

# جزوہ ریاضی ۱

مولف :

مهندس حسن پور

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\textcircled{2} \int du = u + C$$

فرضیات های انتگرال گیری :

$$\textcircled{3} \int a du = au + C$$

$$\textcircled{4} \int (f(u) \pm g(u)) du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$$

$$\textcircled{5} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\textcircled{7} \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\textcircled{8} \int \cos u du = \sin u + C$$

$$\textcircled{9} \int \tan u du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$

$$\textcircled{10} \int \cot u du = \ln|\sin u| + C$$

$$\textcircled{11} \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\textcircled{12} \int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\textcircled{13} \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\textcircled{14} \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$\textcircled{15} \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\textcircled{16} \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$\textcircled{17} \int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$\textcircled{18} \int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$\textcircled{19} \int e^u du = e^u + C$$

$$\textcircled{20} \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\textcircled{21} \int \ln u du = u \ln u - u + C$$

$$\textcircled{22} \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\textcircled{23} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\textcircled{24} \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases}$$

$$\textcircled{25} \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases}$$

$$\textcircled{26} \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$\textcircled{27} \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$\textcircled{28} \int \tanh u du = \ln|\cosh u| + C$$

$$\textcircled{29} \int \coth u du = \ln|\sinh u| + C$$

$$\textcircled{30} \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\textcircled{31} \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$\textcircled{32} \int \sec u \tanh u du = -\sec u + C$$

$$\textcircled{33} \int \csc u \coth u du = -\csc u + C$$

$$\textcircled{34} \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$$

$$\textcircled{35} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\textcircled{36} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a}$$



دوسری روابط مثلاً:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \tan x \cot x = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 \\ 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{6} \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\textcircled{7} \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{رابطہ طلبی} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{8} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \textcircled{9} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{array} \right.$$

آپ بچہ ہیر بک:

$$\textcircled{1} \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\textcircled{2} \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$\textcircled{3} \tanh u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

$$\textcircled{4} \coth u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} \cosh u + \sinh u = e^u \\ \cosh u - \sinh u = e^{-u} \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \\ \tanh u \coth u = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \sinh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$$

$$\textcircled{8} \cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$$

$$\textcircled{9} \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\textcircled{10} \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \sinh^2 x + 1 = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$\textcircled{11} \sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta$$

$$\textcircled{12} \cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$\textcircled{1} (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\textcircled{2} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

یاد رکھو اتحاد کے محکم:

$$\textcircled{3} a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\textcircled{4} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\textcircled{5} (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\textcircled{6} (a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$$

$$\textcircled{7} (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

قضیه مقدار میانگین:

اگر  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد، عدد حقیقی مانند  $c$  که  $a \leq c \leq b$  موجود است به طوری که  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

قضیه:

اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد و در عدد  $M, m$  به ترتیب کمترین و بیشترین مقادیر تابع  $f$  در این بازه باشد

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

نکته:  $\int_a^b dx = b-a$

بدون حل اشتغال عبارات زیر را اثبات کنید.

$$\textcircled{1} \frac{3}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{3}{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \notin [2, 5] \quad \text{غیر}$$

$x$	2	5
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{26}$
	Max	min

پس  $\frac{1}{26} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{5} \rightarrow \int_2^5 \frac{dx}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \int_2^5 \frac{dx}{5}$

$$\frac{(5-2)}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{(5-2)}{5} \rightarrow \frac{3}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{3}{5}$$

$$\textcircled{2} 0 \leq \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \leq 2$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \rightarrow x = 2k+1 \xrightarrow{k=0} x=1 \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$x$	0	1	2
$f(x)$	0	1	0
	min	Max	min

پس  $0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 1 \rightarrow \int_0^2 0 dx \leq \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \leq \int_0^2 1 dx$

$$\rightarrow 0 \leq \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \leq 2$$

حسن پور

$$\textcircled{3} 0 \leq \int_0^1 x^{10} \sqrt{1+x^2} dx \leq \sqrt{2}$$

$$f(x) = x^{10} \sqrt{1+x^2} \quad \text{تابع معرین است}$$

$$[0, 1] \text{ بر } \begin{cases} x=0 & \text{min مطلق} \\ x=1 & \text{Max مطلق} \end{cases}$$

