بنام خدا

جزوه مکانیک سیالات II

نگارنده:

علیرضا باهری

در این جزوه مباحث زیر را می خوانید:

جریان داخلی(جلسات اول تا پنجم)

جریان خارجی(جلسات ششم تا هشتم)

جریانهای تراکم ناپذیر غیرلزج(جلسات نهم تا یازدهم)

فهرست

شماره جلسه	صفحه
۱	۳
۲	۸
۳	۱۳
۴	۱۸
۵	۲۴
۶	۲۸
۷	۳۴
۸	۴۱
۹	۴۸
۱۰	۵۳
۱۱	۶۰

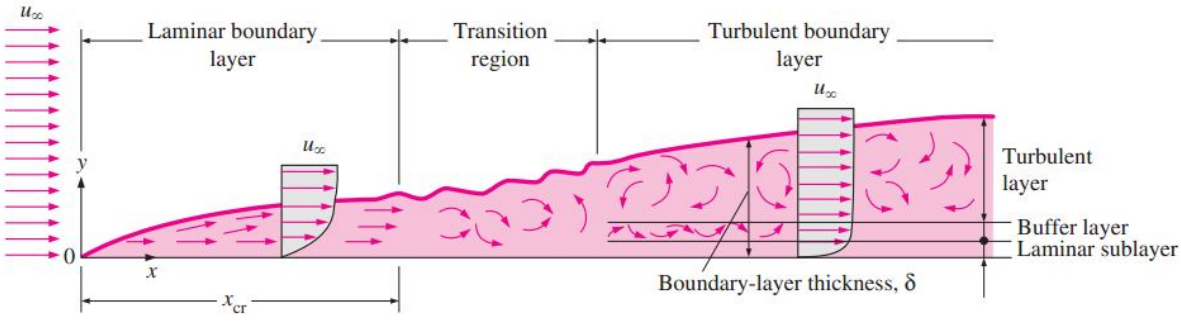
جلسه اول

فصل اول: جریان داخلی

جریان سیالها به دو نوع تقسیم می شود: ۱- جریان خارجی (External Flow) ۲- جریان داخلی (Internal Flow)

جریان خارجی

جریان خارجی جریانی است که سیال، جسم جامد را احاطه می کند بطوریکه لایه های مرزی می توانند آزادانه رشد کنند مانند جریان روی یک صفحه(شکل زیر) و جریان حول یک کره.



جریان داخلی

جریانی است که سیال توسط جسم جامد محصور شده باشد و لایه های مرزی تا مقدار معینی رشد می کنند مانند جریان در لوله (Pipe)یا جریان در یک مجرا(Duct).

در این فصل در مورد جریانهای داخلی و در فصل بعد در مورد جریانهای خارجی بحث می شود.

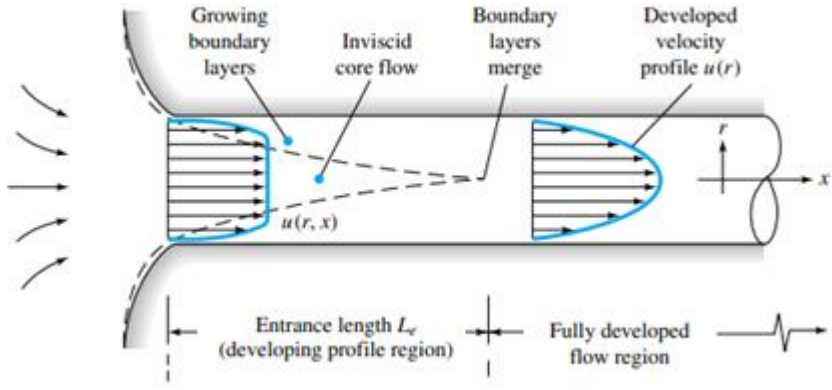
ناحیه ورودی و ناحیه کاملاً توسعه یافته(Entrance Region & Fully Developed Region)

مطابق شکل زیر جریانی را در یک لوله به شعاع r_0 یا R که سیال با سرعت یکنواخت وارد آن می شود در نظر بگیرید. هنگامی که سیال با سطح در تماس قرار می گیرد، اثرات لزجت ظاهر شده و لایه مرزی با افزایش x رشد می کند. این گسترش منجر به باریک شدن ناحیه جریان غیرلزج شده و در نهایت لایه های مرزی در محور لوله به هم می رسند بدنبال این پیوستگی اثرات لزجت در سرتاسر مقطع گسترش یافته و پروفیل سرعت با افزایش x تغییر نمی کند. به این جریان، جریان کاملاً توسعه یافته گفته می شود و فاصله ورودی تا محلی که این جریان حاصل می شود طول ورودی هیدرودینامیکی(Hydrodynamic entrance region) نام دارد که آن را با $X_{fd,h}$ یا L_e نشان می دهند. پروفیل سرعت کاملاً توسعه یافته برای جریان آرام در یک لوله سهمی شکل است. در جریان مغشوش بواسطه اختلاط مغشوش در جهت شعاع این پروفیل پهنتر است.معیار تعیین رژیم جریان عدد رینولدز است که در یک لوله بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{4Q}{\pi D v}$$

ρ چگالی، V سرعت ورودی سیال، D قطر لوله، μ لزجت دینامیکی، Q دبی حجمی و v ویسکوزیته (لزجت) سینماتیکی سیال است که خواص سیال مانند چگالی، لزجت دینامیکی و لزجت سینماتیکی را می توان از جدول خواص سیالات بدست آورد که این جدول در مجموعه جداول مهم مکانیک سیالات موجود در وبلاگ قرار دارد.

تبدیل جریان آرام به آشفته در رینولدز 2300 صورت می گیرد.



طول ناحیه ورودی برای جریانهای آرام و آشفته بترتیب از روابط زیر بدست می آید:

$$L_e \cong 0.06 D \mathrm{Re}$$

$$L_e \cong 4.4 D \mathrm{Re}^{\frac{1}{6}}$$

تمرین

سیالی با دمای 20 درجه سانتیگراد و دبی $700\frac{cm^3}{s}$ از لوله ای به قطر 8 سانتیمتر می گذرد. آرام یا آشفته بودن این جریان را برای سیال های هوا و آب مشخص کنید.

تمرین

نوعی روغن($SG = 0.9$ و $v = 0.003\frac{m^2}{s}$) درون لوله ای به قطر 4 cm جریان دارد. طول ناحیه ورودی را بر حسب متر برای دو مقدار دبی الف) $Q = 0.001\frac{m^3}{s}$ و ب) $Q = 1\frac{m^3}{s}$ تخمین بزنید.

آزمایش هاگن(Hagen)

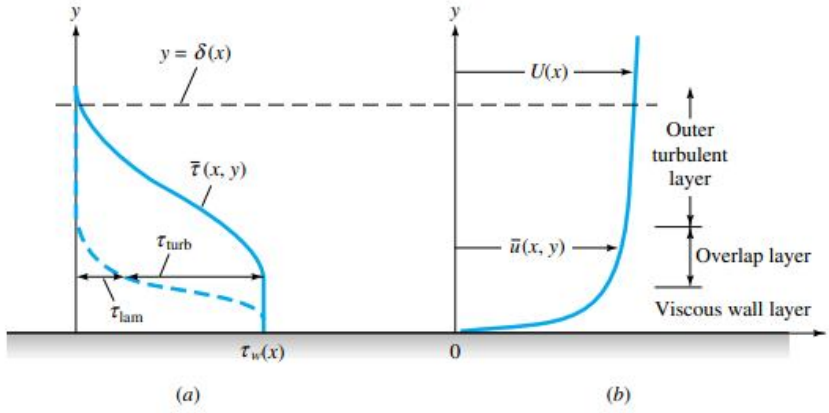
هاگن مهندس آلمانی در سال۱۸۳۹ ثابت کرد بطور کلی برای اختلاف فشار جریان آب درون یک لوله رابطه زیر برقرار است:

$\Delta P =$ (مقداری ثابت) $\frac{LQ}{R^4} +$ اثرات ورودی

همچنین در جریانهای آرام $\Delta P \propto V$ و در جریانهای آشفته $\Delta P \propto V^2$.البته در جریان آشفته توان واقعی 1.75 است.

قانون لایه مشترک لگاریتمی(Logarithmic Overlap Law)

در شکل a توزیع تنش برشی و در شکل b سه ناحیه مختلف در جریان آشفته نزدیک دیواره نشان داده شده است:



۱- لایه دیواره(Wall layer): در این لایه تنش لزجتی (تنشهای لامینار)حاکم است.

۲- لایه مشترک(Overlap layer):در این لایه هر دو نوع تنش برشی مهمند.

۳- لایه بیرونی(Outer layer):در این لایه تنش آشفته (توربولانسی) غالب خواهد بود.

حال ببینیم چگونه با معلوم بودن فاصله لایه سیال از جداره لوله می توان سرعت آن لایه سیال را بدست آورد:

ابتدا تعریف می کنیم:

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

u^* را سرعت اصطکاکی (Friction Velocity) می گویند.

در لایه دیواره($0 < \frac{yu^*}{v} \le 5$)رابطه زیرکه به معادله قانون دیواره (Law of the wall) موسوم است،برقرار است:

$$\boxed{u = \frac{u^{*2} y}{v}}$$

و در لایه مشترک($5 < \frac{yu^*}{v} \le 70$) رابطه زیر که به قانون لگاریتمی(Logarithmic overlap layer) معروف است،مقدار سرعت را بر حسب فاصله از دیواره بدست می دهد:

$$\boxed{u = u^*(2.5 \ln \frac{yu^*}{v} + 5)}$$

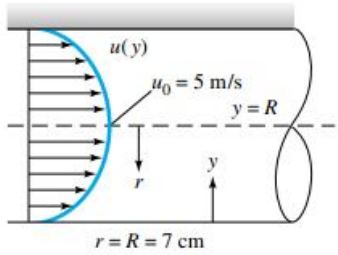
و بالاخره درلایه بیرونی($\frac{yu^*}{v} > 70$) رابطه زیر حاکم است:

$$\boxed{\frac{u_0 - u}{u^*} = 2.5 \ln \frac{R}{y}}$$

که در آن u_0 سرعت خط مرکزی لوله است.میلیکان (Millikan) در سال ۱۹۳۷ نشان داد قانون لگاریتمی بجای آنکه یک ارتباط مشترک کوتاه داشته باشد در عمل تقریبا تمامی پروفیل سرعت را تقریب می زند.

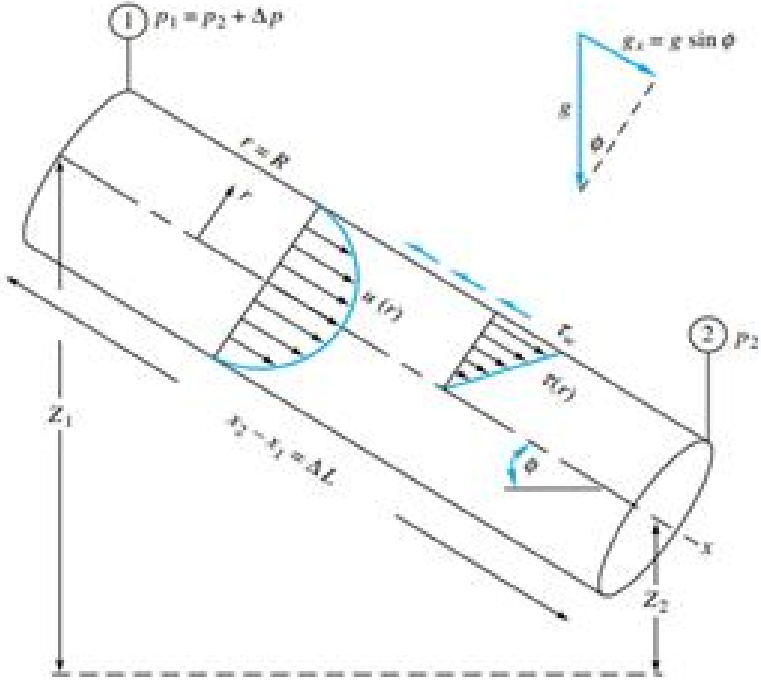
تمرین

در یک لوله به قطر14cm،هوای20C تحت شرایط کاملا توسعه یافته جاری است.اگر سرعت خط مرکزی $u_0 = 5\frac{m}{s}$ باشد، سرعت اصطکاکی u^*،تنش برشی دیواره τ_w و سرعت متوسط V را بدست آورید.



جریان در لوله دایره ای(Circular Pipe)

برای تحلیل جریان و بدست آوردن روابطی برای افت فشار در لوله ها از قوانین اساسی مکانیک سیالات استفاده می کنیم:



ابتدا معادله پیوستگی یا بقای جرم(Conservation of mass) را برای جریان می نویسیم:

(جریان دائمی در نظر گرفته می شود.)

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$

سطح مقطع لوله و دانسیته سیال ثابت فرض می شود:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \Rightarrow \boxed{V_1 = V_2}$$

از معادله پیوستگی نتیجه می شود سرعت در یک لوله با سطح مقطع ثابت و برای جریان تراکم ناپذیر، ثابت می ماند.
حال معادله اندازه حرکت(Momentum) در راستای محور لوله بصورت زیر نوشته می شود:

$$\sum F_x = \dot{m}(u_{out} - u_{in})$$

یعنی جمع تمام نیروها در راستای محور لوله برابر حاصلضرب دبی سیال در تغییرات سرعت در همان راستا است و چون سرعت تغییری نکرده است لذا سمت راست معادله برابر صفر است.

$$(\Delta P)A + \rho g \frac{\pi}{4} D^2 \Delta L \sin\phi - \tau_w \pi D \Delta L = 0$$

جمله اول نیروی ناشی از اختلاف فشار،جمله دوم نیروی وزن و جمله سوم نیروهای ناشی از تنش برشی سیال(اصطکاک) می باشد.از طرفی می دانیم:

$$\Delta L \sin\phi = \Delta z$$

در نتیجه:

$$(\Delta P)\frac{\pi}{4} D^2 + \frac{\pi}{4}\rho g D^2 \Delta z - \tau_w \pi D \Delta L = 0$$

و با ساده سازی رابطه فوق:

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta z - \frac{4\tau_w \Delta L}{\rho g D} = 0}$$

اینک معادله بقای انرژی یا معادله برنولی(Bernoulli's equation) را می نویسیم:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

چون $V_1 = V_2$ ، $P_1 - P_2 = \Delta P$ و $z_1 - z_2 = \Delta z$ معادله فوق بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta z = h_f$$

با جایگذاری رابطه بدست آمده در رابطه ساده شده بقای اندازه حرکت خواهیم داشت:

$$\boxed{h_f = \frac{4\tau_w \Delta L}{\rho g D} = \frac{2\tau_w \Delta L}{\rho g R}}$$

مفهوم رابطه بدست آمده این است که هد اصطکاکی (Head loss) در یک لوله با طول لوله رابطه مستقیم و با شعاع (قطر) آن رابطه عکس دارد. به بیان دیگر هر چه طول لوله افزایش یابد، افت اصطکاکی افزایش می یابد. از طرفی با انتخاب لوله با قطر بزرگتر می توان افت اصطکاکی را کاهش داد.
آزمایشات نشان داده اند تنش برشی تابعی از دانسیته (چگالی) سیال، سرعت جریان، لزجت دینامیکی سیال، قطر و زبری لوله است یعنی:

$$\tau_w = F(\rho, V, \mu, D, \varepsilon)$$

که در آن ε ارتفاع زبری لوله است که در آینده با آن آشنا خواهید شد.با تحلیل ابعادی داریم:

$$\frac{\tau_w}{\rho V^2} = F(\mathrm{Re}_D, \frac{\varepsilon}{D})$$

ضریب اصطکاک در لوله را بصورت $f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$ تعریف می کنیم.پارامتر بی بعد f،ضریب اصطکاک دارسی(Darcy) نام دارد.در نتیجه رابطه $h_f = \frac{2\tau_w \Delta L}{\rho g R}$ را بر حسب ضریب اصطکاک دارسی می توان بصورت زیر نوشت: $\boxed{h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}}$ که به آن معادله دارسی- وایسباخ (Darcy-Weisbach)می گویند و رابطه بسیار مهمی در تعیین افت اصطکاکی در جریانهای داخلی می باشد.

جلسه دوم

معادلات حرکت(Motion Equations)

معادله پیوستگی در مختصات استوانه ای بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

که در آن

$$u,\ v_\theta,\ v_r$$

بترتیب مولفه های سرعت در راستاهای شعاعی،مماسی و محوری استوانه است.با فرض اینکه چرخش وجود نداشته باشد:

$$v_\theta=0$$

و در نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)=0$$

و با فرض اینکه جریان کاملا توسعه یافته باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0\Rightarrow rv_r=C$$

بموجب اصل عدم لغزش در $r=R$، $v_r=0$ در نتیجه $C=0$ و لذا $v_r=0$

مفهوم رابطه بدست آمده این است که علاوه بر مولفه مماسی، مولفه شعاعی سرعت جریان داخل لوله هم صفر است و در نتیجه فقط در راستای محور لوله جریان خواهیم داشت.

معادله اندازه حرکت در مختصات استوانه ای بصورت زیر است:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{dP}{dx}+\rho g_x+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad,\quad g_x=g\sin\phi\qquad,\sin\phi=-\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{dP}{dx}-\rho g\frac{dz}{dx}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau)=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau)=\frac{d}{dx}(P+\rho gz)=A$$

چون تغییرات فشار و ارتفاع در راستای محور لوله ثابت است لذا آن را برابر یک مقدار ثابت در نظر گرفته ایم.

$$\frac{dP}{dx}=cte,\frac{dz}{dx}=cte\Rightarrow\frac{d}{dx}(P+\rho gz)=A$$

سمت چپ تساوی فوق را برابر مقدار ثابت قرار داده و معادله را حل می کنیم.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau)=A\Rightarrow\ \frac{d}{dr}(r\tau)=Ar$$

جریان آرام(Laminar Flow)

برای جریان آرام رابطه تنش برشی بر حسب گرادیان سرعت بصورت زیر می باشد:

$$\tau=\mu\frac{du}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}(r\tau)=Ar \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\mu\frac{du}{dr})=Ar \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})=\frac{Ar}{\mu} \Rightarrow r\frac{du}{dr}=\frac{Ar^2}{2\mu}+C_1 \Rightarrow \frac{du}{dr}=\frac{Ar}{2\mu}+\frac{C_1}{r} \Rightarrow$$

$$u(r)=\frac{Ar^2}{4\mu}+C_1\ln r+C_2$$

برای تعیین ثابتها از دو شرط مرزی باید استفاده کنیم.

ابتدا می دانیم در مرکز لوله سرعت نمی تواند بینهایت شود و باید مقدار محدودی(Bounded)داشته باشد و چون

$$\lim_{r\to 0}\ln r=\infty$$

لذا:

$$at \quad r=0: u \quad should \quad be \quad bounded \Rightarrow C_1=0$$

از طرفی طبق شرط عدم لغزش سرعت در جداره برابر صفر است بنابراین:

$$at \quad r=R: u=0 \Rightarrow \frac{AR^2}{4\mu}+C_2=0 \Rightarrow C_2=-\frac{AR^2}{4\mu}$$

با قرار دادن این ثابتها توزیع سرعت بصورت زیر بدست می آید:

$$u(r)=\frac{Ar^2}{4\mu}-\frac{AR^2}{4\mu}=\frac{A}{4\mu}(r^2-R^2)=-\frac{AR^2}{4\mu}(1-\frac{r^2}{R^2})$$

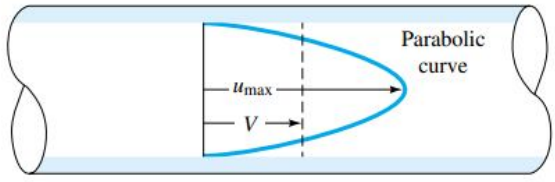
و چون $A=\frac{d}{dx}(P+\rho gz)$ لذا:

$$\boxed{u(r)=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(P+\rho gz)[1-(\frac{r}{R})^2]}$$

باید توجه داشت پروفیل سرعت بدست آمده برای جریان آرام صادق است و مشاهده می شود که این پروفیل مطابق شکل به صورت سهمی است. مقدار سرعت روی جداره ها صفر است و در مرکز لوله به ماکزیمم مقدار خود می رسد.می توان مقدار سرعت در هر لایه را بر حسب سرعت ماکزیمم بدست آورد:

$$at \quad r=0: u=u_{\max} \Rightarrow u_{\max}=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(\rho+\rho gz) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(r)=u_{\max}[1-(\frac{r}{R})^2]}$$



سرعت متوسط یعنی میانگین سرعت تمام لایه های سیال بصورت زیر تعریف می شود:

$$V=\frac{\int udA}{A}=\frac{\int_0^R u_{\max}(1-\frac{r^2}{R^2})2\pi r dr}{\pi R^2}=\frac{1}{2}u_{\max}$$

$$\boxed{V=\frac{1}{2}u_{\max}}$$

تنش برشی هم بموجب تعریف بصورت زیر بدست می آید:

$$\tau_w = \left|\mu \frac{du}{dr}\Big|_{r=R}\right| = \left|\mu u_{\max}(-2\frac{r}{R^2})\Big|_{r=R}\right| = \frac{2\mu u_{\max}}{R}$$

$$\boxed{\tau_w = \frac{2\mu u_{\max}}{R}}$$

حال ضریب اصطکاک را محاسبه می کنیم.

