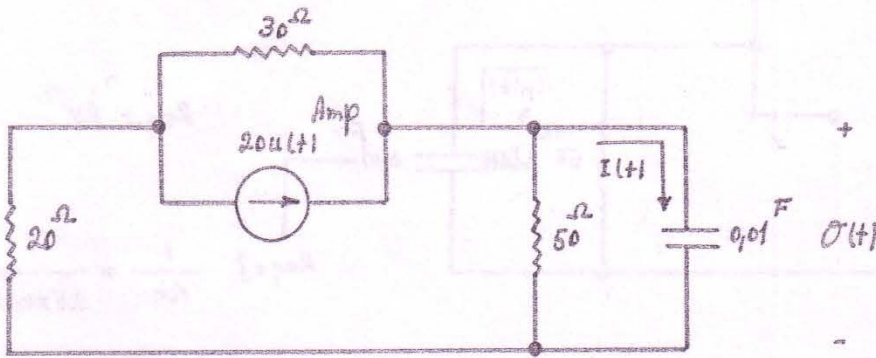
$$I(t) = 3,6 - 2e^{-3t} \text{ Amp}$$

بنابراین $t > 0$.



$$I(t) = (3,6 - 2e^{-3t}) u(t)$$

●●● مثال ۶- مطلوبیت مطابق $I(0^+)$ ، $V(0^+)$ و پاسخ کامل $I(t)$ ، $V(t)$ در مدار شکل زیر:



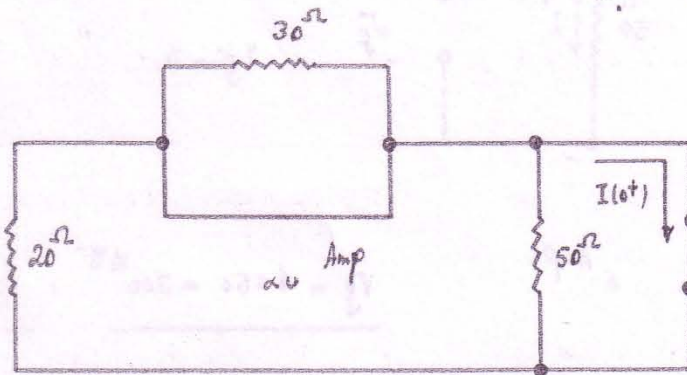
تحلیل شبکه: I- مطالعه مدار در $t < 0$ ، حالت آرامش اولیه (حالت مطابق $I(0^+)$ ، $V(0^+)$):

در $t < 0$ مدار غیرفعال است. $V(t < 0) = 0$.

و چون خازن با جهش ولتاژ مخالفت میکند. $V(0^+) = V(0^-) = V(t < 0) = 0$.

و اما برای مطابق $I(0^+)$ مدار معادل را در $t = 0^+$ در نظر میگیریم در این لحظه خازن بعنوان منبع ولتاژ صفر ولت عمل

میکند و بنابراین مدار معادل شبکه بصورت زیر خواهد بود.



$$I(0^+) = \frac{30}{20 + 30} \times 20 = 12 \text{ Amp}$$

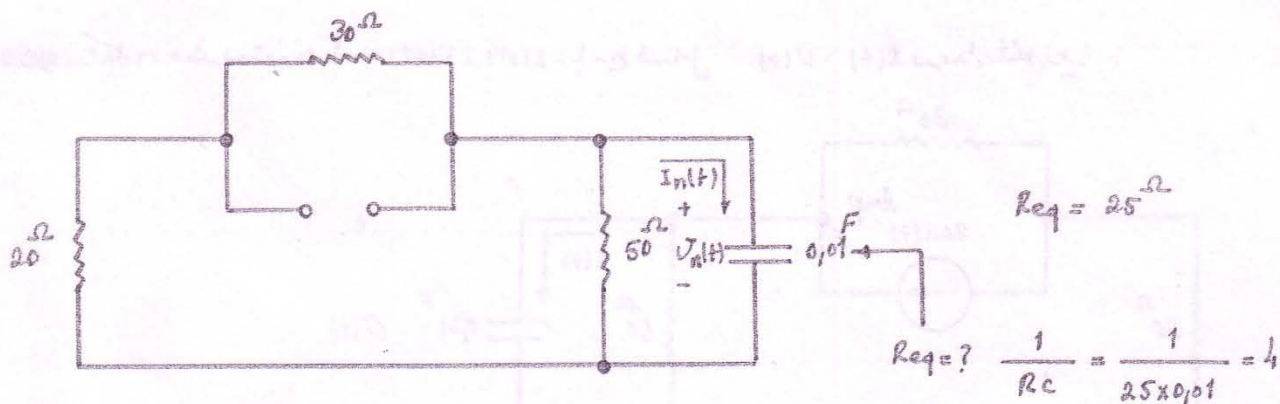
$$I(0^+) = 12 \text{ Amp}$$

$$V(0^+) = 0.$$

$$I(0^+) = 12 \text{ Amp}$$

II) مطالعه مدار در فواصل زمانی $t > 0^+$ جهت مطابق پاسخ گذرا (پاسخ ورودی صفر):

مدار معادل شبکه را بین هم قطع می‌کنیم (بنابراین ورودی صفر) در نظر میگیریم.

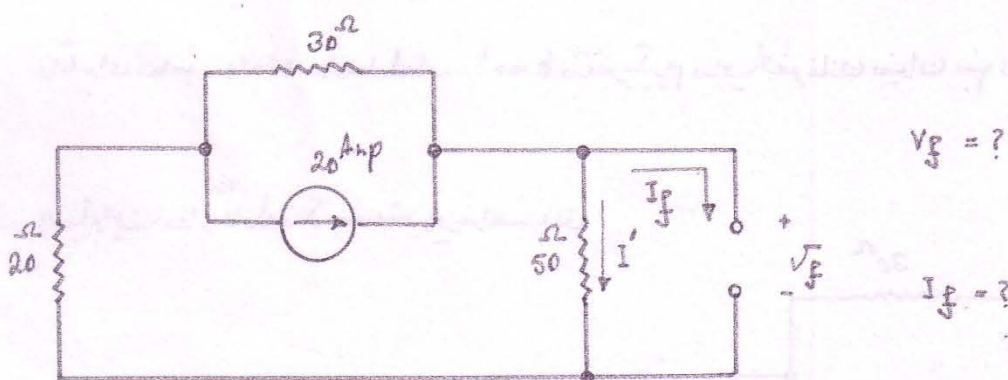


$$V_n(t) = A e^{-4t}$$

$$I_n(t) = B e^{-4t}$$

III) مطالعه مدار در فاصله زمانی $0 \leq t < \infty$ (حالت آرایش خفایی) جهت مطابقت پاسخ اجباری (ماندگار):

مدار معادل تبه را پس از آنکه حالت گذرا و استقرار حالت آرایش خفایی منظره بگیریم.