$x$	0	1
$f(x)$	0	$\sqrt{2}$
	min	Max

$$\rightarrow \text{پس} \rightarrow 0 \leq x^{10} \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^{10} \sqrt{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \sqrt{2} dx \rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{10} \sqrt{1+x^2} dx \leq \sqrt{2}$$

$$\textcircled{4} \frac{35}{8} \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2) dx \leq 10$$

$$f(x) = 4x - x^2 \rightarrow f'(x) = 4 - 2x \rightarrow x=2 \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$x$	1	2	$7/2$
$f(x)$	3	4	$7/4$
		Max	min

$$\rightarrow \frac{7}{4} \leq 4x - x^2 \leq 4 \xrightarrow{\int_1^{7/2}} \int_1^{7/2} \frac{7}{4} dx \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2) dx \leq \int_1^{7/2} 4 dx$$

$$\rightarrow \left(\frac{7}{2} - 1\right)\left(\frac{7}{4}\right) \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2) dx \leq \left(\frac{7}{2} - 1\right)4 \rightarrow \frac{35}{8} \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2) dx \leq 10$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{9} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2} = 0 \rightarrow x=0 \notin [2, 5] \quad \text{و نه}$$

$x$	2	5
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$
	Max	min

$$\rightarrow \frac{1}{27} \leq \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{6} \xrightarrow{\int_2^5} \int_2^5 \frac{dx}{27} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2} \leq \int_2^5 \frac{dx}{6}$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{6} \frac{2}{33} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^5} \leq 2$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^5} \rightarrow f'(x) = \frac{-5x^4}{(1+x^5)^2} = 0 \rightarrow x=0 \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$x$	0	2
$f(x)$	1	$\frac{1}{33}$
	Max	min

$$\rightarrow \frac{1}{33} \leq \frac{1}{1+x^5} \leq 1 \xrightarrow{\int_0^2} \int_0^2 \frac{dx}{33} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^5} \leq \int_0^2 dx$$

$$\rightarrow \frac{2}{33} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^5} \leq 2$$

بقیه سوالات مربوط به این بحث

در پشت برگه ۳

حسن پور

حد مجموع :

سلاط کار :

① عبارت داخل پرانتز طری حد را به صورت  $\sum_{i=1}^n \dots$  می نویسیم

② حرارت برآورد می کنیم  $a=0$  ,  $b=1$  (یعنی کران های انتگرال) پس  $\Delta x = \frac{1}{n}$  و  $x_i = \frac{i}{n}$  را طری می کنیم و از  $\frac{1}{n}$  فاکتور

گرفته و به بیرون  $\sum$  انتقال می دهیم. عبارت جدیدی  $\sum f(\frac{i}{n})$  می باشد.

③ با استفاده از  $f(\frac{i}{n})$  ضابطه  $f(x)$  در سطحی بالا به دست می آید و با استفاده از  $\int_a^b f(x) dx$  مقدار حد داده شده به

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{(b-a)i}{n}) = \int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\frac{i}{n} = x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x) dx \cdot \text{دست می آید}$$

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

نی ل ال ال

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \xrightarrow{\sin \frac{n\pi}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi \sin \frac{i\pi}{n} \xrightarrow{\frac{i}{n} = x} \int_0^1 \pi \sin \pi x dx = -\cos \pi x \Big|_0^1 = 2$$

حسن پور

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{25n^2+60n+36} + \frac{3n}{25n^2+120n+144} + \frac{3n}{25n^2+180n+324} + \dots + \frac{3n}{121n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{3n}{25n^2+60ni+36i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{3n^2}{25n^2+60ni+36i^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{3}{25+60\frac{i}{n}+36(\frac{i}{n})^2} \xrightarrow{\frac{i}{n} = x} \int_0^1 \frac{3 dx}{25+60x+36x^2} = \int_0^1 \frac{3 dx}{(5+6x)^2}$$

3

$$\frac{5+6x=u}{6dx=du} \int_5^{11} \frac{3/6 du}{u^2} = \frac{-1}{2} u^{-1} \Big|_5^{11} = \frac{3}{55}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

$$\textcircled{F} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left( \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{n} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi \cos \frac{i\pi}{n} \xrightarrow{i/n=x} \int_0^1 \pi \cos \pi x dx = \frac{\pi}{\pi} \sin \pi x \Big|_0^1 = 0$$

