

۱- در یک مطالعه آماری از یک نمونه که از جامعه گرفته شده، اطلاعات زیر به دست آمده است:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000 \text{ و } \sum (x_i - \bar{x})^3 = -4000 \text{ و } n = 10$$

ضریب چولگی این نمونه کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۰/۴ (۳) -۰/۰۴ (۴) -۴۰

۲- میزان تولید یک محصول در ۵ سال، به صورت جدول زیر می باشد. میزان تولید در هر سال به طور متوسط چند درصد زیاد شده است؟

سال	۱	۲	۳	۴	۵
تولید	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶

- (۱) $100\sqrt[5]{2}\%$ (۲) $100(\sqrt[5]{2}-1)\%$
(۳) 100% (۴) 20%

۳- یافته های یک نمونه تصادفی ۳ تایی از $N(0, \sigma^2)$ عبارت است از $X_1 = 2$ و $X_2 = -2$ و $X_3 = -1$. مقدار برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) برای دهک اول این توزیع کدام است؟

- (۱) $1/3\sqrt{3}$ (۲) $-3/9$ (۳) $3/9$ (۴) $-1/3\sqrt{3}$

۴- یک مدل $Y_i = Bx_i + \varepsilon_i$ را با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. برآورد $\text{Var}(\hat{Y} | x_i = 3)$ بر اساس نتایج کدام است؟

$$\sum x_i = 22, \sum y_i = 44, \sum x_i y_i = 100, \sum x_i^2 = 100, \sum y_i^2 = 200, n = 11$$

- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) $\frac{9}{10}$ (۴) $\frac{18}{10}$

۵- اگر X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشند، مقدار $\Pr\left(\frac{S}{\sqrt{2}|\bar{X} - \mu|} < 1\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. برآوردکننده پارامتر θ از روش MLE بر اساس یک مشاهده از X کدام است؟

$X \backslash \theta$	۰	۱	۲
θ_1	۰/۱۶	۰/۱۲	۰/۱۲
θ_2	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۱۵
θ_3	۰/۱۵	۰/۱۲	۰/۱۳

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \theta_1 & x = 0 \\ \theta_2 & x = 1 \text{ (۲)} \\ \theta_1 & x = 2 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \theta_1 & x = 0 \\ \theta_2 & x = 1 \text{ (۱)} \\ \theta_3 & x = 2 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \theta_1 & x = 0 \\ \theta_1 & x = 1 \text{ (۴)} \\ \theta_3 & x = 2 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \theta_1 & x = 0 \\ \theta_2 & x = 1 \text{ (۳)} \\ \theta_2 & x = 2 \end{cases}$$

۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x) = 2 \frac{x}{\theta^2}, 0 < x < \theta$$

کدامیک از گزینه های زیر یک برآوردگر نااریب برای θ است؟

$$\frac{3}{2n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \text{ (۱)}$$

$$\frac{2}{3n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n) \text{ (۳)}$$

۸- فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ است. نمونه تصادفی ۳ تایی از این توزیع گرفته و واریانس نمونه را S^2 می‌نامیم. با چه احتمالی دست کم ۰/۹۷۵ توزیع در بازه $(-\infty, \mu + 2S)$ قرار می‌گیرد؟ ($Z_{0.025} \approx 2$)

$$(1) 1 - e^{-1} \quad (2) 1 - e^{-2} \quad (3) e^{-2} \quad (4) e^{-1}$$

۹- متغیر تصادفی X در فاصله $(0, 1)$ را در نظر بگیرید و بر اساس یک مشاهده، آزمون فرض $H_0: f(x) = 3x^2$ در برابر $H_1: f(x) = 2x$ را در نظر می‌گیریم. اگر ناحیه رد به صورت $x < 0.5$ باشد و α احتمال خطای نوع اول و β احتمال خطای نوع دوم باشند، کدام گزینه صحیح است؟

$$(1) \alpha = \beta \quad (2) \beta = 3\alpha \quad (3) \alpha + \beta = \frac{7}{8} \quad (4) \alpha + \beta = \frac{5}{16}$$

۱۰- فرض کنید X دارای توزیع هندسی با تابع احتمال $P(X=x) = (1-p)^{x-1}p, x=1,2,3,\dots$ باشد، برای آزمون فرض

$H_0: p = \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1: p = \frac{3}{4}$ ، ناحیه رد آزمون به صورت $X \leq k$ تعیین شده است. کدام گزینه صحیح است؟

$$(1) \beta = (1-\alpha)^2 \quad (2) \beta = 1-\alpha^2 \quad (3) \beta = 1-\alpha \quad (4) \beta = 1-\ln \alpha$$

۱۱- کدام گزینه در مورد آزمون‌های سهل‌گیرانه و سخت‌گیرانه غلط است؟

(۱) اگر یک ادعا در حالت سخت‌گیرانه پذیرفته شود، در حالت سهل‌گیرانه نیز پذیرفته می‌شود.

(۲) اگر بخواهیم نسبت به یک ادعا سخت‌گیری کنیم، زمانی ادعا را می‌پذیریم که آماره در ناحیه بحرانی قرار گیرد.

(۳) اگر یک ادعا در حالت سخت‌گیرانه رد شود، در حالت سهل‌گیرانه نیز رد می‌شود.

(۴) اگر یک ادعا در حالت سهل‌گیرانه رد شود، در حالت سخت‌گیرانه نیز رد می‌شود.

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲- یافته‌های یک نمونه تصادفی ۲ تایی از $N(0, \sigma^2)$ عبارت است از $X_1 = 4$ و $X_2 = -2$. برای آزمون فرض $H_0: \sigma = 2$ در مقابل $H_1: \sigma = 3$ ، p -value کدام است؟

$$(1) 2P(Z \geq \sqrt{5}) \quad (2) 2P(Z \geq 2) \quad (3) 1 - e^{-\frac{5}{2}} \quad (4) e^{-\frac{5}{2}}$$

۱۳- در یک بررسی برابری میانگین‌های ۴ جامعه، از هر جامعه ۳ مشاهده جمع آوری شده است. اگر $\hat{\alpha}_i$ ها یا برآورد اثر تیمارها به ترتیب، $\hat{\alpha}_1 = -1, \hat{\alpha}_2 = -2, \hat{\alpha}_3 = 0, \hat{\alpha}_4 = 3$ باشند، و $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2 = 2$ باشد؛ آماره آزمون کدام است؟

$$(1) 3 \quad (2) 2 \quad (3) 7 \quad (4) 4$$

۱۴- در دو جامعه مستقل $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ و $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ ، برای انجام آزمون $H_0: \mu_x = \mu_y + 3$ در مقابل $H_1: \mu_x > \mu_y + 3$ نتایج حاصل از دو نمونه مستقل از دو جامعه به صورت زیر است:

$$n_x = 4, \bar{X} = 48/25, \sigma_x^2 = 9, n_y = 4, \bar{Y} = 42, \sigma_y^2 = 16$$

p -value آزمون برابرست با:

$$(1) 0/99 \quad (2) 0/1 \quad (3) 0/01 \quad (4) 0/9$$

۱۵- بر اساس نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع زیر،

$$f(x, \theta) = 1, \quad \theta \leq x \leq \theta + 1, \quad -\infty < \theta < \infty$$

برآورد پارامتر θ از روش حداکثر درستنمایی عبارت است از:

$$x_{(n)} - 1 \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} \quad (2)$$

$$x_{(n)} + 1 \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} \quad (1)$$

$$x_{(n)} \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} + 1 \quad (4)$$

$$x_{(n)} - \frac{1}{2} \leq \hat{\theta} \leq x_{(1)} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

۱۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ و Y_1, \dots, Y_n یک نمونه تصادفی از توزیع

$N(\mu_y, \sigma_y^2)$ باشد. **p-value** آزمون $H_0: \sigma_x = 2\sigma_y$ در مقابل $H_1: \sigma_x < 2\sigma_y$ کدام است؟ ($S_x^2 = 8, S_y^2 = 4$)

$$P(F_{8,6} \leq \frac{1}{2}) \quad (4)$$

$$P(F_{8,6} \leq 2) \quad (3)$$

$$P(F_{8,6} \leq 1) \quad (2)$$

$$P(F_{6,8} \geq 1) \quad (1)$$

۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ ، برآوردکننده نااریب برای σ^2 ، واریانس خطا عبارت است از:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) Y_i}{n-2} \quad (4)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) \hat{Y}_i}{n-2} \quad (3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)}{n-2} \quad (2)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-1} \quad (1)$$

۱۸- فرض کنید X_1, X_2, X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های به ترتیب $N(\mu, 1)$ ، $N(2\mu, 1)$ ، $N(3\mu, 1)$ باشند.

برآورد μ از روش MLE کدام است؟

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (4)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{3} \quad (3)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6} \quad (2)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{14} \quad (1)$$

۱۹- اگر بدانیم در نمونه‌گیری از توزیع نرمال، با افزایش اندازه نمونه توزیع انحراف معیار نمونه یا S به سمت توزیع

$N(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n})$ میل می‌کند، کدام گزینه یک برآورد فاصله‌ای تقریبی برای σ است؟

$$(\frac{S}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}, \frac{S}{1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}) \quad (2)$$

$$(S - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}, S + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}) \quad (1)$$

$$(S - S \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}, S + S \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}) \quad (4)$$

$$(\frac{S}{1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}, \frac{S}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}) \quad (3)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۲۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشد:

$$H_1 = X \sim U(., 1) \quad \text{یا} \quad H_0 = X \sim \text{Exp}(1)$$

علاقه‌مند به آزمون H_0 در مقابل H_1 هستیم. ناحیه بحرانی به روش نیمین-پیرسن کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n X_i > c \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n |X_i| > c \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i < c \quad (2)$$

$$|\bar{X}| > c \quad (1)$$

پاسخ

۱- گزینه «۲» صحیح است.

ضریب چولگی نمونه از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-400}{(100)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-400}{1000} = -0.4$$

البته این آماره یک برآورد اریب برای ضریب چولگی جامعه است.

۲ - گزینه «۲» صحیح است.

تولید در ۴ دوره ۲ برابر و در هر دوره به طور متوسط $\sqrt[4]{2}$ برابر شده است ($\sqrt[4]{2} = \left(\frac{16}{8}\right)^{\frac{1}{4-1}} = \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$). بنابراین در هر دوره به طور متوسط $\sqrt[4]{2} - 1$

درصد زیاد شده است.

۳ - گزینه «۴» صحیح است.

اگر میانگین معلوم باشد، $\text{MLE}(\sigma)$ برابر با $\sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$ است.

$$\text{MLE}(\sigma) = \sqrt{\frac{(2-0)^2 + (-2-0)^2 + (-1-0)^2}{3}} = \sqrt{3}$$

دهک اول نقطه‌ای است که احتمال سمت چپ آن ۰/۱ است.

$$P(X \leq a) = 0.1 \Rightarrow a = \mu - 1/\sqrt{3}\sigma = -1/\sqrt{3}\sigma$$

$$\text{MLE}(-1/\sqrt{3}\sigma) = -1/\sqrt{3}\hat{\sigma} = -1/\sqrt{3}\sqrt{3}$$

۴ - گزینه «۳» صحیح است.

در مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ داریم:

$$\text{Var}(\hat{Y} | x_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)$$

که در آن برآورد σ^2 به صورت زیر است:

$$\frac{\text{SSE}}{n-2} = \frac{S_{YY} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{n-2}$$

در مدل $Y_i = Bx_i + \varepsilon_i$ داریم:

$$\text{Var}(\hat{Y} | x_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

که در آن برآورد σ^2 به صورت زیر است:

$$\frac{\text{SSE}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{n-1}$$

بنابراین برآورد $\text{Var}(\hat{Y} | x_i = 3)$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2 \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \frac{2 \cdot 0 - 100}{10} \times \frac{9}{100} = \frac{9}{10}$$

۵- گزینه «۴» صحیح است.

$$\Pr\left(\frac{S}{\sqrt{r}|\bar{X}-\mu|} < 1\right) = \Pr\left(\frac{\sqrt{r}|\bar{X}-\mu|}{S} > 1\right) = \Pr\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{r}} > 1\right) = \Pr(|t_{r-1}| > 1) = r \frac{\text{Arctg } x}{\pi} \Big|_1^\infty = r \times \frac{(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\pi} = \frac{1}{4} \times r = \frac{r}{4}$$

۶- گزینه «۳» صحیح است.

۷- گزینه «۳» صحیح است.

$$E(X) = \int_0^\theta x \cdot \left(r \frac{x}{\theta^r}\right) dx = \frac{r}{r} \frac{1}{\theta^r} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\theta = \frac{r}{r} \frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$E((X_1 + rX_r + \dots + nX_n)) = \frac{n(n+1)}{r} \frac{r}{r} \theta \Rightarrow E\left(\frac{r}{n(n+1)} (X_1 + rX_r + \dots + nX_n)\right) = \theta$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$P(P(X < \mu + rS) > 0.975) = P\left(P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{rS}{\sigma}\right) > 0.975\right) = P\left(P\left(Z < \frac{rS}{\sigma}\right) > 0.975\right) = P\left(\frac{rS}{\sigma} > Z_{0.975}\right)$$

$$= P\left(\frac{rS^2}{\sigma^2} > (Z_{0.975})^2\right) = P(r\chi_r^2 > 4) = P(\chi_r^2 > r) = e^{-\frac{r}{r}} = e^{-1}$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

$$\alpha = P(X < 0.5 | H_0) = \int_{-\infty}^{0.5} r x^{r-1} dx \Rightarrow \alpha = \frac{1}{r}$$

$$\beta = P(X > 0.5 | H_1) = \int_{0.5}^1 r x^{r-1} dx = \frac{r}{r}$$

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

$$\alpha = P(X \leq k | H_0) = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^k = 1 - \alpha$$

$$\beta = P(X > k | H_1) = \left(\frac{1}{r}\right)^k = \left(\frac{1}{r}\right)^{rk} = (1 - \alpha)^r$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که میانگین معلوم است، آماره آزمون $\chi_o^2 = \frac{nS^2}{\sigma_o^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma_o^2}$ است. بنابراین داریم:

$$\chi_o^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma_o^2} = \frac{4 + 16}{4} = 5 \Rightarrow p\text{-value} = P(\chi_r^2 \geq \chi_o^2) = P(\chi_r^2 \geq 5) = e^{-\frac{5}{r}}$$

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

$$MS_{Tr} = \frac{SS_{Tr}}{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2}{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \hat{\alpha}_i^2}{k-1} = \frac{3(1+4+0+9)}{4-1} = 14$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{N-k} = \frac{\sum_{i=1}^4 (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^4 (n_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^4 (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^4 (n_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^4 S_i^2}{k} = 2$$

$$F = \frac{MS_{Tr}}{MS_E} = \frac{14}{2} = 7$$

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

$$Z_o = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = \frac{48/25 - 42 - 3}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}} = \frac{3/25}{\frac{5}{2}} = \frac{6/5}{5} = 1/3 \Rightarrow p - \text{value} = 2 \times P(Z \leq -1/3) = 2 \times 0.3944 = 0.7888$$

۱۵- گزینه «۴» صحیح است.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\theta+1) - \theta} = 1$$

بنابراین مقدار $L(\theta)$ به ازای تمام مقادیر ممکن θ یکسان خواهد شد و مطابق روش MLE پارامتر θ می‌تواند هر مقدار قابل قبولی را اختیار کند. با توجه به مقادیر ممکن برای x ($\theta < x < \theta + 1$) ، مقادیر قابل قبول برای θ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\forall x_i : \theta \leq x_i \leq \theta + 1 \Rightarrow \begin{cases} \forall x_i : \theta \leq x_i \Rightarrow \theta \leq x_{(1)} \\ \forall x_i : x_i \leq \theta + 1 \Rightarrow x_{(n)} \leq \theta + 1 \Rightarrow x_{(n)} - 1 \leq \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{(n)} - 1 \leq \theta \leq x_{(1)}$$

۱۶- گزینه «۴» صحیح است.