$$I' = 20 \times \frac{30}{30 + (20 + 50)} \times 6 \text{ Amp}$$

$$V_f = 6 \times 50 = 300 \text{ Volt}, \quad I_f = 0.$$

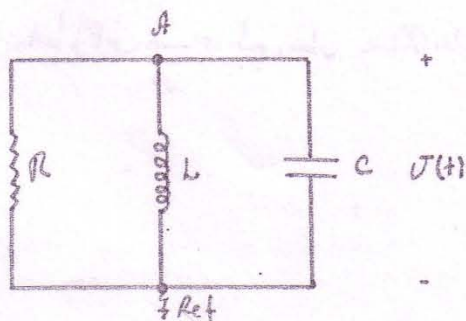
$$V(t) = V_f + V_n(t) = 300 + A e^{-4t} \quad t > 0. \quad \text{مطابقت پاسخ کامل:}$$

$$t = 0^+ \rightarrow V(t) \Big|_{t=0^+} = 300 + A \rightarrow 0 = 300 + A \rightarrow A = -300 \quad \underline{V(t) = 300 - 300 e^{-4t}}$$

$$I(t) = I_f + I_n(t) = B e^{-4t} \rightarrow I(0^+) = B \rightarrow B = 12 \quad \underline{I(t) = 0 + 12 e^{-4t}}$$

فصل ششم - مطالعه مدارهای RLC سری، RLC مداری و مطابق پانچ جیبی رپانخ اجباری:

I - مطالعه مدارهای RLC بدون باتری تحریک (بازاد ورودی صفر):



الف - بازاد ورودی صفر:

زف میکم مدار RLC مداری مطابق شکل مفروض است.

حال تجزیه و تحلیل این مدار را بقت شرایطی بررسی میکم که قبلاً مقداری انرژی ذخیره شده در پیچک و یا خازن و یا در هوردو

آنها وجود داشته باشد. برای معادله $V(t)$ معادله kcl را در گره A تشکیل میدیم.

$$kcl A: \quad I_R + I_C + I_L = 0. \quad \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} \int V(t) dt = 0.$$

برای تبدیل معادله بالا به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با مشتقات جبر از طرفین معادله نسبت به زمان مشتق میگیریم.

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt} + C \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{L} V(t) = 0.$$

$$C \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} V(t) = 0. \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با مشتقات جبر}$$

معادله بالا فقط دارای پانچ عمومی یا همگن بوده و صورت کلی پانچ معادله بصورت $V(t) = A e^{st}$ باشد.

که در آن s فرکانس جیبی مدار بوده و مقدار آن با ترارادون جواب معادله در معادله دیفرانسیل مطابق میشود.

$$V(t) = A e^{st} \longrightarrow \frac{dV}{dt} = A s e^{st} \longrightarrow \frac{d^2V}{dt^2} = A s^2 e^{st}$$

$$C(As^2 e^{st}) + \frac{1}{R}(As e^{st}) + \frac{1}{L}(A e^{st}) = 0.$$

معادله مُفرده دفرانسیل یا معادله مُفرشته :

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0.$$

مطابق فرکانس های طبیعی معادله $R < 2\sqrt{L/C}$ موازی :

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

حال اگر Δ معادله مُفرشته باشد ($\Delta > 0$) معادله مُفرده دارای دو ریشه حقیقی منفی بوده و معادله دفرانسیل را

شکله دارای جواب زیری باشد .

$$v_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

حالت فوق میرایی

اگر $\Delta = 0$ باشد . معادله مُفرده دارای دو ریشه مضاعف منفی بوده و پاسخ معادله دفرانسیل شبکه را می توان بصورت

زیرنوشته ، $(s = s_1 = s_2)$

$$v_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{st}$$

حالت میرایی بحرانی

اگر $\Delta < 0$ باشد . معادله مُفرده دارای دو ریشه مختلط بوده و پاسخ معادله دفرانسیل را شبکه بصورت زیر بیان می شود .

$$v_n(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{\sigma t}$$

حالت نهمیرایی (پراکنده)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} , \quad \sigma = \frac{1}{2RC}$$

در روابط بالا $\sigma = \frac{1}{2RC}$ رانگانی پیری یا *Neper - frequency* یا ضریب نای میرایی می نامند و در حقیقت

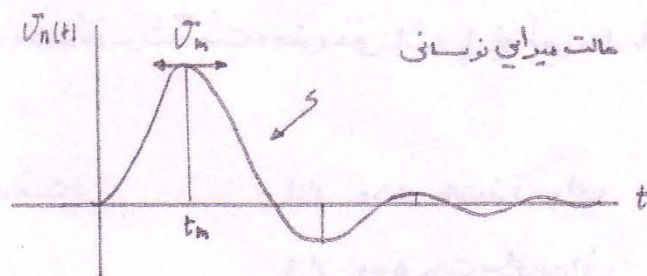
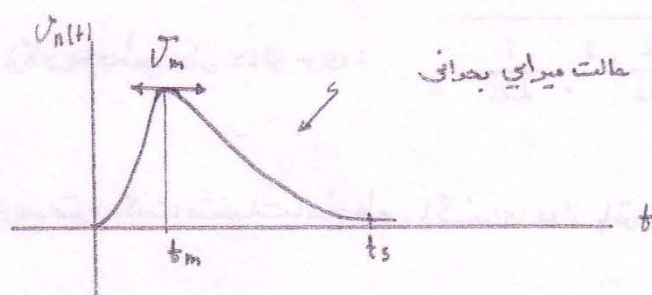
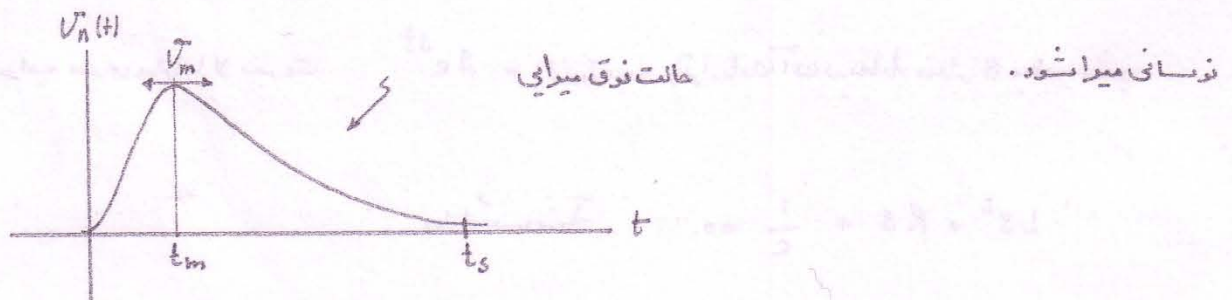
این ضریب نشان میدهد که پاسخ مدار با چه سرعتی روبه خاموشی میرود. همچنین در روابط بالا $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را

فرکانس همزمانی یا فرکانس رزونانس می نامند و فرکانس های s_1, s_2 فرکانس های نقطه می نامند.