بسم الله الرحمن الرحيم

$$\textcircled{G} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{H} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \\ = 0 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 = 0 \times \int_0^1 x^2 dx = 0 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$\textcircled{I} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \xrightarrow{i/n=x} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{A} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^5 + \left(\frac{2}{n}\right)^5 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^5 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

$$⑨ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2}$$

$$\text{می دانیم: } x-1 < [x] \leq x$$

$$\text{طبق قضیه ساندویچ: } \left( \frac{x+2x+\dots+nx}{n^2} - \frac{n}{n^2} \right) < \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} \leq \frac{x+2x+\dots+nx}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2x+\dots+nx}{n^2} - \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1+2+\dots+n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n(n+1))}{2n^2} = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} = \frac{x}{2} \quad 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

هدف از طرح این مثال این است که با مجموع اشتباه گرفته نشود.

$$⑩ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2(1+(\frac{1}{n})^2)}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+(\frac{2}{n})^2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+(\frac{n}{n})^2)}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \begin{cases} x = \tan \theta \\ dx = \sec^2 \theta d\theta \end{cases} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta = \ln |\tan \theta + \sec \theta| \Big|_0^{\pi/4} = \ln(1+\sqrt{2})$$

نمی توان

$$⑪ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{\frac{2+4n}{n^4}} + \sqrt[3]{\frac{4+4n}{n^4}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{2n+4n}{n^4}} \right)$$

$$\sqrt[3]{n^4} = n \sqrt[3]{n} \quad \text{نمی توان}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt[3]{\frac{2+4n}{n}} + \sqrt[3]{\frac{4+4n}{n}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{2n+4n}{n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt[3]{\frac{2(1+2n)}{n}} + \sqrt[3]{\frac{2(2+2n)}{n}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{2(n+2n)}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{2} \left( \sqrt[3]{\frac{i+2n}{n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{\frac{i}{n} + 2} \quad \frac{i}{n} = x \quad \int_0^1 \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{x+2} dx$$

$$= \sqrt[3]{2} \int_0^1 (x+2)^{1/3} dx = \sqrt[3]{2} \frac{(x+2)^{4/3}}{4/3+1} \Big|_0^1 = \sqrt[3]{2} \frac{3}{4} (x+2)^{4/3} \Big|_0^1$$

$$= \sqrt[3]{2} \times \frac{3}{4} \left( 3^{4/3} - 2^{4/3} \right)$$

$$\textcircled{v} \quad \frac{7}{2} \leq \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx \leq \frac{35}{2} \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$\rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

$x$	$\frac{1}{2}$	1	3	4
$f(x)$	$\frac{33}{8}$	5	1	5
			min	Max

$$\rightarrow 1 \leq x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \leq 5$$

$$\int_{1/2}^4 dx \leq \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx \leq \int_{1/2}^4 5 dx$$

$$\rightarrow 4 - \frac{1}{2} \leq \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx \leq 5(4 - \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{7}{2} \leq \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx \leq \frac{35}{2}$$

$$\textcircled{\Lambda} \quad 2e^{-1/4} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2 \quad f(x) = e^{x^2-x} \rightarrow f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x} = 0$$

$$e^{x^2-x} > 0 \text{ always} \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ نقطه بحرانی}$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	2
$f(x)$	1	$e^{-1/4}$	$e^2$
		min	Max

$$e^{-1/4} < e^{x^2-x} < e^2 \xrightarrow{\int_0^2} \int_0^2 e^{-1/4} dx < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < \int_0^2 e^2 dx \rightarrow 2e^{-1/4} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2$$

$$\textcircled{9} \quad 32 < \int_{-4}^2 (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7) dx < 204 \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

$x$	-4	-3	1	2
$f(x)$	$\frac{41}{3}$	34	$\frac{16}{3}$	$\frac{23}{3}$
		Max	min	

$$\rightarrow \frac{16}{3} < \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7 < 34$$

$$\int_{-4}^2 \frac{16}{3} dx < \int_{-4}^2 (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7) dx < \int_{-4}^2 34 dx$$

$$\rightarrow 32 < \int_{-4}^2 (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7) dx < 204$$

$$\textcircled{1} \int_{-1.5}^{1.5} (2[x]x - [x]) dx$$

انگزال های معین زیر را محاسبه کنید:

$$y = 2[x]x - [x] = \begin{cases} y = -4x + 2 & -1.5 \leq x < -1 \\ y = -2x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ y = 0 & 0 \leq x < 1 \\ y = 2x - 1 & 1 \leq x < 1.5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-1.5}^{1.5} (2[x]x - [x]) dx &= \int_{-1.5}^{-1} (-4x + 2) dx + \int_{-1}^0 (-2x + 1) dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^{1.5} (2x - 1) dx \\ &= \left( \frac{-4x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1.5}^{-1} + \left( \frac{-2x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + 0 + \left( \frac{2x^2}{2} - x \right) \Big|_1^{1.5} = 6.25 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int_0^2 [2x+1] dx$$