آماره آزمون بر اساس فرض صفر $\sigma_x = 2$ یا $\sigma_y = 2$ ساخته می‌شود. بنابراین داریم:

$$F_o = \frac{S_x^2 / S_y^2}{\sigma_{x_o}^2 / \sigma_{y_o}^2} = \frac{S_x^2 / S_y^2}{4} = \frac{S_x^2}{4 S_y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow p - \text{value} = P(F_{n_x-1, n_y-1} \leq F_o) = P(F_{4,6} \leq \frac{1}{2})$$

۱۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i (a + b x_i) = a \sum_{i=1}^n e_i + b \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n e_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n e_i y_i - \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i y_i$$

بنابراین داریم:

$$S_{y|x}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)(Y_i - \hat{Y}_i)}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) Y_i}{n-2}$$

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}} \Rightarrow \ln[L(\mu)] = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu))}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{2 \sum_{i=1}^n i(x_i - \mu)}{2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n i x_i - \mu \sum_{i=1}^n i = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n i x_i}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{6 \sum_{i=1}^n i x_i}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots)}{14}$$

$$S \approx N\left(\sigma, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{S - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx Z$$

$$-Z_{\alpha/2} \leq \frac{S - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\alpha/2} \Rightarrow -\frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{S}{\sigma} - 1 \leq \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{S}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \sigma \leq \frac{S}{1 - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}$$

نکته: اگر X دارای توزیع مربع کای با n درجه آزادی باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \sim Z \Rightarrow P\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} > Z_{\alpha}\right) = \alpha \Rightarrow P(\chi_n^2 > n + Z_{\alpha}\sqrt{2n}) = \alpha \Rightarrow \chi_{\alpha, n}^2 \approx n + Z_{\alpha}\sqrt{2n}$$

$$\sqrt{2}\chi_n^2 - \sqrt{2n} \sim Z \Rightarrow P(\sqrt{2}\chi_n^2 - \sqrt{2n} > Z_{\alpha}) = \alpha \Rightarrow P(\chi_n^2 > \frac{(Z_{\alpha} + \sqrt{2n})^2}{2}) = \alpha \Rightarrow \chi_{\alpha, n}^2 \approx \frac{(Z_{\alpha} + \sqrt{2n})^2}{2}$$

با استفاده از نکته دوم می‌توان نشان داد که در نمونه‌گیری از جامعه نرمال، با افزایش اندازه نمونه توزیع انحراف معیار نمونه S به سمت توزیع $N(\sigma, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})$ میل می‌کند.

www.nashr-estekhdam.ir

۲۰- گزینه «۴» صحیح است.

$$\frac{L(H_1)}{L(H_0)} < c_1 \Rightarrow \frac{\prod e^{-x_i}}{\prod 1} < c_1 \Rightarrow e^{-\sum x_i} < c_1 \Rightarrow -\sum x_i < \ln c_1 \Rightarrow \sum x_i > c$$

۱- شخصی را در نظر بگیرید که در نقطه صفر محور X قرار گرفته است. اگر این شخص هر بار به طور مستقل از سایر حرکت‌ها با احتمال p به سمت راست و با احتمال $q=1-p$ به سمت چپ حرکت کند، احتمال اینکه پس از $2k$ بار حرکت $2n$ واحد از مبدأ دور شده باشد، چقدر است؟

$$\begin{aligned} & \binom{2k}{k+n} p^{k-n} q^{k-n} (p^{2n} + q^{2n}) \quad (2) \\ & \binom{2k}{k+n} p^{k-n} q^{k-n} \quad (3) \end{aligned}$$

۲- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال $f(x) = ce^{-x^2 - \gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$ باشد. مقدار $E(X^2)$ کدام است؟

$$\frac{51}{4} \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad \frac{29}{4} \quad (4) \quad 12 \quad (1)$$

۳- تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t) = e^{\frac{2}{3}t + \frac{4}{9}t^2}$ است. تابع مولد گشتاور $Y = \frac{1}{3}(X - 4)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & e^{\frac{2}{3}t + \frac{4}{9}t^2} \quad (4) \\ & e^{\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}t^2} \quad (3) \\ & e^{\frac{2}{3}t + \frac{4}{9}t^2} \quad (2) \\ & e^{\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}t^2} \quad (1) \end{aligned}$$

۴- اگر $X \sim N(1, 4)$ و $Y \sim N(1, 9)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار a رابطه زیر برقرار است؟
 $P(2X + Y < a) = P(4X - 2Y > 4a)$

$$\frac{2}{3} \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (1)$$

۵- اگر X دارای توزیع $N(0, \sigma^2)$ با تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$ باشد، به ازای کدام مقدار σ مقدار

مقدار $P(1 < X < 2)$ حداکثر می‌شود؟

$$\sqrt{\frac{2}{2 \ln 2}} \quad (4) \quad \text{بینهایت} \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{3}{2 \ln 2}} \quad (1)$$

۶- فرض کنید X دارای توزیع هندسی با پارامتر p باشد، برای عدد مثبت a ، مقدار $E(\max(X, a))$ کدام است؟

$$a + aq^a \quad (4) \quad (a + \frac{1}{p})q^a \quad (3) \quad a + \frac{q^a}{p} \quad (2) \quad a + q^a \quad (1)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور به صورت زیر باشد:

$$M_X(t) = \frac{(1 + e^t)(e^{2t} + e^{3t}) + \cos ht}{5}$$

$P(X \leq 1)$ برابر است با:

$$\frac{3}{10} \quad (4) \quad \frac{1}{10} \quad (3) \quad \frac{2}{5} \quad (2) \quad \frac{1}{5} \quad (1)$$

۸- فرض کنید می‌خواهیم با گرفتن نمونه‌هایی از دو جامعه نرمال مستقل با واریانس‌های به ترتیب ۱ و ۸، تفاضل میانگین‌های آنها را برآورد نماییم. اگر $n_2 = 2n_1$ و بخواهیم در سطح اطمینان ۰/۹۵ حداکثر خطا ۱ باشد، مجموع اندازه نمونه‌ها کدام است؟ ($Z_{0.025}$ را برابر ۲ در نظر بگیرید؟)

$$160 \quad (4) \quad 60 \quad (3) \quad 40 \quad (2) \quad 20 \quad (1)$$

۹- فرض کنید $X \sim B(4, p)$ و می‌خواهیم فرض $H_0: p = \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1: p = \frac{1}{4}$ را آزمون کنیم. اگر ناحیه بحرانی به

صورت $R = \{0, 1\}$ باشد، توان آزمون کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{5}{16} & (1) & \frac{189}{256} & (2) \\ \frac{5}{32} & (3) & \frac{27}{32} & (4) \end{array}$$

۱۰- یک نمونه n تایی از مدل $Y_i = Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. کدام گزینه غلط است؟

(۱) برآورد B را می‌توان به صورت ترکیب خطی از y_i ها نوشت.

(۲) برآورد B دارای توزیع نرمال است.

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \quad (4)$$

۱۱- فرض کنید می‌خواهیم بر اساس یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال، یک برآورد فاصله ای $(1-\alpha)$ درصدی دو

طرفه برای میانگین جامعه بدهیم. اگر واریانس جامعه مجهول باشد، ولی به اشتباه معلوم فرض شود (به اشتباه واریانس

نمونه به جای واریانس جامعه قرار داده شود)، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) طول فاصله ساخته شده، کمتر از طول فاصله واقعی خواهد بود.

(۲) طول فاصله ساخته شده، بیشتر از طول فاصله واقعی خواهد بود.

(۳) طول فاصله ساخته شده، مساوی طول فاصله واقعی خواهد بود.

(۴) بسته به اینکه واریانس نمونه از واریانس جامعه کمتر یا بیشتر یا مساوی آن باشد، هر کدام از گزینه های قبل می‌تواند درست باشد.

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲- اگر تابع چگالی متغیر تصادفی X بصورت $f(x) = 2\theta^2 x^{-2}, 0 \leq x, 0 < \theta$ باشد، برآورد θ از روش گشتاورها کدام

است؟

$$\begin{array}{llll} 2\bar{X} & (1) & X_{(n)} & (2) \\ X_{(1)} & (3) & \frac{\bar{X}}{2} & (4) \end{array}$$

۱۳- برای آزمون فرض $H_0: \sigma = 2$ در مقابل $H_1: \sigma = 3$ در نمونه‌گیری از جامعه نرمال و در سطح معنادار بودن 0.05

اطلاعات $n = 16$ و $S^2 = 8$ موجود است. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) چون $p\text{-value} = 0.1 < \alpha = 0.05$ است، H_0 رد می‌شود.

(۲) چون $p\text{-value} = 0.1 < \alpha = 0.05$ است، H_0 رد نمی‌شود.

(۳) چون $p\text{-value} = 0.1 > \alpha = 0.05$ است، H_0 رد می‌شود.

(۴) چون $p\text{-value} = 0.1 > \alpha = 0.05$ است، H_0 رد نمی‌شود.

۱ - گزینه «۲» صحیح است.

فرض کنید X تعداد حرکت‌ها به سمت راست و $2k - X$ تعداد حرکت‌ها به سمت چپ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P(|X - (2k - X)| = 2n) &= P(X - (2k - X) = 2n) + P(X - (2k - X) = -2n) \\ &= P(X = k + n) + P(X = k - n) = \binom{2k}{k+n} p^{k+n} q^{2k-(k+n)} + \binom{2k}{k-n} p^{k-n} q^{2k-(k-n)} \\ &= \binom{2k}{k+n} p^{k+n} q^{k-n} + \binom{2k}{k-n} p^{k-n} q^{k+n} = \binom{2k}{k+n} p^{k-n} q^{k-n} (p^{2n} + q^{2n}) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که: $\binom{2k}{k+n} = \binom{2k}{k-n}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^\tau}{\tau\sigma^\tau}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau\pi}} e^{\frac{-x^\tau + \tau\mu x - \mu^\tau}{\tau\sigma^\tau}} = ce^{\frac{-x^\tau + \tau\mu x}{\tau\sigma^\tau}}, x \in \mathbb{R}$$

$$ce^{-x^\tau - \gamma x} = ce^{\frac{-x^\tau + \tau\mu x}{\tau\sigma^\tau}} \Rightarrow \tau\sigma^\tau = 1, \sigma^\tau = \frac{1}{\tau}, \frac{\tau\mu}{\tau\sigma^\tau} = -\gamma \Rightarrow \mu = \frac{-\gamma}{\tau}$$

$$\Rightarrow E(X^\tau) = \mu^\tau + \sigma^\tau = \frac{\tau^{\frac{\tau}{\tau}}}{\tau} + \frac{1}{\tau} = \frac{\Delta}{\tau}$$

$$M_X(t) = e^{\tau t + \tau t^\tau} \Rightarrow X \sim N(\mu = \tau, \sigma^\tau = \Delta)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{\tau}(X - \tau) = \frac{1}{\tau}X - \frac{\tau}{\tau} \sim N(\mu = \frac{\tau}{\tau} - \frac{\tau}{\tau} = -\frac{\tau}{\tau}, \sigma^\tau = \frac{\Delta}{\tau}) \Rightarrow M_Y(t)$$

$$Y = \frac{1}{\tau}X - \frac{\tau}{\tau} \Rightarrow M_Y(t) = M_X\left(\frac{1}{\tau}t\right)e^{-\frac{\tau}{\tau}t} = e^{\tau\left(\frac{1}{\tau}t\right) + \tau\left(\frac{1}{\tau}t\right)^\tau} e^{-\frac{\tau}{\tau}t} = e^{\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}t^\tau}$$

$$P(\tau X + Y < a) = P\left(Z < \frac{a - (\tau + 1)}{\sqrt{\Delta\tau + \Delta}}\right) = \Phi\left(\frac{a - \tau}{\Delta}\right)$$

$$P(\tau X - \tau Y > \tau a) = P\left(Z > \frac{\tau a - (\tau - \tau)}{\sqrt{\Delta\tau + \Delta\tau}}\right) = P\left(Z > \frac{\tau a - \tau}{\Delta}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\tau a}{\Delta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a - \tau}{\Delta} = \frac{1 - \tau a}{\Delta} \Rightarrow a - \tau = 1 - \tau a \Rightarrow a = \frac{\tau}{\tau}$$

$$P(1 < X < \tau) = P\left(\frac{1}{\sigma} < Z < \frac{\tau}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(1 < X < \tau)}{\partial \sigma} = -\frac{\tau}{\sigma^\tau} f_Z\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^\tau} f_Z\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^\tau} (-\tau f - f)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^\tau} \left(-\tau \frac{1}{\sqrt{\tau\pi}} e^{-\frac{(\frac{\tau}{\sigma})^\tau}{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{\tau\pi}} e^{-\frac{(\frac{1}{\sigma})^\tau}{\tau}}\right) = 0 \Rightarrow -\tau e^{-\frac{(\frac{\tau}{\sigma})^\tau}{\tau}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\tau\sigma^\tau} = (\ln \tau) - \frac{\tau}{\tau\sigma^\tau} \Rightarrow \frac{\tau}{\tau\sigma^\tau} = \ln \tau \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\tau}{\tau \ln \tau}}$$

$$E[\max(X, a)] = E[\max(X, a) | X \leq a] P(X \leq a) + E[\max(X, a) | X > a] P(X > a)$$

$$= E[a | X \leq a] P(X \leq a) + E[X | X > a] P(X > a) = a(1 - P(X > a)) + E[X | X > a] P(X > a)$$

$$M_X(t) = \frac{(1 + e^t)(e^{\tau t} + e^{\tau t}) + \cos ht}{\Delta} = \frac{(e^{\tau t} + e^{\tau t} + e^{\tau t} + e^{\tau t})}{\Delta}$$

$$= \frac{1}{\Delta} e^{-t} + \frac{1}{\Delta} e^t + \frac{1}{\Delta} e^{\tau t} + \frac{\tau}{\Delta} e^{\tau t} + \frac{1}{\Delta} e^{\tau t} = P(-1) e^{-t} + P(1) e^t + P(\tau) e^{\tau t} + P(\tau) e^{\tau t}$$

$$\Rightarrow P(-1) = \frac{1}{\Delta}, P(1) = \frac{1}{\Delta}, P(\tau) = \frac{1}{\Delta}, P(\tau) = \frac{\tau}{\Delta}$$

۸- گزینه «۳» صحیح است.

$$Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 1 \Rightarrow Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{2n_1}} = 1 \Rightarrow 2 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{2n_1}} = 1 \Rightarrow n_1 = (2 \times \sqrt{2})^2 = 2.$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}} = 1 \Rightarrow n_1 = (2 \times \sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow n_2 = 4 \Rightarrow n_1 + n_2 = 6.$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$\pi = P(X \in \{., 1\} | H_1) = \binom{4}{.} \left(\frac{1}{4}\right)^. \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{11 + 10.8}{256} = \frac{189}{256}$$

۱۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{B}x_i)^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \hat{B}} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{(y_i - \hat{B}x_i)}_{e_i} = 0 \Rightarrow \hat{B} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

www.nashr-estekhdam.ir

چون عرض از مبدأ معلوم است، آن را برآورد نمی‌کنیم و در نتیجه نسبت به \hat{A} مشتق نمی‌گیریم و $\sum_{i=1}^n e_i$ لزوماً صفر نمی‌شود.