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \Rightarrow f = \frac{8(\frac{2\mu u_{\max}}{R})}{\rho V^2} = \frac{16\mu(2V)}{\rho V^2 \frac{D}{2}} = \frac{64}{\frac{\rho V D}{\mu}} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

$$\boxed{f = \frac{64}{\mathrm{Re}}}$$

در نتیجه h_f برای جریان آرام بصورت زیر محاسبه می شود:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = \frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{64\mu}{\rho V D}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{32\mu L V}{\rho D^2 g} = \frac{32\mu L}{\rho D^2 g}\frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{128\mu L Q}{\rho g \pi D^4}$$

$$\boxed{h_f = \frac{32\mu L V}{\rho D^2 g} = \frac{128\mu L Q}{\rho g \pi D^4}}$$

در نتیجه اختلاف فشار در جریان آرام و در یک لوله افقی بصورت زیر خواهد بود:

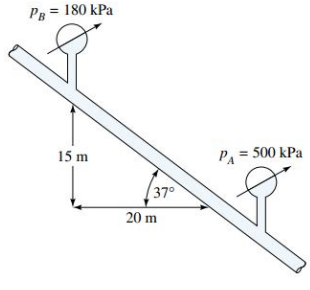
$$\Delta P = \rho g h_f \Rightarrow \Delta P = \rho g \frac{32\mu L V}{\rho g D^2} = \frac{32\mu L V}{D^2} \Rightarrow \Delta P = \frac{32\mu L}{D^2}\frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4}$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{32\mu L V}{D^2} = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4}}$$

مجددا تاکید می شود تمام روابط داخل کادر در مبحث فوق برای جریان آرام درون لوله ها کاربرد دارد.

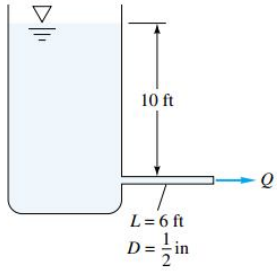
تمرین

مطابق شکل این مسئله سیالی با $\mu = 0.04 Pa.s$ و $\rho = 800\frac{kg}{m^3}$ در لوله ای به قطر 10mm جریان دارد. اولا جهت جریان را تعیین کنید، ثانیا افت هد جریان، ثالثا دبی و رابعا عدد رینولدز جریان را بدست آورید.



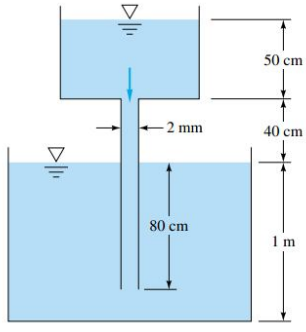
تمرین

روغنی با $SG = 0.9$ و $Q = 35\frac{ft^3}{hr}$ از لوله شکل این مسئله خارج می شود، لزجت سینماتیکی روغن را بر حسب $\frac{ft^3}{s}$ بدست آورید. آیا جریان آرام است؟



تمرین

فرض کنید که سیال شکل این مساله الکل اتیلیک20C و مخازن بسیار عریض باشند، دبی جریان را بر حسب متر مکعب در ساعت بیابید.آیا جریان آرام است؟



جریان آشفته(Turbulent Flow)

هرگاه در یک لوله عدد رینولدز جریان بیشتر از 2300 باشد، جریان آشفته نامیده می شود.

اکثر روابط مربوط به جریان آشفته به طور تجربی به دست آمده اند و دانشمندانی مانند بلازیوس(Blasius) و پرانتل(Prandtl) و کارمان(Karman) این روابط را بدست آورده اند.

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k}\ln\frac{yu^*}{v} + \mathrm{B}$$

$$y = R - r$$

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k}ln\frac{(R-r)u^*}{v} + \mathrm{B}}$$

$$Q = \int_0^R udA = \int_0^R u2\pi rdr$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\pi R^2 u^* \left(\frac{2}{k}ln\frac{Ru^*}{v} + 2B - \frac{3}{k}\right)}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{2}u^*\left(\frac{2}{k}ln\frac{Ru^*}{v} + 2B - \frac{3}{k}\right)$$

$$B = 5$$

$$k = 0.41$$

$$\boxed{\frac{V}{u^*} = 2.44\ln\frac{\mathrm{R}u^*}{v} + 1.34}$$

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$$

$$\frac{1}{f^{\frac{1}{2}}} = 1.99\, log\left(Ref^{\frac{1}{2}}\right) - 1.02$$

در سال ۱۹۳۵ پرانتل رابطه فوق را اثبات کرد و برای ایجاد هماهنگی بیشتر با اطلاعات بدست آمده از آزمایش ثابتها را کمی تغییر داد:

$$\frac{1}{f^{\frac{1}{2}}} = 2\, log\left(Ref^{\frac{1}{2}}\right) - 0.8$$

رابطه بدست آمده توسط بلازیوس:

$$\boxed{f = (1.8 log \frac{Re}{6.9})^{-2}}$$

روابط فوق برای جریانهای آشفته و در لوله های با جداره صاف(Smooth) کاربرد دارد.برای لوله های زبر(Roughness) استفاده از این روابط مجاز نمی باشد.

با جایگذاری رابطه بلازیوس در رابطه دارسی وایسباخ می توان رابطه افت اصطکاکی را برای جریان های آشفته به صورت زیر بدست آورد:

$$\boxed{h_f = 0.316(\frac{\mu}{\rho V D})^{0.25} \frac{L}{\mathrm{D}} \frac{V^2}{2\mathrm{g}}}$$

و چون $\Delta P = \rho g h_f$ لذا:

$$\boxed{\Delta P = 0.158 L \rho^{0.75} \mu^{0.25} D^{-1.25} V^{1.75}}$$

رابطه بدست آمده نشان می دهد که در جریان آشفته اختلاف فشار وابستگی ضعیفی به ویسکوزیته دینامیکی سیال دارد.

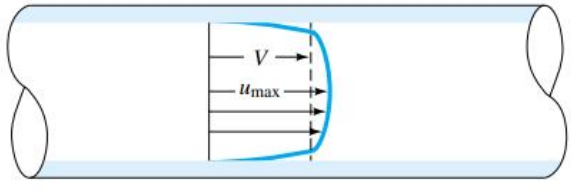
با قرار دادن $Q = \frac{\pi}{4} D^2 V$ در رابطه فوق به شکل دیگری از رابطه می رسیم:

$$\boxed{\Delta P = 0.241 L \rho^{0.75} \mu^{0.25} D^{-4.75} Q^{1.75}}$$

$$\boxed{\frac{V}{u_{max}} = (1 + 1.33 f^{0.5})^{-1}}$$

رابطه فوق ارتباط میان سرعت میانگین و سرعت ماکزیمم در یک جریان آشفته را نشان می دهد.

تغییرات پروفایل سرعت برای حالت آشفته خیلی کم خواهد بود و در جداره ها به سرعت به صفر کاهش می یابد.



تمرین

در یک لوله شیشه ای به قطر 6 میلی متر و طول 3 متر جیوه 20 درجه سانتیگراد با سرعت 2.5 متر بر ثانیه جریان دارد. افت هد را بر حسب متر و افت فشار را بر حسب کیلو پاسکال محاسبه کنید.

جلسه سوم

اثر زبری دیواره(Effect of Rough Walls)

در جریان آرام درون لوله ها زبری لوله هیچ تاثیری بر ضریب اصطکاک ندارد. برای لوله های زبر در حالت جریان آرام همچون لوله های صاف، f از رابطه $f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$ بدست می آید.در حالی که در جریان آشفته زبری به شدت بر جریان تاثیر می گذارد و خواص جریان را دگرگون می کند. لازم بذکر است که لوله های صنعتی از جنس های معینی ساخته می شوند. مانند فولاد تجاری، آهن، مس، شیشه و ... .این جنس ها زبری میانگینی(ε) دارند که مقدار این زبری هم بر حسب میلیمتر و هم بر حسب فوت در جدولی در کتابهای مکانیک سیالات داده شده است.

در حالتی که جریان آشفته و لوله زبر باشد از روابط زیر برای محاسبه ضریب اصطکاک استفاده می شود:

معادله کلبروک(Colebrook):

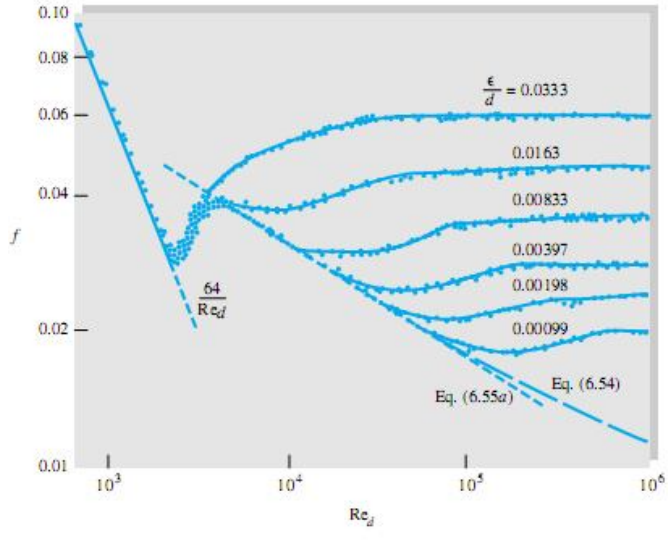
$$\frac{1}{f^{\frac{1}{2}}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3.76D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

معادله هالند (Halland):

$$\boxed{f = [-1.8\log(\frac{6.9}{\mathrm{Re}} + (\frac{\varepsilon}{3.76D})^{1.11})]^{-2}}$$

برای محاسبه ضریب اصطکاک بجای فرمول می توان از نمودار هم استفاده کرد که در زیر بیان می شود.

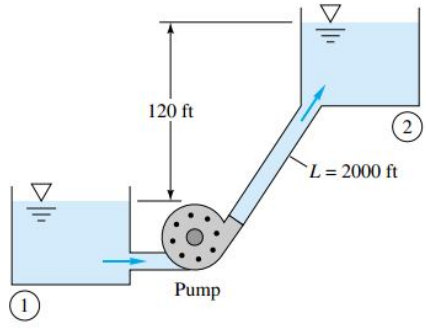
نمودار مودی(Moody Chart):



در سال۱۹۴۴، مودی نموداری را برای محاسبه ضریب اصطکاک در لوله ها ارائه داد. محور افقی این نمودار معرف عدد رینولدز و محور قائم بیانگر ضریب اصطکاک f است. شاخه های نمودار، $\frac{\varepsilon}{D}$ های مختلف را نشان می دهد. از روی نمودار پیداست که در جریان آرام ضریب اصطکاک تنها تابع رینولدز است و مستقل از زبری است و در جریان های کاملا آشفته ضریب اصطکاک تنها تابع زبری است و مستقل از عدد رینولدز است. برای دیگر حالات ضریب اصطکاک تابع رینولدز و زبری است.

تمرین

مطابق شکل این مسئله آب 20 درجه سانتیگراد باید با لوله ای به طول 2000 ft و دبی $3\frac{ft^3}{s}$ از مخزن 1 به مخزن 2 تلمبه شود. اگر جنس لوله از آهن و قطر آن 6in و بازده پمپ 75% باشد توان پمپ را محاسبه کنید.



راهنمایی:

در مسائلی که پمپ وجود داشته باشد معادله برنولی بصورت زیر اصلاح می شود:

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f-h_P}$$

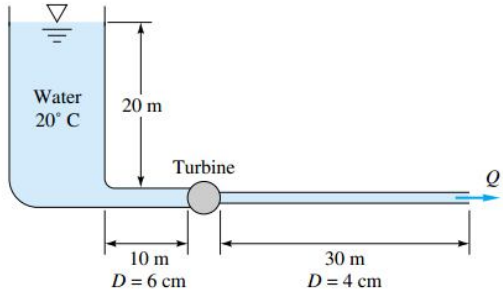
که جمله آخر معادله برنولی، هد پمپ نامیده می شود و رابطه آن با توان پمپ بصورت زیر است:

$$\boxed{h_P=\frac{\eta H}{\rho g Q}}$$

که در آن H توان و η راندمان پمپ است که عددی کمتر از یک می باشد.

تمرین

توربین کوچک شکل این مساله از آب 400W توان می گیرد.جنس هر دو لوله آهن چکش خوار است،دبی را بر حسب مترمکعب در ساعت محاسبه کنید.



راهنمایی:

در مسائلی که توربین وجود داشته باشد معادله برنولی بصورت زیر اصلاح می شود:

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f+h_T}$$

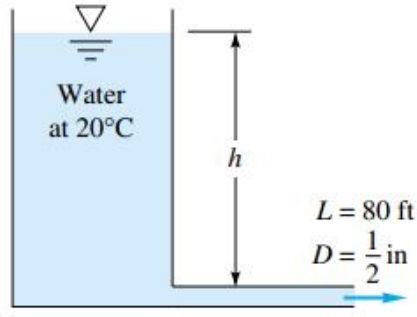
که جمله آخر معادله برنولی، هد توربین نامیده می شود و رابطه آن با توان توربین بصورت زیر است:

$$h_T = \frac{H}{\rho g Q \eta}$$

که در آن H توان و η راندمان توربین است که عددی کمتر از یک می باشد.

تمرین

برای تحویل $0.02\frac{ft^3}{s}$ آب با یک لوله خروجی از جنس فولاد تجاری به قطر $\frac{1}{2}in$ در شکل این مساله، ارتفاع h لازم را محاسبه کنید.



نمودار تصحیح شده مودی برای تعیین دبی جریان

هرگاه دبی جریان یا سرعت در مسئله ای مجهول باشد برای تعیین آنها می توان از نمودار مخصوصی به نام نمودار تصحیح شده مودی برای یافتن سرعت جریان در لوله استفاده کرد.

در صورتی که سرعت یا دبی مجهول باشد علاوه بر روش قبلی (که به سعی و خطا نیاز دارد) می توان به روش زیر مسئله را راحتتر حل کرد.

ابتدا پارامتر α را از رابطه $\alpha = \mathrm{Re}^2 \frac{f}{2} = \frac{gD^3 h_f}{Lv^2}$ بدست می آوریم. سپس با استفاده از نمودار تصحیح شده مودی و بکمک $\frac{\varepsilon}{D}$، رینولدز را بدست می آوریم و از روی آن سرعت یا دبی را، زیرا $Q = VA$.

نمودار تصحیح شده مودی برای تعیین دبی یا سرعت در نمودارهای مکانیک سیالات موجود در وبلاگ وجود ندارد و بجای آن می توان از رابطه زیر رینولدز را و سپس از روی آن دبی یا سرعت را بدست آورد:

$$\mathrm{Re} = -\sqrt{8\alpha}\,\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\sqrt{2\alpha}}\right)$$

برای جریان های آرام این رابطه به صورت ساده زیر در می آید:

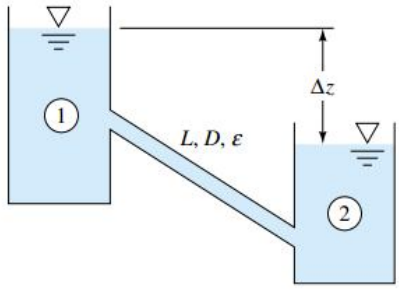
$$\mathrm{Re} = \frac{\alpha}{32}$$

پس از تعیین عدد رینولدز از رابطه زیر دبی بدست می آید:

$$Q = \frac{\pi D v}{4}\mathrm{Re}$$

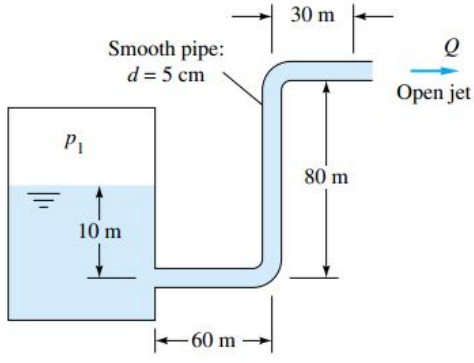
تمرین

مخازن شکل این مسئله حاوی آب 20 درجه سانتیگراد است. اگر لوله حامل صاف با L=700m و D=5cm باشد دبی جریان را بر حسب $\frac{m^3}{h}$ به ازای $\Delta z = 1000m$ محاسبه کنید.



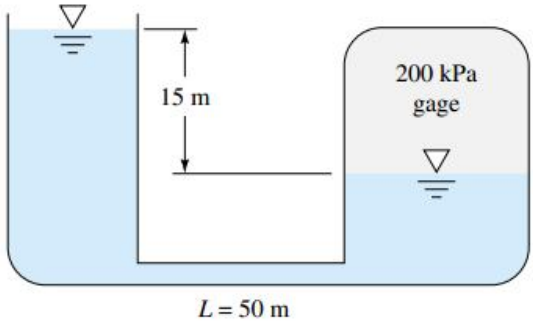
تمرین

اتیل الکل 20 درجه سانتیگراد در لوله شکل این مسئله جریان دارد. اگر فشار نسبی 900 kPa فرض شود دبی جریان را بر حسب مترمکعب بر ساعت محاسبه کنید.



تمرین

جنس لوله رابط در شکل این مساله فولاد تجارتی به قطر6cm است.اگر سیال روغنSAE30 و دمای آن20C باشد، دبی جریان را بر حسب مترمکعب در ساعت محاسبه کنید.جهت جریان را نیز مشخص نمایید.



نمودار تصحیح شده مودی برای تعیین اندازه لوله

حالا فرض کنیم Q, L, h_f, ρ, μ داده شده است و مسئله تعیین قطر لوله باشد.برای این منظور گروه بی بعد β را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\beta = (fRe^5)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{128gh_fQ^3}{\pi^3Lv^5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

در این صورت رینولدز برای لوله های صاف برابراست با:

$$Re = 1.43\beta^{0.416}$$

و برای لوله های زبر با زبری ε:

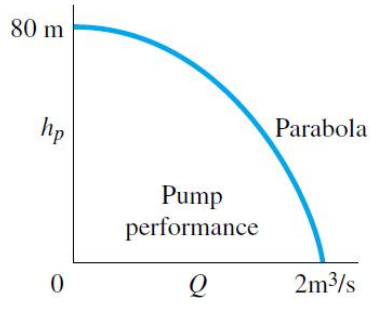
$$Re = [-2\beta\log(\frac{\pi\varepsilon vRe}{14.8Q} + \frac{2.51}{\beta}Re^{1.5})]^{0.4}$$

نمودار تصحیح شده مودی برای این حالت بر حسب $\frac{\varepsilon v}{Q}, \beta$ و Re است. این نمودار هم در نمودارهای مکانیک سیالات موجود در وبلاگ وجود ندارد و بجای آن از رابطه فوق، رینولدز و سپس با استفاده از رینولدز، قطر بدست می آید:

$$D = \frac{4Q}{\pi v\,\mathrm{Re}}$$

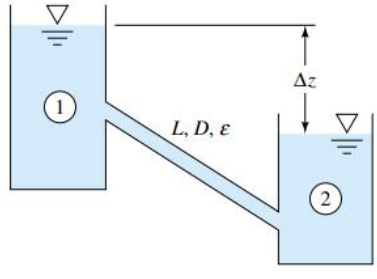
تمرین

پمپ شکل زیر به منظور جابجایی اتانول(اتیل الکل) 20 درجه سانتیگراد با یک لوله چکش خوار با طول200 متر و دبی 0.5 مترمکعب بر ثانیه به کار می رود، قطر مناسب لوله را تعیین کنید.



تمرین

با فرض $\Delta z = 90m$ و چدنی بودن لوله حامل آب با طول $200m$،اگر دبی $5\frac{m^3}{h}$ باشد، قطر مناسب لوله را بدست آورید.



جلسه چهارم

جریان در مجراهای غیر دایره ای (Flow in Noncircular Ducts)

اکنون حالتی را در نظر می گیریم که سطح مقطع دایره ای نباشد، برای مجراهای غیر دایره ای می توان با در نظر گرفتن یک حجم کنترل و نوشتن معادله اندازه حرکت افت هد اصطکاکی را به صورت زیر بدست آورد:

$$\sum F_x = \dot{m}\ (V_{out} - V_{in}) = 0$$

سرعتهای ورودی و خروجی با هم برابر است لذا:

$$(\Delta P)A + mgsin\emptyset - \tau_w P\Delta L = 0$$

یادآوری می شود جمله اول مربوط به نیروهای فشاری، جمله دوم مربوط به جاذبه و جمله سوم مربوط به نیروهای اصطکاکی می باشد.توجه داشته باشید P در عبارت $(\Delta P)A$، فشار و در عبارت $\tau_w P\Delta L$، محیط مقطع مجرا می باشد این دو را با هم اشتباه نگیرید.

$$(\Delta P)A + \rho A\Delta Lgsin\emptyset - \tau_w P\Delta L = 0$$

دو طرف تساوی را بر ρgA تقسیم نموده و بجای $\Delta Lsin\emptyset$ ، Δz قرار می دهیم.

$$\frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta Z - \frac{\tau_w P\Delta L}{\rho gA} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta Z = \frac{\tau_w P\Delta L}{\rho gA}$$

حال معادله برنولی را می نویسیم:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_f$$

چون سرعت در لوله با سطح مقطع یکنواخت، همیشه ثابت است پس سرعت ها با هم برابرند.