اگر  $m$  عدد صحیح باشد:  $[x+m] = [x] + m$  نکته:

$$= \int_0^2 [2x] dx + \int_0^2 1 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [2x] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [2x] dx + \int_1^{\frac{3}{2}} [2x] dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 [2x] dx + \int_0^2 1 dx$$

$$y = [2x] = \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{2} \xrightarrow{x2} 0 \leq 2x < 1 \rightarrow [2x] = 0 \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 \xrightarrow{x2} 1 \leq 2x < 2 \rightarrow [2x] = 1 \\ 1 \leq x < \frac{3}{2} \xrightarrow{x2} 2 \leq 2x < 3 \rightarrow [2x] = 2 \\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \xrightarrow{x2} 3 \leq 2x < 4 \rightarrow [2x] = 3 \end{cases}$$

نمودی بازه بندی:

معکوس ضریب متغیر داخل

خبره صحیح: برای  $[2x]$

بازه ها را  $\frac{1}{2}$  در نظر بگیرید

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} 2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 3 dx + \int_0^2 1 dx = (1 - \frac{1}{2}) + 2(\frac{3}{2} - 1) + 3(2 - \frac{3}{2}) + 2 = 5$$

$$\textcircled{3} \int_{-1}^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x$	-1	0	2	3
$f(x)$	+	0	-	0

$$= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$= \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3$$

$$= \left( 0 - \left( \frac{-1}{3} - 1 \right) \right) + \left( \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - 0 \right) + \left( \left( \frac{27}{3} - 9 \right) - \left( \frac{8}{3} - 4 \right) \right) = \frac{10}{3}$$

حسن پور



$$\textcircled{f} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan x + 1| dx \quad \tan x + 1 = 0 \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x = -\frac{\pi}{4}$$

$x$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x)$	$0$	$+$	$2$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\tan x + 1) dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx = 0 + x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$

فرق

نتیجہ: اگر  $f(x)$  فریب شد:  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

$$\textcircled{d} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} |\sec x - 2| dx \quad \sec x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{k=0} x = \pm \frac{\pi}{3}$$

$x$	$-\frac{\pi}{3}$	$0$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	$0$	$-$	$0$

$$= \int_{-\pi/3}^0 (\sec x - 2) dx + \int_0^{\pi/3} (\sec x - 2) dx$$

$$= \left( -\ln |\sec x + \tan x| + 2x \right) \Big|_{-\pi/3}^0 - \left( \ln |\sec x + \tan x| - 2x \right) \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= (-\ln(1) + 0) + \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{2\pi}{3} - \ln|2 + \sqrt{3}| + \frac{2\pi}{3} = \ln \left| \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right| + \frac{4\pi}{3}$$

$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x|$  : نتیجہ

$$\textcircled{y} \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^{2x} + e^{3x}} dx$$

$$= \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^{2x}(1 + e^x)} dx \xrightarrow{e^{2x} = (e^x)^2} \int_0^{\ln 3} e^x \sqrt{1 + e^x} dx$$

$$\begin{cases} 1 + e^x = u \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow u=2 \\ x=\ln 3 \rightarrow u=4 \end{cases} \\ e^x dx = du \end{cases}$$

$$= \int_2^4 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_2^4 = \frac{2}{3} (\sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3}) = \frac{2}{3} (8 - 2\sqrt{2})$$

$$\textcircled{y} \int_0^{2/3} |3x^2 - 4x + 1| dx$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x-\frac{1}{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$x$	$0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$

$$= \int_0^{1/3} (3x^2 - 4x + 1) dx + \int_{1/3}^{2/3} -(3x^2 - 4x + 1) dx$$

$$= (x^3 - 2x^2 + x) \Big|_0^{1/3} - (x^3 - 2x^2 + x) \Big|_{1/3}^{2/3} = \frac{2}{9}$$