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

طول فاصله اطمینان در این حالت S/\sqrt{n} بوده که در صورتیکه واریانس جامعه مجهول باشد، ولی به اشتباه معلوم فرض شود، به اشتباه طول فاصله S/\sqrt{n} می‌شود که چون واریانس توزیع Z از t کمتر است و برای $\alpha < 0.05$ رابطه $Z_{\alpha/2} < t_{\alpha/2, n-1}$ درست است، گزینه ۱ صحیح است.

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} 2\theta^2 x^{-2} dx = 2\theta^2 \frac{1}{\theta} = 2\theta \Rightarrow \bar{X} = 2\hat{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$$

۱۳- گزینه «۱» صحیح است.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{15 \times 1}{4} = 3.75 \Rightarrow p\text{-value} = P(\chi_{n-1}^2 \geq \chi^2) = P(\chi_{15}^2 \geq 3.75) \approx 0.97 < \alpha = 0.05$$

مبانی احتمال و آمار مهندسی

۱- با شش عدد ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۴ حرفی می توان ساخت که عدد ۵ حتماً در آن باشد؟

- ۱۰۸ (۱) ۱۳۲ (۲) ۱۶۸ (۳) ۱۲۰ (۴)

۲- جعبه ای دارای ۱۰ مهره با شماره ۱ تا ۱۰ است که ۴ مهره از آن ها را به تصادف انتخاب می کنیم و شماره ها را به ترتیب

صعودی $X_1 < X_2 < X_3 < X_4$ مرتب می کنیم. مقدار $P(X_2 = 4)$ کدام است؟

- $\frac{9}{14}$ (۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{3}{14}$ (۳) $\frac{1}{14}$ (۴)

۳- فرض کنید n مرد و m زن را به تصادف در یک ردیف مرتب می کنیم. احتمال اینکه بین هر دو مرد حداقل ۲ زن وجود

داشته باشد، چقدر است؟

$$\frac{n! \binom{m-n+2}{n} m!}{(n+m)!} \quad (۱)$$

$$\frac{\binom{m-n+2}{n}}{n!m!} \quad (۴)$$

$$\frac{\binom{m-n+2}{n}}{n!(n+m)!m!} \quad (۳)$$

۴- میزان فروش شیر یک فروشگاه، متغیر تصادفی X بوده که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

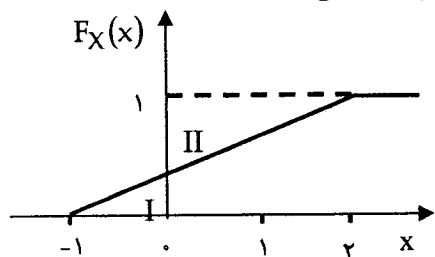
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

www.nashr-estekhdam.ir

فروشگاه روزانه ۴ واحد شیر برای فروش تهیه می کند. این فروشگاه در ۶۰ روز به طور متوسط چند روز دچار کمبود شیر می شود؟

- ۴۸ (۴) ۱۰ (۳) ۱۲ (۲) ۵۰ (۱)

۵- فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت زیر است. کدام گزینه صحیح است؟



(۱) امید ریاضی متغیر برابر است با مساحت ناحیه II منهای مساحت ناحیه I

(۲) امید ریاضی متغیر برابر است با $\frac{1}{2}$

(۳) متغیر تصادفی مورد نظر یک متغیر تصادفی یکنواخت است.

(۴) هر سه مورد

۶- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(x) = x^n$, $0 < x < 1$ باشد، مقدار $E(\max\{X, \frac{1}{2}\})$ کدام است؟

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۱)$$

$$\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۴)$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۳)$$

۷- اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین‌های به ترتیب ۲ و ۳ باشند، $P(\min\{X_1, X_2\} = X_1)$ کدام است؟

$$\frac{2}{5} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{5}{6} \quad (3) \quad \frac{3}{5} \quad (4)$$

۸- اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع نرمال استاندارد باشند و $\Phi(X_i)$ تابع توزیع تجمعی X_i باشد و متغیر Y_i به صورت $Y_i = (n+1)\Phi(X_i)$ تعریف شود، مقدار $E(\max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\})$ کدام است؟

$$n+1 \quad (1) \quad \frac{n+1}{n} \quad (2) \quad \frac{n}{n+1} \quad (3) \quad n \quad (4)$$

۹- تابع احتمال توأم دو متغیر X و Y به صورت $P(x, y) = c \frac{y^{x+y}}{x!y!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $y = 0, 1, 2, \dots$ است. $E(X+Y)$ کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad e \quad (2) \quad e^2 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۱۰- اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از یک توزیع نمایی با میانگین ۳ باشند، توزیع متغیر تصادفی $X_{(1)} - X_{(n)}$ کدام است؟

$$(1) \text{ نمایی با میانگین } \frac{3}{2} \quad (2) \text{ نمایی با میانگین } \frac{2}{3} \quad (3) \text{ نمایی با میانگین } \frac{1}{3} \quad (4) \text{ نمایی با میانگین } 3$$

۱۱- فرض کنید متغیر تصادفی X یک متغیر مثبت با میانگین و واریانس محدود به ترتیب μ و σ^2 باشد. اگر $Y = \ln X$ باشد، امید ریاضی و واریانس تقریبی Y کدام است؟

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (1)$$

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu} \quad (2)$$

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (3)$$

$$E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (4)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲- یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه با اعضای $1, 2, \dots, N$ به صورت با جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X_i را متغیر تصادفی برنولی تعریف می‌کنیم که زمانی مقدار یک را اختیار می‌کند که عضو شماره i جامعه در نمونه n تایی انتخاب شود. مقدار $E(X_i)$ کدام است؟

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^n \quad (1) \quad 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \quad (2) \quad 1 - \left(\frac{n}{N}\right) \quad (3) \quad \frac{n}{N} \quad (4)$$

۱۳- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای مستقل با توزیع $U(0, 1)$ هستند و $X_{(1)}$ و $X_{(2)}$ آماره‌های مرتب آن‌ها هستند. مقدار $\text{Cov}(X_1, X_{(1)} + X_{(2)})$ کدام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (1) \quad \frac{1}{6} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۴- فرض کنید یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, 1)$ به صورت $0.1, 0.6, -0.9, -0.2$ باشد. برای آزمون $H_0: \mu \geq 0$ در مقابل $H_1: \mu < 0$ ، p -value، H_1 در مقابل H_0 است؟

- (۱) 0.40 (۲) 0.579 (۳) 0.42 (۴) 0.597

۱۵- اگر یک مشخصه کمی دارای توزیع نرمال باشد و برای یک نمونه ۱۶ تایی از آن، فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین جامعه $[10.25, 13.75]$ به دست آمده باشد، واریانس این نمونه چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) $12/25$ (۳) ۱۶ (۴) $20/25$

۱۶- پنج قطعه یک بار توسط ترازوی A و یک بار توسط ترازوی B اندازه گیری می‌شوند. اگر نتایج به صورت زیر باشد، p -مقدار برای آزمون برابری میانگین‌های دو ترازو کدام است؟

A ترازوی	۱۱۰	۹۹	۱۱۲	۸۵	۹۹
B ترازوی	۱۱۲	۱۰۱	۱۱۳	۸۸	۱۰۱

- (۱) $2P(t_f \geq 2\sqrt{5})$ (۲) $2P(t_A \geq 2\sqrt{10})$ (۳) $2P(t_A \geq 2\sqrt{5})$ (۴) $2P(t_f \geq 2\sqrt{10})$

۱۷- یک تأمین کننده ادعا می‌کند که درصد اقلام معیوب او ۱۰ درصد است. ولی کارفرما در مقابل او ادعا می‌کند که این درصد ۲۰ درصد است. برای آزمون ادعای تأمین کننده در مقابل ادعای کارفرما، قطعات تأمین کننده را یک به یک بررسی می‌کنیم. اگر اولین قطعه معیوب در سومین آزمایش باشد، p -مقدار کدام است؟

- (۱) 0.81 (۲) 0.19 (۳) 0.271 (۴) 0.729

www.nashr-estekhdam.ir

۱۸- مایلیم در مورد ۳ توزیع نرمال مستقل، فرض

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

را در برابر این فرض که دست کم دو میانگین نامساوی‌اند، آزمایش کنیم. با داشتن اطلاعات زیر،

تیمار	۱	۲	۳
اندازه نمونه	۴	۴	۴
میانگین نمونه	۹	۱۰	۲۰
واریانس نمونه	۷	۱۰	۱۰

مقدار آماره آزمون مقایسه میانگین ۳ جامعه کدام است؟

- (۱) $\frac{148}{9}$ (۲) $\frac{296}{9}$ (۳) صفر (۴) $\frac{37}{9}$

۱۹- مدل رگرسیون $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ را در نظر بگیرید که یک نمونه ۵ تایی از آن موجود است. اگر خطاها به صورت $e_1 = 0.1, e_2 = -0.1, e_3 = 0.2, e_4 = -0.3, e_5$ باشند، مقدار برآورد واریانس متغیر پاسخ کدام است؟

- (۱) 0.1 (۲) 0.53 (۳) 0.4 (۴) 0.32

۲۰- مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ را با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. اگر بر اساس یک نمونه ۱۶ تایی نتایج زیر حاصل شده باشد، مقدار آماره آزمون $H_0: B = 1$ در مقابل $H_1: B \neq 1$ کدام است؟

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 32, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i = 48, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i y_i = 102, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 73, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i^2 = 160$$

- (۱) $\frac{2}{21}$ (۲) $-\sqrt{\frac{6}{7}}$ (۳) $-\sqrt{\frac{7}{6}}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ

۱ - گزینه «۲» صحیح است.

عدد ۵ که باید باشد، برای انتخاب سایر اعداد هم روی اینکه چند بار عدد یک انتخاب شود، افراز می کنیم:

$$\text{تعداد حالاتی که هیچ کدام از یکها انتخاب نمی شود: } \binom{3}{3} \times 4! = 24$$

$$\text{تعداد حالاتی که یکی از یکها انتخاب می شوند: } \binom{3}{2} \times 4! = 72$$

$$\text{تعداد حالاتی که دو تا از یکها انتخاب می شوند: } \binom{3}{1} \times \frac{4!}{2!} = 36$$

بنابراین تعداد کل حالات $24 + 72 + 36 = 132$ است.

۲ - گزینه «۳» صحیح است.

یکی از اعداد باید کمتر از ۴، یکی برابر با ۴ و دو تا هم بیشتر از ۴ باشند:

$$P(X_r = 4) = \frac{\binom{3}{1} \binom{1}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{3 \times 15}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

۳ - گزینه «۱» صحیح است.

کل حالات $(n+m)!$ است. برای اینکه بین هر دو مرد، حداقل ۲ زن باشد، ابتدا مردها را به $n!$ حالت مرتب می‌کنیم. این مردها $n+1$ فضا ایجاد می‌کنند که در $n-1$ تای بین آنها باید هر کدام حداقل ۲ زن باشد. پس اگر زن‌ها را یکسان فرض کنیم، تعداد حالتی که می‌توان آنها را در $n+1$ محل ایجاد شده طوری

قرار داد که در $n-1$ تای آنها حداقل ۲ زن قرار گیرند برابر است با $\binom{(m-2(n-1)) + (n+1) - 1}{(n+1) - 1}$. حال اگر زن‌ها را متفاوت در نظر بگیریم، تعداد

حالات مرتب کردن آنها در مکان‌های مشخص شده نیز $m!$ حالت است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{n! \binom{(m-2(n-1)) + (n+1) - 1}{(n+1) - 1} m!}{(n+m)!} = \frac{n! \binom{m-n+2}{n} m!}{(n+m)!}$$

۴ - گزینه «۲» صحیح است.

X : تعداد روزهایی که فروشگاه دچار کمبود شیر می‌شود.

A : کمبود

$$P(A) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left. \frac{-1}{1+x} \right|_0^\infty = \frac{1}{5} \Rightarrow E(X) = 60 \times \frac{1}{5} = 12$$

۵ - گزینه «۴» صحیح است.

برای همه انواع متغیرهای تصادفی، داریم:

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

که برابر است با مساحت ناحیه II منهای مساحت ناحیه I

در ضمن شیب یا مشتق تابع توزیع تجمعی (که همان تابع چگالی است) در ناحیه $[-1, 2]$ ثابت است. پس X یک متغیر تصادفی یکنواخت در ناحیه

$[-1, 2]$ است و امید ریاضی آن $\frac{1}{3}$ است.

۶ - گزینه «۲» صحیح است.

$$f(x) = nx^{n-1}, 0 < x < 1$$

$$E(\max\{X, \frac{1}{2}\}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} nx^{n-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x nx^{n-1} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{n+1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۷ - گزینه «۴» صحیح است.

$$P(\min\{X_1, X_r\} = X_1) = P(X_1 \leq X_r) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_r} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

۸ - گزینه «۴» صحیح است.

$\Phi(X_i)$ دارای توزیع $U(0, 1)$ است و در نتیجه $Y_i = (n+1)\Phi(X_i)$ دارای توزیع $U(0, n+1)$ است و $E(\max\{Y_1, Y_r, \dots, Y_n\})$ برابر با

$$\frac{n}{n+1} (n+1) = n \text{ است.}$$

۹ - گزینه «۴» صحیح است.

X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پواسون با پارامتر ۲ هستند که $E(X+Y)$ برابر با ۴ می‌شود.

$$P(x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(y) = \frac{e^{-2} 2^y}{y!}, y = 0, 1, 2, \dots$$

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

فرض کنید $X_1, \dots, X_r, X_{(r)}$ طول عمرهای ۱۰ لامپ هستند که اگر آن‌ها را هم‌زمان روشن کنیم مدت زمان تا سوختن هشتمین لامپ $X_{(8)}$ می‌شود و فاصله زمانی بین سوختن هشتمین تا نهمین لامپ $X_{(9)} - X_{(8)}$ است. بعد از سوختن هشتمین لامپ، مدت زمان تا سوختن یکی از دو لامپ بعدی، مینیمم ۲ متغیر تصادفی نمایی است که خود یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 2 \times \frac{1}{3}$ و میانگین $\frac{3}{2}$ می‌شود.

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$E[g(X)] \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2} \sigma^2$$

$$\text{Var}[g(X)] \approx [g'(\mu)]^2 \sigma$$

$$g(X) = \ln X \Rightarrow g'(X) = \frac{1}{X} \Rightarrow g''(X) = -\frac{1}{X^2}$$

$$\Rightarrow E(\ln X) \approx \ln \mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\ln X) \approx \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

X_i یک متغیر تصادفی برنولی است. بنابراین داریم:

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

۱۳- گزینه «۱» صحیح است.

$$X_{(1)} + X_{(r)} = X_1 + X_r$$

$$\text{Cov}(X_1, X_{(1)} + X_{(r)}) = \text{Cov}(X_1, X_1 + X_r) = \text{Var}(X_1) = \frac{1}{12}$$

۱۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$p\text{-value} = P(Z \leq Z_0) = P\left(Z \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0.1 - 0}{1 / \sqrt{4}}\right) = P(Z \leq -0.2) = P(Z \geq 0.2) = 1 - 0.579 = 0.42$$

۱۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} = [10.25, 13.75] \Rightarrow \bar{X} = \frac{10.25 + 13.75}{2} = 12 \Rightarrow t_{0.05, 15} \sqrt{1.75} = 1.75 \Rightarrow 1.75 \sqrt{1.75} = 1.75 \Rightarrow S^2 = 16$$

۱۶- گزینه «۴» صحیح است.