$P_1 - P_2 = \Delta P$ و $z_1 - z_2 = \Delta z$ و در نتیجه:

$$\frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta Z = h_f \Rightarrow h_f = \frac{\tau_w P\Delta L}{\rho gA} \Rightarrow\ h_f = \frac{\tau_w \Delta L}{\rho g\frac{A}{P}}$$

$$\frac{A}{P} = R_h$$

$$h_f = \frac{\tau_w \Delta L}{\rho g R_h}$$

$\frac{A}{P}$ را که نسبت مساحت سطح مقطع به محیط تر شده مجرا می باشد شعاع هیدرولیکی (Hydraulic Radius) می نامند. چهار برابر شعاع هیدرولیکی را قطر هیدرولیکی می نامند.($D_h = 4R_h$)

با جایگذاری قطر هیدرولیکی(Hydraulic Diameter) (D_h) به جای D در روابط با مجرای دایره ای می توان از آن روابط برای سایر مجراها استفاده کرد. بنابراین در مواردی که سطح مقطع دایره ای نباشد قطر هیدرولیکی را بدست آورده و بجای قطر از قطر هیدرولیکی در روابط لوله های دایره ای استفاده می کنیم. بعنوان مثال:

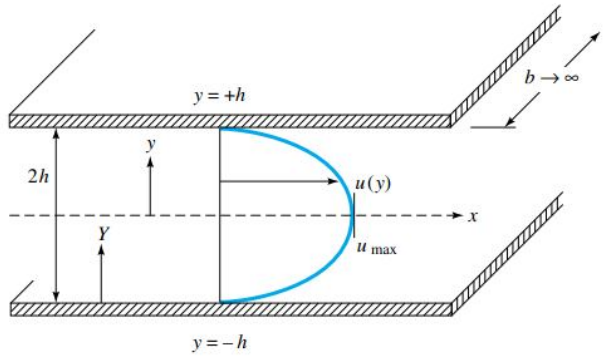
$$\boxed{h_f = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g}}$$

$$\boxed{Re_{D_h} = \frac{VD_h}{\upsilon}}$$

$$\boxed{f = [-1.8\log(\frac{6.9}{Re_{D_h}} + (\frac{\varepsilon}{3.76D_h})^{1.11})]^{-2}}$$

جریان بین صفحات موازی(Flow between Parallel Plates)

جریان بین صفحات موازی عریضی به عرض b که به فاصله $2h$ از یکدیگر قرار دارند را در نظر بگیرید. این حالت هم با روشی مشابه روش جریان در لوله های مقطع گرد تحلیل می شود.



$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} + \rho g_x + \frac{d\tau}{dy}$$

چون جریان توسعه یافته است ترم سمت چپ تساوی برابر صفر است و در نتیجه:

$$-\frac{dP}{dx} + \rho g_x + \frac{d\tau}{dy} = 0$$

با توجه به اینکه $\sin\phi = -\frac{dz}{dx}$, $g_x = g\sin\phi$ و $\tau = \mu\frac{du}{dy}$ و با اعمال شرایط مرزی $u(-h) = u(h) = 0$ داریم:

$$\boxed{u = \frac{1}{2\mu}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right](\mathrm{h}^2 - \mathrm{y}^2)}$$

$$Q = \int u dA = \int_{-h}^{h} u b dy$$

$$\boxed{Q = \frac{bh^3}{3\mu}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right]}$$

$$V = \frac{Q}{2bh} = \frac{h^2}{3\mu}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right]$$

$$\boxed{V = \frac{2}{3}u_{max}}$$

$$\tau_w = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=h \text{ یا } y=-h} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau_w = \mathrm{h}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right]}$$

$$D_h = \frac{4A}{\mathrm{P}} = \frac{4b(2h)}{2\mathrm{b}} = 4h$$

$$Re_{D_h} = \frac{\rho V D_h}{\mu}$$

$$\boxed{Re_{D_h} = \frac{\rho V(4h)}{\mu}}$$

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \frac{8\mathrm{h}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right]}{\rho V^2}$$

اما چون

$$V = \frac{h^2}{3\mu}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right]$$

در نتیجه:

$$-\frac{d}{dx}(P + \rho g z) = \frac{3\mu V}{h^2}$$

با جایگذاری در رابطه f:

$$f=\frac{8h\frac{3\mu V}{h^2}}{\rho V^2}=\frac{24\mu}{\rho V h}=\frac{24}{\frac{\rho V h}{\mu}}=\frac{24(4)}{\frac{\rho V 4h}{\mu}}\Rightarrow f=\frac{96}{Re_{D_h}}$$

$$\boxed{f=\frac{96}{Re_{D_h}}}$$

قطر موثر(Effective Diameter)

در حالتی که جریان آشفته باشد به جای استفاده از قطر هیدرولیکی می توان از قطر موثر استفاده کرد.

استفاده از قطر موثر به جای قطر هیدرولیکی باعث افزایش دقت می شود.

$$\boxed{D_{eff}=0.667D_h}$$

لازم به ذکر است قطر موثر برای جریان های آشفته استفاده می شود و تنها در محاسبه رینولدز به کار می رود.

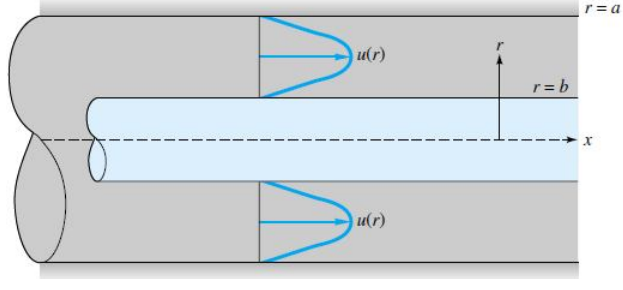
تمرین

روغن SAE30 با دمای 20C بین دو صفحه موازی صاف با فاصله 4cm از یکدیگر و با سرعت میانگین $30\ \frac{m}{s}$ جریان دارد، افت فشار، سرعت خط مرکز و افت هد را برای هر 100m طول لوله محاسبه کنید.

جریان در لوله دو جداره(Flow through a Concentric Annulus)

مطابق شکل جریانی را در نظر می گیریم که بصورت محوری در فضای بین دو استوانه هم محور جاری است. در شعاع های داخلی و خارجی به علت شرط عدم لغزش سرعت صفر است:

$$u(a)=0$$
$$u(b)=0$$



معادله اندازه حرکت را می نویسیم:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)$$

با توجه به اینکه جریان توسعه یافته است و P فقط تابعی از x و τ فقط تابعی از r است و همچنین

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

لذا رابطه فوق به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau) = \frac{dP}{dx} - \rho g_x$$
$$g_x = g sin\emptyset \qquad sin\emptyset = -\frac{dz}{dx} \Rightarrow g_x = -g\frac{dz}{dx} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau) = \frac{dP}{dx} + \rho g\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau) = \frac{d}{dx}(P + \rho g z) = k$$
$$\frac{d}{dr}(r\tau) = kr \qquad \tau = \mu\frac{du}{dr}$$
$$\frac{d}{dr}\left(r\mu\frac{du}{dr}\right) = kr \Longrightarrow r\mu\frac{du}{dr} = \frac{kr^2}{2} + C_1$$
$$\frac{du}{dr} = \frac{kr}{2\mu} + \frac{C_1}{r\mu}$$
$$u(r) = \frac{kr^2}{4\mu} + \frac{C_1}{\mu}lnr + C_2$$

با اعمال شرایط مرزی، پروفیل سرعت به صورت زیر بدست می آید:

$$u(r = a) = 0$$
$$u(r = b) = 0$$

$$\boxed{u = \frac{1}{4\mu}\left[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\right]\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{ln\frac{b}{a}}ln\frac{a}{r}\right]}$$

همچنین دبی حجمی نیز بصورت زیر تعیین می شود:

$$Q = \int u dA = \int_b^a u(2\pi r dr) \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{8\mu}[-\frac{d}{dx}(P + \rho g z)]\left[a^4 - b^4 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{ln\frac{a}{b}}\right]}$$

با مشتق گیری ازمعادله سرعت، بیشترین سرعت در شعاع زیر بدست می آید:

$$\boxed{r = \left[\frac{a^2 - b^2}{2\ln(\frac{a}{b})}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

که به شعاع داخلی نزدیکتر است. با کم شدن فاصله a-b سرعت ماکزیمم به نقطه وسط بین استوانه ها نزدیک می شود.

در لوله های دوجداره، ضریب اصطکاک f به صورت $f = h_f\frac{D_h}{L}\frac{2g}{V^2}$ تعریف می شود.

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4\pi(a^2 - b^2)}{2\pi(a + b)} = 2(a - b)$$

با جایگذاری h_f, D_h, V در معادله $f = h_f\frac{D_h}{L}\frac{2g}{V^2}$ در می یابیم که ضریب اصطکاک جریان آرام در لوله دوجداره هم محور چنین است:

$$\xi = \frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4-\left[\frac{(a^2-b^2)^2}{\ln\frac{a}{b}}\right]}$$

$$f = \frac{64\xi}{\mathrm{Re}_{D_h}}$$

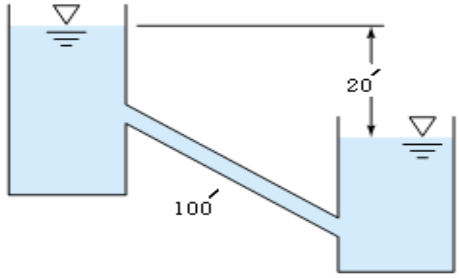
یا

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}_{eff}} \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}_{eff} = \frac{1}{\xi}\mathrm{Re}_{D_h}$$

برخی از مقادیر $f\,\mathrm{Re}_{D_h}$ و $\frac{D_{eff}}{D_h} = \frac{1}{\xi}$ بر حسب $\frac{b}{a}$ در جدول موجود است.

تمرین

یک لوله دو جداره به طول 100ft از جنس فولاد تجاری a=5in و b=1in دو مخزن را با اختلاف سطح 20ft به یکدیگر مرتبط می کند. در صورتی که سیال آب 20C باشد، دبی جریان را بر حسب $\frac{ft^3}{s}$ بدست آورید.

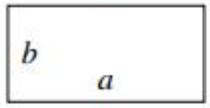
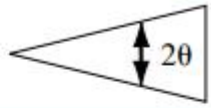


مقاطع مثلثی و مستطیلی

در حل این نوع مسائل که سطح مقطع لوله مثلثی یا مستطیلی است، کافیست D_{eff} را از رابطه $D_{eff} = \frac{64D_h}{f\,\mathrm{Re}_{D_h}}$ بدست آورد و در روابط مربوط به لوله های گرد به جای D، D_{eff} قرار داد. لازم به ذکر است برای مثلث و مستطیل $f\,\mathrm{Re}_{D_h}$ را از جدولی که در کتابهای مکانیک سیالات موجود است، می توان بدست آورد. این جدول همچون سایر جداول در مجموعه جداول موجود در وبلاگ وجود دارد.

تمرین

اگر مقطع یک کانال تهویه از جنس ورق فولادی، حامل هوای 20C به شکل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 12in و به طول 120 ft باشد و یک دمنده 1 اسب بخار توان را به هوا بدهد، دبی جریان را بر حسب $\frac{ft^3}{s}$ بدست آورید.

Rectangular		Isosceles triangle	
			
b/a	$f\mathrm{Re}_{D_h}$	θ, deg	$f\mathrm{Re}_{D_h}$
0.0	96.00	0	48.0
0.05	89.91	10	51.6
0.1	84.68	20	52.9
0.125	82.34	30	53.3
0.167	78.81	40	52.9
0.25	72.93	50	52.0
0.4	65.47	60	51.1
0.5	62.19	70	49.5
0.75	57.89	80	48.3
1.0	56.91	90	48.0

جلسه پنجم

افتهای موضعی(Minor Losses)

در سیستم های لوله کشی علاوه بر افت اصطکاکی مودی که ناشی از لزجت سیال است، افت های دیگری بـه نـام افتهـای موضعی وجود دارند که غالبا به دلایل زیر ظاهر می شوند:

۱- ورودی و خروجی لوله

۲- بزرگ و کوچک شدن ناگهانی سطح مقطع لوله

۳- اتصالاتی که غالبا در سیستم های لوله کشی به کار می روند. مانند: زانویی، سه راهی و غیره.

۴- استفاده از شیر ها در حالت های مختلف

۵- بزرگ و کوچک شدن تدریجی سطح مقطع

در برخی از موارد این افتها به اندازه ای بزرگ هستند که می توانند حتی بیش از اصطکاک مودی افـت فشـار ایجـاد کننـد، مانند استفاده از شیر نیمه باز. مقدار هد ناشی از افت های موضعی از رابطه زیر بدست می آید:

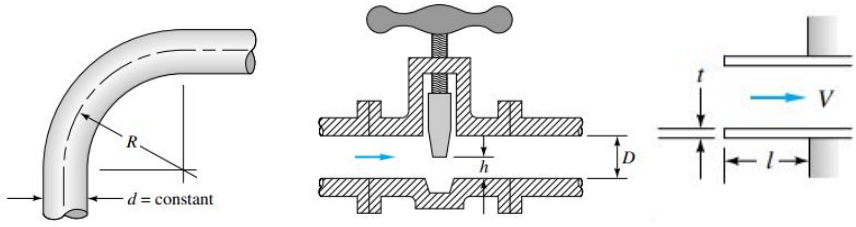
$$\boxed{h_m = \sum k_m \frac{V^2}{2g}}$$

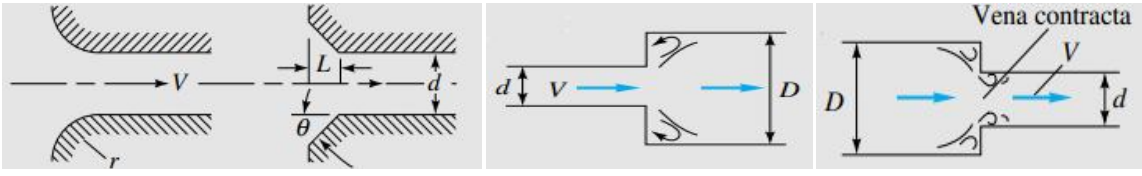
k_m را ضریب افت موضعی(Loss Coefficient) می نامند. بنابراین معادله برنولی در حالتی که افتهای موضعی اهمیت داشته باشند بصورت زیر نوشته می شود:

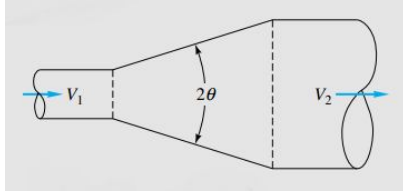
$$\boxed{\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f + h_m}$$

$$h_f + h_m = \sum h = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} + \sum k_m \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}(f\frac{L}{D} + \sum k_m)$$

ضرایب نسبت k برای شیرهای باز، زانویی ها و سه راهی ها بستگی به قطر این وسایل، برای شیرهای نیمه باز بسـتگی بـه قطر لوله و درصد بازی و برای خم ها، ورودی ها، انبساط ها و انقباض ها بستگی به ابعاد هندسی این وسـایل دارد کـه بـا معلوم بودن این پارامترها می توان از روی جداول و یا نمودارهای مربوطه که در وبلاگ موجود است مقدار ضریب افت را بدست آورد. ضریب افت را برای انواع خروجیها برابر یک در نظر می گیرند.

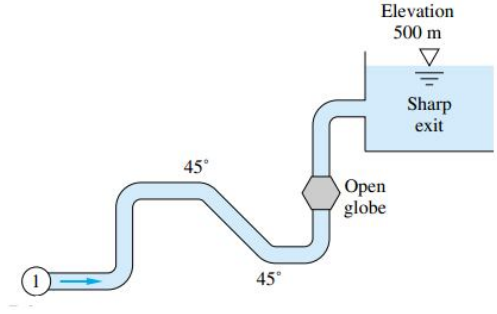






تمرین

در شکل این مسئله 1200m لوله چدنی به قطر 5cm، دو زانویی 45 درجه و چهار زانویی 90 درجه شعاع بزرگ و فلنج دار، یک شیر بشقابی فلنج دار کاملا باز و یک خروجی تیز در مخزن دارد. اگر بلندی نقطه 1، 400m باشد، فشار نسبی لازم در نقطه 1 برای رساندن $0.005\frac{m^3}{s}$ آب 20C به مخزن چقدر است؟



سیستم های چند لوله ای(Multiple-Pipe Systems)

لوله های معادل (Equivalent Pipes)

یک لوله با لوله دیگر یا با یک سیستم لوله ای معادل است هرگاه برای یک افت داده شده، دبی جریان در لوله معادل، با دبی جریان در لوله اصلی یکسان باشد یا می توان گفت که یک لوله با لوله دیگر یا با یک سیستم لوله ای معادل است وقتی برای یک دبی جریان معین، افت هد بوجود آمده در لوله معادل و در لوله اصلی با هم مساوی باشند. از این رو یا قطر یک لوله معادل را می توان مشخص کرد و طول لازم را بدست آورد یا طول معادل را می توان انتخاب کرد و از روی آن قطر لازم را پیدا کرد.

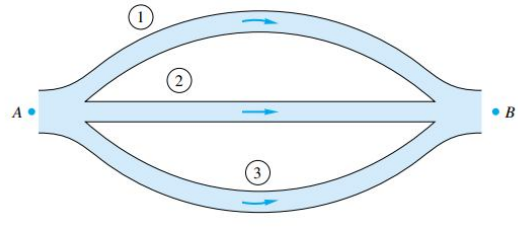
لوله های سری(Pipes in Series)

لوله هایی سری هستند که انتها به انتها متصل شده باشند به طوری که سیال در یک خط پیوسته بدون هیچگونه انشعاب حرکت کند، آهنگ جریان در لوله های سری ثابت است. در این گونه لوله ها روابط زیر را داریم:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \cdots$$
$$h_f = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + \cdots$$

لوله های موازی(Pipes in Parallel)

لوله هایی موازی هستند هرگاه طوری به هم متصل شده باشند که جریان در دو لوله جداگانه یا بیشتر منشعب شود و سپس مجددا در پایین دست جمع شود مانند شکل زیر.



در حالت موازی دبی کل به دبی های Q_1, Q_2, Q_3 و... تقسیم می شود و افت هد بین دو اتصال ابتدا و انتها برای هر خط لوله بین این دو اتصال یکسان است.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$
$$h_f = h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3} = \cdots$$

اتصال سه مخزن به یکدیگر(Three-Reservoir Junction)

یک سیستم لوله را که از تجزیه یک یا چند لوله به دو یا چند لوله دیگر به وجود می آید سیستم لوله های انشعاب می گویند معمولا لوله ها از مخازن منشعب می شوند.

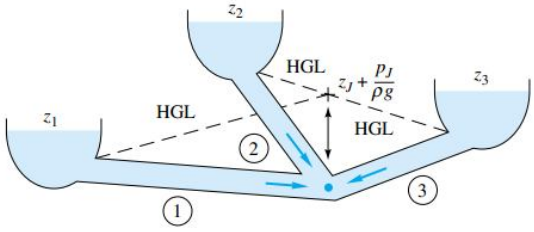
سیستم ساده ای از لوله های انشعابی در شکل زیر نشان داده شده است. این مخازن در ارتفاعات مختلف قرار گرفته و دارای فشارهای مختلفی می باشد که در نقطه J به یکدیگر متصل می شوند ولی ارتفاع این نقطه اتصال مشخص نمی باشد. جهت واقعی جریان به فشار در مخازن و ارتفاع آنها همچنین قطر، طول و نوع لوله بستگی دارد. برای حل این گونه مسائل به روش زیر عمل می کنیم:

۱- ارتفاع خط تراز هیدرولیکی را برای نقطه J فرض می کنیم.(h_J)

۲- با محاسبه افت هد نسبت به نقطه اتصال و استفاده از معادله اصطکاک دارسی وایسباخ و با حدس f برای هر لوله سرعت V را بدست آورده سپس با داشتن V دبی جریان عبوری یعنی Q از هر لوله را بدست می آوریم.

۳- مجموع دبی ها را بدست آورده اگر منفی شد مقدار h_J را کاهش و اگر مثبت شد مقدار h_J را افزایش می دهیم.

۴- این کار را تا رسیدن به $\sum Q = 0$ تکرار می کنیم.

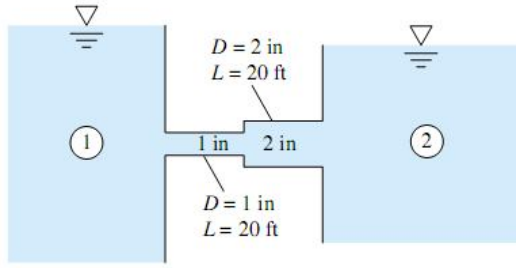


تمرین

یک لوله بتنی به طول 225m و قطر 350mm و یک لوله بتنی به طول 400m و به قطر 500mm به طور سری به هم متصل شده اند، قطر لوله معادل به طول625m را پیدا کنید.

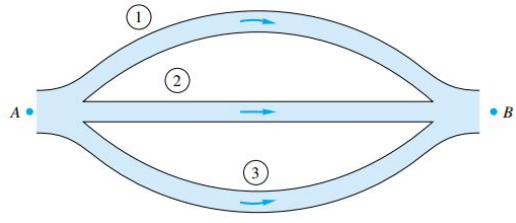
تمرین

دو مخزن شکل این مسئله به وسیله لوله هایی از جنس چدن چکش خوار به طول 20ft به هم متصل شده اند. با فرض آنکه سیال آب 20C و مخزن1 60ft نسبت به مخزن2 بالاتر باشد با در نظر گرفتن افت های موضعی دبی جریان را بر حسب $\frac{ft^3}{s}$ بیابید.(ورودی و خروجی لبه تیز است.)