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \rightarrow s_1, s_2 = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$$

محاسبات بالا نشان میدهد که پاسخ طبیعی و گذرای مدار با R, L, C بوده و می تواند تحت شرایطی

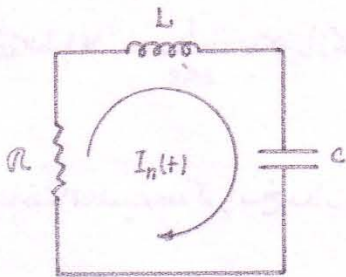
بازاء زمانهای طولانی احوال فوق میرایی، یا با انزاء کوتاهترین زمان ممکن احوال میرایی بحرانی و بالاخره بصیرت



زمان و بازمان استقرار همگی یا زمان استقرار احوال آرامش مدار می گویند.

$$t_s = \text{Setting Time.}$$

ب- مدار RLC سری بازنه ویدی صفر:



در مدار RLC سری مانند مدار موازی فرض می‌کنیم که قبلاً مقداری

انرژی ذخیره شده در سلف یا خازن یا هر دو وجود داشته باشد حال می‌خواهیم بدان $I(t)$ را در مدار فوق مطابق کنیم.

$$\text{KVL } \bigcirc : \quad \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = 0. \longrightarrow R I(t) + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt = 0.$$

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I(t) = 0.$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0. \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت}$$

جواب عمومی معادله بالا بصورت $I_n(t) = A e^{st}$ بدهد و با قرار دادن آن در معادله مقدار S مطابق میشود.

$$L s^2 + R s + \frac{1}{C} = 0. \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{ریشه های طبیعی مدار RLC سری:}$$

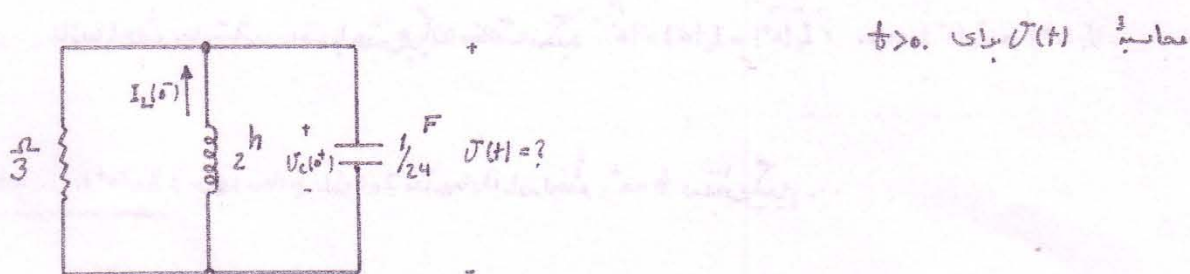
بنا بر می‌توان گفت مشخصات پاسخ طبیعی یا گسسته مدار با توجه به مقادیر R ، L ، C مطابق میشود و برحسب اینکه

دلتای معادله مشخصه مثبت، منفی باشد یا خنثی مدار یکی از حالات فوق میرایی، میرایی بحرانی، زیر میرایی را

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} & \text{بازاد } \Delta > 0 \text{ حالت فوق میرایی} \\ I_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{st} & \text{بازاد } \Delta = 0 \text{ حالت میرایی بحرانی} \\ I_n(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{\sigma t} & \text{بازاد } \Delta < 0 \text{ حالت میرایی نوسانی} \end{array} \right.$$

$\sigma = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$

●●● مثال ۱- مدار RLC موازی مطابق شکل زیر میفرست. هرگاه $I_L(0^-) = 10 \text{ A}$, $V_C(0^-) = 0$ محاسبه $I_L(t)$ باشد. مطلوبیت



— تحمیل شبکه: معادله دیفرانسیل شبکه را تشکیل می‌دهیم.

$$C \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} V(t) = 0.$$

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \cdot V(t) = 0.$$

معادله تمیز شبکه (معادله دیفرانسیل) را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{1}{24} S^2 + \frac{1}{3} S + \frac{1}{2} = 0.$$

$$S^2 + 8S + 12 = 0.$$

محاسبه فرکانس‌های طبیعی مدار: $S_1 = -2$, $S_2 = -6$

حالت مدار و محاسبه پاسخ طبیعی (گذرای مدار): چون $\Delta > 0$ است مدار در حالت فوق می‌رود است.

$$V(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t} \quad t > 0.$$

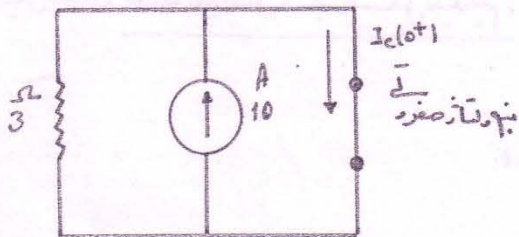
محاسبه ضرایب A_1, A_2 :

در مدارهای RLC موازی ضرایب A_1, A_2 یک $V_C(0^+)$ و $I_L(0^+)$ محاسبه می‌شود.

محاسبه شرایط اولیه: $I_L(0^+)$, $V_C(0^+)$

فاز با جفت ولتاژ و سلف با جفت جریان مطابقت میکند $I_L(0^+) = I_L(0^-) = 10$ A ، $V_C(0^+) = V_C(0^-) = 0$.

محاسبه $I_C(0^+)$ برای محاسبه $I_C(0^+)$ مدار معادل را در لحظه $t=0^+$ در نظر میگیریم.



$$\underline{I_C(0^+) = 10 \text{ Amp}}$$

محاسبه $V_C(0^+)$ و $I_C(0^+)$
 $V_C(0^+) = 0$ ، $I_C(0^+) = 10$ Amp

محاسبه ضرایب A_1 , A_2
 $V(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$

$$I_C(t) = C \frac{dV}{dt} = \frac{1}{24} (-2A_1 e^{-2t} - 6A_2 e^{-6t})$$

$$t=0^+ \rightarrow \begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ 10 = \frac{1}{24} (-2A_1 - 6A_2) \end{cases} \longrightarrow A_1 = 60 , A_2 = -60$$

$$V(t) = 60 e^{-2t} - 60 e^{-6t}$$

$$\underline{V(t) = 60 e^{-2t} - 60 e^{-6t} \text{ Volt}}$$

پس مقدار ولتاژ در مدار RLC مداری:

پس مقدار ولتاژ $V(t)$ در مدار RLC مداری می‌توان t_m , t_s را مشخص کرد.

$$V(t) = 60e^{-2t} - 60e^{-6t}$$

الف - مطابق V_m و t_m :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad 60 \times -2e^{-2t_m} - 60 \times -6e^{-6t_m} = 0 \quad \rightarrow \quad 2e^{-2t_m} = 6e^{-6t_m}$$

$$e^{+4t_m} = 3 \rightarrow 4t_m = \ln 3 \rightarrow t_m = \frac{1}{4} \ln 3 \rightarrow \underline{t_m = 0,275 \text{ Sec}}$$

$$V_m = V(t = 0,275) = 23,16$$

$$\underline{V_m = 23,16 \text{ Volt}}$$

ماکزیم

ب - مطابق t_s : دمدارهای RLC، مدت زمانی است که پس از گذشت آن پاسخ مدار 99٪ مقدار اولیه خود را از دست میدهد.