A ترازوی	۱۱۰	۹۹	۱۱۲	۸۵	۹۹
B ترازوی	۱۱۲	۱۰۱	۱۱۳	۸۸	۱۰۱
D	۲	۲	۱	۳	۲

$$\bar{d} = 2$$

$$S_d^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{4} (1+1) = \frac{1}{2}$$

$$t_0 = \frac{\bar{d} - 0}{S_d / \sqrt{n}} = \frac{\bar{d} \sqrt{n}}{S_d} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{10}$$

www.nashr-estekhdam.ir

بنابراین داریم:

$$P\text{-Value} = 2P(t_{\Delta-1} \geq t_0) = 2P(t_4 \geq 2\sqrt{10})$$

۱۷- گزینه «۳» صحیح است.

$$X \sim G(p)$$

$$H_0: p = 0.10$$

$$H_1: p = 0.20$$

ناحیه بحرانی به صورت $X < c$ است و مقدار مشاهده شده برای X برابر با ۳ است. بنابراین داریم:

$$p\text{-value} = P(X \leq 3 | H_0) = 1 - (0/9)^3 = 1 - 0/729 = 0/729$$

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

اندازه نمونه‌ها یکسان است. بنابراین MSE و $\bar{X}_{..}$ که میانگین‌های وزنی \bar{X}_i ها و S_i^2 ها هستند، به میانگین ساده تبدیل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{X}_{..} &= \frac{9+10+20}{3} = 13 \\ \text{MSE} &= \frac{7+10+10}{3} = 9 \\ \Rightarrow SST_r &= n_1(\bar{X}_{..} - \bar{X}_1)^2 + n_r(\bar{X}_{..} - \bar{X}_r)^2 + n_r(\bar{X}_{..} - \bar{X}_r)^2 = 4(13-9)^2 + 4(13-10)^2 + 4(13-20)^2 = 4 \times (16+9+49) = 296 \\ MST_r &= \frac{SST_r}{k-1} = \frac{296}{2} = 148, \quad F_0 = \frac{MST_r}{\text{MSE}} = \frac{148}{9} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$\sum_{i=1}^{\Delta} e_i = 0 \Rightarrow e_{\Delta} = 0/1 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{\Delta} e_i^2}{n-2} = \frac{0/0.1 + 0/0.1 + 0/0.4 + 0/0.9 + 0/0.1}{3} = \frac{0/16}{3} = 0/53$$

۲۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{16} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 73 - 16 \times 2^2 = 9 \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^{16} y_i^2 - n\bar{y}^2 = 160 - 16 \times 3^2 = 16$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{16} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 102 - 16 \times 2 \times 3 = 6$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\hat{B} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad S_{Y|x}^2 = \frac{SS_E}{n-2} = \frac{16 - \frac{6^2}{9}}{n-2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$t_0 = \frac{\hat{B} - 1}{S_{Y|x} / \sqrt{S_{xx}}} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{\sqrt{\frac{6}{7}} / \sqrt{9}} = -\sqrt{\frac{7}{6}}$$

۱- میزان باران سالانه (بر حسب اینچ) در یک ناحیه معین دارای توزیع نرمال با $\mu = 40$ و $\sigma = 4$ است. احتمال اینکه از امسال برای مدت ۵ سال منتظر بمانیم تا میزان بارندگی در سال بیش از ۴۰ اینچ باشد کدام است؟

$$(1) \frac{1}{32} \quad (2) \frac{15}{16} \quad (3) \frac{7}{8} \quad (4) \frac{3}{4}$$

۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع زیر باشد:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

www.nashr-estekhdam.ir

مقدار $P(|X - \frac{2}{3}| > \frac{1}{3})$ کدام است؟

$$(1) \frac{8}{27} \quad (2) \frac{1}{27} \quad (3) \frac{4}{9} \quad (4) \frac{1}{9}$$

۳- فرض کنید احتمال از بین رفتن نام خانوادگی یک خانواده بعد از n سال برابر با $\frac{1}{e^{n^2+1}}$ باشد. در این صورت احتمال بقای نام خانوادگی در این خانواده برای همیشه برابر است با:

$$(1) \frac{1}{e^2} \quad (2) e^{-2} \quad (3) \text{ صفر} \quad (4) 1 - e^{-2}$$

۴- اگر تابع نرخ خرابی طول عمر یک دستگاه به صورت $\lambda(t) = at^2$ باشد، و $P(X > 1) = 0.1$ باشد، $P(X > 2)$ کدام است؟

$$(1) \frac{8}{100} \quad (2) \frac{1}{100} \quad (3) \frac{1}{10} \quad (4) \frac{4}{100}$$

۵- فرض کنید مدت زمان سفر شما از خانه تا محل کنکور آزمایشی، متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۴۰ دقیقه و انحراف معیار ۱۰ دقیقه است. اگر بخواهید با احتمال ۹۵ درصد تأخیر نداشته باشید و کنکور آزمایشی ساعت ۸ شروع شود، آخرین زمانی که باید منزل را ترک کنید، کدام است؟

$$(1) 2/5 \text{ دقیقه قبل از } 8 \quad (2) 16/5 \text{ دقیقه قبل از } 8 \quad (3) 16/5 \text{ دقیقه بعد از } 7 \quad (4) 3/5 \text{ دقیقه بعد از } 7$$

۶- اگر X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر یکسان p باشند و $Y_1 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ، $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ باشند، مقدار عبارت $P(Y_1 = 0 | Y_n = 1)$ از کدام گزینه زیر به دست می‌آید؟ $(q = 1 - p)$

$$(1) 1 - q^n \quad (2) 1 - \frac{p^n}{1 - q^n} \quad (3) \frac{1 - q^n}{1 - p^n} \quad (4) 1 - p^n$$

۷- فرض کنید قطر میله‌های تولیدی یک کارخانه به طور مستقل دارای تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{2}$ ، $10 < x < 12$ است. احتمال اینکه در ۱۰ میله، ۵ میله دارای قطر کمتر از $10/5$ و ۲ میله دارای قطر بیشتر از $11/5$ باشد، چقدر است؟

$$(1) \frac{315}{4^7} \quad (2) \frac{63}{4^7} \quad (3) \frac{315}{4^6} \quad (4) \frac{63}{4^6}$$

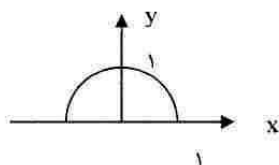
۸- فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = ye^{-(y+x)}$, $(x > 0, y > 0)$ باشند، احتمال آنکه فقط یکی از آن‌ها مقدار کمتر از یک را اختیار کند کدام است؟

$$\begin{array}{ll} e^{-1} - e^{-2} & (1) \\ ye^{-1}(1 - e^{-2}) & (2) \\ e^{-1} + e^{-2} - ye^{-2} & (3) \\ e^{-1}(1 - e^{-2}) & (4) \end{array}$$

۹- اگر X_1, X_2, X_3 متغیرهای مستقل نمایی باشند و میانگین X_i برابر با $\frac{1}{\theta}$ باشد، مقدار $P(\min\{X_1, X_2, X_3\} = X_1)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3} & (1) \\ \frac{1}{6} & (2) \\ \frac{6}{11} & (3) \\ \frac{\theta}{3} & (4) \end{array}$$

۱۰- نقطه‌ای به تصادف از داخل نیم دایره شکل زیر انتخاب می‌کنیم. اگر (x,y) نمایانگر مختصات نقطه انتخابی باشد، $\text{Var}(X|Y=y)$ کدام است؟



www.nashr-estekhdam.ir

$$\begin{array}{ll} \frac{1-y^2}{2} & (1) \\ \frac{1-y^2}{3} & (2) \\ \frac{1+y^2}{2} & (3) \\ \frac{1+y^2}{4} & (4) \end{array}$$

۱۱- فرض کنید X_1, X_2, X_3 سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که در آن X_1, X_2 دارای توزیع یکسان نمایی با پارامتر یک و X_3 نیز دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ است. مقدار $P(\min(X_1, X_2) < X_3)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1-e^{-2}}{2} & (1) \\ \frac{1-e^{-2}}{4} & (2) \\ \frac{1+e^{-2}}{2} & (3) \\ \frac{1+e^{-2}}{4} & (4) \end{array}$$

۱۲- یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را $m+n$ بار به طور مستقل انجام می‌دهیم. اگر بدانیم در مجموع این آزمایش‌ها k موفقیت حاصل شده، امید ریاضی تعداد موفقیت‌ها در m آزمایش اول کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{m}{m+n} & (1) \\ \frac{n}{m+n} & (2) \\ \frac{k}{m+n} & (3) \\ \frac{km}{m+n} & (4) \end{array}$$

۱۳- X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع یکسان هستند. اگر $\text{Var}(X+Y) = 1$ ، $\text{Var}(X-Y) = 2$ باشد، در این صورت ضریب همبستگی بین X و Y برابر است با:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3} & (1) \\ \frac{1}{6} & (2) \\ -\frac{1}{3} & (3) \\ -\frac{1}{6} & (4) \end{array}$$

۱۴- فرض کنید $X \sim U(0,1)$ و $Y|X=x \sim U(x, x+1)$ باشد. در این صورت مقدار $\text{Var}(X+Y)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{12} & (1) \\ \frac{7}{12} & (2) \\ \frac{5}{12} & (3) \\ \frac{2}{12} & (4) \end{array}$$

۱۵- اگر برای متغیرهای تصادفی مستقل X_1, X_2 داشته باشیم:

$$E(t^{X_i}) = 0.3 + 0.7t$$

آنگاه مقدار $P(X_1 + X_2 = 1)$ کدام است؟

۰/۴۹ (۴)

۰/۲۱ (۳)

۰/۴۲ (۲)

۰/۰۹ (۱)

۱۶- اگر X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر ۰/۱ باشند و Y_k به صورت $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ تعریف شود. در این صورت مقدار $E(Y_5 Y_7)$ کدام است؟

۰/۳۵ (۲)

۰/۸ (۱)

۰/۸۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۱۷- اگر X و Y متغیرهای مستقل باشند و $Cov(X, XY) = ۱۵$, $E(X) = ۲$, $Var(X) = ۵$ و $Var(Y) = ۴$, آنگاه $E(Y)$ مقدار کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

$\frac{۵}{۴}$ (۲)

$\frac{۳}{۲}$ (۱)

۱۸- در ناحیه‌ای ۲ نوع مختلف از یک حشره زندگی می‌کنند، هر دفعه که حشره‌ای به دام می‌افتد مستقل از نوع حشره قبلی با احتمال P_i ($i = 1, \dots, 2$), $\sum_{i=1}^2 P_i = 1$ ، از نوع i ام است. متوسط تعداد حشراتی که قبل از حشره نوع ۱ به دام افتاده‌اند کدام است؟

$\frac{1}{\sum_{i=2}^r P_i} - 1$ (۴)

$\frac{1}{\sum_{i=1}^r P_i} - 1$ (۳)

$\frac{1-P_1}{P_1}$ (۲)

$\frac{1}{P_1}$ (۱)

۱۹- سه آزمایش را در نظر بگیرید که دارای شانس موفقیت یکسان هستند. اگر X نشان دهنده تعداد موفقیت‌ها در این آزمایش‌ها باشد و $E(X) = ۱/۸$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$0 \leq P(X=2) \leq 0/۶$ (۲)

$0/۴ \leq P(X=2) \leq ۱$ (۱)

$0 \leq P(X=2) \leq 0/۳$ (۴)

$0/۶ \leq P(X=2) \leq ۱$ (۳)

۲۰- فرض کنید ۴۸ نقطه به تصادف در فاصله (۱, ۳) انتخاب می‌کنیم و اختلاف عدد i ام از ۲ را با X_i نمایش می‌دهیم.

مقدار $P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i < -۶\right)$ کدام است؟

۰/۰۵ (۲)

(۱) تقریباً صفر

۰/۱۵۸ (۴)

۰/۰۶۷ (۳)

۱ - گزینه «۱» صحیح است.
 X = میزان بارندگی در هر سال

$$P(X > 40) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{40 - 40}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

احتمال اینکه اولین موفقیت در سال پنجم باشد برابر است با $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

۲ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P(|X - \frac{2}{3}| > \frac{1}{3}) = P(X - \frac{2}{3} > \frac{1}{3}) + P(X - \frac{2}{3} < -\frac{1}{3}) = P(X > 1) + P(X < \frac{1}{3}) = 0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

۳ - گزینه «۱» صحیح است.

احتمال اینکه نام خانوادگی بعد از نسل n ام از بین برود برابر با $e^{-\frac{2n^2}{4n^2+1}}$ پس احتمال اینکه تا نسل n ام از بین نرود برابر با $e^{-\frac{2n^2}{4n^2+1}}$ است. پس احتمال بقا برای همیشه در حالت $n \rightarrow \infty$ به دست می آید که برابر است با $e^{-\frac{1}{2}}$.

۴ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P(X > 1) = 0.1 \Rightarrow e^{-\int_1^a t dt} = 0.1 \Rightarrow e^{-\frac{a}{2}} = 0.1 \Rightarrow P(X > 2) = e^{-\int_2^a t dt} = e^{-\frac{a}{2}} = (0.1)^{\frac{a}{2}}$$

۵ - گزینه «۴» صحیح است.

فرض کنید X مدت زمان سفر شما باشد. در اینصورت داریم:

$$P(X < a) = 0.95 \Rightarrow P(Z < \frac{a - 40}{10}) = 0.95 \Rightarrow \frac{a - 40}{10} = 1.65 \Rightarrow a = 56.5$$

یعنی با احتمال ۰/۹۵ سفر شما بیشتر از ۵۶/۵ دقیقه طول نمی کشد و اگر ۵۶/۵ دقیقه قبل از ۸ صبح حرکت کنید، با احتمال ۰/۹۵ زودتر از ۸ به محل آزمون می رسید.

۶ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P(Y_1 = 0 | Y_n = 1) = \frac{P(Y_1 = 0 \cap Y_n = 1)}{P(Y_n = 1)} = \frac{1 - p^n - q^n}{1 - q^n} = 1 - \frac{p^n}{1 - q^n}$$

۷ - گزینه «۱» صحیح است.

قطر هر میله به طور مستقل با احتمال $\frac{1}{4}$ کمتر از $\frac{10}{5}$ ، با احتمال $\frac{1}{4}$ بیشتر از $\frac{11}{5}$ و با احتمال $\frac{2}{4}$ بین $\frac{10}{5}$ و $\frac{11}{5}$ است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\binom{10}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \binom{5}{3} \left(\frac{2}{4}\right)^3 \binom{2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{10!}{5!3!2!4^5} = \frac{315}{4^7}$$

۸ - گزینه «۴» صحیح است.