تمرین

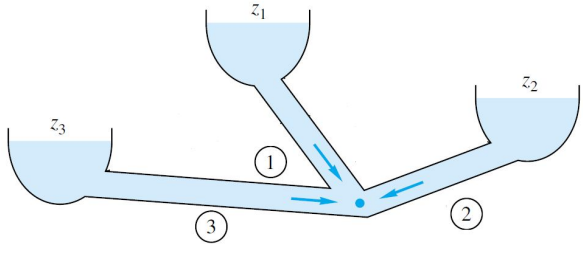
اطلاعات لوله های سیستم سه شاخه ای شکل زیر داده شده است. اگر افت هد کلی سیستم 30m باشد، دبی کلی (Q) را حساب کنید. افتهای موضعی را در نظر نگیرید.



لوله	$L(m)$	$D(cm)$	$\varepsilon(mm)$
1	200	6	0.12
2	120	6	0.24
3	180	8	0.12

تمرین

در این شکل دبی جریانها را برای داده های زیر پیدا کنید.



$L_1 = 200m$	$L_2 = 300m$	$L_3 = 400m$
$D_1 = 300mm$	$D_2 = 350mm$	$D_3 = 400mm$
$\frac{\varepsilon_1}{D_1} = 0.0002$	$\frac{\varepsilon_2}{D_2} = 0.00015$	$\frac{\varepsilon_3}{D_3} = 0.0001$
$Z_1 = 700m$	$Z_2 = 400m$	$Z_3 = 100m$
$P_1 = 7atm$	$P_2 = 2atm$	$P_3 = 3atm$

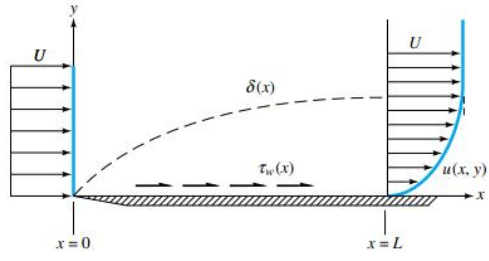
جلسه ششم

فصل دوم: جریان خارجی

جریان خارجی(External Flow)

در فصل گذشته جریان داخلی یعنی جریان در داخل لوله ها و مجراها مورد بررسی قرار گرفت در این فصل به بررسی جریانهای خارجی می پردازیم. جریان خارجی به جریانی اطلاق می شود که سیال جسم جامد را احاطه کرده باشد مانند جریان روی یک صفحه تخت و یا جریان عبوری از روی یک استوانه و یا جریان حول یک کره.

یک صفحه مسطح که در معرض جریان یک سیال با سرعت U یا U_∞ قرار دارد را در نظر بگیرید، سرعت سیال را سرعت جریان آزاد (Free streem Velocity) یا سرعت پتانسیل(Potential Velocity) می نامند. هنگامی که جریان به صفحه می رسد پیرامون صفحه لایه نازکی تشکیل می شود که به آن لایه مرزی (Boundary Layer) می گویند، درست درلبه صفحه سرعت سیال صفر است که این نقطه را نقطه سکون (Stagnation Point) می نامند از این نقطه لایه مرزی آغاز می شود که تا انتهای صفحه ادامه خواهد داشت. فاصله عمودی این لایه تا صفحه را ضخامت لایه مرزی(Boundary Layer Thickness) می نامند، ضخامت لایه مرزی را با δ نشان می دهند که تابعی از x است و رابطه آن با x بطور مستقیم است یعنی با حرکت در طول صفحه بر ضخامت لایه مرزی افزوده می شود.



گرادیان سرعت (Velocity Gradient)

اصولا علت تشکیل لایه مرزی لزج بودن سیال است. می دانیم که شرط عدم لغزش(No slip condition) بیان می کند که سرعت لایه سیال در تماس با سطح جامد باید با سرعت سطح جامد برابر باشد، با توجه به اینکه سطح جامد در اینجا ساکن است لذا سرعت لایه سیال در تماس با سطح صفر است به تدریج سرعت زیاد می شود تا در روی لایه مرزی سرعت لایه سیال به حدود سرعت جریان آزاد برسد.

بنابراین در داخل لایه مرزی گرادیان سرعت وجود دارد بدین معنا که با فاصله گرفتن از سطح بر مقدار سرعت افزوده می شود. در خارج از لایه مرزی هیچ گرادیان سرعتی وجود ندارد و سرعت سیال با سرعت جریان آزاد (U) برابر است.

رژیم جریان

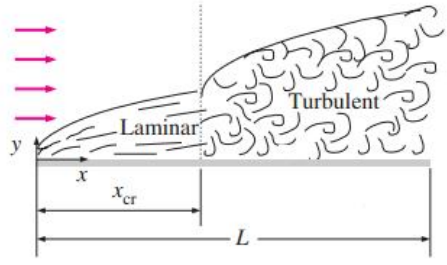
در لایه مرزی دونوع رژیم جریان وجود دارد.

جریان آرام (Laminar Flow)

جریان آرام به جریانی گفته می شود که در آن لایه های سیال تداخل ایجاد نکرده و لایه ها به صورت منظم حرکت می کنند در جریان آرام اثری از اغتشاش و آشفتگی به چشم نمی خورد. طول این ناحیه معمولا کم است.

جریان آشفته (Turbulent Flow)

بعد از ناحیه آرام جریان به جز در قشر بسیار نازکی اطراف سطح آشفته است. لایه های سرعت در هم فرو رفته و اغتشاشات بر جریان حاکم است. تغییرات سرعت در این ناحیه کمتر و در نتیجه گرادیان سرعت یکنواخت تر است.



عدد رینولدز(Reynolds Number)

عدد رینولدز یک عدد بدون بعد است که برابر نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجی است و معیاریست برای تعیین رژیم جریان، این عدد که باRe نشان داده می شود برای یک صفحه مسطح به صورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{\mathrm{Re}_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} = \frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$Re_x =$ رینولدز در نقطه x

$\mu =$ لزجت دینامیکی سیال

$\nu =$ لزجت سینماتیکی سیال

$\rho =$ دانسیته سیال

$U_\infty =$ سرعت جریان آزاد

$x =$ فاصله از لبه صفحه

فرض کنید در نقطه ای به فاصله x از لبه صفحه بخواهیم رژیم جریان را تعیین کنیم Re_x را طبق رابطه فوق بدست می آوریم.

اگر $\mathrm{Re}_x < 500000$ باشد جریان در آن نقطه آرام است.

اگر $\mathrm{Re}_x > 500000$ باشد جریان در آن نقطه آشفته است.

تعیین ضخامت لایه مرزی

همانطور که قبلا بیان شد با افزایش x بر مقدار ضخامت لایه مرزی افزوده می شود، روابط متعددی برای تعیین ضخامت لایه مرزی پیشنهاد شده است که می توان به عنوان نمونه از روابط زیر بهره گرفت:

اگر جریان آرام باشد:

$$\boxed{\delta = 5xRe_x^{-0.5}}$$

واگر جریان آشفته باشد از یکی از دو رابطه زیر بدلخواه می توان استفاده کرد:

$$\boxed{\delta = 0.16xRe_x^{\frac{-1}{7}}}$$

$$\delta = 0.37xRe_x^{\frac{-1}{5}}$$

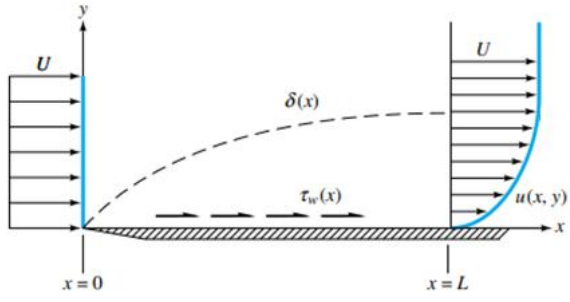
تمرین

هوا با دمای 20C و سرعت 25 متر بر ثانیه از روی یک صفحه صاف و نازک عبور می کند. اگر ضخامت لایه مرزی در نقطه x الف)10cm و ب)1mm باشد، فاصله x از لبه صفحه را محاسبه کنید.

برآورد انتگرالی معادله اندازه حرکت(Momentum Integral Estimates)

یک لایه مرزی به ضخامت $\delta(x)$ را روی یک صفحه مسطح در نظر بگیرید، شرط عدم لغزش سیال روی دیواره موجب می شود سرعت سیال روی جداره صفر باشد، از طرفی سرعت در ضخامت $\delta(x)$ به سرعت جریان خارجیU می رسد.

نیروی پسا (Drag Force) روی صفحه (نیرویی که از طرف سیال بر صفحه وارد می شود) به صورت زیرتعریف می شود:



$$D(x) = \rho b \int_0^{\delta} u(U_\infty - u)dy$$

در این رابطه b پهنای صفحه (عمود بر صفحه کاغذ) است.

در سال 1921 کارمان معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$D(x) = \rho b U_\infty^2 \theta$$

که در آن

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

θ را ضخامت اندازه حرکت (Momentum Thickness) می نامند. از طرف دیگر نیروی پسا برابر حاصلضرب تنش برشی در مساحت است، یعنی:

$$D(x) = \int_0^x \tau_w b dx$$

τ_w تنش برشی(Shear Stress) است که بدلیل لزج بودن سیال است و bdx مساحت المان صفحه است. با مشتق گیری از دو طرف رابطه فوق نسبت به x خواهیم داشت:

$$\frac{dD(x)}{dx} = b\tau_w$$

از دو طرف رابطه کارمان نسبت بهx مشتق می گیریم:

$$\frac{dD(x)}{dx} = \rho b U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

از مقایسه دو رابطه فوق نتیجه می شود:

$$\boxed{\rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} = \tau_w}$$

رابطه فوق که به معادله انتگرالی اندازه حرکت موسوم است برای جریان آرام یا آشفته روی صفحه مسطح صادق است.

جریان آرام

کارمان پروفیل سرعت در جریان آرام را به صورت

$$u \cong U_\infty \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)$$

تقریب زد در نتیجه این فرض خواهیم داشت:

$$\theta = \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right)dy = \frac{2}{15}\delta$$

با این پروفیل، تنش برشی طبق تعریف بصورت زیر بدست می آید:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \frac{2\mu U_\infty}{\delta}$$

از طرفی داشتیم:

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

بنابراین:

$$\frac{2\mu U_\infty}{\delta} = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U_\infty^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{15}\delta\right) = \frac{2}{15}\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow$$

$$\delta d\delta = 15 \frac{\mu}{\rho}\frac{dx}{U_\infty} = 15 \frac{\upsilon}{U_\infty} dx$$

$$\int_0^\delta \delta d\delta = \int_0^x 15 \frac{\upsilon}{U_\infty} dx \Rightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{15\upsilon}{U_\infty} x \Rightarrow \delta^2 = \frac{30\upsilon x}{U_\infty}\frac{x}{x}$$

$$\delta^2 = \frac{30\upsilon}{U_\infty x} x^2 \Rightarrow \delta^2 = \frac{30x^2}{\frac{U_\infty x}{\upsilon}} \Rightarrow \delta^2 = \frac{30x^2}{\mathrm{Re}_x} \Rightarrow \delta = \frac{5.5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

$$\boxed{\delta = 5.5x\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}}$$

ضریب اصطکاک(Skin Friction Coefficient)

ضریب اصطکاک در جریان خارجی را با C_f نشان می‌دهند و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

اما در جریان آرام تنش برشی را بصورت زیر بدست آوردیم:

$$\tau_w = \mu\left(\frac{2U_\infty}{\delta}\right)$$

و در نتیجه با جایگذاری داریم:

$$C_f = \frac{2\mu\left(\frac{2U_\infty}{\delta}\right)}{\rho U_\infty^2} = \frac{4\vartheta}{\delta U_\infty}$$

از طرفی بدست آوردیم:

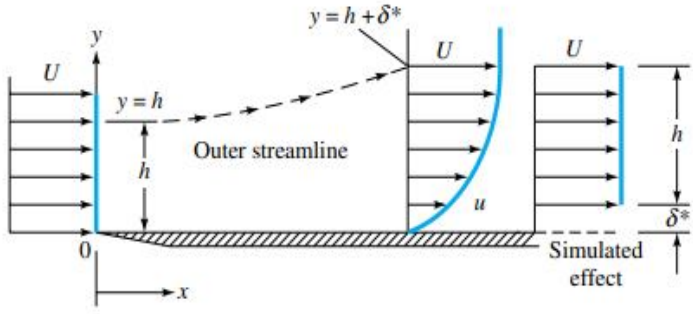
$$\delta = 5.5xRe_x^{-0.5}$$

با جایگذاری δ در این رابطه و ساده سازی خواهیم داشت:

$$\boxed{C_{f_x} = 0.73Re_x^{-0.5}}$$

ضخامت جابجایی(Displacement Thickness)

ضخامت جابه‌جایی δ^* فاصله ای است که خطوط جریان خارجی باید به آن اندازه به سمت خارج منحرف شوند تا اصل بقای جرم بین جریان های ورودی و خروجی ارضاء گردد.



$$\delta = \delta^* + h$$

$$\int_0^h \rho U b dy = \int_0^\delta \rho u b dy \Rightarrow \int_0^h U dy = \int_0^\delta u dy$$

$$Uh = \int_0^\delta u dy = \int_0^\delta (U + u - U) dy = \int_0^\delta U dy + \int_0^\delta (u - U) dy$$

$$Uh = U\delta + \int_0^\delta (u - U) dy = U(\delta^* + h) + \int_0^\delta (u - U) dy \Rightarrow Uh = U\delta^* + Uh + \int_0^\delta (u - U) dy \Rightarrow$$

$$U\delta^* + \int_0^\delta (u - U) dy = 0 \Rightarrow U\delta^* = \int_0^\delta (U - u) dy \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy}$$

با استعمال پروفیل سرعت کارمان، δ^* را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}) dy = \frac{\delta}{3} \Rightarrow$$

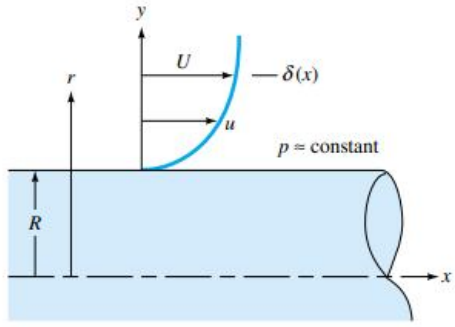
$$\boxed{\delta^* = 1.83xRe_x^{-0.5}}$$

تمرین

پروفیل سرعت را سینوسی $(u = U\sin\frac{\pi}{2\delta}y)$ در نظر گرفته و مقادیر δ، δ^*، θ و C_f را بدست آورید.

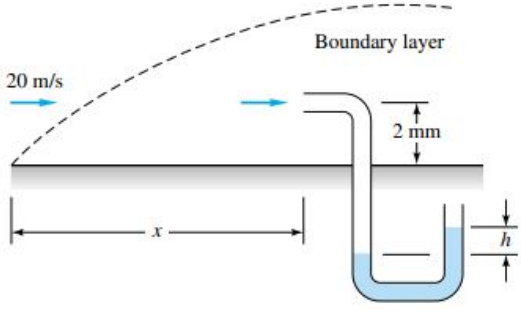
تمرین

شکل پروفیل سرعت را بصورت معادله چند جمله ای $u = A + By + Cy^2 + Dy^3$ پیدا کرده و با استفاده از تحلیل انتگرالی اندازه حرکت δ، δ^*، θ و C_f را بدست آورید.



تمرین

هوا در 20C و 1 اتمسفر با سرعت 20m/s از روی صفحه مسطحی عبور می کند. یک لوله پیتوت حاوی روغن قرمز (SG=0.827) به فاصله 2mm از دیواره نصب شده است و h=16mm. با این اطلاعات موقعیت x را تعیین کنید. جریان را آرام فرض کنید.



جلسه هفتم

معادلات لایه مرزی(Boundary Layer Equations)

سه روش مهم برای بررسی جریانهای خارجی وجود دارد. حل عددی(Numerical Solution)، تجربی(Experimentation) و تئوری لایه مرزی(Boundary Layer Theory)

روش محاسباتی یا حل عددی با کامپیوتر خارج از حوصله این درس است از طرفی روش های تجربی نیاز به آزمایشگاههای مدرن دارد. بنابراین از روش سوم یعنی تئوری لایه مرزی استفاده کرده و معادلات لازم را استخراج می کنیم. لازم به ذکر است هنوز هیچ راه حل تحلیلی برای جریان آشفته ارائه نشده است و تحلیل آن صرفا بر اساس روابط تجربی است.

مولفه افقی سرعت در راستای x را با u و مولفه عمودی سرعت در راستای y را با v نشان می دهیم:

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

معادله مومنتوم در جهت x:

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

معادله مومنتوم در جهت y:

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

معادلات فوق با تقریبهای معقول ساده می شوند.

$$v \ll u \ , \ x \gg y \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

با چشمپوشی از وزن سیال در داخل لایه مرزی (چون ضخامت لایه مرزی بسیار نازک است) مومنتوم در جهت y به صورت $\frac{\partial P}{\partial y}=0$ در می آید، یعنی فشار در امتداد لایه مرزی تغییر نمی کند (P فقط تابعی از x است.)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dP}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

از معادله برنولی می دانیم که:

$$\frac{dP}{dx}=-\rho U\frac{dU}{dx}$$

در نتیجه:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho U\frac{dU}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

از طرفی می دانیم در جریان آرام:

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

و با جایگذاری در معادله مومنتوم بدست می آید:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

معادله فوق همراه با شرایط مرزی زیر معادله حاکم بر لایه مرزی خواهد بود:

$$\begin{array}{lll} at & y=0 & u=0 \\ at & y=\delta & u=U_\infty \\ at & y=\delta & \frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{array}$$

معادله فوق را پرانتل در سال 1904 بدست آورد ولی قادر به حل این معادله نبود، سرانجام بلازیوس در سال 1908 با یک تغییر متغیر استادانه معادله فوق را حل کرد و نشان داد که:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta=5xRe_x^{-0.5} \\ C_f=0.664Re_x^{-0.5} \\ \delta^*=1.721xRe_x^{-0.5} \\ \tau_w=0.332\,\rho^{0.5}\,\mu^{0.5}\,U^{1.5}\,x^{-0.5} \\ D(x)=0.664\,b\,\rho^{0.5}\,\mu^{0.5}\,U^{1.5}\,x^{0.5} \\ C_D=1.328Re_L^{-0.5} \\ \theta=0.664xRe_x^{-0.5} \end{array}}$$

لازم به ذکر است که تمامی روابط فوق برای جریان آرام روی صفحه کاربرد دارد ونمی توان از این روابط برای جریان آشفته استفاده کرد.

در روابط فوق C_D ضریب پسا (Drag Coefficient) نامیده می شود در حقیقت ضریب پسا یک ضریب اصطکاک متوسط است و برای محاسبه مقدار کل نیروی وارد بر سطح از طرف سیال در جریان آرام باید ضریب پسا را ابتدا از رابطه $C_D=1.328Re_L^{-0.5}$ محاسبه نمود و سپس کل نیروی پسای وارد بر یک طرف صفحه را از رابطه $\boxed{D=\frac{1}{2}C_D\rho U^2A}$ بدست آورد.

ضریب شکل(Shape Factor)

نسبت ضخامت جابجایی به ضخامت اندازه حرکت را ضریب شکل می نامند که برای جریان آرام روی صفحه این مقدار برابر 2.59 است.

$$\boxed{H=\frac{\delta^*}{\theta}}$$

تمرین

صفحه مسطحی به ابعاد45 در90 سانتیمتر مربع درون جریان گلیسیرین با دمای 20C و سرعت 7 متر بر ثانیه حرکت می کند. مقدار پسای لزجتی را وقتی الف) عرض صفحه و ب) طول صفحه موازی با جهت جریان قرار گیرد، محاسبه کنید.

جریان آشفته

در حالتی که جریان آشفته باشد می توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\tau_w=\rho U^2\frac{d\theta}{dx}$$

$$\theta=\int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

بعنوان اولین تقریب پروفیل سرعت را در ناحیه آشفته لگاریتمی فرض می کنیم:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} Ln \frac{yu^*}{\upsilon} + B$$

$$k = 0.41, B = 5$$

$$u^* = (\frac{\tau_w}{\rho})^{\frac{1}{2}}$$

روی لایه مرزی، سرعت برابر سرعت جریان آزاد است:

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{k} Ln \frac{\delta u^*}{\upsilon} + B$$

با جایگذاری پروفیل سرعت در رابطه ضخامت مومنتوم و انجام مراحلی شبیه جریان آرام خواهیم داشت:

$$\frac{u}{u^*} = (\frac{2}{C_f})^{\frac{1}{2}}$$

$$(\frac{2}{C_f})^{\frac{1}{2}} \approx 2.44 Ln\left[\frac{U_\infty \delta}{\upsilon}(\frac{C_f}{2})^{\frac{1}{2}}\right] + 5$$

رابطه بدست آمده رابطه پیچیده ضمنی برای یافتن C_f است که حل آن به سعی و خطا نیاز دارد. لذا می توان به جای حل این معادله از تقریب های زیر توسط پرانتل استفاده کرد.