حسن پور

$$\textcircled{8} \int_0^{\pi} [2 \sin x] dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} [2 \sin x] dx + \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [2 \sin x] dx + \int_{5\pi/6}^{\pi} [2 \sin x] dx = x \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\textcircled{9} I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} \quad \text{نکته: } \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2}-x) dx}{\sin^3(\frac{\pi}{2}-x) + \cos^3(\frac{\pi}{2}-x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$$

$$\text{فرض: } \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \rightarrow 1 = \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \rightarrow \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = I + I \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{10} \int_{-1/3}^{1/3} \ln \frac{1+x}{1-x} \sin^{12} x dx$$

تک تابع زوج  $\sin^{12} x$   
تک تابع فرد  $\ln \frac{1+x}{1-x}$

$$\Rightarrow \int_{-1/3}^{1/3} \ln \frac{1+x}{1-x} \sin^{12} x dx = 0$$

نکته: تابع فرد = تابع فرد  $\times$  تابع زوج

نکته:  $\int_{-a}^a \text{تابع فرد} dx = 0$

$$\textcircled{11} \int_0^3 (-1)^{[x]} dx \quad \text{نکته: } \int_0^n (-1)^{[x]} dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$$= \int_0^1 (-1)^0 dx + \int_1^2 (-1)^1 dx + \int_2^3 (-1)^2 dx = x \Big|_0^1 - x \Big|_1^2 + x \Big|_2^3 = 1$$

$$\textcircled{12} \int_0^{\pi/4} \cos [x] dx$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

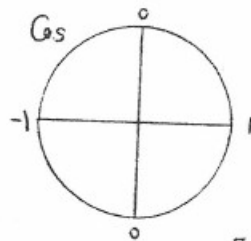
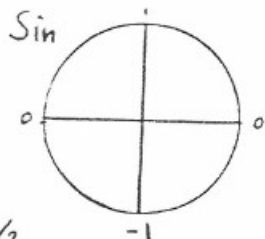
$$= \int_0^{\pi/4} \cos 0 dx = \int_0^{\pi/4} 1 dx = x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

حسن پور

$$\textcircled{13} \int_{1/2}^1 \left[ \frac{1}{x} \right] dx = \int_{1/2}^1 1 dx = x \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$

$$(14) \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/4} -(\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi}^{\pi+\pi/4} (\sin x - \cos x) dx \\
 &+ \int_{\pi+\pi/4}^{\frac{3\pi}{2}} -(\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -(\sin x - \cos x) dx = (\cos x - \sin x) \Big|_0^{\pi/4} - (\cos x + \sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
 &- (\cos x + \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} - (\cos x + \sin x) \Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} + (\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} + (\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
 &= (\sqrt{2} - 1) - (1 - \sqrt{2}) - (1 - 1) - (-\sqrt{2} + 1) + (-1 + \sqrt{2}) + (1 + 1) = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &0 < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos x > \sin x \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin x > \cos x \quad \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^x f(x) dx = \int_2^1 t^2 f(t) dt + \frac{1}{8} x^{16} + \frac{1}{9} x^{18} + C$$

(15) تابع برسته ی f تابع گزینی باید که :  
۸۵ فزین

$$\text{چون } \textcircled{I} \int_2^1 t^2 f(t) dt = - \int_1^2 t^2 f(t) dt = - \int_1^x t^2 f(t) dt \quad \textcircled{II} \int_0^x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^x f(x) dx$$

$$\textcircled{I} \textcircled{II} \int_0^x f(x) dx + \int_1^x f(x) dx = \int_1^2 -t^2 f(t) dt + \frac{1}{8} x^{16} + \frac{1}{9} x^{18} + C \quad \text{مشتق گیری}$$

$$0 + f(x) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17} \Rightarrow f(x) = \frac{2x^{15}}{1+x^2} (1+x^2) \Rightarrow f(x) = 2x^{15}$$

$$\left( \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{f(x)} h(t) dt = f'(x) h(f(x)) - g'(x) h(g(x)) \right)$$

نکته: مشتق انتگرال

$$f'(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$$

(16) مطلوب است تعیین تابع غیر صفر f به طوری که

۸۴ سال فنی

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2 f'(x) f(x) = f(x) \frac{\sin x}{2 + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x \frac{\sin x}{2 + \cos x} \quad \text{انتگرال}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x dx}{2 + \cos x} \quad \begin{cases} 2 + \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |2 + \cos x| + C \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \ln |2 + \cos x| + C$$