X و Y متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارمترهای به ترتیب $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ هستند.

$$P(X \geq 1, Y < 1) + P(X < 1, Y \geq 1) = e^{-1}(1 - e^{-2}) + (1 - e^{-1})e^{-2} = e^{-1} - e^{-3} + e^{-2} - e^{-3} = e^{-1} + e^{-2} - 2e^{-3}$$

۹ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\min\{X_r, X_r\} \sim \text{Exp}(\lambda_r + \lambda_r)$$

$$P(\min\{X_1, X_r, X_r\} = X_1) = P(X_1 \leq \min\{X_r, X_r\}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (\lambda_r + \lambda_r)} = \frac{\frac{\theta}{1}}{\frac{\theta}{1} + (\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})} = \frac{6}{11}$$

۱۰ - گزینه «۳» صحیح است.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{c}{f(y)} = k \Rightarrow (X|y) \sim U[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X|y) = \frac{[\sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2})]^2}{12} = \frac{1-y^2}{3}$$

۱۱ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\min(X_1, X_r) \sim \text{Exp}(r\lambda = r)$$

$$P(\min(X_1, X_r) < X_r) = \int_0^1 P(\min(X_1, X_r) < X_r | X_r = a) f_{X_r}(a) da$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{-ra}) \frac{1}{1-a} da = 1 - \frac{1}{r} (1 - e^{-r}) = \frac{1 + e^{-r}}{r}$$

۱۲ - گزینه «۴» صحیح است.

اگر بدانیم در مجموع این آزمایشها k موفقیت حاصل شده، تعداد موفقیتها در m آزمایش اول دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای

$$(m+n, k, m) \text{ و امید ریاضی } \frac{km}{m+n} \text{ است.}$$

۱۳ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{cases} \text{Var}(X-Y) = r \\ \text{Var}(X+Y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = r \\ \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = r \\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\sigma_X^2 - 2\rho\sigma_X^2 = r \\ r\sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow r\sigma_X^2 = r \Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{r}{4} \Rightarrow \sigma_X = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

۱۴ - گزینه «۳» صحیح است.

$$\text{Var}(X+Y) = E[\text{Var}((X+Y)|X)] + \text{Var}[E((X+Y)|X)]$$

$$= E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[X + E(Y|X)] = E[\frac{1}{12}] + \text{Var}[X + X + \frac{1}{2}] = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

یا

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[E(Y|X)] = E[\frac{1}{12}] + \text{Var}[X + \frac{1}{2}] = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, E(Y|X)) = \text{Cov}(X, X + \frac{1}{2}) = \text{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

۱۵ - گزینه «۲» صحیح است.

$$E(t^X) = \sum_x t^x P(x) = \frac{0}{3} + \frac{0}{7} + \frac{1}{7}t$$

بنابراین X_r, X_1 متغیرهای تصادفی مستقل هستند که مقادیر ۰ و ۱ را با احتمالاتی به ترتیب $\frac{0}{3}$ و $\frac{0}{7}$ اختیار می کنند. پس داریم:

$$P(X_1 + X_r = 1) = P(X_1 = 0, X_r = 1) + P(X_1 = 1, X_r = 0) = \frac{0}{3} \times \frac{0}{7} + \frac{0}{7} \times \frac{0}{3} = \frac{0}{42}$$

۱۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} E(Y_\Delta Y_V) &= E((X_1 + X_2 + \dots + X_\Delta)(X_1 + X_2 + \dots + X_V)) \\ &= E(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_\Delta^2 + \sum_{i=1}^{\Delta} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^V X_i X_j) = 5 \times 0.1 + 30 \times 0.1 \times 0.1 = 0.8 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$\text{Cov}(X, XY) = E(X^2 Y) - E(X)E(XY) = E(X^2)E(Y) - [E(X)]^2 E(Y) = E(Y)\text{Var}(X) \Rightarrow E(Y) \quad 3$$

۱۸- گزینه «۲» صحیح است.

تعداد حشراتی که قبل از حشره نوع ۱ به دام می افتند برابر با تعداد شکست ها قبل از رسیدن به اولین پیروزی است. بنابراین متوسط تعداد حشره های قبل از رسیدن به اولین نوع ۱- $\frac{1}{P_1}$ است.

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

امید ریاضی تعداد موفقیتها در n آزمایش برابر است با مجموع احتمال موفقیت تک تک آنها. پس در این تست که امید ریاضی تعداد موفقیتها در ۳ آزمایش برابر ۱/۸ شده و احتمال موفقیت آزمایشها برابر است، احتمال موفقیت هر آزمایش برابر با ۰/۶ است.

$$X = X_1 + X_2 + X_3, \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام موفق باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^3 X_i\right) = \sum_{i=1}^3 E(X_i) = 1/8 \Rightarrow E(X_i) = P(X_i = 1) = 0.6$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) + P(X_3 = 1) - 2 \leq P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \leq \min\{P(X_1 = 1), P(X_2 = 1), P(X_3 = 1)\}$$

$$0.6 + 0.6 + 0.6 - 2 \leq P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \leq 0.6$$

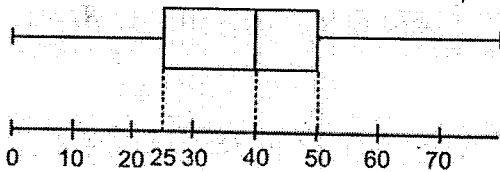
$$P(X = 3) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \Rightarrow 0 \leq P(X = 3) \leq 0.6$$

۲۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$X_i \sim U(-1, 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{48} X_i \approx N(48 \times 0, 48 \times \frac{4}{12} = 16) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i < -6\right) \approx P\left(Z < \frac{-6}{4}\right) = 0.07$$

آمار و احتمال مهندسی

۱- با توجه به نمودار جعبه ای زیر، ضریب چولگی چارکی داده ها و نوع توزیع آن ها کدام است؟



(۲) -0.2 و چوله به چپ

(۱) 0.4 و چوله به چپ

(۴) -0.4 و چوله به چپ

(۳) 0.2 و چوله به راست

۲- اگر توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، برآورد گشتاوری زوج (α, β) برابر است با:

$$\left(\frac{\overline{x^2} - 2\overline{x}^2 + 1}{2}, \overline{x^2} - 2\overline{x}^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (۲)$$

$$\left(\frac{\overline{x^2} - \overline{x} - 1}{2}, \overline{x^2} - 2\overline{x} - \frac{1}{2} \right) \quad (۱)$$

$$\left(\overline{x^2} + 2\overline{x} - 1, \overline{x^2} - \overline{x} \right) \quad (۴)$$

$$\left(\overline{x^2} - 2\overline{x} + \frac{1}{2}, \frac{\overline{x^2} - 2\overline{x}}{2} \right) \quad (۳)$$

۳- در یک مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ ، اگر e_i برآورد ε_i باشد، کدام یک از عبارات زیر درست است؟

X	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\beta - \alpha - \frac{1}{2}$	$1 - \beta$	α

$$\text{var}(e_i) = \text{var}(y_i) - \text{var}(\hat{y}_i) \quad (۲)$$

$$\text{var}(y_i) = \text{var}(\hat{y}_i) \quad (۱)$$

$$\text{var}(e_i) = \text{var}(y_i) + \text{var}(\hat{y}_i) \quad (۴)$$

$$\text{var}(y_i) = \text{var}(e_i) \quad (۳)$$

۴- می خواهیم از مجموعه n نفر، یک شورای j نفری ($j \leq n$) انتخاب و پس از این شورای j نفری یک شورای فرعی i نفری ($i \leq j$) انتخاب کنیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i} \quad (۴)$$

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} \quad (۳)$$

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i} \quad (۲)$$

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \quad (۱)$$

۵- هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $P(A_n) = 1$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0 \quad (۴)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad (۳)$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 \quad (۲)$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad (۱)$$

۶- اگر A, B پیشامدهای مستقل باشند، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A|B^c) \quad (۱) \\ P(A-B) &= P(A)P(B^c) \quad (۲) \\ P(A \cup B) &= P(A)P(B) - P(B) \quad (۳) \\ P(A \cap B|A) &= P(B) \quad (۴) \end{aligned}$$

۷- فرض کنید n توپ متمایز را به تصادف در N ظرف توزیع می‌کنیم. با فرض این که همه N^n ترتیب توزیع توپ‌ها هم شانس باشند، احتمال این که در ظرف اول m توپ باشد، کدام است؟ ($m \leq n$)

$$\begin{aligned} \frac{m! \binom{N-1}{n-m}}{N^n} \quad (۲) & \quad \binom{N}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-m} \quad (۱) \\ \frac{\binom{n}{m}}{N^n} \quad (۴) & \quad \binom{n}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-m} \quad (۳) \end{aligned}$$

۸- سکه‌ای که شانس شیر آمدن آن P است را به طور مرتب پرتاب می‌کنیم، تا هر دو روی سکه (خط و شیر) مشاهده شود. متوسط تعداد پرتاب‌ها عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(1-P)} \quad (۱) & \quad \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} \quad (۲) \\ \frac{1-P}{P} + P \quad (۳) & \quad \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} - 1 \quad (۴) \end{aligned}$$

۹- فرض کنید $P(x=1) = 1-P$ ، $P(x=-1) = P$ ، به ازاء چه مقداری از C ، $E(C^x) = 1$ است؟ ($C \neq 1$)

$$\begin{aligned} P \quad (۱) & \quad \frac{1-P}{P} \quad (۲) \\ \frac{1}{P} \quad (۳) & \quad 1-P \quad (۴) \end{aligned}$$

۱۰- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ باشد و $Y|X=x \sim N(x, x)$ آنگاه مقدار $\text{var}(Y)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} ۴ \quad (۱) & \quad ۳ \quad (۲) \\ ۲ \quad (۳) & \quad ۶ \quad (۴) \end{aligned}$$

۱۱- تابع چگالی احتمال توأم y, x به صورت $0 < x < y$ ، $f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-y}$ است. مقدار $E(X^2|Y=y)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{y^4}{4} \quad (۱) & \quad \frac{4}{y^3} \quad (۲) \\ \frac{y^2}{4} \quad (۳) & \quad \frac{y^2}{3} \quad (۴) \end{aligned}$$

۱۲- فرض کنید X از تابع چگالی احتمال زیر باشد آنگاه تابع چگالی $T = X^2$ کدام است؟

$$\begin{aligned} f_T(t) &= 15\sqrt{t(1-t)} \quad 0 < t < 1 \quad (۲) \\ f_X(x) &= 3 \cdot x^2(1-x)^2, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

$$f_T(t) = 15\sqrt{t(1-t)} \quad 0 < t < 1 \quad (۱)$$

$$f_T(t) = 15t(1-\sqrt{t})^2 \quad 0 < t < 1 \quad (4)$$

$$f_T(t) = 15\sqrt{t}(1-t)^2 \quad 0 < t < 1 \quad (3)$$

۱۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد و $Y = X_{(1)}X_{(2)} \dots X_{(n)}$ نشان دهنده i امین آماره ترتیبی است) آنگاه $E(Y)$ کدام است؟ $(q=1-p)$

$$p^n + q^n \quad (4)$$

$$p^n \quad (3)$$

$$q^n \quad (2)$$

$$p^n q^n \quad (1)$$

۱۴- فرض کنید X_1, X_2, X_3, X_4 یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد، توزیع متغیر تصادفی $Y = \frac{3X_1^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$ کدام است؟

$$F(1, 3) \quad (4)$$

$$3F(1, 3) \quad (3)$$

$$F(1, 2) \quad (2)$$

$$F(3, 1) \quad (1)$$

۱۵- اگر x_1, \dots, x_n نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \sigma^2)$ باشد آنگاه کارآئی $n(\bar{X})^2$ نسبت به $\sum_{i=1}^n X_i^2$ برابر است با:

$$\frac{1}{n} \quad (4)$$

$$n \quad (3)$$

$$\frac{n}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{n} \quad (1)$$

۱۶- فرض کنید $x \sim \text{beta}(\theta, 1)$ باشد و بخواهیم پرتوان ترین آزمون سطح α برای فرض های $\begin{cases} H_0: \theta = 1 \\ H_1: \theta = 2 \end{cases}$ را در سطح α انجام

دهیم ناحیه بحرانی برابر است با:

$$0 < X < 1 - \alpha \quad (4)$$

$$0 < X < \alpha \quad (3)$$

$$X > \alpha \quad (2)$$

$$X > 1 - \alpha \quad (1)$$

۱۷- فرض کنید x بیانگر تعداد شیرها و y بیانگر تعداد خطها در ۵ بار پرتاب یک سکه سالم باشد $\text{CoV}(Y, X+Y)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۸- برای بررسی اثر یک قرص در پایین آوردن فشار خون با استفاده از نمونه ای تصادفی اطلاعات زیر بدست آمده است، فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میزان کاهش فشار خون بر اثر استفاده از قرص کدام است؟ $(t_{0.025, 4} = 2/78)$

قبل از مصرف	۸۰	۷۵	۷۲	۷۰	۸۰
بعد از مصرف	۶۶	۶۹	۶۲	۶۸	۷۲
	(۴/۲۴ و ۹/۵۶) (۴)		(۴/۲۲ و ۱۳/۶) (۳)		(۲/۴۴ و ۱۳/۵۶) (۲)
					(۲/۴ و ۹/۶) (۱)

۱۹- در مدل رگرسیونی خطی ساده $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ بر اساس نمونه ۱۰ تایی نتایج زیر حاصل شده است، فاصله اطمینان ۹۵٪ برای a کدام است؟ $(t_{0.025, 9} = 2/3)$

$$\sum (x_i - 4)^2 = 16, \quad \sum (y_i - 11)^2 = 100, \quad r = 0/8$$

$$(1) \quad 2 \pm 2/3\sqrt{5/6} \quad (2) \quad 3 \pm 2/3\sqrt{5/6} \quad (3) \quad 3 \pm 2/3\sqrt{4/95} \quad (4) \quad 2 \pm 2/3\sqrt{4/95}$$

۲. متغیر تصادفی x ، مقادیر $1, 0, -1$ را به ترتیب با احتمال‌های $b, 1-a-b, a$ اختیار می‌کند. براساس یک نمونه تصادفی برآورد

www.nashr-estekhdam.ir

گشتاوری (a, b) کدام است؟ $\left(\bar{x}_n^y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^y \right)$

$$(1) \quad \left(\bar{x}_n, \bar{x}_n^y \right) \quad (2) \quad \left(\bar{x}_n, \bar{x}_n - \bar{x}_n^y \right) \quad (3) \quad \left(\frac{\bar{x}_n^y - \bar{x}_n}{2}, \frac{\bar{x}_n^y + \bar{x}_n}{2} \right) \quad (4) \quad \left(\bar{x}_n^y, \bar{x}_n^y \right)$$

آمار و احتمال مهندسی

۱- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به نمودار Box-plot رسم شده اطلاعات زیر قابل دسترسی است :

$$Q_1 = 25, Q_2 = Med = 40, Q_3 = 50$$

چون Q_2 به Q_3 نزدیک است بنابراین توزیع چوله به چپ است و در توزیع های چوله به چپ $\bar{X} < Med < Mode$ به طور تقریبی میانگین عبارت است از :

$$\bar{X} = \frac{V_0 - 0}{2} = 35$$

در این رابطه منظور از S پراکندگی کل داده ها (V_0) است.

$$\begin{aligned} \text{ضریب چولگی} &= \frac{3(\bar{X} - Med)}{S} \\ &= \frac{3(35 - 40)}{V_0} = -0.2 \end{aligned}$$

۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{1}{2} + 1 - \beta + 2\alpha = \bar{x} \\ E(x^2) &= \frac{1}{2} + 1 - \beta + 4\alpha = \bar{x}^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} - \beta + 2\alpha = \bar{x} \\ \frac{3}{2} - \beta + 4\alpha = \bar{x}^2 \end{cases} &\Rightarrow 1 + 2\tilde{\alpha} = \bar{x}^2 - \bar{x} \Rightarrow \tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^2 - \bar{x} - 1}{2} \\ \tilde{\beta} = \frac{1}{2} + \bar{x}^2 - \bar{x} - 1 - \bar{x} &\Rightarrow \tilde{\beta} = \bar{x}^2 - 2\bar{x} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۳- گزینه «۲» صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{var}(e_i) &= \text{var}(y_i - \hat{y}_i) = \text{var}(y_i) + \text{var}(\hat{y}_i) - 2 \underbrace{\text{cov}(y_i, \hat{y}_i)}_{\text{var}(\hat{y}_i)} \\ &= \text{var}(y_i) - \text{var}(\hat{y}_i) \end{aligned}$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

ابتدا i نفر را از n نفر انتخاب می کنیم (شورای فرعی) و سپس بقیه اعضای شورای j نفری را از $n-i$ نفر باقی مانده انتخاب می کنیم. تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i}$$

توجه کنید که ابتدا می‌توانیم شورای اصلی را انتخاب کنیم $\binom{n}{j}$ و سپس شورای فرعی را به صورت $\binom{j}{i}$ انتخاب کنیم که تعداد حالات ممکن برابر است با: $\binom{n}{j}\binom{j}{i}$ که برابر است با:

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

طبق نامساوی بول داریم:

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

۶- گزینه «۳» صحیح است.