قانون توان $\frac{1}{7}$ پرانتل

پروفیل سرعت را بصورت زیر فرض کرده و مراحل فوق تکرار می شود:

$$\boxed{\frac{u}{U} \approx (\frac{y}{\delta})^{\frac{1}{7}}}$$

$$\theta = \int_0^\delta (\frac{y}{\delta})^{\frac{1}{7}}\left[1 - (\frac{y}{\delta})^{\frac{1}{7}}\right] dy = \frac{7}{72}\delta$$

$$\boxed{\delta = 0.16 x \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{7}}}$$

$$\boxed{\theta = 0.01556 x \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{7}}}$$

$$\boxed{C_f \approx 0.027 \ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{7}}}$$

$$\boxed{\tau_w = 0.0135 \mu^{\frac{1}{7}} \rho^{\frac{6}{7}} U^{\frac{13}{7}} x^{-\frac{1}{7}}}$$

$$\boxed{C_D = 0.031 \mathrm{Re}_L^{-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6} C_f(L)}$$

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^\delta \left[1 - (\frac{y}{\delta})^{\frac{1}{7}}\right] dy = \frac{1}{8}\delta$$

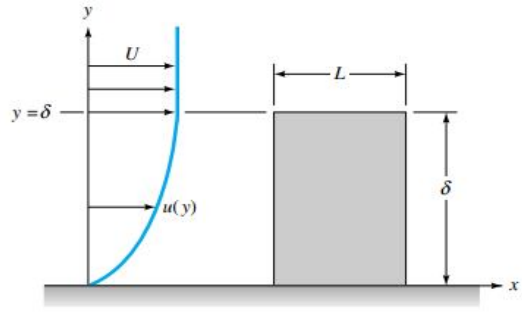
$$\boxed{\delta^* = 0.02 x \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{7}}}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\frac{1}{8}\delta}{\frac{7}{72}\delta} \Rightarrow$$

$$\boxed{H = 1.3}$$

تمرین

در شکل این مساله صفحه مسطحی به طول L و ارتفاع δ روی دیواره ای قرار گرفته و با یک لایه مرزی که به سمت آن می آید، موازی است. فرض کنید که جریان روی این صفحه کاملا آشفته بوده و سرعت جریان نزدیک شونده نیز چنین تابعی است: $\frac{u}{U} \approx (\frac{y}{\delta})^{\frac{1}{7}}$. فرمولی برای ضریب پسای این صفحه پیدا کرده و نتیجه حاصل را با ضریب پسای همان صفحه وقتی که در جریان یکنواخت U_0 غوطه ور است مقایسه کنید.



سطوح زبر(Roughness Surfaces)

پارامتر مربوط به زبری در جریان روی صفحه مسطح $\frac{x}{\varepsilon}$ یا $\frac{L}{\varepsilon}$ است که درآن εزبری میانگین سطح می باشد که به جنس بستگی دارد. L طول صفحه و x فاصله خاصی از صفحه تا لبه است.

C_f و C_D بوسیله روابط تجربی زیر تعیین می شوند:

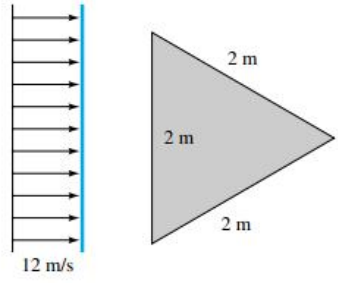
$$C_f \approx (2.87 + 1.58 Log \frac{x}{\varepsilon})^{-2.5}$$

$$C_D \approx (1.89 + 1.62 Log \frac{L}{\varepsilon})^{-2.5}$$

مشابه نمودار مودی در اینجا هم برای جریان روی صفحه مسطح نموداری وجود دارد. این نمودار ضریب پسای لایه مرزی آرام و آشفته روی صفحات سطح صاف و زبر را بر حسب عدد رینولدز ارائه می دهد. این نمودار در مجموعه نمودارها و جداول مکانیک سیالات موجود در وبلاگ قرار دارد.

تمرین

در شکل مسئله زیر صفحه ای نازک به شکل مثلث متساوی الاضلاع در جریان آبی با سرعت 12m/s و دمای 20 درجه سانتیگراد و موازی با آن غوطه ور است. اگر عدد رینولدز بحرانی برابر 5×10^5 باشد، مقدار پسای روی این صفحه را حساب کنید.



تمرین

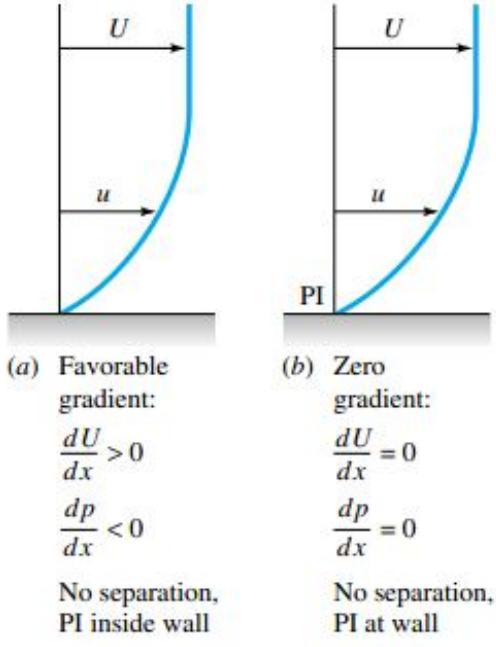
کرجی مسطحی به پهنای 14 متر و طول 40 متر با سرعت 3گره دریایی (هر گره دریایی معادل0.5144 متربرثانیه است) در آب 20 درجه سانتیگراد حرکت می کند. پسای اصطکاکی در کف کرجی را برای الف) یک دیواره صاف و ب) دیواره با زبری به ارتفاع 3 میلیمتر حساب کنید.

تمرین

اژدری با 55 سانتیمتر قطر و 5 متر طول با سرعت 45 گره دریایی در آب 20 درجه سانتیگراد دریا حرکت می کند. قدرت مورد نیاز این اژدر را برای غلبه بر پسای اصطکاکی بدست آورید. $(\varepsilon = 0.5mm)$

جدایش (Separation)

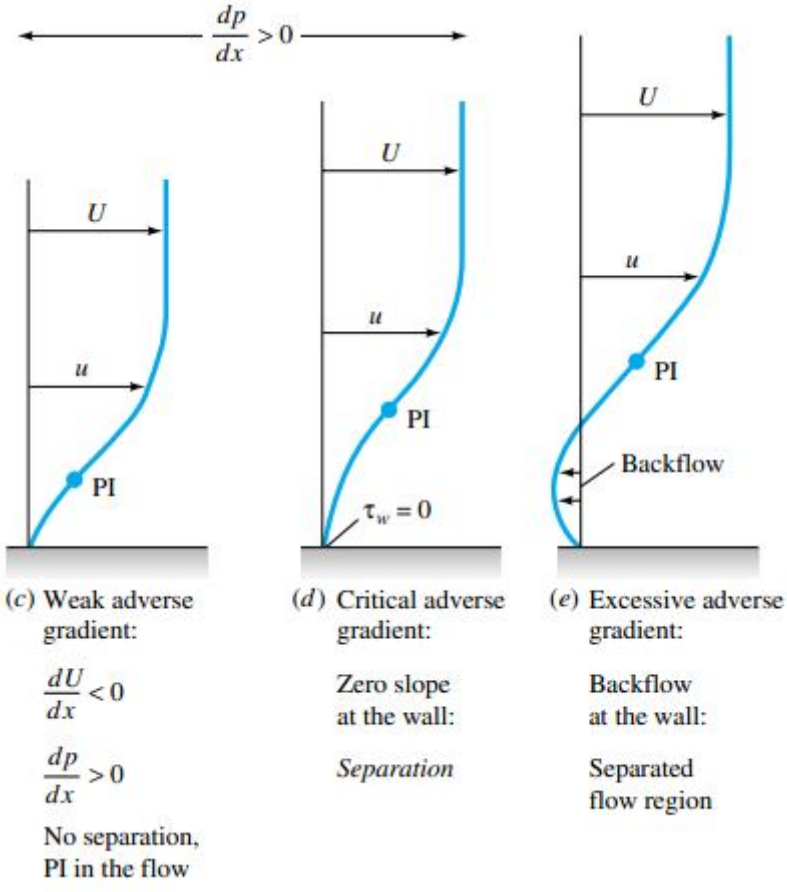
فویلی را که در معرض یک جریان آزاد قرار گرفته در نظر بگیرید. در نقطه برخورد جریان به لبه فویل سرعت صفر و فشار ماکزیمم است، این نقطه را نقطه سکون می نامند. بتدریج بر مقدار سرعت افزوده شده و از مقدار فشار کاسته می شود تا در نهایت سرعت به ماکزیمم مقدارخود برسد در این نقطه فشار مینیمم است. از نقطه سکون تا این نقطه گرادیان سرعت مثبت و گرادیان فشار منفی است. $(\frac{dP}{dx} < 0, \frac{dU}{dx} > 0)$ این ناحیه را گرادیان فشار مطلوب (Favorable Gradient Pressure) می نامند.



از این نقطه به بعد ازسرعت کاسته شده و بر مقدار فشار افزوده می شود. $(\frac{dP}{dx} > 0, \frac{dU}{dx} < 0)$ این ناحیه را گرادیان فشار نامطلوب (Adverse Gradient Pressure) می نامند بنابراین سیال تدریجا مومنتوم خود را از دست می دهد. این

کاهش مومنتوم تا جایی ادامه دارد که سیال قادر نیست شکل خود را حفظ کند و در نتیجه لایه مرزی از سطح جدا می شود. این پدیده را جدایی می نامند. در نقطه جدایی: $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$

جدایی لایه مرزی از سطح پدیده نامطلوبی است. زیرا بر مقدار ضخامت لایه مرزی به شدت می افزاید که این باعث افزایش نیروی پسا می شود. بعد از جدایش در پشت جسم خلا نسبی حاصل می شود و اختلاف فشار بین جلو و عقب جسم باعث ایجاد یک پسای فشاری (Shape Drag) خواهد شد. تحلیل انتگرالی لایه مرزی تا نقطه جدایی صادق است و بعد از آن معتبر نیست.گرادیان فشار نامطلوب اگرچه شرط لازم برای جدایی است اما شرط کافی نیست.

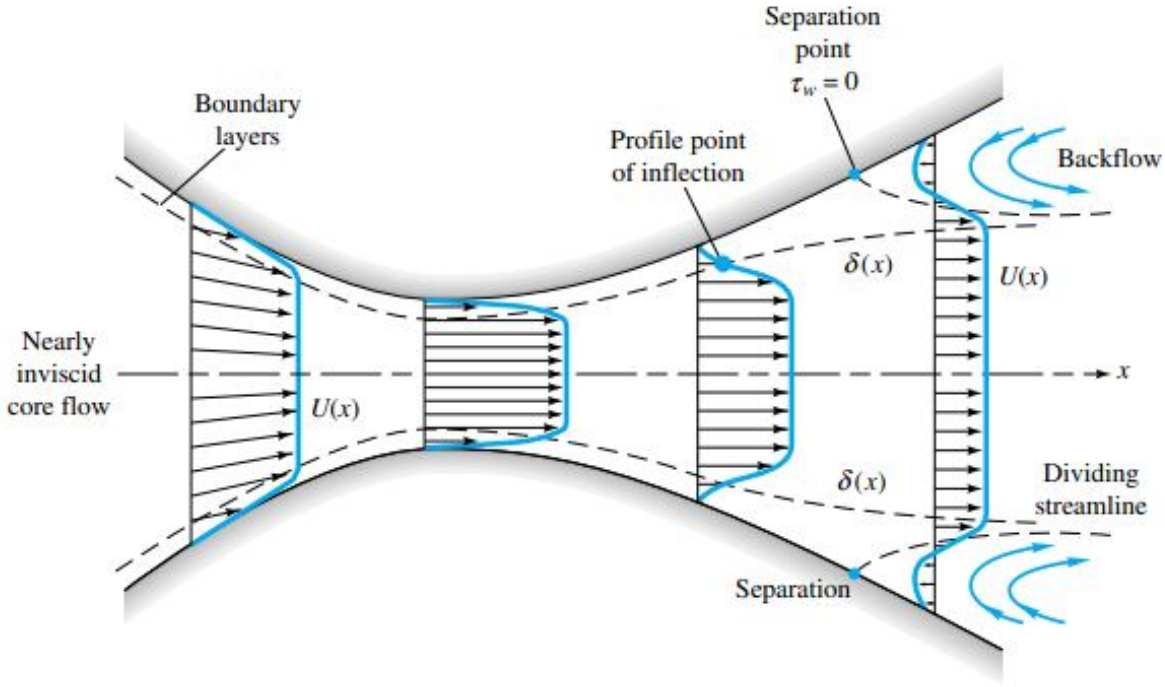


رشد و جدایی لایه مرزی در یک دیفیوزر همگرا واگرا

(Boundary Layer Growth and Separation in a Nozzle-Diffuser Configuration)

در یک دیفیوزر همگرا واگرا سه ناحیه وجود دارد که لایه مرزی بصورت زیر است:

- همگرا: فشار کاهش یافته چون سطح مقطع بتدریج کاهش می یابد و سرعت افزایش می یابد (گرادیان فشار مطلوب) و در نتیجه امکان جدایی وجود ندارد.
- گلوگاه: سطح و فشار و سرعت ثابت (گرادیان سرعت و فشار صفر).
- واگرا: افزایش فشار و سطح و کاهش سرعت (گرادیان فشار مخالف) و امکان ایجاد جدایی.



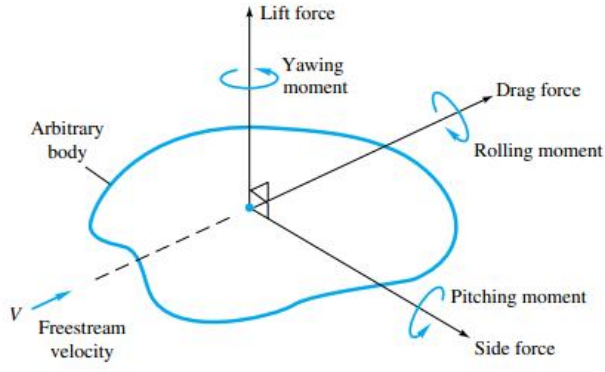
Nozzle:	*Throat*:	*Diffuser*:
Decreasing pressure and area	Constant pressure and area	Increasing pressure and area
Increasing velocity	Velocity constant	Decreasing velocity
Favorable gradient	Zero gradient	Adverse gradient (boundary layer thickens)

جلسه هشتم

نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم از طرف سیال

(Forces and Moments on a Body Immersed in a Uniform Flow)

جسم دلخواهی را در نظر بگیرید که درون سیالی در حال حرکت است (یا جسم ساکن و سیال متحرک است) محوری را موازی با جریان آزاد سیال در نظر می گیریم که جهت مثبت آن به سمت پایین دست جریان فرض می شود. نیروی وارد بر جسم در امتداد این محور را پسا (Drag Force) و گشتاور حول این محور را گشتاور غلتشی(Rolling Moment) می نامند. به نیروی عمود بر نیروی پسا که تحمل وزن جسم را بر عهده دارد نیروی بالابر یا برا (Lift Force) و به گشتاور حول این محور گشتاور پیچشی(Yawing Moment) اطلاق می شود و بالاخره سومین مولفه نیرو، نیروی جانبی(Side Force) است که به گشتاور حول محور آن گشتاور گردشی (Pitching Moment) گفته می شود.



چنانچه جسم دارای دو صفحه تقارن باشد مانند اجسام دوکی شکل (بالها) در این حالت جسم فقط دارای نیروی پسا و فاقد نیروی بالابر است.

همانگونه که در لوله ها ضریب اصطکاک مودی f در رینولدزهای کم فقط تابعی از عدد رینولدز است، در اینجا هم ضریب پسا در سرعت های کم فقط تابعی از رینولدز خواهد بود.

$C_D = f(\mathrm{Re})$ که $\mathrm{Re} = \dfrac{VL}{\upsilon}$

L طول مشخصه جسم و بعدی از جسم است که در امتداد جریان (موازی) قرار می گیرد، ضریب پسا را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\boxed{C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}}$$

D نیروی پسا، ρ جرم حجمی سیال، V سرعت جریان آزاد و A یکی از مساحت های زیر است:

سطح روبرویی جسم یا عمود بر جهت جریان مانند کره ها، استوانه ها، ماشین ها ، موشک ها، پرتابه ها و اژدرها.

سطح موازی با جهت جریان که برای اجسام پهن مناسب است مانند بالها و هیدروفویلها.

سطح خیس شده که برای کشتی ها مناسب است.

انواع پسا

به طور کلی دو نوع پسا وجود دارد. پسای اصطکاکی و پسای فشاری یا پسای شکلی.

پسای اصطکاکی(Friction Drag)

پسایی است که به واسطه لزجت سیال ایجاد می شود. ضریب پسای اصطکاکی را می توان با استفاده از روابطی که قبلا بیان شد محاسبه کرد.

پسای فشاری(Shap Drag or Pressure Drag)

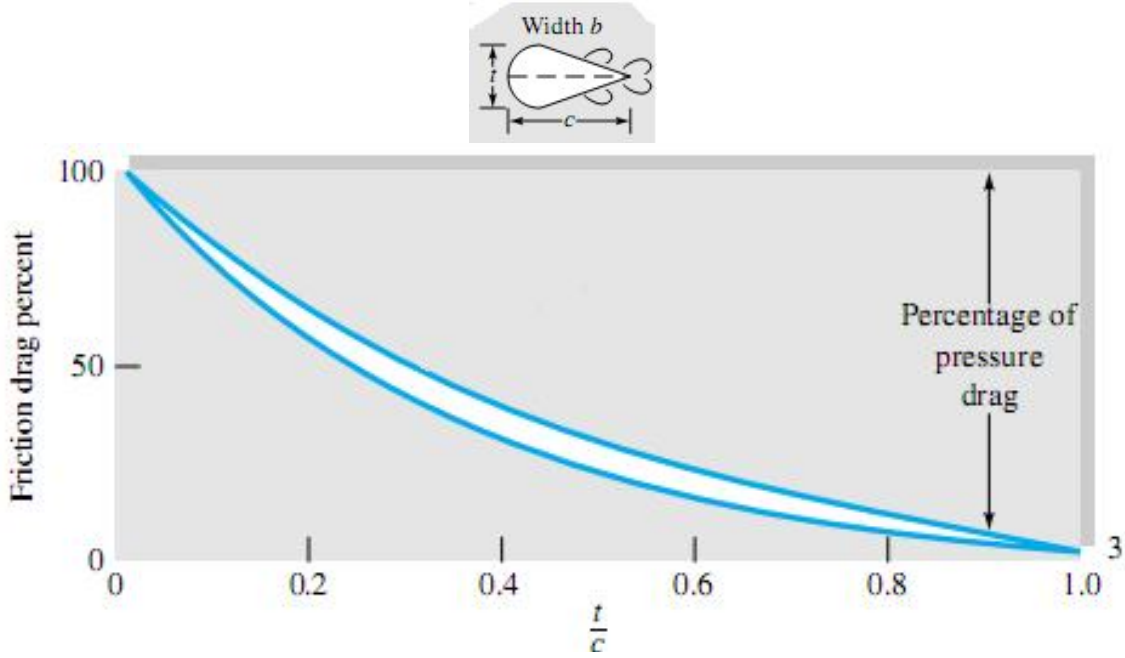
اختلاف بین فشار زیاد در جلوی جسم و فشار کم در ناحیه جدا شده عقب جسم باعث ایجاد پسای فشاری می شود در حقیقت این پسا ناشی از پدیده جدایی است. ضریب پسای فشاری را می توان با استفاده از جداول مربوطه که در مجموعه جداول و نمودارهای مکانیک سیالات موجود در وبلاگ قرار دارد بدست آورد.

ضریب پسای کل برابر مجموع ضریب پسای فشاری و ضریب پسای اصطکاکی خواهد بود یعنی:

$$C_D = C_{D_{fr}} + C_{D_{pr}}$$

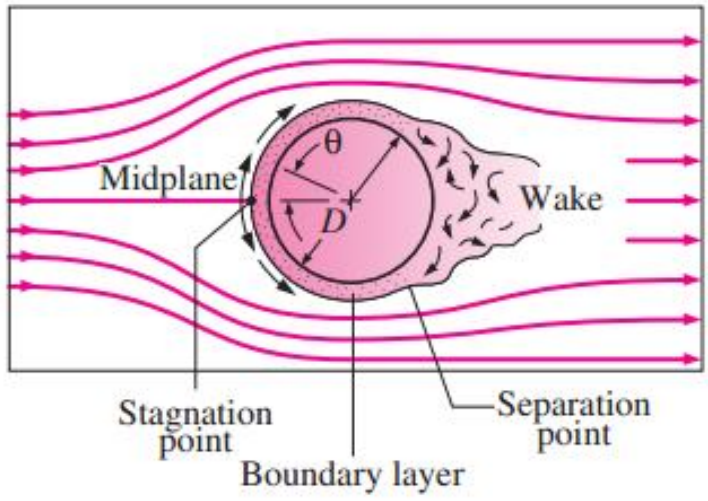
C_D ضریب پسای کل، $C_{D_{fr}}$ ضریب پسای اصطکاکی و $C_{D_{pr}}$ ضریب پسای فشاری است.

باید دانست سهم نسبی پسای اصطکاکی و فشاری در پسای کل بستگی به شکل جسم به ویژه ضخامت آن دارد.