حسن پور

فرض کنید (۱۷)  $F(x) = \int_1^x t e^{t^2} dt$  مطلوب است محاسبه  $\int_0^1 t F(t) dt$

حل:  $F(t) = \int_1^t t e^{t^2} dt \Rightarrow F(t) = \frac{1}{2} \int_1^t 2 t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2} \Big|_1^t = \frac{1}{2} (e^{t^2} - e)$

$\frac{1}{2} \int_0^1 t (e^{t^2} - e) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^{t^2} dt - \frac{e}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4} e^{t^2} \Big|_0^1 - \frac{e}{2} \times \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$

سال ۸۵ قتی (۱۸) الف) این قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل را بدون اثبات، بیان کنید

فرض کنیم  $f$  بر بازه‌ی  $I$  پیوسته بوده و  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  که در آن  $a$  نقطه‌ی ثابتی از  $I$  و  $x$  نقطه‌ی متغیر از  $I$  باشد

در این صورت  $F(x)$  بر  $I$  مشتق پذیر است و داریم  $F'(x) = f(x)$

ب) تابع پیوسته و مثبت  $f$  را چنان بیابید که  $f(2) = 4$  ،  $\int_0^x f(t) dt = f^2(x)$

حل: مشتق  $f(2) = 2 f(x) f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} x + C$

$f(2) = 4 \Rightarrow f(2) = 4 = \frac{1}{2} (2) + C \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} x + 3$

مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

سال ۸۴ قتی (۱)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$

حل:  $= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{1}{h} \sinh^{-1} u \Big|_0^h = \frac{1}{h} (\sinh^{-1}(h) - \sinh^{-1}(0))$

سال ۸۵ قتی (۲)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$

حل:  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt}{\sin x} = \frac{0}{0}$  به هم

hop  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sqrt{1-\sin^2 x} - 0}{\cos x} = 1$

حسن پور

Q11  

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos 2x} \sqrt{1-t^2} dt}{x^3} = \frac{0}{0}$$

Sol: 
$$\stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \sqrt{1-\cos^2 2x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \sin 2x \cos 2x}{6x} \stackrel{2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 4x}{6x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \times 4 \cos 4x}{6} = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$$

Q12  

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{1 - \cosh x} \int_0^x \frac{dt}{1+t^6} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x \int_0^x \frac{dt}{1+t^6}}{1 - \cosh x}$$

Sol: 
$$\stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x \int_0^x \frac{dt}{1+t^6} + \frac{\sinh x}{1+x^6}}{-\sinh x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x \int_0^x \frac{dt}{1+t^6} + \frac{\cosh x}{1+x^6} + \frac{\cosh x(1+x^6) - 6x^5 \sinh x}{(1+x^6)^2}}{-\cosh x}$$

$$= \frac{\int_0^0 \frac{dt}{1+t^6} + \frac{1}{1+0^6} + \frac{1(1+0^6) - 0}{(1+0^6)^2}}{-1} = -2$$

Q13  

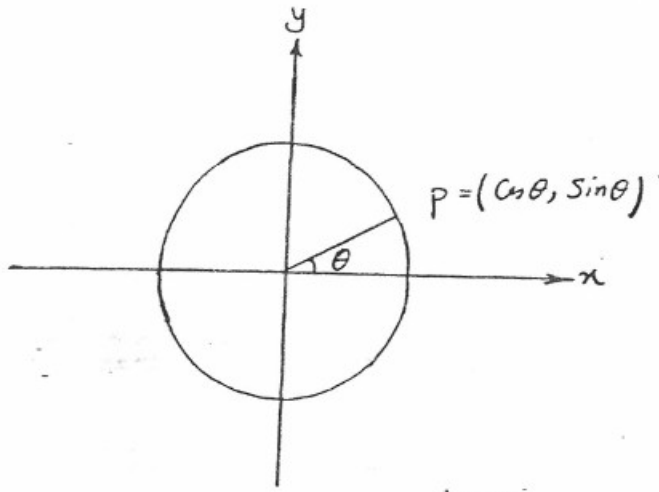
$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\sin x} (e^t - 1) dt}{e^x - x - 1}$$

$$\int_0^{\sin x} (e^t - 1) dt = e^t - t \Big|_0^{\sin x} = e^{\sin x} - \sin x - e^0 + 0 = e^{\sin x} - \sin x - 1$$