زیرا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A)P(B^c) + P(B)$$

از طرفی گزینه ۱ صحیح است، زیرا استقلال B, A نتیجه می‌دهد که رخداد یا عدم رخداد B تاثیری در رخ دادن A ندارد. گزینه ۲ نیز صحیح است زیرا B, A نیز مستقل‌اند. گزینه ۴ نیز صحیح است.

۷- گزینه «۳» صحیح است.

تعداد کل حالات توزیع توپ‌ها برابر است با: N^n . برای به دست آوردن تعداد حالات مساعد، ابتدا m توپ از n توپ را انتخاب می‌کنیم $\binom{n}{m}$ و در ظرف اول قرار می‌دهیم. اکنون $N-1$ ظرف باقی می‌ماند و $n-m$ توپ که به $(N-1)^{n-m}$ طریق می‌توانیم آنها را توزیع کنیم. بنابراین تعداد حالات مورد نظر عبارت است از:

$$\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}, \text{ لذا احتمال مورد نظر عبارت است از:}$$

$$\frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n} = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های لازم تا مشاهده هر دو روی سکه در نظر می‌گیریم. متغیر تصادفی X ، مقداری از مجموعه $\{2, 3, \dots\}$ را اختیار می‌کند، زیرا حداقل به ۲ پرتاب برای مشاهده هر دو روی سکه نیاز داریم. پیشامد $\{X = i\}$ رخ می‌دهد اگر و فقط اگر همه $(i-1)$ پرتاب اول شیر و پرتاب i -ام خط باشد و یا همه $(i-1)$ پرتاب اول خط و پرتاب i -ام شیر باشد. پس

$$P(X = i) = P(1-P)^{i-1} + (1-P)P^{i-1} \quad i = 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X) &= \sum_{i=2}^{\infty} iP(1-P)^{i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} i(1-P)P^{i-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} iP(1-P)^{i-1} - P \right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i(1-P)P^{i-1} - (1-P) \right) \end{aligned}$$

اما $\sum_{i=1}^{\infty} iP(1-P)^{i-1}$ امید ریاضی متغیر تصادفی هندسی با پارامتر P است که برابر است با: $\frac{1}{P}$ پس

$$E(X) = \left(\frac{1}{P} - P \right) + \left(\frac{1}{1-P} - (1-P) \right) = \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} - 1$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$E(C^X) = 1 \Rightarrow C^{-1}(1-P) + CP = 1 \Rightarrow PC^2 - C + 1 - P = 0.$$

$$C = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4P(1-P)})}{2P} \Rightarrow C = \frac{1 \pm \sqrt{4P^2 - 4P + 1}}{2P} = \frac{1 \pm \sqrt{(2P-1)^2}}{2P} = \frac{1 \pm |2P-1|}{2P}$$

چون $\left(P > \frac{1}{2}\right)$ www.nashr-estekhdam.ir

$$\Rightarrow C = \frac{1 \pm (2P-1)}{2P} \Rightarrow C = 1 \text{ یا } C = \frac{1-P}{P}$$

چون $C \neq 1$ بنابراین $C = \frac{1-P}{P}$

۱۰- گزینه «۴» صحیح است.

$$\text{var}(Y) = E(\text{var}(Y|_{X=x})) + \text{var}(E(Y|_{X=x})) = E(X) + \text{var}(X) = 2 + 4 = 6$$

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$X|Y=y \sim u(\cdot, y) \Rightarrow E(X^2|Y=y) = \int_0^y x^2 \frac{1}{y} dx = \frac{y^3}{3}$$

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$T = X^r \Rightarrow X = \sqrt{T} \Rightarrow |j| = \frac{1}{r\sqrt{t}}, f_T(t) = r \times \frac{1}{r\sqrt{t}} t(1-\sqrt{t})^r \quad \circ \langle t \rangle \Rightarrow f_T(t) = 15\sqrt{t} (1-\sqrt{t})^r \quad \circ \langle t \rangle$$

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

$$Y = X_{(1)} X_{(r)} \dots X_{(n)} = \prod_{i=1}^n X_{(i)} = \prod_{i=1}^n X_i \Rightarrow E(Y) = \prod_{i=1}^n E(X_i) = \prod_{i=1}^n p = p^n$$

۱۴- گزینه «۴» صحیح است.

واضح است که X_i^r دارای توزیع کای دو با ۱ درجه آزادی است ($i=1, \dots, 4$) بنابراین $X_1^r + X_3^r + X_4^r \sim X_{(r)}^r$ از طرفی از استقلال X_i ها نتیجه می شود که X_1^r از $X_2^r + X_3^r + X_4^r$ مستقل است پس:

$$Y = \frac{X_1^r}{\frac{X_2^r + X_3^r + X_4^r}{r}} \stackrel{d}{=} \frac{\chi_{(1)}^r / 1}{\chi_{(r)}^r / r} \sim F(1, r)$$

۱۵- گزینه «۴» صحیح است.

$$T_r = n\bar{X}^r \text{ به ازای}$$

$$\text{var}(T_r) = \text{var}(n\bar{X}^r) = n^r \text{var}(\bar{X}^r)$$

برای محاسبه واریانس \bar{X}^r داریم:

$$\bar{X} \sim N\left(0, \frac{\sigma^r}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \Rightarrow \frac{n}{\sigma^r} \bar{X}^r \sim \chi_{(1)}^r$$

$$\Rightarrow \text{var}(\bar{X}^r) = \frac{\sigma^r}{n^r} \text{var}\left(\frac{n}{\sigma^r} \bar{X}^r\right) = \frac{r\sigma^r}{n^r}$$

$$\Rightarrow \text{var}T_r = r\sigma^r$$

www.nashr-estekhdam.ir

و به همین ترتیب به ازای $T_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^r$ داریم:

$$\text{var}(T_r) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^r\right) = \frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^n \text{var}(\bar{X}_i^r)$$

$$= \frac{1}{n} \text{var}(\bar{X}_1^r) = \frac{r\sigma^r}{n}$$

حال با توجه به تعریف کارائی نسبی نتیجه می شود که:

$$T_r \text{ نسبت به } T_1 \text{ کارائی } e(T_1, T_r) = \frac{\text{var}(T_r)}{\text{var}(T_1)} = \frac{1}{n}$$

۱۶- گزینه «۱» صحیح است.

بوسیله لم نیمن پیرسن داریم :

$$\frac{f_r}{f_1} = \frac{\frac{1}{\beta(r,1)} X^{r-1} (1-X)^{1-r}}{\frac{1}{\beta(1,1)} X^{1-1} (1-X)^{1-1}} = \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r)\Gamma(1)} X = rx$$

$$\Rightarrow X > \frac{k}{r}$$

$$\alpha = \int_{\frac{k}{r}}^1 \frac{1}{\beta(1,1)} X^{1-1} (1-X)^{1-1} dx = 1 - \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow X > 1 - \alpha$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۷- گزینه «۱» صحیح است.

$$\rho(x, y) = -1 \Rightarrow \text{CoV}(X, Y) = -1 \times \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} = -\frac{5}{4}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{5}{4}$$

$$\text{CoV}(Y, X+Y) = \text{CoV}(X, Y) + \text{Var}(Y) = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 0.$$

۱۸- گزینه «۲» صحیح است.

۱۹- گزینه «۳» صحیح است.

$$\hat{b} = r \sqrt{\frac{SSy}{SSx}} = 0.8 \sqrt{\frac{100}{16}} = 2 \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 11 - 8 = 3, \quad \frac{SSE}{SSy} = 1 - r^2 = 0.36 \Rightarrow SSE = 36$$

$$\hat{\sigma}^2 = \text{MSE} = \frac{36}{8} = 4.5 \quad \text{var}(\hat{a}) = \text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)$$

$$= 4.5(0.1 + 1) = 4.95 \quad \hat{a} \pm t_{n-2, 0.025} \sqrt{\text{var}(\hat{a})} = 3 \pm 2.3 \sqrt{4.95}$$

۲۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{aligned} E(x) &= b - a & b - a &= \bar{x}_n \\ E(x^2) &= a + b & b + a &= \bar{x}_n^2 \end{aligned} \Rightarrow$$

در نتیجه:

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\bar{x}_n + \overline{x_n^{\sqrt[n]{b}}}} \Rightarrow \tilde{b} = \frac{\bar{x}_n + \overline{x_n^{\sqrt[n]{b}}}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\tilde{a} = \tilde{b} - \bar{x}_n = \frac{\bar{x}_n + \overline{x_n^{\sqrt[n]{b}}}}{\sqrt[n]{b}} - \bar{x}_n = \frac{\overline{x_n^{\sqrt[n]{b}}} - \bar{x}_n}{\sqrt[n]{b}}$$

تئوری احتمال و آمار مهندسی

۱- تعداد n جعبه موجود است. در جعبه اول یک مهره سفید و $(n-1)$ مهره سیاه و در جعبه دوم دو مهره سفید و $(n-2)$ مهره سیاه و ... و در جعبه n ام، n مهره سفید وجود دارد. به تصادف از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم. انتظار می‌رود کلاً چند مهره سفید از جعبه‌ها خارج می‌شود؟

$$\frac{n}{2} \quad (1) \quad \frac{n+1}{2} \quad (2) \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad (3) \quad n \quad (4)$$

۲- در ظرفی ۳ توپ سفید و ۴ توپ سیاه وجود دارد. ۳ توپ از این ظرف یکی یکی بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، احتمال این که توپ اول و سوم هر دو سفید باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (1) \quad \frac{2}{5} \quad (2) \quad \frac{3}{5} \quad (3) \quad \frac{4}{5} \quad (4)$$

۳- فرض کنید ده توپ به شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۰ را درون ده جعبه به شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۰ توزیع کنیم چقدر احتمال دارد فقط یک جعبه خالی بماند؟

$$\frac{\sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^9} \quad (1) \quad \frac{\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^{10}} \quad (2) \quad \frac{\binom{18}{8}}{10^9} \quad (3) \quad \frac{10 \binom{9}{8}}{\binom{19}{9}} \quad (4)$$

۴- فرض کنید ۱۰ معلم را بین ۴ مدرسه می‌خواهیم توزیع کنیم چقدر احتمال دارد به هر مدرسه حداقل یک معلم برود؟

$$\frac{3^{10} - 3 \times 2^9 + 1}{4^9} \quad (1) \quad \frac{\binom{9}{3}}{\binom{13}{3}} \quad (2) \quad 1 - \frac{3^{10} - 3 \times 2^9 + 1}{4^9} \quad (3) \quad \frac{\binom{13}{3}}{10^4} \quad (4)$$

۵- فرض کنید x, y, z دارای تابع احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y+z} \quad x, y, z = 1, 2, \dots$$

مقدار $P(x=y+z)$ کدام است؟

$$\frac{1}{7} \quad (1) \quad \frac{1}{25} \quad (2) \quad \frac{1}{34} \quad (3) \quad \frac{1}{49} \quad (4)$$

۶- حاصل $\binom{7}{1}^2 + 2\binom{7}{2}^2 + 3\binom{7}{3}^2 + 4\binom{7}{4}^2 + 5\binom{7}{5}^2 + 6\binom{7}{6}^2 + 7\binom{7}{7}^2$ کدام است؟

- (۱) $7\binom{13}{6}$ (۲) $\frac{7}{2}\binom{13}{7}$ (۳) $7\binom{14}{8}$ (۴) $\frac{1}{2}\binom{8}{6}$

۷- فرض کنید در یک آزمون ۴ گزینه‌ای، دانشجویی جواب درست سؤال را با احتمال P بداند یا به تصادف یکی از ۴ گزینه را انتخاب می‌کند. احتمال این که به یک سؤال پاسخ درست دهد کدام است؟

- (۱) $\frac{1-P}{4}$ (۲) $\frac{1+P}{4}$ (۳) $\frac{3P}{4}$ (۴) $\frac{1+3P}{4}$

۸- دادگاهی ۹۵ درصد اوقات مجرمین واقعی را محکوم می‌کند و ۱ درصد اوقات بیگناهان را محکوم می‌کند، اگر ۵/۰ درصد متهمان مجرم باشند، احتمال این که یک فرد محکوم، واقعاً مجرم باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{95}{100}$ (۲) $\frac{95}{294}$ (۳) $\frac{95}{2300}$ (۴) $\frac{19}{9200}$

۹- یک تاس سالم را ۷ مرتبه پرتاب می‌کنیم، احتمال این که هر خال حداقل یک مرتبه ظاهر شود چقدر است؟ ($6^4 = 1296$)

- (۱) $\frac{5}{234}$ (۲) $\frac{35}{324}$ (۳) $\frac{35}{648}$ (۴) $\frac{35}{3888}$

۱۰- علی و حسین همراه با ۸ نفر دیگر تشکیل یک صف می‌دهند. احتمال این که دقیقاً ۵ نفر بین این دو نفر ایستاده باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{45}$ (۲) $\frac{2}{45}$ (۳) $\frac{4}{45}$ (۴) $\frac{6}{45}$

۱۱- در پرتاب ده بار یک تاس چقدر احتمال دارد ۵ بار اول ۲ و ۴ بار ۶ ظاهر گردد؟

- (۱) $\frac{25}{\binom{10}{6}}$ (۲) $\frac{23}{60}$ (۳) $\frac{25}{6^{10}}$ (۴) $\frac{23}{6^{10}}$

۱۲- از میان ۱۲ جفت کفش ۹ لنگه بر می‌داریم. احتمال آن که فقط ۲ جفت انتخاب شود کدام است؟

- (۱) $\frac{2^4 \binom{10}{5}}{\binom{24}{9}}$ (۲) $\frac{66 \binom{10}{5}}{24^9}$ (۳) $\frac{66 \binom{10}{5} \times 32}{\binom{24}{9}}$ (۴) $\frac{66 \times 32 \times 10^5}{P_{24}^9}$

۱۳- حاصل $\binom{15}{2} + \binom{15}{4} + \dots + \binom{15}{12}$ کدام است؟

- (۱) 2^{14} (۲) $2^{14} - 1$ (۳) $2^{10} (2^4 - 1)$ (۴) $2^4 (2^{10} - 1)$

۱۴- حاصل $\sum_{x=0}^{15} \frac{1}{x!(15-x)!}$ کدام است؟

- (۱) $\binom{15}{2}$ (۲) $\frac{2^{15}}{15!}$ (۳) $\frac{2}{15!}$ (۴) $15!(2)^{15}$