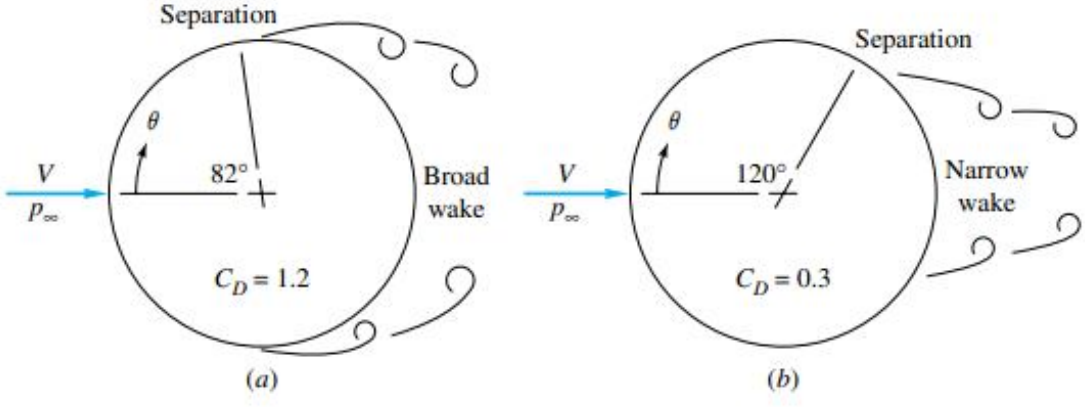
جریان حول استوانه (Flow Past a Circular Cylinder)

یکی از جریان های خارجی متداول، حرکت سیال در جهت عمود بر محور یک استوانه است. جریان سیال در نقطه سکون به حالت ساکن درآمده و فشار افزایش می یابد. از این نقطه به بعد فشار کاهش یافته و سرعت افزایش پیدا می کند (گرادیان فشار مطلوب) ولی نهایتاً فشار به کمترین مقدار رسیده و گرادیان فشار نامطلوب در پشت استوانه صورت می گیرد.



برخلاف شرایط صفحه تخت در جریان موازی، U_∞ به فاصله x از نقطه سکون وابسته است. از $U_\infty = 0$ در نقطه سکون بواسطه وجود گرادیان فشار مطلوب سیال شتاب گرفته $\left(\frac{dU_\infty}{dx} > 0 \text{ و } \frac{dP}{dx} < 0\right)$ سرعت آن به بیشترین مقدار در $\frac{dP}{dx} = 0$ رسیده و بواسطه وجود گرادیان فشار نامطلوب شتاب خود را از دست می دهد. $\left(\frac{dU_\infty}{dx} < 0 \text{ و } \frac{dP}{dx} > 0\right)$ با کاهش سرعت سیال، گرادیان سرعت در سطح نهایتاً به صفر می رسد.$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0)$ در این نقطه که به نقطه جدایی موسوم است (Separation Point) اندازهٔ حرکت سیال در نزدیکی سطح برای غلبه بر گرادیان فشار کافی نیست و ادامه حرکت در پایین دست جریان ناممکن است در نتیجه لایه مرزی جدا می شود جریان در این ناحیه توسط تشکیل گردابه (Vortex) مشخص می شود.

با توجه به اینکه اندازهٔ حرکت سیال در لایه مرزی مغشوش بیش از لایه مرزی آرام است در نتیجه تبدیل لایه مرزی محل جدایی را به تعویق می اندازد. در جریان آرام (شکل a) جدایی در $\theta = 82°$ و در جریان آشفته (شکل b) در $\theta = 120°$ اتفاق می افتد.

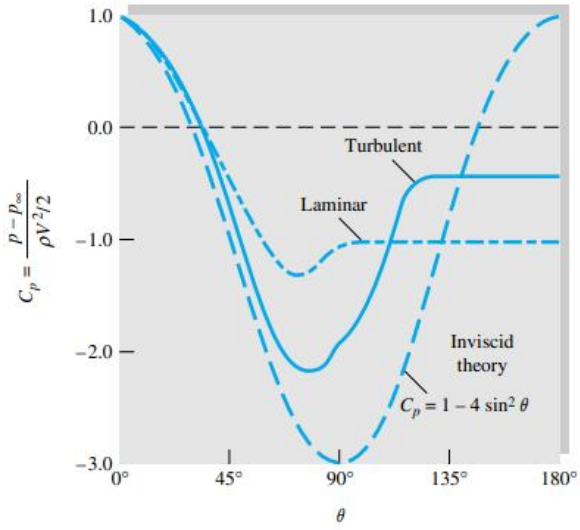


نیروی مقاوم (F_D) وارد بر استوانه از دو مولفه تشکیل می شود مولفه اول ناشی از تنش برشی دیواره در لایه مرزی یا نیروی مقاوم اصطکاکی و مولفه دوم بعلت اختلاف فشار در جهت جریان است یا نیروی مقاوم فشاری.

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_f}$$

A_f مساحت سطح جلویی استوانه است. (مساحت سطح تصویر استوانه عمود بر جهت سرعت)

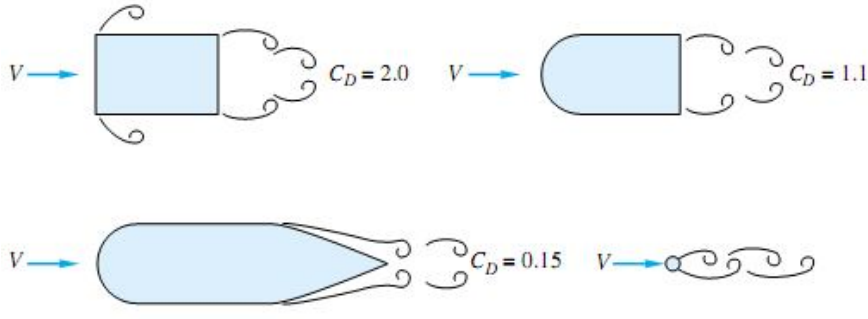
در رینولدزهای کم ($R_e < 2$) می توان از اثرات جدایی صرفنظر نمود و نیروی مقاوم اصطکاکی نقش غالب را دارد ولی با افزایش رینولدز تأثیر جدایی و نیروی مقاوم فشاری مهمتر می شود. در $R_{e_D} > 2 \times 10^5$ ضریب پسا بشدت کاهش می یابد که به نوبه خود جدایی و نیروی مقاوم فشاری را کاهش می دهد.



$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 - 4\sin^2\theta$$

C_P را ضریب فشار(Pressure Coefficient) می نامند.

تاکید می شود ضریب پسای فشاری اجسام دوبعدی و سه بعدی در جداولی در کتابهای مکانیک سیالات موجود است که این جداول در مجموعه جداول ونمودارهای مکانیک سیالات موجود در وبلاگ قرار دارد. برای نمونه شکلهای زیر را ببینید:



تمرین

درختی به قطر 2.5m و طول 20m توسط یدک کشی با سرعت 4 m/s در آب شیرین 20C کشیده می شود. اگر محور درخت الف) موازی و ب) عمود بر جهت طناب باشد، قدرت لازم برای این کار را حساب کنید.

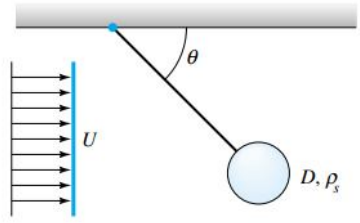
تمرین

در سال 1851 استوکس پس از تحلیل پسای کره در اعداد رینولدز کم(Re<<1) (حرکت خزشی) مقدار آن را $F_D = 3\pi\mu VD$ بدست آورد. نشان دهید ضریب پسا برابر $\frac{24}{\mathrm{Re}}$ است.

کره ای به قطر 1 mm و با سرعت 2.5 mm/s در گلیسیرین سقوط می کند. آیا این یک حرکت خزشی است؟ عدد رینولدز، پسا و چگالی کره را حساب کنید.

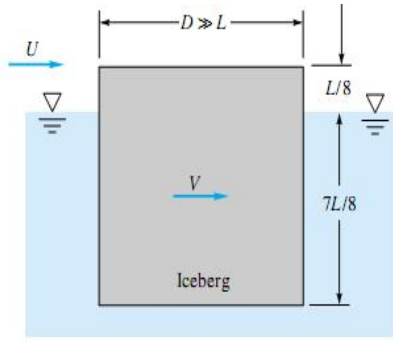
تمرین

در شکل مسئله زیر کره سنگینی متصل به رشته ای نخ، تحت تاثیر جریان یکنواختی که با سرعت U به سمت آن می آید قرار گرفته و با زاویه θ آویزان است. رابطه ای بنویسید که در آن θ به عنوان تابعی از مشخصات کره و خواص سیال بیان شود.



تمرین

کوه های یخ توسط باد با سرعتهای قابل توجهی حرکت می کنند. اگر کوه یخی، مانند شکل این مسئله بصورت استوانه ای بزرگ با $D >> L$ باشد و $\frac{1}{8}$ کل یخ، بیرون از آب قرار گیرد و نیروهای پسا در قسمت بالا و پایین کوه به سرعت نسبی بین آن و سیال بستگی داشته و آب دریا ساکن باشد، رابطه ای بدست آورید که سرعت پایدار کوه یخ V را به طور تقریبی بر حسب سرعت باد U نشان دهد.



تمرین

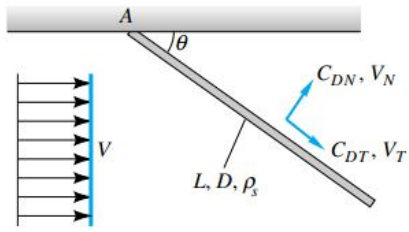
چترباز‌ی در ارتفاع 8000ft با چتری به قطر 28ft از هواپیما می پرد. وزن کل چترباز و چتر 185 lbf است.

- الف) سرعت متوسط نهایی چترباز را در 4000 ft و
- ب) زمان لازم سقوط چترباز را از ارتفاع 8000ft به 4000ft محاسبه کنید.

تمرین

در شکل این مساله میله سنگینی در نقطه A لولا شده است که به علت قرار گرفتن در مسیر جریان یکنواختی با سرعت V

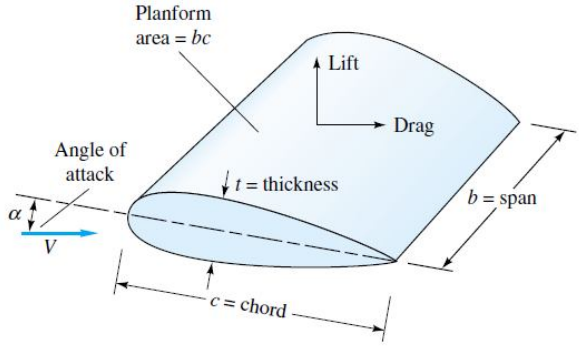
تحت زاویه ای به نام زاویه پاد می ایستد.اگر این استوانه دارای ضریب پسای عمودی C_{DN}و ضریب پسای مماسی C_{DT}باشد و به ترتیب، نیروهای پسا را به V_N و V_T ربط دهد، رابطه ای بدست آورید که در آن، زاویه پاد θ بر حسب تابعی از پارامترهای جریان و میله داده شده باشد، در ضمن برای میله ای فولادی با L=40cm و D=1cm واقع در جریان هوای سطح دریا با سرعت V=35m/s، زاویه θرا حساب کنید.



نیروی بالابر(Lift Force)

نیروی عمود بر راستای نیروی پسا نیروی لیفت یا بالابر نام دارد. این نیرو تمایل به بالا بردن جسم دارد، نیروی برًا از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boxed{F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A V^2}$$



C_L را ضریب برا (Lift Coefficient) می نامند.

در جریان های با سرعت کم C_L به زاویه حمله α (Angle of Attack) و عدد رینولدز بستگی دارد.

$C_L = f(\alpha, Re)$

برای بدست آوردن C_L از رابطه $\boxed{C_L = 2\pi Sin(\alpha + \frac{2h}{C})}$ استفاده می شود.

در این رابطه $\frac{h}{C}$ حداکثر خمیدگی(Maximum Camber Expressed) است.

برای فویل های متقارن $\frac{h}{C} = 0$ و در نتیجه $C_L = 2\pi Sin\alpha$.

پدیده واماندگی یا استال (Stalling)

اگر زاویه حمله از حد معینی حدودا 16 درجه بزرگتر شود نیروی بالابر به سرعت نزول می کند. در این حالت جدایش مهمی روی می دهد که به افت فشار نیروی بالابر و افزایش نیروی مقاوم منجر می گردد. این وضعیت را واماندگی می نامند. پدیده واماندگی تنها به هنگام فرود آمدن هواپیما به سمت باند مفید است.

سرعت واماندگی (Stalling Velocity)

حداقل سرعت برای جسمی که نیروی برآی آن وزنش را تحمل می کند سرعت واماندگی نام دارد.

$$W = L = \frac{1}{2} C_L \rho V^2 A$$

$$\boxed{V = \left(\frac{2W}{C_L \rho A}\right)^{0.5}}$$

تمرین

اگر وزن یک هواپیمای جنگنده 42.7 kN باشد، این هواپیما تحت چه زاویه حمله ای قادر به پرواز با سرعت $250\ \frac{km}{h}$ می باشد؟سطح تصویر شده قراردادی $25\ m^2$ است. چه قدرتی بر حسب اسب بخار برای فایق آمدن بر نیروی مقاوم بالها لازم است؟

ضریب پسا و ضریب لیفت تصحیح شده(Corrected Drag Coefficient and Lift Coefficient)

تمامی روابط مربوط به ضرایب پسا و لیفت با فرض طول نامحدود بال بدست آمده اند. اثر محدود بودن طول بال را می توان با ضریب بی بعدی بنام نسبت منظر(Aspect Ratio) تصحیح کرد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$AR = \frac{b^2}{A_P} = \frac{b^2}{bc} \Rightarrow \boxed{AR = \frac{b}{c}}$$

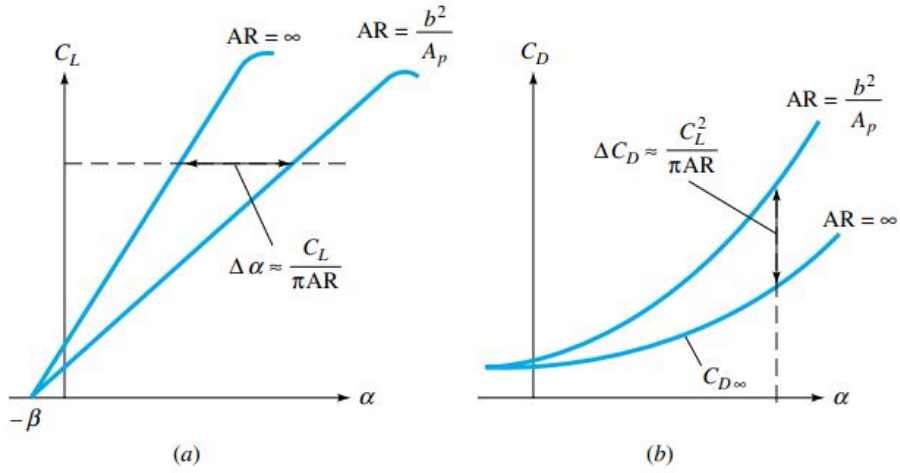
c متوسط طول وتر است. زاویه حمله موثر باید به مقدار زیر افزایش یابد:

$$\Delta\alpha = \frac{C_L}{\pi AR}$$

و مقادیر ضریب لیفت و ضریب پسای اصلاح شده از روابط زیر بدست می آیند:

$$\boxed{\begin{aligned} C_L &= \frac{2\pi \sin(\alpha + \frac{2h}{c})}{1 + \frac{2}{AR}} \\ C_D &= C_{D\infty} + \frac{C_L}{\pi AR} \end{aligned}}$$

که در آن $C_{D\infty}$ پسای مربوط به یک ایرفویل با طول نامحدود است.



جلسه نهم

فصل سوم: جریانهای تراکم ناپذیرغیرلزج (Inviscid Incompressible Flows)

در این فصل جریان بدون لزجت را بررسی می کنیم در خارج از لایه مرزی اصولا جریان بدون لزج است و تئوری بدون لزج که در این فصل با آن آشنا می شویم در اینگونه موارد صادق است.

تابع جریان(Stream Function)

تابع جریان($\psi(x,y)$) که تنها در میدانهای دوبعدی تعریف می شود تابعی دو متغیره از x و y است که شکل خطوط جریان را نشان می دهد. با داشتن تابع جریان یک میدان می توان مولفه های سرعت را بدست آورد و چرخشی بودن یک جریان را بررسی نمود. با معلوم بودن تابع جریان مولفه های سرعت مطابق روابط زیر بدست می آید:

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$
$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$V = ui + vj$

خطوط $\psi = C$ معادله خطوط جریان را نشان می دهد. با انتخاب مقادیر مختلف C خطوط جریان یک میدان را می توان رسم کرد.

شرط غیر چرخشی بودن جریان بدون لزج بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

یا

$$\boxed{\nabla^2 \psi = 0}$$

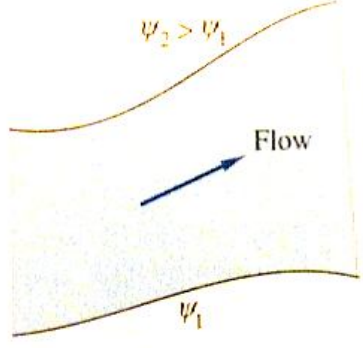
در مختصات قطبی تابع جریان بصورت زیر با مولفه های سرعت مربوط می شود:

$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$
$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

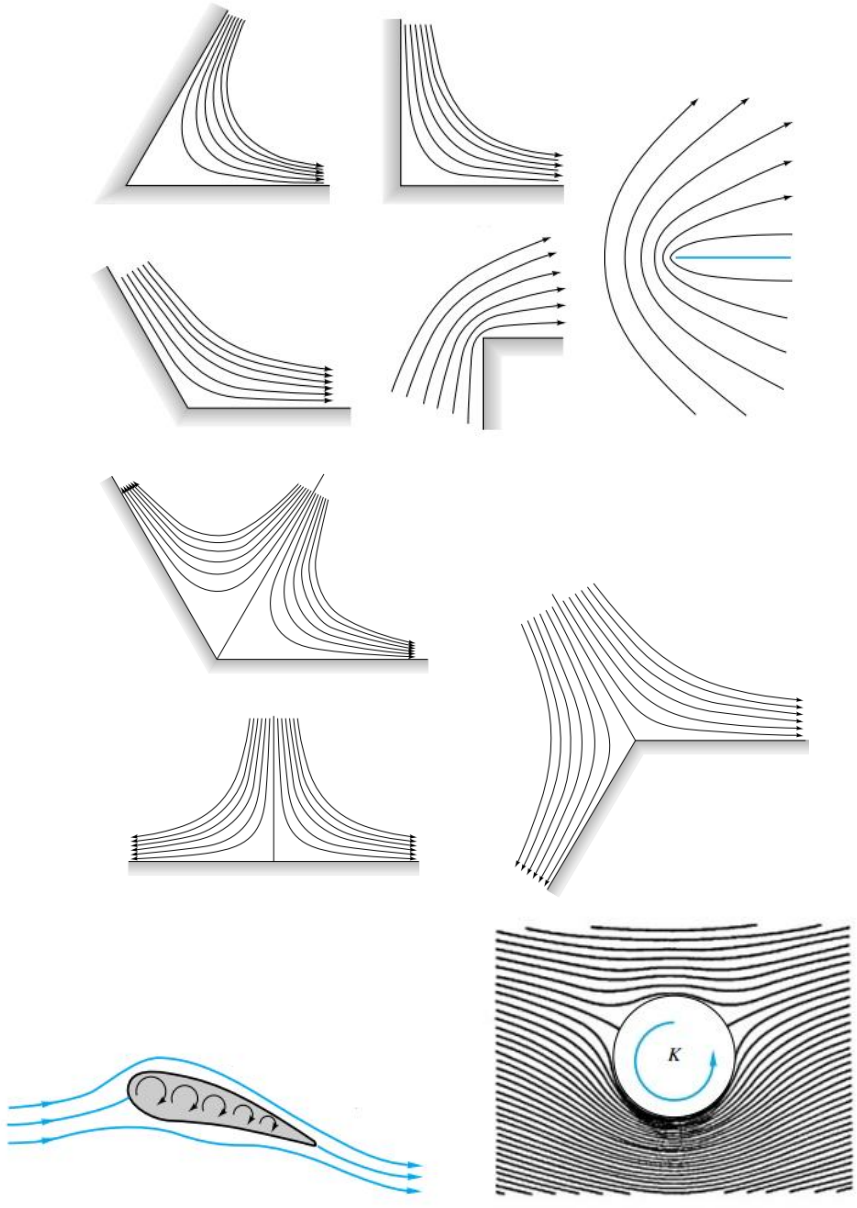
با داشتن تابع جریان میان دو خط جریان می توان مقدار دبی گذرنده از بین آن دو خط را مطابق رابطه زیر بدست آورد:

$$Q_{1\to 2} = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

$$\boxed{Q_{1\to 2} = \psi_2 - \psi_1}$$



خطوط جریان را در چند شکل در زیر می بینید:



پتانسیل سرعت(Velocity Potential)

پتانسیل سرعت($\emptyset(x,y,z)$) یک تابع دو یا سه متغیره است که در جریانهای سه بعدی هم قابل تعریف است. با معلوم بودن آن می توان مولفه های سرعت را مطابق روابط زیر بدست آورد:

$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x}$
$v = \frac{\partial \emptyset}{\partial y}$
$w = \frac{\partial \emptyset}{\partial z}$

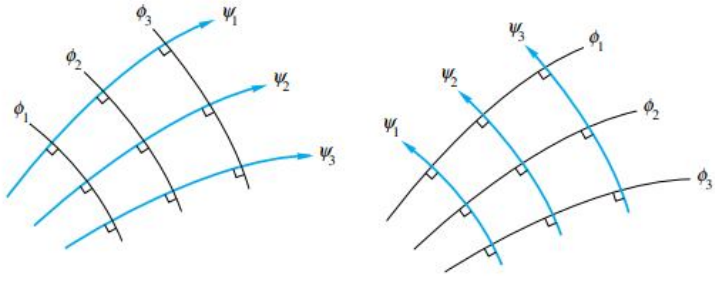
پتانسیل سرعت تنها در جریان های غیر چرخشی تعریف می شود. تمام نقاطی که بر یک خط $\emptyset = C$ واقعند، هم سرعتند.