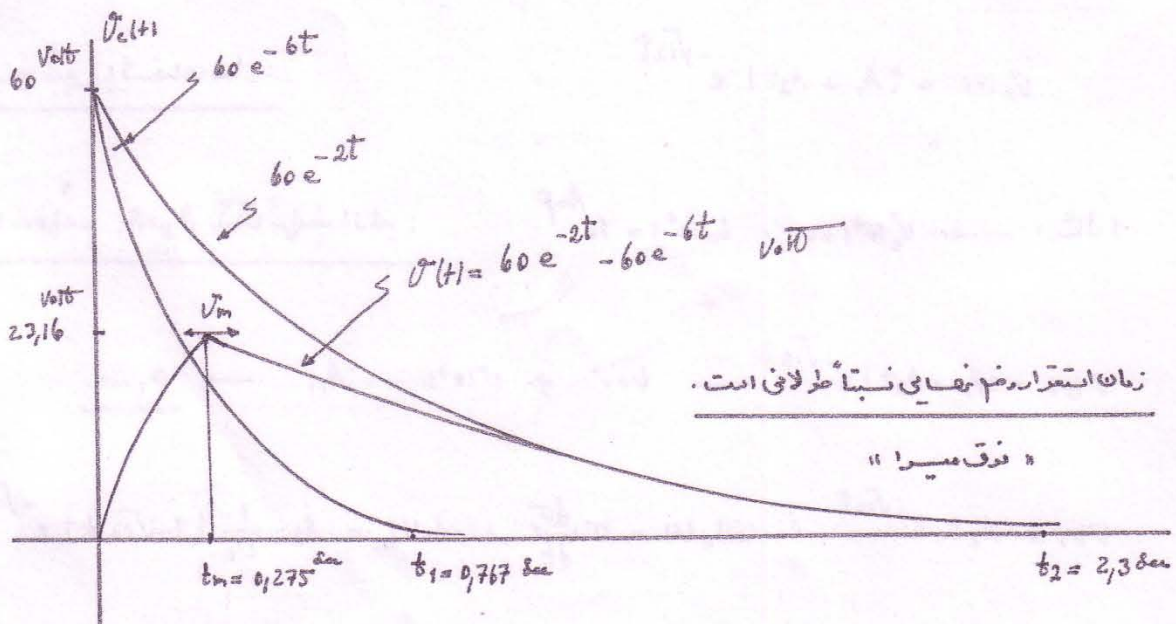
دست میدهد به 1٪ مقدار ماکزیم خود میرسد.

$$V(t) = 60e^{-2t} - 60e^{-6t} \rightarrow 1\% \times 23,16 = 60e^{-2t_s} - 60e^{-6t_s}$$

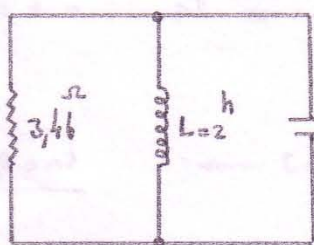
$$\underline{0,2316 = 60(e^{-2t_s} - e^{-6t_s})}$$

$t_s = 2,78 \text{ Sec}$ زمان استقرار وضع نهایی (حالت آرایش)

مادله بالا بیش از آزمایش و خطا حل می‌شود.



مثال ۲- هرگاه در مدار RLC معادلی مثال قبل مقدار مقادیر متغیرهای افزایش داده شود به $3,46 \Omega$ برسد. حالت مدار



پاسخ $V(t)$ را محاسبه کنید.

تطبیق شبکه: معادله دیفرانسیل شبکه:

$$C \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} V(t) = 0.$$

$$\underline{3,46 = \sqrt{12}}$$

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} V(t) = 0.$$

$$\frac{1}{24} s^2 + \frac{1}{\sqrt{12}} s + \frac{1}{2} = 0. \quad s^2 + 2\sqrt{12} s + 12 = 0. \quad \underline{\text{معادله مقرونه:}}$$

$$(3 + \sqrt{12})^2 = 0. \quad s_1 = s_2 = -\sqrt{12} = -3,46 \quad \underline{\text{فرکانس های طبیعی مدار در حالت مدار:}}$$

چون $\Delta = 0$ است معادله منفر دارای ریشه مضاعف بوده و مدار در حالت میرایی بحرانی است.

$$V_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\sqrt{12} t}$$

پاسخ میانی یا گذرای مدار:

$$1 \text{ ارشال} \rightarrow V_c(0^+) = 0, \quad I_L(0^+) = 10 \text{ Amp}$$

مطابقت با شرایط اولیه: A_2, A_1 بک شرایط اولیه:

$$V(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\sqrt{12} t} \rightarrow t=0^+ \Rightarrow V(0^+) = A_1 \rightarrow \underline{A_1 = 0.}$$

$$V(t) = A_2 t e^{-\sqrt{12} t} \quad I_c(t) = C \frac{dV}{dt} \quad I_L(t) = A_2 \cdot \frac{1}{24} (1 - \sqrt{12} t) e^{-\sqrt{12} t}$$

$$t = 0^+ \rightarrow I_c(0^+) = \frac{1}{24} A_2 \rightarrow \underline{A_2 = 240}$$

$$\underline{V_n(t) = 240 t e^{-\sqrt{12}t}}$$

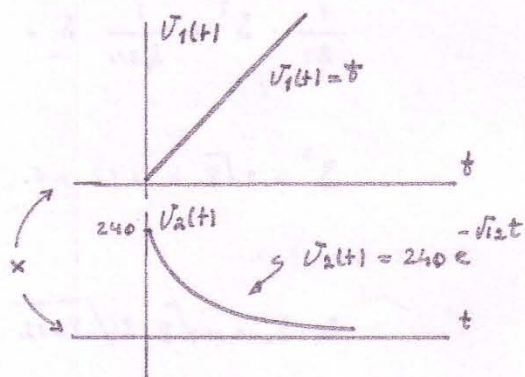
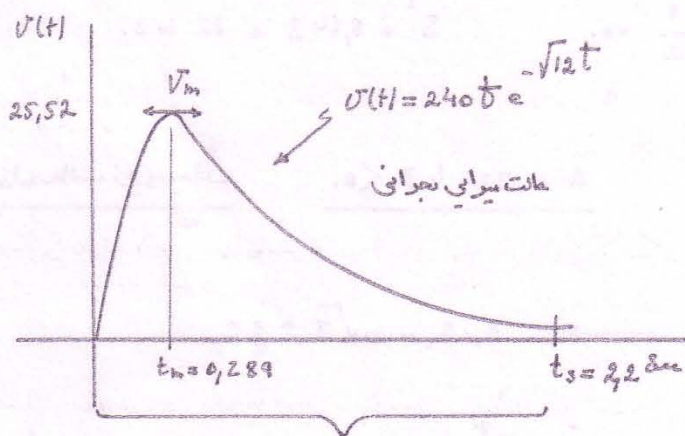
$$\underline{V_f = 0.}$$

$$\underline{V(t) = 240 t e^{-\sqrt{12}t}}$$

مطابق نمودار $V(t)$ برای رسم نمودار $V(t)$ آنرا بصورت حاصلضرب درجایم $V_A(t)$ و $V_1(t)$ در نظر میگیریم.

$$V_1(t) = t \quad V_2(t) = 240 e^{-\sqrt{12}t}$$

برای رسم نمودارهای $V_A(t)$ و ضرب آن با رسم نمودار $V(t)$ را بدست میآوریم.



در ادامه این زمان مشخص

$$V(t) = 240 t e^{-\sqrt{12}t}$$

محاسبه t_s, t_m, V_m

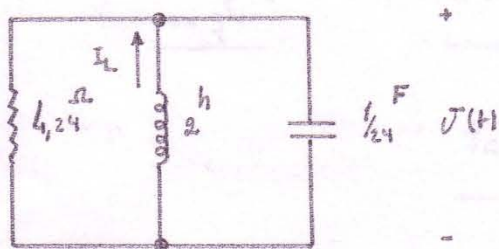
$$\frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow 240 e^{-\sqrt{12}t_m} - 240 \times \sqrt{12} t_m e^{-\sqrt{12}t_m} = 0 \rightarrow \underline{t_m = 0.289 \text{ sec}}$$

$$V_m = V(t = 0.289) = 25.52 \quad \underline{V_m = 25.52 \text{ Volt}}$$

$$1\% \times 25.52 = 240 e^{-\sqrt{12}t_s} \rightarrow \underline{t_s = 2.2 \text{ sec}} \quad \text{Setting-Time } t_s \text{ محاسبه}$$

●●● مثال ۳- در مدار R_{Lc} معادله‌های (۱۱)، (۱۲) اگر مقدار مقادیر مشخصی به $4,24 \Omega$ افزایش داده شود $V(t)$ را

برای $t > 0$ محاسبه کنید.