۱۵- اگر $P(A) = 0/2$ و $P(B') = 0/8$ و $P(C) = 0/6$ و A و B و C مستقل باشند $P(A - (B \Delta C'))$ کدام است؟

- (۱) $0/15$ (۲) $0/11$ (۳) $0/22$ (۴) $0/41$

۱۶- به چند طریق می‌توان ۱۴ اتومبیل نامتمايز را بین ۴ اداره تقسیم کرد طوری که به اداره اول حداقل ۳ و حداکثر ۸ اتومبیل برسد؟

- (۱) $\binom{14}{3} - \binom{8}{3}$ (۲) $\binom{13}{3} - \binom{7}{3}$ (۳) $\binom{17}{3} - \binom{11}{3}$ (۴) $\binom{15}{3} - \binom{12}{3}$

۱۷- اگر A_i ها پیشامدهای مستقل با $i = 1, 2, \dots, 10$ و $P(A_i) = \frac{3^{i+1} - 3}{4^{i+1}}$ باشند، احتمال آن که حداقل یکی از A_i ها رخ دهد کدام

ست؟

$$\begin{array}{llll} \frac{3^{10}}{4^{55}} & (1) & \frac{3}{4^{65}} & (2) \\ 1 - \frac{3}{4^{55}} & (3) & 1 - \frac{3^{10}}{4^{65}} & (4) \end{array}$$

۱۸- به چند طریق می توان $(n-1)$ توپ نامتمایز را درون ۱۵ جعبه توزیع کرد، به طوری که فقط ۳ جعبه خالی می باشد.

$$\begin{array}{llll} 35 \times 13 \binom{n-2}{11} & (1) & \binom{15}{3} \binom{n-1}{11} & (2) \\ 35 \binom{n-1}{12} & (3) & 40 \binom{n-1}{12} & (4) \end{array}$$

۱۹- احتمال شیر آمدن سکه ای P است. k نفر در یک بازی شرکت می کنند. هر کس شیر بیاورد برنده است. اگر خط بیاید به نفر بعدی

می دهند و به همین ترتیب ادامه دارد. احتمال برنده شدن اولی کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{P}{1-P^k} & (1) & \frac{P}{1-(1-P)^k} & (2) \\ \frac{1}{1-(1-P)^k} & (3) & \frac{1}{1-P^k} & (4) \end{array}$$

۲۰- از ظرفی شامل ۲۰ توپ سفید و ۱۲ توپ سیاه، ۷ توپ به طور تصادفی و بدون جایگذاری خارج می شوند و بدون دیدن رنگ شان

دور ریخته می شوند. احتمال آن که سومین توپ که به صورت تصادفی خارج می شود سیاه و ششمین توپ سفید باشد، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{12}{33} & (1) & \frac{7}{12} & (2) \\ \frac{15}{62} & (3) & \frac{10}{31} & (4) \end{array}$$

تئوری احتمال و آمار مهندسی

۱ - گزینه ۲ درست است.

اگر متغیر X_i مقدار ۱ را وقتی که مهره خارج شده از ج به نام سفید است بگیرد و در غیر این صورت صفر باشد پس تعداد مهره سفید خارج شده عبارت است از: $X = \sum_{i=1}^n X_i$ و لذا:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{i}{n}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۲ - گزینه ۱ درست است.

سفید سفید

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7}$$

با توجه به قاعده پواسون کافی است سفید بودن اول و دوم را حساب کنیم.

۳ - گزینه ۲ درست است.

محاسبه تعداد حالات توزیع ۱۰ توپ متمایز در ۱۰ ج به متمایز این گونه محاسبه می شود:

۱۰!۰
حالات خالی ماندن فقط یک ج به، ابتدا یک ج به از ۱۰ تا انتخاب می شود و باید توجه شود که در ۹ ج به باقی مانده حداقل یک توپ باید باشد، پس:

$$\binom{10}{1} \sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{10}{1} \sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^{10}} = \frac{\sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{10}}{10^9}$$

۴ - گزینه ۳ درست است.

حالاتی که حداقل یک م لم به هر مدرسه برود:

$$\sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{k} (4-k)^{10} =$$

حالات بدون محدودیت:

$$4^{10} - 4 \times 3^{10} + 6 \times 2^{10} - 4 \times 1^{10}$$

$$4^{10}$$

احتمال مورد نظر:

$$\frac{4^{10} - 4 \times 3^{10} + 6 \times 2^{10} - 4}{4^{10}} = 1 - \frac{3^{10} - 3 \times 2^9 + 1}{4^9}$$

۵- گزینه ۴ درست است.

$$\begin{aligned} P(x=y+z) &= \sum_y \sum_z P(x=y+z, y=y, z=z) \\ &= \sum_y \sum_z \binom{1}{2}^{y+z+2y+2z} = \sum_y \binom{1}{2}^{2y} \sum_z \binom{1}{2}^{2z} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۶- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} \binom{n}{0}^r + \binom{n}{1}^r + \binom{n}{2}^r + \dots + \binom{n}{n}^r = \binom{2n}{n}^r \\ \binom{n}{1}^r + \binom{n}{2}^r + \dots + \binom{n}{n}^r = \binom{2n}{n}^r - \binom{n}{0}^r \\ \binom{n}{2}^r + \binom{n}{3}^r + \dots + \binom{n}{n}^r = \binom{2n}{n}^r - \binom{n}{0}^r - \binom{n}{1}^r \\ \vdots \\ \binom{n}{n}^r = \binom{2n}{n}^r - \binom{n}{0}^r - \dots - \binom{n}{n-1}^r \end{cases}$$

www.nashr-estekhdam.ir

دو طرف تساوی‌ها را جمع می‌کنیم:

$$\binom{n}{1}^r + 2\binom{n}{2}^r + \dots + n\binom{n}{n}^r = 2\binom{2n}{n}^r - n\binom{n}{0}^r - (n-1)\binom{n}{1}^r - \dots - 2\binom{n}{n-2}^r - \binom{n}{n-1}^r$$

داریم $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ ، پس:

$$\begin{aligned} S &= \binom{n}{1}^r + \binom{n}{2}^r + \dots + n\binom{n}{n}^r = n\binom{2n}{n}^r - \left(\binom{n}{1}^r + 2\binom{n}{2}^r + \dots + n\binom{n}{n}^r \right) \\ 2S &= n\binom{2n}{n}^r \rightarrow S = \frac{n}{2}\binom{2n}{2}^r = n\binom{2n-1}{n-1}^r \\ &\rightarrow \frac{2}{2}\binom{14}{7} = 2\binom{13}{6} \end{aligned}$$

۷- گزینه ۴ درست است.

اگر A دانستن و A' ندانستن جواب باشد و E جواب درست دادن باشد، بنا به قانون احتمال کل داریم:

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(A')P(E|A') = P(1) + (1-P)\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}P$$

۸- گزینه ۲ درست است.

قرار دهید

A : محکوم شدن

B : مجرم واقعی بودن

بنا بر فرض

$$P(A|B) = 0.95$$

$$P(A|B') = 0.01$$

$$P(B) = 0.005$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 0.995$$

بنا به قاعده بیز

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} \\ = \frac{(0.005)(0.95)}{(0.005)(0.95) + (0.995)(0.01)} = \frac{95}{294}$$

۹- گزینه ۳ درست است.

انتخاب ۲ تاس برای عدد یکسان

$$\frac{\binom{7}{2} 6!}{6^7} = \frac{648}{6^7}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۰- گزینه ۳ درست است.

کل حالات انتخاب ۲ محل برای این دو نفر با رعایت ترتیب است دو حالت برای جابه‌جایی علی و حسین و چهار حالت برای انتقال دسته هفت نفری وجود دارد.

$$\frac{2 \times 4}{P}$$

۱۱- گزینه ۳ درست است.

۵ بار اول که یک حالت دارد همان 1^4 است. از بین ۵ بار دوم ۴ بار آن باید ۶ بیاید و نه ۵ بار آن. پس با $\binom{4}{4}$ مکان ۶ ها انتخاب و برای مکان باقی مانده ۵ حالت (به جز ۶) ممکن است.

$$\frac{\binom{5}{4} 1^4 \times 5}{6^{10}} = \frac{25}{6^{10}}$$

۱۲- گزینه ۳ درست است.

مخرج همه حالات انتخاب ۵ لنگه از میان ۲۴ لنگه کفش است.

$$\frac{\binom{12}{2} \binom{10}{5} 2^5}{\binom{24}{9}}$$

$\binom{2}{2}$ انتخاب ۲ جفت است پس باید ۵ لنگه دیگر جفت نباشد.

$\binom{5}{5}$ تبیین ۵ جفتی است که قرار است از هر کدام یک لنگه برداریم.

و $\binom{2}{2}$ انتخاب یک لنگه از هر کدام از آن جفت‌ها را حساب می‌کند.

۱۳- گزینه ۴ درست است.

$$\sum_r \binom{n}{r} = 2^{n-1}$$

اما

$$\binom{15}{0} + \binom{15}{14} = 1 + 15 = 16$$

پس:

$$\begin{aligned} \binom{15}{2} + \dots + \binom{15}{12} &= 2^{14} - 16 \\ &= 2^{14} - 2^4 = 2^4 (2^{10} - 1) \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۲ درست است.

$$\binom{15}{x} = \frac{15!}{x!(15-x)!} \rightarrow \sum_{x=0}^{15} \frac{1}{x!(15-x)!} = \frac{1}{15!} \sum_{x=0}^{15} \binom{15}{x} = \frac{1}{15!} 2^{15}$$

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} = 2^n \quad \text{نکته:}$$

۱۵- گزینه ۲ درست است.

نکته: اگر A و B و C مستقل باشند، A و (BΔC)' مستقلند.

$$\begin{aligned} P(A - (B\Delta C')) &= P(A \cap (B\Delta C')') = P(A)P(B\Delta C')' \\ &= (0/2)(1 - P(B\Delta C')) = (0/2)(0/56) = 0/112 \\ P(B\Delta C') &= P(B \cup C') - P(B \cap C') = P(B) + P(C') - 2P(B \cap C') \\ &= 0/2 + 0/4 - 2(0/2)(0/4) = 0/44 \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۶- گزینه ۱ درست است.

باید مادلله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ را با شرط $3 \leq x_1 \leq 8$ حل کنیم.

کافی است با توجه به:

$$\{3 \leq x_1 \leq 8\} = \{x_1 \geq 3\} - \{x_1 \geq 9\}$$

تداد حالتی را که x_1 حداقل ۳ است منهای وقتی x_1 حداقل ۹ است حساب کنیم که جواب می شود.

$$\binom{11+4-1}{4-1} - \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{14}{3} - \binom{8}{3}$$

۱۷- گزینه ۴ درست است.

$$P(A_i) = 1 - \frac{3}{4^{i+1}}$$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{3}{4^{i+1}} = 1 - \frac{3^n}{4^{\frac{n(n+1)}{2} + n}} \\ &= 1 - \frac{3^n}{4^{\frac{n^2}{2} + 2n}} \\ &= 1 - \frac{3^{10}}{4^{65}} = \frac{4^{65} - 3^{10}}{4^{65}} \end{aligned}$$

۱۸- گزینه ۱ درست است.

$\binom{n-1}{3}$ تعداد طرقی که می‌توانیم جبهه خالی را انتخاب کنیم و $\binom{n-1}{12-1}$ تعداد جواب (طبیعی) برای $x_1 + \dots + x_{12} = n-1$ می‌باشد.

$$\binom{15}{3} \binom{n-2}{11} = \frac{15!}{3!12!} \binom{n-2}{11} = 35 \times 13 \binom{n-2}{11}$$

۱۹- گزینه ۲ درست است.

احتمال برنده شدن اولی از جمع این عبارات حاصل می‌شود.

P : احتمال برنده شدن

$1-P$: احتمال باختن

نفر اول در همان دفعه اول برنده شود یا در دور اول کسی برنده نشود و در ابتدای دور به نفر اول برنده شود و یا دو دور کسی برنده نشود و در ابتدای دور سوم نفر اول برنده شود و به همین ترتیب ادامه دارد.

$$P + (1-P)^k P + (1-P)^{2k} P + \dots = P \frac{1}{1-(1-P)^k}$$

www.nashr-estekhdam.ir

این جمع یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $(1-P)^k$ است.

۲۰- گزینه ۳ درست است.

طبق قاعده پواسون، احتمال سیاه بودن سومی همان احتمال سیاه بودن اولی و احتمال سفید بودن ششمی همان احتمال سفید بودن دومی است.

$$\frac{22}{31} \times \frac{31}{62} = \frac{22}{62}$$

۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر است. برای آزمون $H_0: X \sim f_0$ در مقابل $H_1: X \sim f_1$ ، اگر ناحیه رد به صورت $x > 1$ تعریف شود، توان آزمون کدام است؟ ($0 < \theta < 1$)

x	۱	۲	۳
f_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
f_1	$\frac{2-\theta}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\theta}{3}$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3} & (۲) \\ \frac{1+\theta}{3} & (۴) \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{3} & (۱) \\ \frac{\theta}{3} & (۳) \end{array}$$

۲- اگر در یک جدول توافقی تعداد سطرها از ۴ به ۳ و تعداد ستون‌ها از ۳ به ۲ کاهش یابد، درجه آزادی آزمون استقلال چقدر کاهش می‌یابد؟

$$۴ \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۱۲ \quad (۲) \quad ۶ \quad (۱)$$

۳- فرض کنید $X \sim N(\mu, 1)$ باشد. برای آزمون فرض $H_0: \mu = 10$ در مقابل $H_1: \mu = 11$ ، اگر خطای نوع I (اندازه آزمون) از 0.25 به 0.05 تغییر کند، توان آزمون چه تغییری می‌کند؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \text{ به میزان } 0.91 \text{ کاهش می‌یابد.} & (۲) \text{ به میزان } 0.91 \text{ افزایش می‌یابد.} \\ (۳) \text{ به میزان } 0.315 \text{ کاهش می‌یابد.} & (۴) \text{ به میزان } 0.315 \text{ افزایش می‌یابد.} \end{array}$$

۴- میانگین خط ترمز لنت نوع A، زمانی که سرعت اتومبیل ۶۰ کیلومتر باشد، $6/5$ متر است. واحد مهندسی لنت جدیدی طراحی کرده است. این نوع لنت در ۶۴ خودرو سواری مورد آزمایش قرار می‌گیرد و نشان می‌دهد متوسط خط ترمز در سرعت ۶۰ کیلومتر $6/25$ متر و انحراف معیار نمونه ۶۴ تایی برابر $0/4$ است. آیا این اختلاف $0/15$ متر ثابت می‌کند که لنت جدید مؤثرتر است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \text{ بله، چون } Z = -3 < -1/65 & (۲) \text{ خیر، چون } Z = -1/5 > -1/65 \\ (۳) \text{ بله، چون } Z = -1/5 > -1/65 & (۴) \text{ خیر، تست معنی دار نیست.} \end{array}$$

۵- اگر یک جعبه محتوی ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه باشد و از این جعبه ۳ مهره تصادفی انتخاب و X تعداد مهره‌های سیاه فرض شود، پس از ۷۰ مرتبه تکرار تجربه، نتایج زیر به دست آید، برای آزمون فوق هندسی بودن این توزیع، p -value برای آزمون نیکویی برازش چقدر است؟