در مختصات قطبی مولفه های سرعت بصورت زیر به پتانسیل سرعت مربوط می شوند:

$V_r = \frac{\partial \emptyset}{\partial r}$
$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \emptyset}{\partial \theta}$

معادله پیوستگی بر حسب پتانسیل سرعت بصورت معادله لاپلاس (Laplace's Equation) در می آید: $\boxed{\nabla^2\phi = 0}$

خطوط $\emptyset$ ثابت بر خطوط ψ ثابت عمودند.



تمرین

تابع جریان $\psi = K(x^2 - y^2)$ را در نظر بگیرید که در آن K یک ثابت است.

- الف) خطوط جریان را رسم کنید.
- ب) مولفه های سرعت را بدست آورید.
- ج) تمام نقاط سکون را بیابید.
- د) پتانسیل سرعت را پیدا کنید.
- ه) نشان دهید که تابع جریان بر پتانسیل سرعت عمود است.
- و) تراکم پذیری جریان را بررسی کنید.
- ز) ثابت کنید جریان غیر چرخشی است.

تمرین

یک میدان سرعت دو بعدی بصورت زیر داده شده است:

$$u = -\frac{Ky}{x^2 + y^2}$$

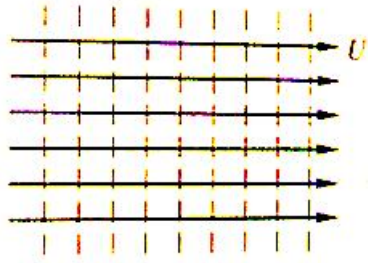
$$v = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

که در آن K یک ثابت است. مولفه های سرعت را در سیستم قطبی بدست آورید. همچنین تابع جریان و پتانسیل سرعت را بیابید.

تابع جریان و پتانسیل سرعت را برای چند جریان مهم بدست می آوریم.

جریان یکنواخت(Uniform Stream)

جریانی را یکنواخت گویند که در آن خطوط جریان موازی یکدیگر باشند.



برای جریان یکنواخت تابع جریان و پتانسیل سرعت بصورت زیر تعیین می شوند:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \Rightarrow \psi = \int U\, dy \Rightarrow \psi(x,y) = Uy + f(x)$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow -f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C$$
$$\psi(x,y) = Uy + C$$

و با انتخاب C برابر صفر خواهیم داشت:

$$\boxed{\psi(x,y) = Uy}$$

$$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = U \Rightarrow \emptyset = \int U\, dx \Rightarrow \emptyset(x,y) = Ux + f(y)$$
$$v = \frac{\partial \emptyset}{\partial y} = 0 \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C$$
$$\emptyset(x,y) = Ux + C$$

و با انتخاب C برابر صفر خواهیم داشت:

$$\boxed{\emptyset(x,y) = Ux}$$

ملاحظه می شود این دو تابع بر یکدیگر عمودند. با جایگذاری $rcos\theta$ و $rsin\theta$ بجای x و y در روابط فوق معادلات تابع جریان و پتانسیل سرعت در مختصات قطبی بدست می آیند.

در حالتی که خطوط جریان یکنواخت با راستای افق زاویه α بسازند تابع جریان و پتانسیل سرعت به صورت زیر خواهند بود:

$\psi = U_\infty(ycos\alpha - xsin\alpha)$
$\emptyset = U_\infty(xcos\alpha + ysin\alpha)$

چشمه و چاه دو بعدی (Two Dimensional Source and Sink)

خطی عمود بر صفحه xy را با فرض اینکه در تمام جهات و عمود بر آن جریان بصورت یکنواخت عبور کند در نظر بگیرید، اگر جریان به سمت خارج کاغذ باشد آن را چشمه (Source) و در صورتی که جریان به داخل کاغذ باشد آن را چاه (Sink) می گویند. چنین خطی در دیاگرام جریان دو بعدی به صورت یک نقطه نمایش داده می شود.

میزان جریان عبور کننده در واحد زمان را شدت چشمه یا چاه می نامند. این مقدار ثابت بوده و آن را با حرف m نشان می

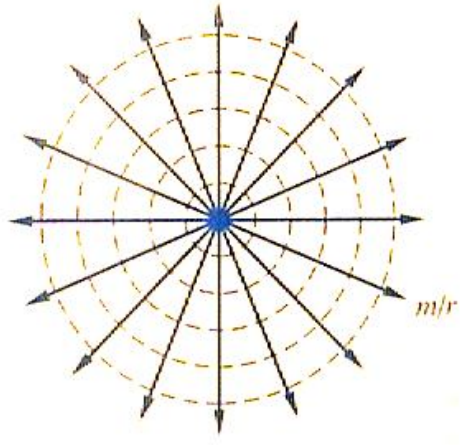
دهند.

$$m=\frac{Q}{2\pi b} \quad Q=v_r(2\pi r b) \quad v_r=\frac{m}{r}$$

در این رابطه Q دبی حجمی گذرنده از یک استوانه فرضی است که سیال از آن طریق جریان می یابد. b و r بترتیب طول و شعاع استوانه مذکور می باشد. اگر m مثبت باشد جریان حاصل را چشمه و اگر منفی باشد آن را چاه دو بعدی می نامند.

برای تعیین تابع جریان و پتانسیل سرعت چشمه از مختصات قطبی استفاده می کنیم:

$$v_r=\frac{m}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial\phi}{\partial r}$$
$$v_\theta=0=\frac{-\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$



با انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$\boxed{\psi=m\theta \quad \phi=m\ln r}$$

چون $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ و $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ در مختصات دکارتی روابط فوق به شکل ساده زیر در می آیند:

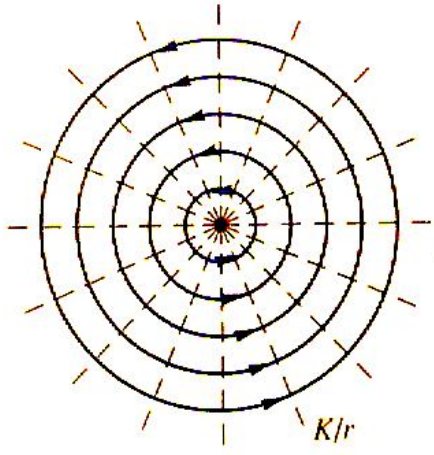
$$\boxed{\psi=m\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \phi=m\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

در چشمه یا چاه خطوط جریان بصورت خطوط شعاعی و خطوط پتانسیل بصورت دوایری متحدالمرکز می باشند. دوباره تاکید می شود تمام نقاط واقع بر یک خط جریان، هم مسیر بوده در حالیکه تمام نقاط واقع بر یک خط پتانسیل، هم سرعت می باشند. با توجه به اینکه سرعت روی محور z بینهایت می شود این محور بعنوان یک خط تکین(Singularity) در نظر گرفته می شود. تابع جریان و پتانسیل سرعت در راستای این خط تعریف نمی شوند.

جلسه دهم

گردابه دوبعدی (Two Dimensional Vortex)

بدیهی است با جابجا شدن ψ و ϕ در شکل چشمه یا چاه، گردابه دو بعدی به وجود می آید.



چشمه (چاه) $\psi = m\theta = m\tan^{-1}\frac{y}{x}$ گردابه $\boxed{\psi = -K\ln r = -\frac{K}{2}\ln(x^2+y^2)}$

چشمه (چاه) $\phi = m\ln r = \frac{m}{2}\ln(x^2+y^2)$ گردابه $\boxed{\phi = K\theta = K\tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$V_r = 0 \qquad V_\theta = \frac{K}{r}$

K قدرت گردابه است اگر گردابه ساعتگرد باشد مقدار آن منفی و اگر پادساعتگرد باشد مقدار آن مثبت در نظر گرفته می شود. گردابه دوبعدی تنها دارای مولفه مماسی سرعت است.

چرخش (Vorticity)

بنا بتعریف، چرخش برابر انتگرال خطی در جهت مخالف گردش عقربه های ساعت پیرامون مسیر بسته C است که از حاصلضرب طول کمان ds در مولفه مماسی سرعت روی آن کمان بدست می آید.

$$\boxed{\Gamma = \oint_c V.ds = \oint_c V\cos\alpha ds = \oint_c V_\theta ds}$$

چون

$$V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}, \qquad ds = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

خواهیم داشت:

$$\Gamma = \oint_c V.ds = \oint_c (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}).(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma = \int_c (udx + vdy + wdz)}$$

از طرفی

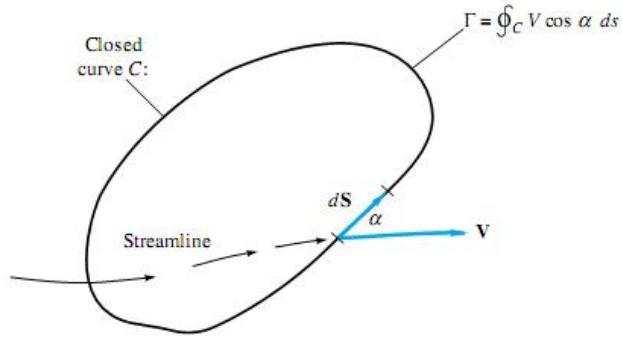
$$V.ds = \nabla\phi.ds = d\phi$$

بنابراین

$$\Gamma = \oint V.ds = \oint d\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\boxed{\Gamma = \phi_2 - \phi_1}$$

بنابراین Γ در یک جریان غیر چرخشی برابر اختلاف مقادیر اولیه و نهایی ϕ است.



مثلا برای گردابه، چرخش بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\phi = K\theta \Rightarrow d\phi = Kd\theta \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi} Kd\theta = 2\pi K$$

ویا به روش دیگر:

$$ds = rd\theta$$

$$V_\theta = \frac{K}{r}$$

$$\Gamma = \int V_\theta ds = \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} rd\theta = 2\pi K$$

Γ معرف برآیند جبری قدرت تمامی گردابه هایی است که درون یک منحنی بسته محصور شده است. بدیهی است اگر گردابه وجود نداشته باشد چرخش حول مسیر بسته شامل تعدادی چشمه و چاه صفر است.

برهم نهش پاسخ های جریان صفحه ای (Superposition)

طبق خاصیت خطی بودن ϕ و ψ می توان شکل های متفاوتی از جریانهای پتانسیلی جالب را با جمع کردن توابع پتانسیل سرعت و جریانهای حاصل از یک چشمه یا چاه، جریان یکنواخت، گردابه و ... بدست آورد. یعنی

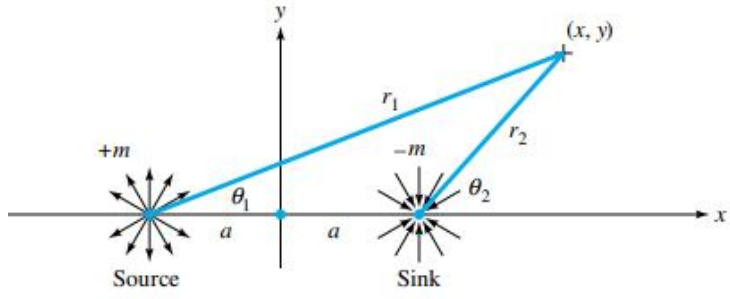
$$\boxed{\psi_{tot} = \sum \psi_i} \quad \text{و} \quad \boxed{\phi_{tot} = \sum \phi_i}$$

روش کلی تعیین مولفه های سرعت برایند حاصل از چند میدان به این صورت است که نقطه ای به مختصات x وy در ربع اول را در نظر گرفته و هر میدان نقطه ای موجود (چشمه، چاه و گردابه) را توسط یک خط به آن نقطه وصل می کنیم. سپس طول خط و زاویه ای که آن خط با راستای افق می سازد را بر حسب x وy بدست آورده و تابع جریان و پتانسیل سرعت هر میدان را بطور جداگانه محاسبه می کنیم. نهایتا از اصل سوپرپوزیشن (جمع پذیری تابعهای جریان یا پتانسیل سرعت) استفاده کرده و تابع جریان و پتانسیل کل را بدست می آوریم. حال با مشتق گیری از تابع جریان یا پتانسیل سرعت، مولفه های سرعت بدست می آیند.

در زیر به بعضی از ترکیبهای جریان اشاره می شود.

ترکیب یک چشمه و چاه هم قدرت

چشمه ای به قدرت m واقع در($-a,0$) و چاهی به قدرت m– واقع در ($a,0$) را در نظر بگیرید.($m>0$) می خواهیم مولفه های بردار سرعت برایند را بدست آوریم.



چشمه $\psi = m\theta_1 = m\tan^{-1}\dfrac{y}{x+a}$ و چاه $\psi = -m\theta_2 = -m\tan^{-1}\dfrac{y}{x-a}$

کل $\psi = \psi_{\text{چشمه}} + \psi_{\text{چاه}} = m(\tan^{-1}\dfrac{y}{x+a} - \tan^{-1}\dfrac{y}{x-a})$

معادله خطوط جریان $\psi = C \Rightarrow m(\tan^{-1}\dfrac{y}{x+a} - \tan^{-1}\dfrac{y}{x-a}) = C$

تمرین

نشان دهید بعد از ساده سازی معادله فوق شکل خطوط جریان بصورت زیر بدست می آید:

$$x^2 + (y + a\cot\frac{\psi}{m})^2 = a^2\csc^2\frac{\psi}{m}$$

نکته: برای محاسبه مشتق تانژانت معکوس یک کسر نسبت به x و y بترتیب از قواعد ساده زیر استفاده کنید:

$$tg^{-1}\frac{y+a}{x+b} \rightarrow \frac{-(y+a)}{(y+a)^2+(x+b)^2}$$
$$tg^{-1}\frac{y+a}{x+b} \rightarrow \frac{x+b}{(y+a)^2+(x+b)^2}$$

مولفه های سرعت چنین بدست می آیند:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = m\left[\frac{x+a}{y^2+(x+a)^2} - \frac{x-a}{y^2+(x-a)^2}\right]$$
$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -m\left[\frac{-y}{y^2+(x+a)^2} + \frac{y}{y^2+(x-a)^2}\right]$$

کل $V = \sqrt{u^2+v^2}$

برای تعیین نقطه سکون باید مولفه های سرعت را برابر صفر قرار داد یعنی: u=0 و v=0 از حل دستگاه، مختصات نقطه یا نقاط سکون بدست می آید.

حال پتانسیل سرعت را بدست می آوریم:

$$\phi_{\text{کل}} = \phi_{\text{چشمه}} + \phi_{\text{چاه}} = m\ln r_1 - m\ln r_2$$

$$= m\ln\sqrt{(x+a)^2+y^2} - m\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2} = m\left(\ln\sqrt{(x+a)^2+y^2} - \ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)$$

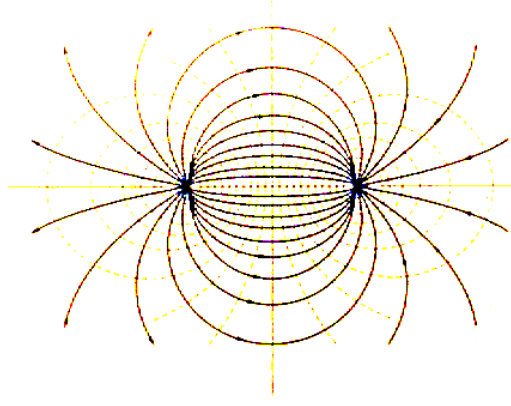
$$m\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}} = \frac{m}{2}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

تمرین

نشان دهید پس از عملیات جبری رابطه پتانسیل سرعت به شکل زیر ساده می شود:

$$(x - a\coth\frac{\phi}{m})^2 + y^2 = a^2\csc h^2\frac{\phi}{m}$$

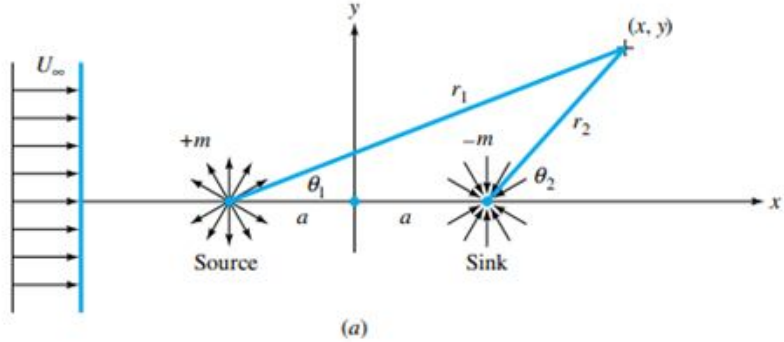
شکل خطوط جریان (خطوط فلش دار) و خطوط پتانسیل برای ترکیب فوق (یک چشمه و یک چاه هم قدرت که بصورت متقارن نسبت به محور قائم قرار دارند) بصورت زیر است:



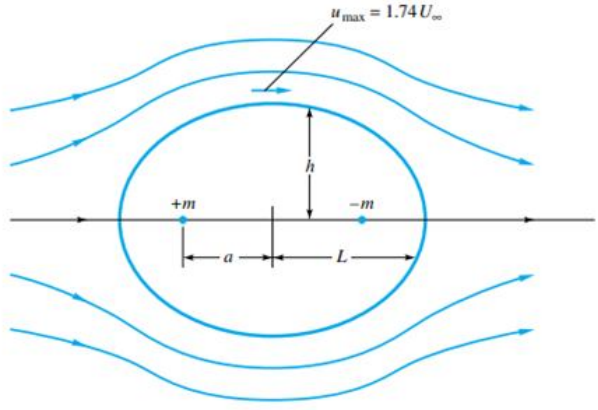
تمرین

چشمه ای به قدرت m واقع در $(-a,0)$، چاهی به قدرت m– واقع در $(a,0)$ و یک جریان یکنواخت به سرعت U_∞ را در نظر بگیرید (شکل a) تابع جریان و پتانسیل سرعت را بیابید و برای یک نقطه دلخواه از صفحه سرعت جریان را بدست آورید. $(m > 0)$

چنین ترکیبی را بیضی رانکین(Rankin Oval) می نامند.(شکل b)



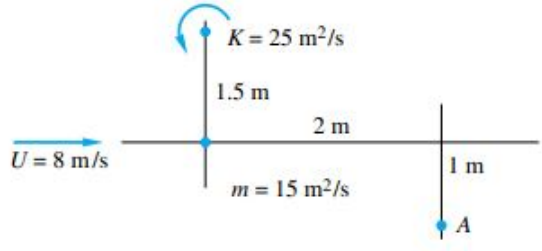
(a)



(b)

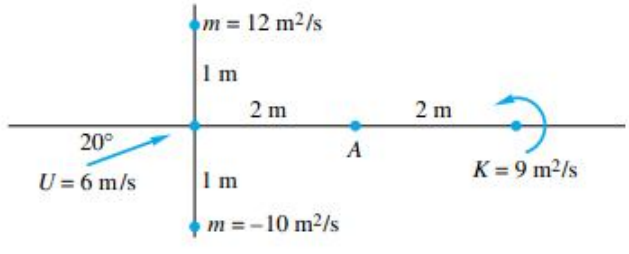
تمرین

بردار سرعت برایند القا شده در نقطهA را که از یک جریان یکنواخت، گردابه ای که در فاصله 1.5 متری بالای مبدا واقع شده و یک چشمه که در مبدا مختصات واقع است، حساب کنید.



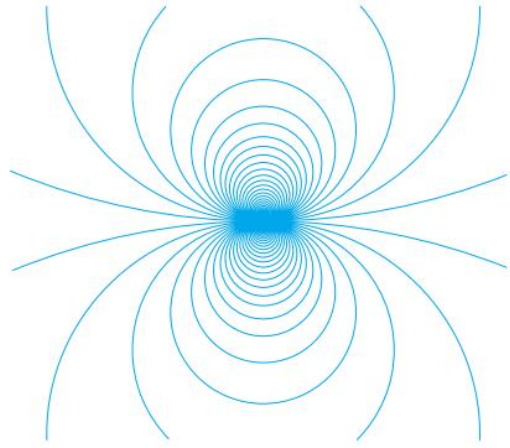
تمرین

بردار سرعت برایند القا شده در نقطه A را که ناشی از یک جریان یکنواخت، گردابه، یک چشمه و یک چاه است، بدست آورید.



دابلت(Doublet)

دابلت هنگامی است که فاصله چشمه و چاه بسیار کاهش یابد که در آن صورت خطوط جریان با خانواده دوایر مماس بر هم در مرکز مختصات شباهت پیدا می کند. (a به سمت صفر میل می کند.)