تحلیل شبکه:

$$C \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} V(t) = 0.$$

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{4,24} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} V(t) = 0.$$

$$\frac{1}{24} \cdot S^2 + \frac{1}{4,24} S + \frac{1}{2} = 0.$$

$$S^2 + 5,64 S + 12 = 0.$$

$$S^2 + 2\sqrt{8} S + 12 = 0.$$

$$\Delta = 32 - 48 < 0.$$

مقادیر حالت زیر میرایی

$$S_1, S_2 = -\sqrt{8} \pm \sqrt{8-12}$$

$$\longrightarrow S_1, S_2 = -\sqrt{8} \pm j2$$

$$V_n(t) = (A_1 \cos \omega_f t + A_2 \sin \omega_f t) e^{-\sigma t}$$

$$\underline{\sigma = \sqrt{8} \quad , \quad \omega_f = 2 \text{ rad/s}}$$

$$\underline{V_n(t) = (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) e^{-\sqrt{8}t}}$$

$$\underline{V_F = 0.}$$

$$V(t) = (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) e^{-\sqrt{8}t}$$

محاسبه ضرایب A_1, A_2 با استفاده از شرایط اولیه:

$$\text{از مثال های (۱)، (۲)} \longrightarrow V_C(0^+) = 0 \quad , \quad I_L(0^+) = 10 \text{ Amp}$$

$$V(t) = (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) e^{-\sqrt{8}t}$$

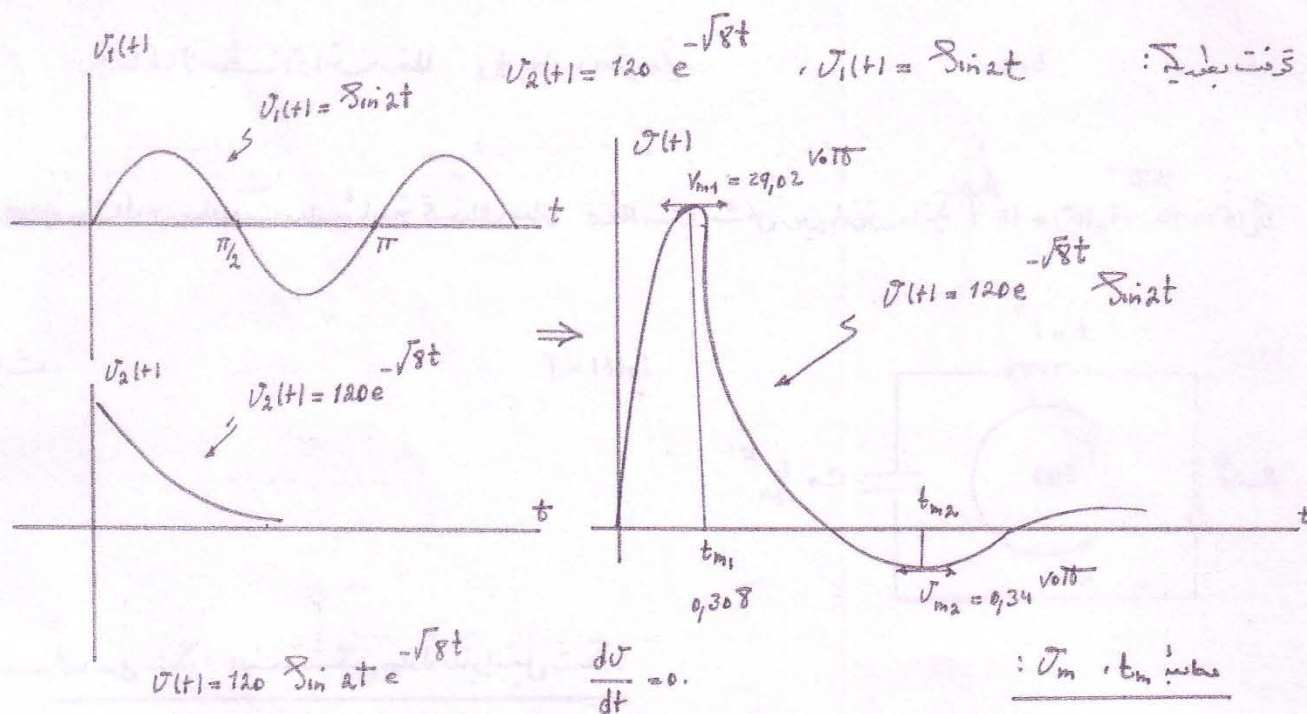
$$t=0^+ \rightarrow V(0^+) = A_1 \rightarrow \underline{A_1 = 0.} \quad V(t) = A_2 \sin 2t e^{-\sqrt{8}t}$$

$$I_c(t) = C \frac{dV}{dt} = \frac{1}{24} (2A_2 \cos 2t e^{-\sqrt{8}t} - \sqrt{8}A_2 \sin 2t e^{-\sqrt{8}t})$$

$$t=0^+ \rightarrow I_c(0^+) = \frac{1}{24} \times 2A_2 \rightarrow \underline{A_2 = 120}$$

$$\underline{V(t) = 120 \sin 2t e^{-\sqrt{8}t}}$$

رسم نمودار $V(t)$: برای رسم نمودار $V(t)$ می‌توان آن را بصورت حاصلضرب دو تابع $V_1(t)$ و $V_2(t)$ در نظر



$$\frac{dV}{dt} = 120 e^{-\sqrt{8}t} (2 \cos 2t - \sqrt{8} \sin 2t) = 0. \rightarrow \sin 2t = \frac{2}{\sqrt{8}} \cos 2t \rightarrow$$

$$\tan 2t_m = \frac{\sqrt{2}}{2} = \tan 35.26 \rightarrow 2t_m = k\pi + 35.26 \rightarrow \underline{t_m = k\frac{\pi}{2} + 17.63^\circ}$$

$$t_m = k \frac{\pi}{\omega} + 17,63^\circ \rightarrow \begin{cases} t_{m1} = 17,63^\circ & \underline{t_{m1} = 0,308 \text{ Sec}} \\ t_{m2} = 1,57 + 0,308 & \underline{t_{m2} = 1,88 \text{ Sec}} \end{cases}$$

$$\underline{t_{m1} = 0,308 \text{ Sec} \rightarrow \underline{V_{m1} = V(t = 0,308) = 29,02 \text{ Volt}}}$$

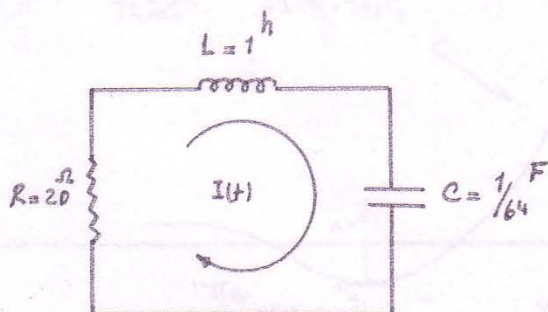
$$\underline{t_{m2} = 1,88 \text{ Sec} \rightarrow \underline{V_{m2} = V(t = 1,88) = 0,34 \text{ Volt}}}$$