Ans:  $-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin x} \leq e$  ,  $-1 \leq \sin x \leq 1$

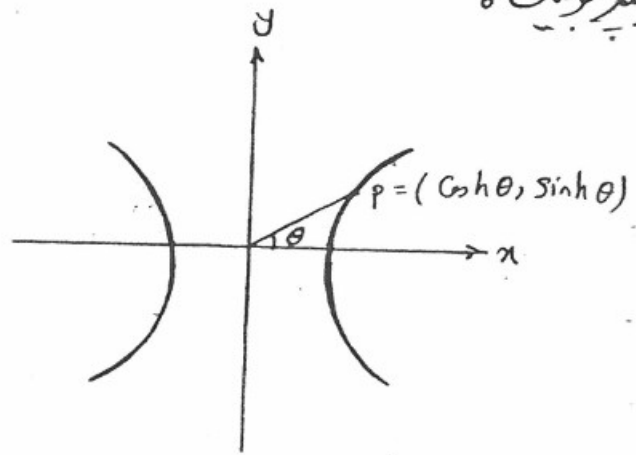
Sol: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin x} - \sin x - 1}{e^x - x - 1} = 0$$

## توابع هایپر بولیک :



$$x^2 + y^2 = 1 \quad P: \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases}$$

نقطه  $P$  بر دایره  $x^2 + y^2 = 1$  قرار دارد.



$$x^2 - y^2 = 1$$

نقطه  $P$  بر روی هذلولی  $x^2 - y^2 = 1$  قرار دارد.

توابع  $e^x$  و  $e^{-x}$  آنقدر در ریاضیات ظاهر می شود که نام خاص یافته اند. مقادیر تابعی آنها به مختصات نقاط یک هذلولی متساوی الاضلاع مربوط اند به همان صورت که مقادیر توابع مثلثاتی نظیر به مختصات نقاط یک دایره مربوط اند. توابع مثلثاتی و هذلولی شبیه به هم اند ولی تفاوت های اساسی هم دارند. توابع هذلولی برخلاف توابع مثلثاتی، نه گویا و نه متناوب هستند.

(۱) تابع سینوس هایپر بولیک :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \sinh(-x) = -\sinh x \quad \text{تابع فرد} \quad \text{دامنه: } \mathbb{R} \quad \text{برد: } (-\infty, +\infty)$$

(۲) تابع کسینوس هایپر بولیک :

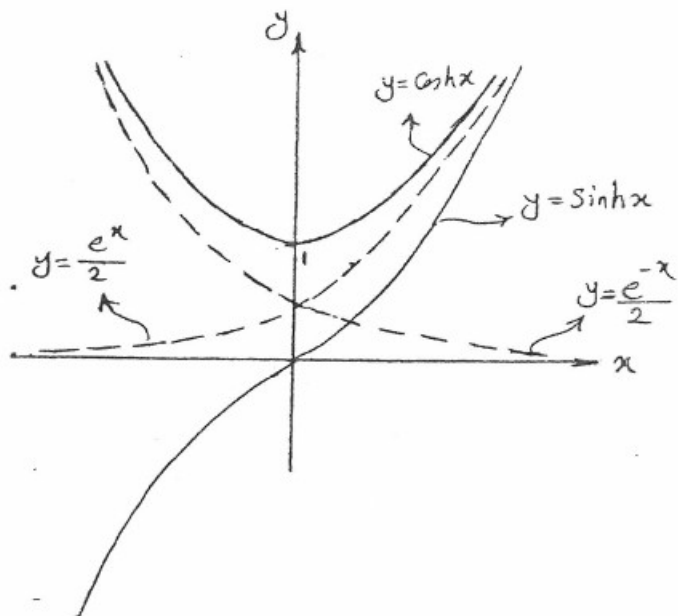
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad \text{تابع زوج} \quad \text{دامنه: } \mathbb{R} \quad \text{برد: } [1, \infty)$$

$$\frac{d}{dx} (\sinh x) = \cosh x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\frac{d}{dx} (\cosh x) = \sinh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$



$$y = \cosh x$$

$$\begin{cases} [0, +\infty) & \text{صورتی} \\ (-\infty, 0] & \text{نزولی} \\ x=0 \rightarrow y=1 & \text{نقطه min} \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = +\infty \end{cases}$$

$$y = \sinh x$$

$$\begin{cases} (-\infty, +\infty) & \text{صورتی} \\ (0, +\infty) & \text{تقریباً بالا} \\ (-\infty, 0) & \text{تقریباً پایین} \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\textcircled{2} \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\textcircled{3} \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad \text{اتحادها}$$

$$\textcircled{4} \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad \textcircled{5} \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1$$