برای اینکه قدرت جریان در لحظه ای که a به صفر میل می کند به حد کافی بزرگ و متناسب بماند، مقدار حاصلضرب $2am$ ثابت نگه داشته می شود. این مقدار ثابت (λ)را قدرت دابلت می گویند.

$$\psi = \lim_{a \to 0}(-m\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2})$$

و چون:

$$(\lim_{\lambda \to 0}\tan^{-1}\lambda = \lambda)$$

در نتیجه:

$$\boxed{\psi = -\frac{2amy}{x^2+y^2} = -\frac{\lambda y}{x^2+y^2}}$$

می توان رابطه بدست آمده را بصورت زیر نوشت:

$$\psi = -\frac{\lambda y}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = -\frac{\lambda y}{\psi} \Rightarrow x^2+y^2+\frac{\lambda y}{\psi} = 0 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{\lambda y}{\psi}+(\frac{\lambda}{2\psi})^2 = (\frac{\lambda}{2\psi})^2 \Rightarrow$$

$$x^2+(y+\frac{\lambda}{2\psi})^2 = (\frac{\lambda}{2\psi})^2$$

که این معادله دایره ای به مرکز $(0,-\frac{\lambda}{2\psi})$ و شعاع $\frac{\lambda}{2\psi}$ است. بنابراین خطوط جریان دوایری هستند که در مرکز مختصات با یکدیگر مماس بوده و مراکز آنها روی محورy قرار دارد. به همین ترتیب خطوط هم پتانسیل دوایری هستند که در مرکز مختصات بر یکدیگر مماس بوده ولی مراکز آنها روی محور x قرار گرفته است. بنابراین این دو دسته خطوط بر یکدیگر عمودند.

می توان نشان داد پتانسیل سرعت دابلت بصورت زیر است:

$$\boxed{\phi = \frac{\lambda x}{x^2+y^2}}$$

$$\phi = \frac{\lambda x}{x^2+y^2} \Rightarrow (x-\frac{\lambda}{2\phi})^2+y^2 = (\frac{\lambda}{2\phi})^2$$

تابع جریان و پتانسیل سرعت دابلت در مختصات قطبی مطابق روابط زیر است:

$$y = r\sin\theta, x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \psi = \frac{-\lambda r\sin\theta}{r^2} = \frac{-\lambda\sin\theta}{r}$$
$$x = r\cos\theta, x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \phi = \frac{\lambda r\cos\theta}{r^2} = \frac{\lambda\cos\theta}{r}$$

چاه و گردابه هم مرکز(Sink Plus a Vortex at the Origin)

توابع جریان و پتانسیل حاصل از یک چاه و گردابه هم مرکز از برنهش معادلات چاه و گردابه بدست می آیند:

$$\psi = m\theta - K\ln r$$
$$\phi = m\ln r + K\theta$$

$(m < 0, K > 0)$

خطوط جریان چنین است:

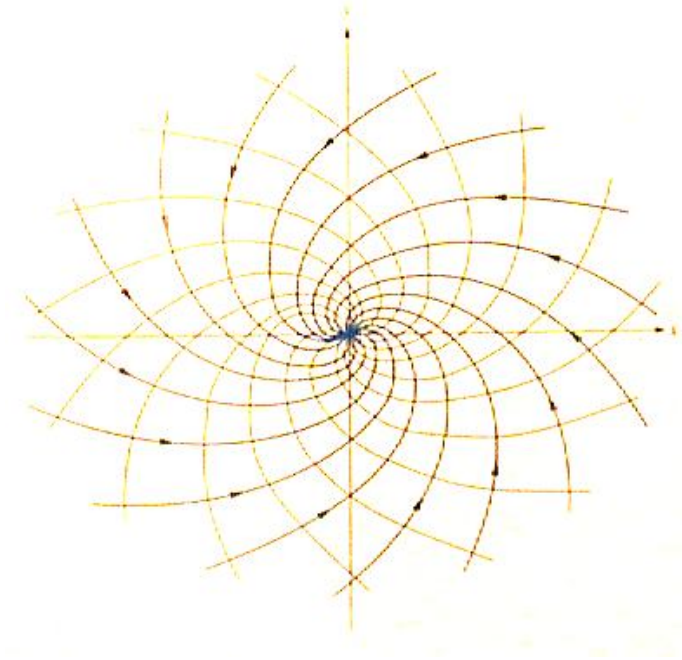
$$r = e^{-\frac{\psi}{K}} e^{\frac{m}{K}\theta}$$

شکل کلی معادله خطوط جریان بصورت زیر است:

$$r = a^2 e^{-b^2\theta}$$

که در آن $a^2 = e^{-\frac{\psi}{K}}$ و $-b^2 = m/K$ چون $e^{-\frac{\psi}{K}}$ همواره مثبت است آن را برابر یک مقدار مثبت (a^2) و چون m/K منفی است آن را برابر یک مقدار منفی$(-b^2)$ در نظر گرفته ایم. رسم تابع $r = a^2 e^{-b^2\theta}$ در مختصات قطبی بصورت شکل زیر است.

تخلیه آب مخزن از یک سوراخ بوسیله جریان چاه بعلاوه گردابه و خطوط جریان در یک شیپوره بدون پره بوسیله جریان چشمه بعلاوه گردابه شبیه سازی می شود.



برای یک گردابه بعلاوه یک چشمه جهت فلشها عوض می شود.

جلسه یازدهم

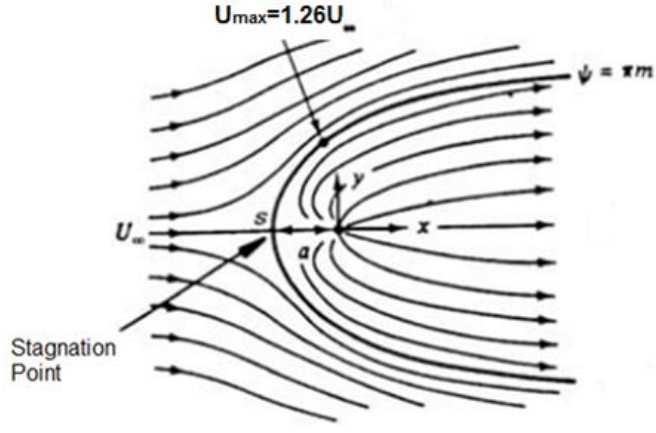
نیم پیکره رانکین(Rankine Half-Body)

از ترکیب یک جریان یکنواخت با سرعت U و یک چشمه یا چاه منفرد به قدرت m شکل جالبی پدید می آید که نیم پیکره رانکین نامیده می شود.

با فرض یک جریان یکنواخت با سرعت U و یک چشمه منفرد به قدرت m واقع در مبدا، تابع جریان چنین بدست می آید:

$$\psi = Uy + m\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \psi = Ur\sin\theta + m\theta$$

($m > 0$) همانطورکه دیده می شود، نیم پیکره رانکین تقریبا بیضی شکل خواهد بود و جریان چشمه را از جریان یکنواخت جدا می سازد.



مولفه های سرعت عبارتند از:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}(Ur\cos\theta + m) = U\cos\theta + \frac{m}{r}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta$$

با $V_r = 0$ و $V_\theta = 0$ مختصات نقطه سکون بدست می آید:

$$V_\theta = 0 \Rightarrow -U\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

اما برای ترکیب چشمه و جریان یکنواخت، مطابق شکل $\theta = 0$ قابل قبول نیست. علاوه بر آن اگر $\theta = 0$ را در رابطه $V_r = 0$ قرار دهیم مقدار r منفی بدست می آید که غیرقابل قبول است.

$$V_r = 0 \Rightarrow U\cos\theta + \frac{m}{r} = 0$$

و چون $\theta = \pi$ نتیجه می شود:

$$U\cos\pi + \frac{m}{r} = 0 \Rightarrow -U + \frac{m}{r} = 0 \Rightarrow r = \frac{m}{U}$$

بنابراین نقطه سکون در فاصله $\frac{m}{U}$ در سمت چپ مبدا مختصات ($\theta = \pi$) قرار دارد. این فاصله را a می نامیم.

$$a = \frac{m}{U}$$

برایند سرعت در هر نقطه برابر است با:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = (U\cos\theta + \frac{m}{r})^2 + (-U\sin\theta)^2 = U^2\cos^2\theta + \frac{m^2}{r^2} + \frac{2mU}{r}\cos\theta + U^2\sin^2\theta =$$

$$U^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \frac{m^2}{r^2} + \frac{2mU}{r}\cos\theta = U^2 + \frac{m^2}{r^2} + \frac{2mU}{r}\cos\theta = U^2 + \frac{a^2U^2}{r^2} + \frac{2aU^2}{r}\cos\theta = U^2(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r}\cos\theta)$$

برای تعیین معادله نیم پیکره توجه دارید که این خط از نقطه سکون می گذرد بنابراین مختصات نقطه سکون باید در آن صدق کند:

$$\psi = Ur\sin\theta + m\theta$$

$r = \frac{m}{U}$ و $\theta = \pi$ در نتیجه $\psi = m\pi$ و یا $Ur\sin\theta + m\theta = m\pi$ و از آنجا:

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U\sin\theta}$$

از نقطه سکون تا $\theta \approx 114$ جایی که سرعت ماکزیمم می شود($U_{\max} = 1.26U$) گرادیان فشار مطلوب خواهد بود و بعد از آن گرادیان فشار نامساعد می شود.

می توان دید ضخامت نیم پیکره در فاصله ای خیلی دور و در پایین دست جریان برابر $2\pi a$است چون:

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U\sin\theta} \Rightarrow r\sin\theta = \frac{m(\pi - \theta)}{U} = \frac{aU(\pi - \theta)}{U} = a(\pi - \theta)$$

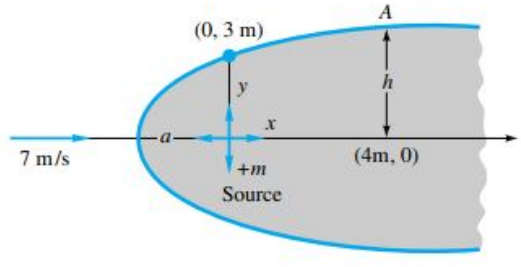
و چون $r\sin\theta = y$ و از طرفی در فواصل دور θ به سمت صفر میل می کند، لذا $y = \pi a$ و در نتیجه ضخامت می شود:

$$2h = 2y = 2\pi a$$

تمرین

برای نیم پیکره رانکین شکل این مساله سرعت جریان و ابعاد پیکره داده شده است.پیدا کنید:

- الف) قدرت چشمه m بر حسب مترمربع بر ثانیه
- ب) فاصله a
- ج) فاصله h
- د) سرعت کل در نقطه A را.



جریان عبوری از یک گردابه (Flow Past a Vortex)

جریان یکنواختی را در جهت x و با سرعت U در نظر بگیرید. این جریان از گردابه ای به قدرت K که مرکز آن در مبدا مختصات قرار دارد، عبور می کند. با استفاده از روش بر نهش، تابع جریان بدست آمده عبارت است از:

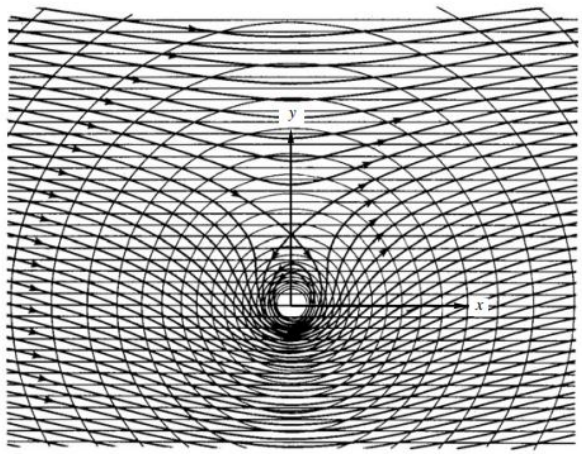
$$\psi = Ur\sin\theta - K\ln r$$

مولفه های سرعت نیز چنین بدست می آیند:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}(Ur\cos\theta) = U\cos\theta$$

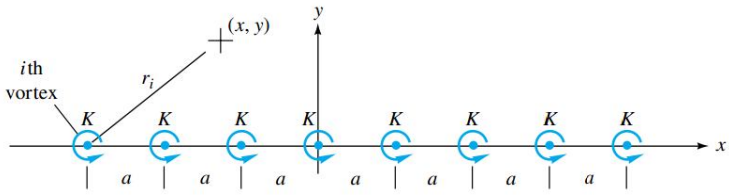
$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U\sin\theta + \frac{K}{r}$$

با $V_r = 0$ و $V_\theta = 0$ مختصات نقطه سکون($r = a = \frac{K}{U}$ $\theta = 90$) بدست می آید.



بینهایت گردابه در یک ردیف (An Infinite Row of Vortices)

ردیفی از تعداد نامحدودی گردابه را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



قدرت هر یک از گردابه ها برابرK است.

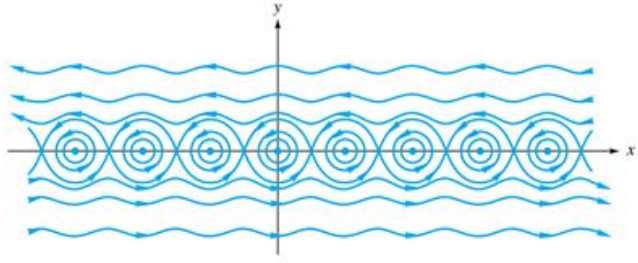
تابع جریان کل گردابه ها برابر است با:

$$\psi = -K\sum_{i=1}^{\infty}\ln r_i$$

که با عملیات ریاضی بصورت زیر ساده می شود:

$$\psi = -\frac{1}{2}K\ln[\frac{1}{2}(\cosh\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a})]$$

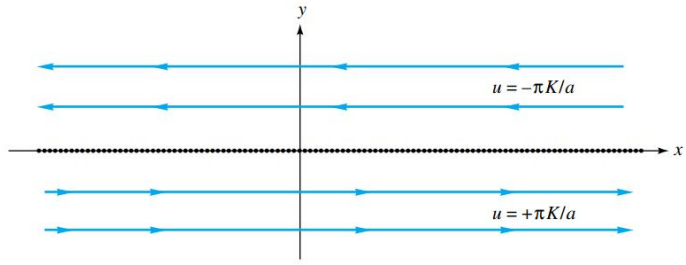
خطوط جریان در شکل زیر نشان داده شده است:



یک الگوی چشم گربه ای سلولهای جریان احاطه کننده گردابی های منفرد را نشان می دهد. در بالای چشم گربه ای جریان کاملا در جهت چپ و در پایین آن، جریان به سمت راست است. جریانهای بالا و پایین اگر $|y| >> a$ یکنواخت خواهند بود و سرعت آنها با مشتق گیری از معادله فوق بدست می آید:

$$u = \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{|y|>>a} = \pm \frac{\pi K}{a}$$

علامت مثبت برای پایین ردیف و علامت منفی برای بالای ردیف بکار می رود. توجه داشته باشید این اثر بوسیله یک ردیف گردابه ایجاد شده است و هیچگونه جریان یکنواختی که به سوی گردابه ها بیاید، وجود ندارد.

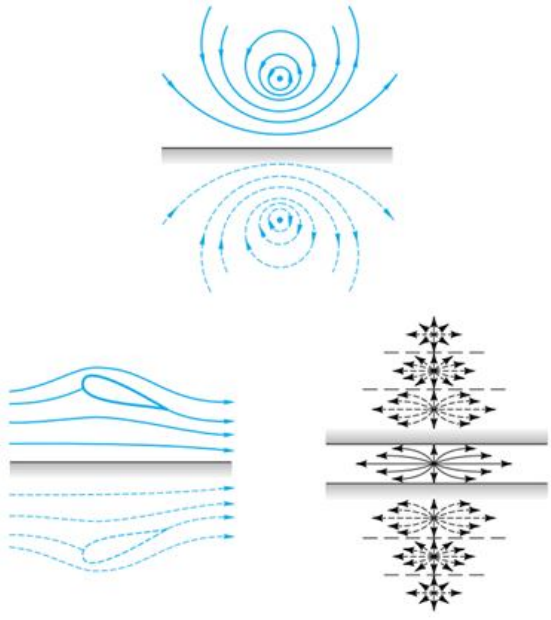


تصاویر (Images)

تمام مسائلی که پیش از این مطرح شد به جریانهای نامحدود مربوط است. مسائلی وجود دارد که با یک مرز صلب، جریان را محدود می کند، مثلا جریان آب زیر زمینی در نزدیکی قسمت زیرین یک سد یا هواپیما در حالت نشستن و برخاستن و یا یک استوانه ای که در تونل بادی با دیواره های باریک قرار گرفته است.

در چنین مواردی پاسخهای مربوط به جریان پتانسیل نامحدود را می توان برای در نظر گرفتن اثر دیواره ها با استفاده از روش تصاویر بدست آورد.

چشمه ای دو بعدی را در نظر بگیرید که در فاصله a از دیواره قرار دارد. برای ایجاد دیواره مورد نظر چشمه مجازی را با قدرت m در همان فاصله، زیر دیواره قرار می دهیم. قرینه بودن دو چشمه، خط جریانی صفحه ای ایجاد می کند که همان دیواره مورد نظر است. نمونه های دیگری در شکلهای پایین نشان داده شده است.



به مثال زیر توجه کنید.

مثال

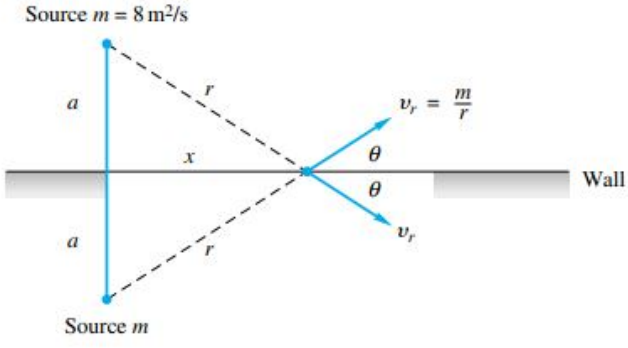
در چشمه نزدیک دیواره شکل زیر، سرعت روی دیواره درست بین چشمه ها صفر است. با حرکت در امتداد دیواره به سمت خارج، سرعت تا یک مقدار مشخص افزایش یافته و سپس با دور شدن از چشمه ها به مقدار صفر نزول می کند. اگر قدرت چشمه $8\frac{m^2}{s}$ باشد، در چه فاصله ای از دیواره حداکثر سرعت به $5\frac{m}{s}$ می رسد؟

جواب

هر چشمه یک سرعت شعاعی برابر $\frac{m}{r}$ به سمت خارج القا می کند که مولفه آن در امتداد دیواره برابر با $V_r \cos\theta$ است.

پس کل سرعت دیواره عبارت خواهد بود از:

$$u = 2V_r \cos\theta$$



با توجه به هندسه شکل:

$$\cos\theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

پس کل سرعت را می توان چنین بیان کرد:

$$u = \frac{2mx}{x^2 + a^2}$$

برای یافتن حداکثر سرعت از معادله بالا مشتق گرفته و سپس معادله را مساوی صفر قرار می دهیم.نتیجه می شود:

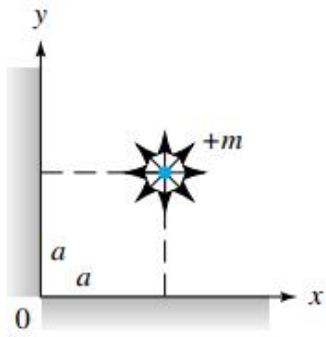
$$x = a \Rightarrow u_{\max} = \frac{m}{a}$$

و در نتیجه:

$$a = \frac{m}{u_{\max}} = \frac{8}{5} = 1.6m$$

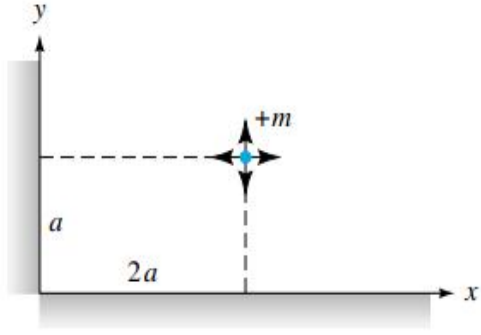
تمرین

با استفاده از روش تصویرسازی، در شکل این مساله که یک چشمه در نزدیکی دو دیواره قرار گرفته است، استفاده کنید و توزیع سرعت را در امتداد دیواره پایین($y = 0$)بدست آورید.



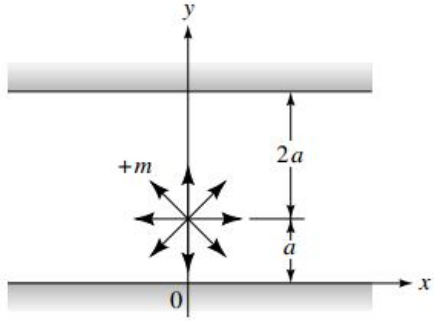
تمرین

برای محاسبه جریان حاصل از یک چشمه در فواصل نامساوی از دو دیواره شکل این مساله یک سیستم تصویری از روش تصویرسازی بنا کنید و مولفه های سرعت برایند را بدست آورید.



تمرین

در شکل این مساله سیستمی از تصاویر را ارائه دهید که برای شبیه سازی جریان یک چشمه دو بعدی که به صورت نامساوی بین دو دیواره موازی قرار گرفته است، مناسب باشد. سرعت را روی دیواره پایینی و در $x=a$ محاسبه کنید.



پایان