مطابق زمان استقرار حالت آرایش یا زمان نهایی t_s : setting time

$$V(t) = 120 \sin \omega t e^{-\sqrt{8}t} \quad \quad \quad 1/1 \times 29,02 = 120 \sin \omega t_s e^{-\sqrt{8}t_s}$$

$t_s =$ از حل معادله بالا به روش آزمایش و خطا t_s محاسبه میشود /

●●● مثال ۴- مطلوبیت مطابق پاسخ گذرای مدار RLC سری شکل زیر، با فرض اینکه $V_c(0^-) = 10 \text{ Volt}$ ، $I_L(0^-) = 10 \text{ Amp}$



$$I_R(t) = ?$$

باشد -

— تصویر شبکه: الف- تشکیل معادله دیفرانسیل شبکه:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0 \rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + 20 \frac{dI}{dt} + 64 I(t) = 0.$$

$$s^2 + 20s + 64 = 0.$$

ب- معادله منفرجه و معادله فرکانس های طبیعی مدار:

$$(s+16)(s+4)=0 \longrightarrow \underline{s_1 = -16}^{\frac{1}{\text{sec}}}, \underline{s_2 = -4}^{\frac{1}{\text{sec}}}$$

ح - حالت مدار معادله پانچ طبعی مدار: چون $A > 0$ مدار در حالت فوق آمپراتی است پانچ گذرای شبکه بصورت

$$I_L(t) = A_1 e^{-16t} + A_2 e^{-4t} \quad \text{نرییابد}$$

$$I_L(0^-) = 10 \text{ Amp}, \quad V_C(0^-) = 10 \text{ Volt} \quad \underline{\text{مطابقت شرایط اولیه شبکه:}}$$

سلف با جفت جریان و خازن با جفت ولتاژ مطابقت میکنند.

$$I_L(0^+) = I_L(0^-) = 10 \text{ Amp}, \quad V_C(0^+) = V_C(0^-) = 10 \text{ Volt}$$

$$I_C(0^+) = I_L(0^+) = 10 \text{ Amp}$$

$$\underline{V_C(0^+) = 10 \text{ Volt}}$$

$$\underline{I_C(0^+) = 10 \text{ Amp}}$$

$$\underline{\text{مطابقت شرایط اولیه شبکه با استفاده از شرایط اولیه شبکه: } I_C(0^+) = 10 \text{ Amp}, V_C(0^+) = 10 \text{ Volt}}$$

$$\underline{I(t) = A_1 e^{-16t} + A_2 e^{-4t}} \quad V_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

$$V_C(t) = 64 \int (A_1 e^{-16t} + A_2 e^{-4t}) dt = -\frac{64}{16} A_1 e^{-16t} - \frac{64}{4} A_2 e^{-4t}$$

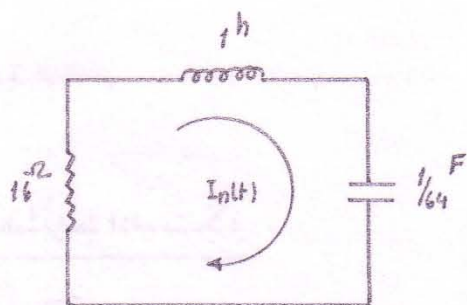
$$\underline{V_C(t) = -4A_1 e^{-16t} - 16A_2 e^{-4t}}$$

$$t=0^+ \longrightarrow \begin{cases} I(0^+) = A_1 + A_2 \\ V_C(0^+) = -4A_1 - 16A_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \underline{A_1 = \frac{170}{12}, \quad A_2 = -\frac{50}{12}}$$

$$I_n(t) = \frac{170}{12} e^{-16t} - \frac{50}{12} e^{-4t} \quad t > 0.$$

●●● مثال ۵- اگر در مدار RLC سری مثال ۴ مقدار مقاومتی از $20\ \Omega$ به $16\ \Omega$ کاهش داده شود، حالت مدار پاسخ



گندای مدار را مطابق کنید.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0.$$

— تصویر شبکه:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 16 \frac{dI}{dt} + 64 I(t) = 0. \longrightarrow \delta^2 + 16\delta + 64 = 0.$$

$$\Delta = 0. \quad (\delta + 8)^2 = 0. \quad \delta_1 = \delta_2 = -8$$

$$\Delta = 0. \longrightarrow \text{مدار در حالت پیرای بیجان} \longrightarrow \underline{I_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-8t}}$$

$$\text{از مثال ۴} \longrightarrow V_c(0^+) = 10 \text{ Volt}, \quad I_c(0^+) = 10 \text{ Amp}$$

$$I(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-8t} \quad t = 0^+ \longrightarrow I_c(0^+) = A_1 \longrightarrow A_1 = 10$$

$$I(t) = (10 + A_2 t) e^{-8t} \quad V_c(t) = \frac{1}{C} \int (10 + A_2 t) e^{-8t} dt$$

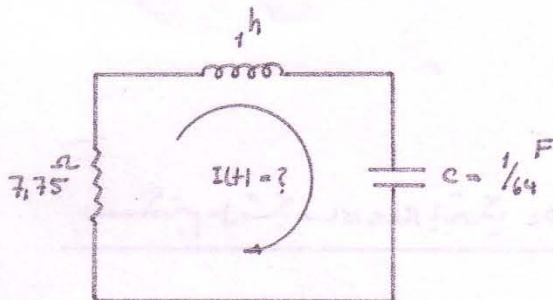
$$V_c(t) = 64 \left[\int 10 e^{-8t} dt + A_2 \int t e^{-8t} dt \right]$$

$$V_c(t) = 64 \left[-\frac{10}{8} e^{-8t} - A_2 \frac{t}{8} e^{-8t} - \frac{A_2}{64} e^{-8t} \right]$$

$$t=0^+ \rightarrow V_C(0^+) = 64 \times -\frac{10}{8} - A_2 \rightarrow A_2 = -90$$

$$\underline{I(t) = (10 - 90t) e^{-8t} \quad t > 0.}$$

●●● مثال 6- اگر در مدار RLC سری مثال 4- مقدار مقاومت اسی مدار باز هم کاهش داده شود و $R = 7.75 \Omega$ برسد



پایخ گذاری مدار را مطابق کنید.