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
O_i	۱۶	۴۰	۱۴
	$1 - e^{-1/2}$ (۲)		
		$1 - e^{-2/4}$ (۴)	

www.nashr-estekhdam.ir

$$e^{-2/4} \quad (۱)$$

$$e^{-1/2} \quad (۳)$$

۶- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین θ است. برای آزمون فرض $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta \neq 1$ اگر مقدار $x = 2$ حاصل شده باشد، p -value کدام است؟

$$1 - e^{-2} \quad (۴) \quad e^{-2} \quad (۳) \quad 2e^{-2} \quad (۲) \quad 2(1 - e^{-2}) \quad (۱)$$

۷- مهندس کیفیت در یک خط تولید مدعی است که نسبت اقلام معیوب خط تولید او ۲۰ درصد است. اگر بخواهیم بر اساس

یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی ادعای او را آزمون کنیم، ناحیه بحرانی بر اساس نسبت موفقیت‌های نمونه کدام است؟

(۱) $\hat{p} > 0.2784$ (۲) $\hat{p} > 0.126$ (۳) $\hat{p} > 0.268$ (۴) $\hat{p} > 0.3284$

۸- برای آزمون فرض $H_0: \mu = 100$ در مقابل $H_1: \mu = 120$ با سطح معنی داری ۰/۰۲۵ و توان ۰/۹۷۵، وقتی که صفت مورد

مطالعه دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^2 = 1000$ می‌باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۱۰

۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x, \theta) = \lambda e^{-\lambda(x-1)} ; x \geq 1$$

ناحیه بحرانی به روش نیمین-پیرسن برای آزمون $H_0: \lambda = 1$ در مقابل $H_1: \lambda = 2$ کدام است؟

(۱) $X_{(n)} \leq k$ (۲) $\bar{X} \geq k$ (۳) $\bar{X} \leq k$ (۴) $X_{(1)} \geq k$

۱۰- مایلیم در مورد ۳ توزیع نرمال مستقل، فرض

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

را در برابر این فرض که دست کم دو میانگین نامساوی‌اند، آزمایش کنیم. با داشتن اطلاعات زیر،

تیمار	۱	۲	۳
اندازه نمونه	۶	۴	۴
میانگین نمونه	۸	۱۰	۲۰
واریانس نمونه	۸	۱۰	۱۰

www.nashr-estekhdam.

SSE (مجموع مربعات خطا) برابر است با:

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۳۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۱۲۸

۱۱- در تست قبل مقدار واریانس نمونه‌ای ادغامی کدام است؟

(۱) $\frac{130}{11}$ (۲) $\frac{100}{11}$ (۳) $\frac{130}{14}$ (۴) $\frac{50}{7}$

۱۲- در تست قبل، مقدار آماره آزمون مقایسه میانگین ۳ جامعه کدام است؟

(۱) ۴/۲۹ (۲) ۲۰/۲۴ (۳) ۹/۲۶ (۴) ۸/۵۸

۱۳- بین متغیرهای X و Y رابطه خطی $\hat{Y} = 15 - 1/2X$ بر اساس یک نمونه تصادفی بدست آمده است. اگر برای $x = 3$

مقدار واقعی Y برابر با ۱۱/۴ باشد، گزینه صحیح‌تر برای ضریب همبستگی نمونه‌ای چند است؟

(۱) $-1 \leq r_{xy} \leq 0$ (۲) $-1 < r_{xy} < 0$ (۳) $-1 \leq r_{xy} < 0$ (۴) $r_{xy} = -1$

۱۴- مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ را با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید a و b برآورد کننده‌های

کم‌ترین مربعات بر اساس یک نمونه مستقل از (x_i, y_i) بوده و $\hat{Y}_i = a + bx_i$ و $\hat{Y}_i = Y_i - e_i$ باشند، $\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i)$

با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

(۱) $\text{Var}(Y_i)$ (۲) $\text{Var}(\hat{Y}_i)$ (۳) $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ (۴) $\frac{\sigma^2}{n}$

۱۵- اگر یک نمونه از مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ داشته باشیم. فرض کنید a و b برآورد کننده‌های کم‌ترین مربعات بر اساس یک نمونه مستقل از (x_i, y_i) بوده و $\hat{y}_i = a + bx_i$ و $e_i = y_i - \hat{y}_i$ باشند، مقدار

www.nashr-estekhdam.ir

$\sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i$ کدام است؟

(۱) صفر $\sum_{i=1}^n e_i^2$ (۲) $\sum_{i=1}^n e_i y_i$ (۳) $\sum_{i=1}^n y_i \hat{y}_i$ (۴)

۱۶- در نمونه‌ای به حجم ۱۸ از مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ، با فرض $r(X, Y) = -0.9$ ، مقدار $r(Y, \hat{Y})$ کدام است؟

(۱) -0.3 (۲) -0.81 (۳) -0.9 (۴) -0.9

۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده، تغییر واحد متغیر مستقل از متر به سانتیمتر، در کدامیک از موارد زیر منتج به تغییر نمی‌شود؟

(۱) برآورد عرض از مبدأ (۲) ضریب تعیین (۳) برآورد ضریب زاویه (۴) معادله خط رگرسیون

۱۸- اگر داده‌های زیر یک نمونه از مدل رگرسیون خطی ساده باشند، با توجه جدول زیر ضریب همبستگی نمونه X و Y برابر است با:

X	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1
Y	5	4	3	-3	-1	1	3	3	4	5

(۱) منهای یک (۲) کوچک‌تر از صفر (۳) صفر (۴) در فاصله صفر تا یک

۱۹- در یک مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۶ تایی اطلاعات زیر حاصل شده است. برآورد واریانس \hat{B} کدام است؟

$\bar{x} = 2$ و $\bar{y} = 3$ و $\sum Y_i^2 = 160$ و $\sum X_i^2 = 73$ و $r = \frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{14}$ (۲) $\frac{Y}{6}$ (۳) $\frac{6}{Y}$ (۴) $\frac{2}{21}$

۲۰- اگر یک نمونه از مدل $Y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$ با خطای تصادفی $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ داشته باشیم و \hat{A} و \hat{B} برآورد کننده‌های کم‌ترین مربعات بر اساس یک نمونه مستقل از (x_i, y_i) باشند. $\text{Var}(\hat{A} + \hat{B})$ کدام است؟

(۱) $\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 + 1}{S_{xx}} \right)$ (۲) $\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - 1)^2}{S_{xx}} \right)$ (۳) $\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 - 1}{S_{xx}} \right)$ (۴) $\sigma^2 \frac{(\bar{x} - 1)^2}{S_{xx}}$

۱- گزینه «۴» صحیح است.

$$1 - \beta = P(X > 1 | H_1) = P(X > 1 | f_1) = \frac{1}{3} + \frac{\theta}{3}$$

۲ - گزینه «۴» صحیح است.
تغییر درجه آزادی برابر است با:

$$(4-1)(3-1) - (3-1)(2-1) = 6 - 2 = 4$$

۳ - گزینه «۲» صحیح است.

$$n = \frac{\sigma^2 \times (Z_{\alpha} + Z_{\beta})^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$$\alpha = 0.025 \Rightarrow 1 = \frac{1 \times (Z_{0.025} + Z_{\beta})^2}{(11 - 10)^2} \Rightarrow 1 = 1/96 + Z_{\beta} \Rightarrow Z_{\beta} = -0.96 \Rightarrow \beta = P(Z > Z_{\beta}) = 0.831$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 = \frac{1 \times (Z_{0.05} + Z_{\beta})^2}{(11 - 10)^2} \Rightarrow 1 = 1/65 + Z_{\beta} \Rightarrow Z_{\beta} = -0.65 \Rightarrow \beta = P(Z > Z_{\beta}) = 0.74$$

راه دوم:

$$\alpha = 0.025 \Rightarrow \beta = P(X < \mu_0 + Z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | H_1) = P(X < 10 + 1/96 \frac{1}{1} | \mu = 11)$$

$$= P(Z < \frac{10 + 1/96 - 11}{1}) = P(Z < -0.96) = 0.831$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \beta = P(X < \mu_0 + Z_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | H_1) = P(X < 10 + 1/65 \frac{1}{1} | \mu = 11)$$

$$= P(Z < \frac{10 + 1/65 - 11}{1}) = P(Z < -0.65) = 0.74$$

www.nashr-estekhdam.ir

پس β به اندازه ۰/۰۹۱ کاهش و $1 - \beta$ با اندازه ۰/۰۹۱ افزایش می‌یابد.

۴ - گزینه «۱» صحیح است.

$$t_0 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} = \frac{\sqrt{64}(63/5 - 65)}{0.4} = -3$$

سطح معنادار بودن داده نشده است ولی منظور طراح این بوده که چون مقدار آماره خیلی کم شده است، فرض بی اثر بودن لنت جدید رد می‌شود.

۵ - گزینه «۳» صحیح است.

$$E_i = 70 \times P(X=i) = 70 \times \frac{\binom{2}{i} \binom{5}{3-i}}{\binom{7}{3}} = 2 \times \binom{2}{i} \binom{5}{3-i}$$

$$\Rightarrow E_0 = 20, E_1 = 40, E_2 = 10$$

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
O_i	۱۶	۴۰	۱۴
E_i	۲۰	۴۰	۱۰

$$\chi_0^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = \frac{(20-16)^2}{20} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(10-14)^2}{10} = 2/4$$

از آنجایی که تعداد مهره‌های قرمز و سیاه مشخص است، پارامتری برآورد نمی‌شود و بنابراین درجه آزادی آزمون برابر با $3 - 0 - 1 = 2$ است. از طرفی چون ناحیه بحرانی سمت راست است، داریم:

$$p\text{-value} = P(\chi_2^2 \geq \chi_0^2) = P(\chi_2^2 \geq 2/4) = e^{-1/2}$$

۶ - گزینه «۲» صحیح است.

$$P\text{-Value} = 2 \min\{P(X \leq x), P(X \geq x) | H_0\} = 2 \min\{P(X \leq 2), P(X \geq 2) | \theta = 1\}$$

$$= 2 \min\{1 - e^{-2}, e^{-2}\} = 2e^{-2}$$

۷ - گزینه «۱» صحیح است.

ناحیه رد به صورت زیر است:

$$\hat{p} > p_0 + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.20 + 1/96 \sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{100}} = 0.20 + 1/96 \times 0.04 = 0.204$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$n \approx \frac{(Z_{\alpha} + Z_{\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} = \frac{(2 + 2)^2 \times 1000}{400} = 40.$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

$$\frac{L(H_0)}{L(H_1)} < c_1 \Rightarrow \frac{\prod e^{-(x_i - 1)}}{\prod e^{-2(x_i - 1)}} < c_1 \Rightarrow e^{-\sum x_i + 2\sum x_i} < c_1 \Rightarrow \sum x_i < c_1 \Rightarrow \bar{X} < c_1$$

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

$$SSE = (n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2 = 5 \times 8 + 3 \times 10 + 3 \times 10 = 100.$$

۱۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)} = \frac{SSE}{N - k} = \frac{100}{11}$$

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$\begin{aligned} \bar{X}_{..} &= \frac{6 \times 8 + 4 \times 10 + 4 \times 20}{14} = 12 \Rightarrow SST_r = n_1(\bar{X}_{.1} - \bar{X}_{..})^2 + n_2(\bar{X}_{.2} - \bar{X}_{..})^2 + n_3(\bar{X}_{.3} - \bar{X}_{..})^2 \\ &= 6(12 - 8)^2 + 4(12 - 10)^2 + 4(12 - 20)^2 = 368 \\ MST_r &= \frac{SST_r}{k - 1} = \frac{368}{2} = 184, \quad MSE = \frac{SSE}{N - k} = \frac{100}{11}, \quad F_0 = \frac{MST_r}{MSE} = \frac{184}{10} = 18.4 \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

از آنجایی که $b = -1/2$ منفی شده است، r نیز منفی است ($r < 0$). همچنین به ازای $x = 3$ مقدار واقعی Y برابر با $11/4$ شده که بدین معنی است که نقطه مورد نظر روی خط است. ولی چون معلوم نیست سایر نقاط روی خط هستند یا خیر، معلوم نیست که r برابر -1 می‌شود یا خیر (در این تست اگر همه نقاط روی خط بودند، $r = -1$ می‌شود که در این مسأله لزوماً چنین نیست). بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

$$\text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i)$$

در ضمن داریم:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e_i, \hat{Y}_i) &= \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, \hat{Y}_i) = \text{Cov}(Y_i, \hat{Y}_i) - \text{Cov}(\hat{Y}_i, \hat{Y}_i) = \text{Var}(\hat{Y}_i) - \text{Var}(\hat{Y}_i) = 0 \\ \text{Cov}(e_i, Y_i) &= \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, Y_i) = \text{Cov}(Y_i, Y_i) - \text{Cov}(\hat{Y}_i, Y_i) = \sigma^2 - \text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \\ \text{Var}(e_i) &= \text{Cov}(e_i, e_i) = \text{Cov}(Y_i - \hat{Y}_i, e_i) = \text{Cov}(Y_i, e_i) - \text{Cov}(\hat{Y}_i, e_i) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \end{aligned}$$

۱۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n e_i \hat{Y}_i &= \sum_{i=1}^n e_i (a + bx_i) = a \sum_{i=1}^n e_i + b \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \end{aligned}$$

در ضمن داریم:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n e_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n e_i y_i - \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n e_i y_i$$

۱۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$r(Y, \hat{Y}) = |r(X, Y)|$$

۱۷- گزینه «۲» صحیح است.

تغییر واحد متغیر مستقل از متر به سانتیمتر، باعث می‌شود، \bar{X} و S_{xy} صد برابر و S_{xx} ده هزار برابر می‌شود. همچنین $\hat{B} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ نیز یکصدم برابر می‌شود. ولی S_{yy} .

ضریب تعیین $r^2 = \frac{(S_{xy})^2}{S_{yy}S_{xx}}$ و مجموع مربعات خطا $SSE = (1-r^2)S_{yy}$ تغییر نمی‌کند.

۱۸- گزینه «۳» صحیح است.

$$\bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = 0 \quad \sum x_i y_i = -5 - 4 - 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 + 4 + 5 = 0$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 0 \Rightarrow r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = 0$$

۱۹- گزینه «۴» صحیح است.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{16} x_i^2 - n \bar{x}^2 = 73 - 16 \times 2^2 = 9$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{16} y_i^2 - n \bar{y}^2 = 160 - 16 \times 3^2 = 16$$

$$\frac{SSE}{S_{YY}} = 1 - r^2 \Rightarrow SSE = (1 - r^2) S_{YY} = \frac{2}{4} \times 16 = 8$$

واریانس \hat{B} برابر با $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ است و بنابراین برآورد واریانس \hat{B} برابر است با:

$$\frac{S_{Y|x}^2}{S_{xx}} = \frac{SSE / (n-2)}{S_{xx}} = \frac{8}{14 \times 9} = \frac{2}{21}$$

۲۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$\text{Var}(\hat{A} + \hat{B}) = \text{Var}(\hat{A}) + \text{Var}(\hat{B}) + 2\text{Cov}(\hat{A}, \hat{B})$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right) + \frac{\sigma^2}{S_{xx}} - 2\sigma^2 \frac{\bar{x}}{S_{xx}} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} + \frac{1}{S_{xx}} - \frac{2\bar{x}}{S_{xx}} \right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - 1)^2}{S_{xx}} \right)$$