تعمیل بنویسید:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0. \rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + 7.75 \frac{dI}{dt} + 64 I(t) = 0.$$

$$s^2 + 7.75 s + 64 = 0.$$

$$s_1, s_2 = \frac{-7.75 \pm \sqrt{(7.75)^2 - 256}}{2} = \frac{-7.75 \pm \sqrt{-196}}{2}$$

$$s_1, s_2 = \frac{-7.75 \pm j14}{2}$$

$$\underline{s_1, s_2 = -3.87 \pm j7}$$

$$I_h(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\sigma t}$$

$$\underline{I_h(t) = (A_1 \cos 7t + A_2 \sin 7t) e^{-3.87t}}$$

با استفاده از شرایط اولیه $I_C(0^+) = 10$ و $V_C(0^+) = 10$ مقادیر A_1 و A_2 را بیابید.

$$\underline{I_h(t) = (10 \cos 7t - 7 \sin 7t) e^{-3.87t} \quad t > 0.}$$

معادله پاسخ کامل در مدارهای RLC با تحریک DC (پله‌ای):

در این حالت از شبکه‌های RLC، پاسخ کامل جریان ولتاژ انجم جریان‌ها و ولتاژهای جیبی و اجباری نیست

$$V(t) = V_f + V_h(t) \quad \text{می‌آید.}$$

$$I(t) = I_f + I_h(t)$$

الگوریتم حل شبکه‌های RLC با تحریک DC (پله‌ای) بصورت زیر خواهد بود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{۱- معادله } V_c(t < 0), I_L(t < 0) \\ \text{۲- معادله } V_c(0^+), I_L(0^+) \\ \text{۳- معادله } I_c(0^+) \text{ با استفاده از مدار معادل در } t = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \text{۱) مطالعه مدار در } t < 0. \\ \text{۲) مطالعه مدار در فاصله زمانی } t = 0^+ \text{ و } t \text{ بحد تمام تحریک جهت معادله پاسخ جیبی (گذرای) مدار} \\ \text{۳) مطالعه مدار در فاصله زمانی } t = 0^+ \text{ و } t \text{ پس از فرم حالت گذر و برقراری حالت آرایش نهایی جهت} \end{array}$$

۲) مطالعه مدار در فاصله زمانی $t = 0^+$ و t بحد تمام تحریک جهت معادله پاسخ جیبی (گذرای) مدار

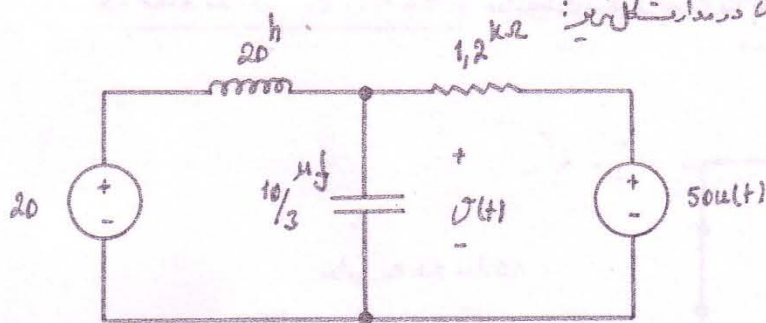
۳) مطالعه مدار در فاصله زمانی $t = 0^+$ و t پس از فرم حالت گذر و برقراری حالت آرایش نهایی جهت

معادله پاسخ اجباری (ماندگار) شبکه

۴) معادله پاسخ کامل شبکه

۵) معادله فریب پاسخ جیبی A_1, A_2, \dots با استفاده از شرایط اولیه شبکه.

●●● مثال ۷ - مطلوبت مطابق پاسخ کامل $\sigma(t)$ در مدار شکل زیر:

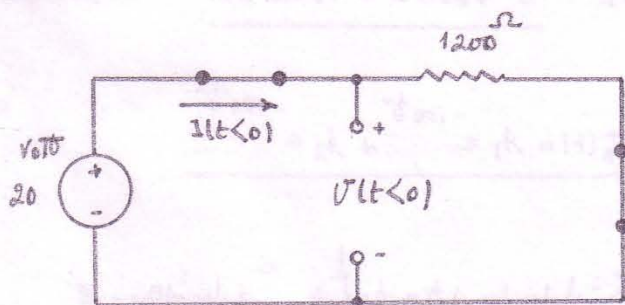


تحلیل شبکه: 1- مطالعه مدار در $t < 0$

۱۱ مطابق $I_L(t < 0)$ ، $\sigma(t < 0)$: مدار معادل شبکه را در $t < 0$ در نظر میگیریم. چون مدار از ابتدا

قبل در این وضعیت قرار دارد لذا مدار در حالت آرامش اولیه بوده و تلف بصورت اتصال کوتاه و خازن بصورت مدار باز عمل

میکند.



$$I(t < 0) = \frac{20}{1200} = \frac{1}{60} \text{ Amp}$$

$$\sigma(t < 0) = 20 \text{ Volt}$$

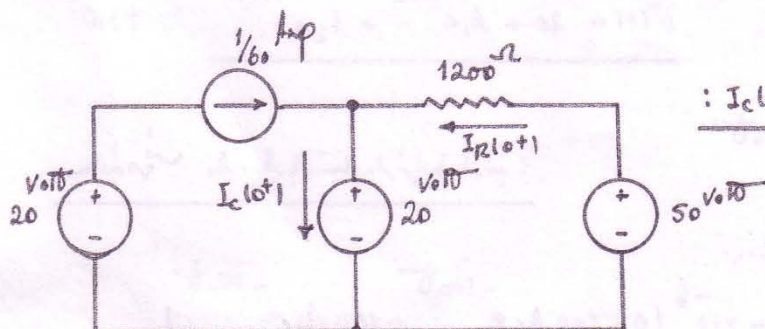
۱۲ با توجه باینکه I جریان تلف ، σ و شارژ خازن یکسان خواهد بود:

$$I(0^+) = I(0^-) = I(t < 0) = \frac{1}{60} \text{ Amp}$$

$$I(0^+) = \frac{1}{60} \text{ Amp}$$

$$\sigma(0^+) = \sigma(0^-) = \sigma(t < 0) = 20 \text{ Volt}$$

$$\sigma(0^+) = 20 \text{ Volt}$$

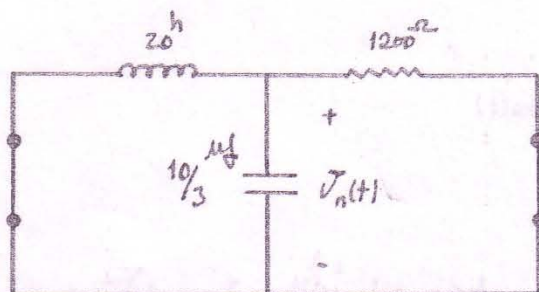


۱۳ مدار معادل در $t = 0^+$ مطابق $I_C(0^+)$

$$I_C(0^+) = \frac{1}{60} + I_R(0^+) = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

$$I_C(0^+) = \frac{1}{24} \text{ Amp}$$

II - مطالعه مدار در $t = 0^+$: مدار معادل شبکه را به کمک قانون تقسیم در نقطه 0^+ و t_0 در نظر میگیریم.



مدار RLC معادلی

در مدار RLC معادلی تشکیل شده پاسخ گذرای مدار را مطالعه میکنیم:

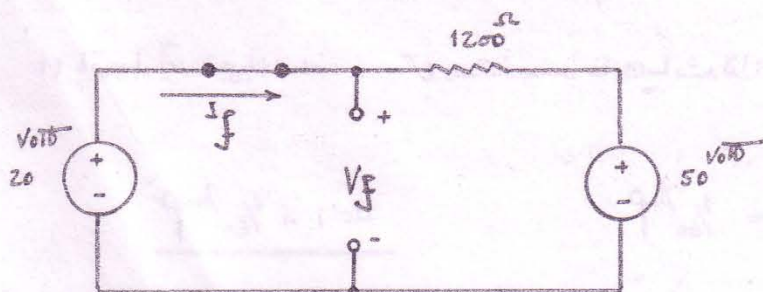
$$C \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} V(t) = 0 \rightarrow \frac{10}{3} \times 10^{-6} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{1200} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{20} V(t) = 0.$$

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + 250 \frac{dV}{dt} + 15000 = 0 \rightarrow \underline{\underline{\delta^2 + 250\delta + 15000 = 0.}}$$

$$\underline{\underline{\delta_1 = -100}} \quad \underline{\underline{\delta_2 = -150}}$$

$$\underline{\underline{V_n(t) = A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-150t}}}$$

III - مطالعه مدار در $t = t_0$: مدار معادل شبکه را پس از رفع حالت گذرا و استقرار حالت آرامش معادلی در



تقریب میکنیم.

$$\underline{\underline{V_f = 20 \text{ Volt}}}$$

IV - مطالعه پاسخ کامل:

$$V(t) = V_f + V_n(t) \rightarrow \underline{\underline{V(t) = 20 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-150t} \quad t > 0.}}$$

$$V(t) = 20 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-150t}$$

مطابق ترتیب A_1, A_2 با استفاده از شرایط اولیه:

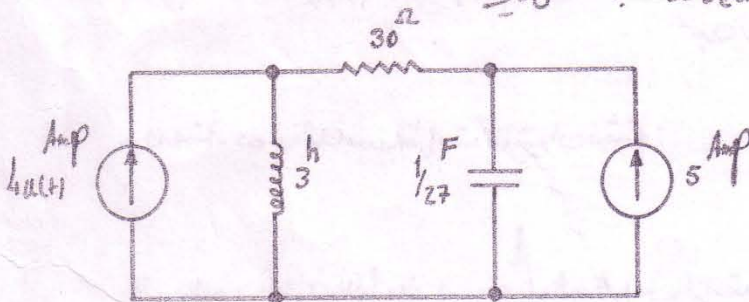
$$I_c(t) = C \frac{dV}{dt} \quad I_c(t) = \frac{10}{3} \times 10^{-6} (0 - 100 A_1 e^{-100t} - 150 A_2 e^{-150t})$$

$$t=0^+ \rightarrow \begin{cases} V_L(0^+) = 20 + A_1 + A_2 \\ I_L(0^+) = \frac{10}{3} \times 10^{-6} (-100 A_1 - 150 A_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 + 1.5 A_2 = -125 \end{cases}$$

$$\underline{A_1 = 250 \text{ V} \cdot \text{T}}, \quad \underline{A_2 = -250 \text{ V} \cdot \text{T}}$$

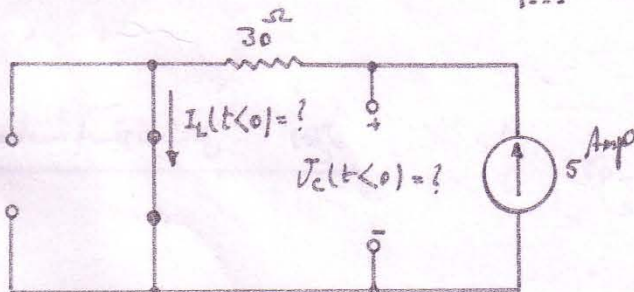
$$\underline{V(t) = 20 + 250 e^{-100t} - 250 e^{-150t} \quad t > 0.}$$

●●● مثال ۸ - مطلوبت معادله پانچ کاس $V_L(t)$ در شبکه شکل زیر:



— تحلیل شبکه: I - مطالعه مدار در $t < 0$ و معادله $I_L(t < 0)$, $V_L(t < 0)$:

مدار معادل شبکه دارد. $t < 0$ حالت آرامش اولیه در نظر میگیریم.



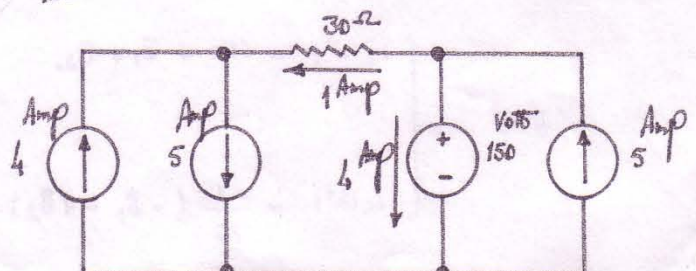
$$I_L(t < 0) = 5 \text{ Amp}$$

$$V_L(t < 0) = 30 \times 5 = 150 \text{ V} \cdot \text{T}$$

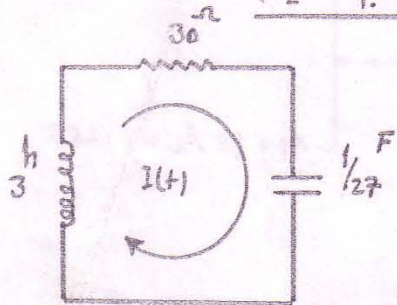
$$\underline{I_L(0^+) = 5 \text{ Amp}, \quad V_L(0^+) = 150 \text{ V} \cdot \text{T}}$$

مدار معادل را در $t=0^+$ بنظر معادله $I_L(t)$ در نظر میگیریم.

$$\underline{I_L(0^+) = 4 \text{ Amp}} \quad \leftarrow \text{باتوجه به شکل شبکه}$$



II - مطابق پاسخ طبیعی یا گذرای مدار با مطالعه آن در $t=0^+$ و بدون نیاز به تقریب:



$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0.$$

$$3 \frac{d^2 I}{dt^2} + 30 \frac{dI}{dt} + 27 I(t) = 0.$$

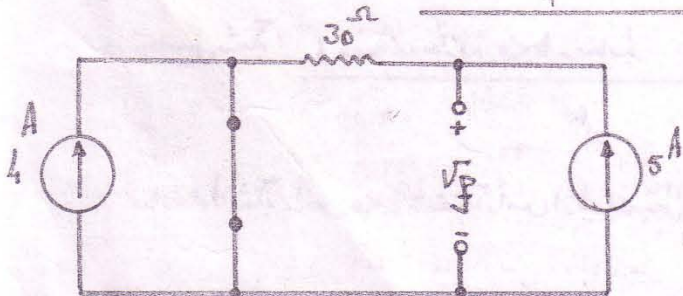
$$3s^2 + 30s + 27 = 0. \longrightarrow s^2 + 10s + 9 = 0. \longrightarrow (s+1)(s+9) = 0.$$

$$s_1 = -1, s_2 = -9 \xrightarrow[\Delta > 0, \text{ چون}]{\text{مشتق فوق میرانی}} I_n(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-9t}$$

چون مشتق دو طرفه از معادلات لازم است نوشت:

$$\underline{V_n(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-9t}}$$

III - مطابق V_p با مطالعه مدار در $t=0^+$ پس از استقرار مدار غایبی



$$\underline{V_p = 150 \text{ V}_{0.00}}$$

$$V_c(t) = 150 + B_1 e^{-t} + B_2 e^{-9t}$$

مطابق پاسخ کامل $V_c(t)$

$$i_c(t) = C \frac{dV}{dt} = \frac{1}{27} (-B_1 e^{-t} - 9B_2 e^{-9t})$$

$$= -13,5 \text{ V}_{0.00}$$

$$t=0^+ \rightarrow \begin{cases} V_c(0^+) = 150 + B_1 + B_2 \\ I_c(0^+) = \frac{1}{27} (-B_1 - 9B_2) \end{cases}$$

$$\longrightarrow B_1 = 13,5 \text{ V}_{0.00}, B_2$$