نکته: برای راحتی در حفظ کردن اتحادهای هیدربولیک، در فرمول‌های مثلثاتی مشابه، کافایت بجای نسبت‌های مثلثاتی، منفی نسبت ها هیدربولیک قرار داده شود. بجز از کسینوس

$$\textcircled{6} \cosh x + \sinh x = e^x$$

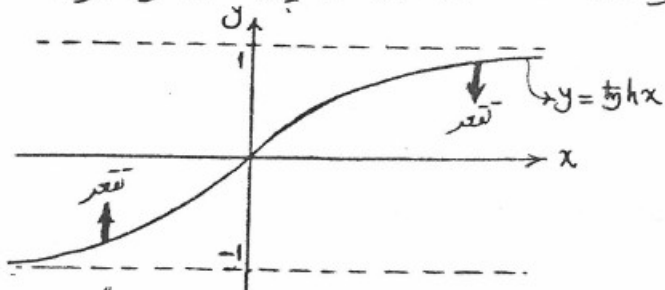
$$\textcircled{7} \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\textcircled{8} \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

۳- تابع تانژانت هیدربولیک:

توابع  $\sinh x$ ،  $\cosh x$  هر دو در بازه  $(-\infty, +\infty)$  پیوسته و مشتق پذیرند و  $\cosh x$  هرگز صفر نمی شود پس  $\tanh x$  نیز در این بازه



پیوسته و مشتق پذیر است.

$$\begin{cases} x > 0 & \text{مثبت} \\ x = 0 & \text{صفر} \\ x < 0 & \text{منفی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{اکثر هم نزدیک} \\ \text{همواره صورتی} \\ \text{نقطه عطف } x=0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} (\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x > 0$$

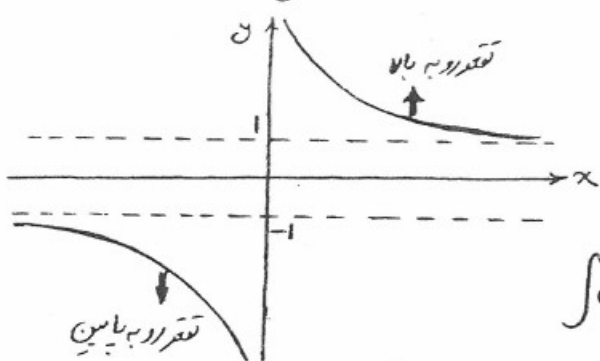
$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad \text{تابع فرد} \quad \text{برد: } (-1, 1)$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1 \quad \text{جانب‌های انتی} \quad \int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$$

۴- تابع کتانگانت هسبرونیک :

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \coth x = 1 \quad \text{موجب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \coth x = -1 \quad \text{منفی}$$

$$\sinh x = 0 \quad \boxed{x=0}$$

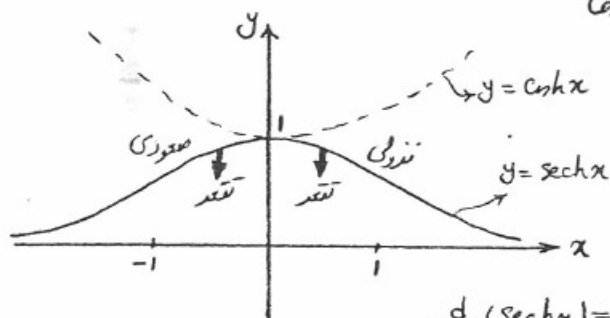
$$\int \coth x \, dx = \ln(\sinh x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x < 0 \quad \text{فراوان نزولی}$$

$$\coth(-x) = -\coth x \quad \text{تابع فرد} \quad \text{بردار: } (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

اکسپاننسیال ندارد  
تقاطع ندارد

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



تابع زوج

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \xrightarrow{\div \cosh^2 x} 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\max \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{مطلق}$$

تقاطع ندارد  
موجب ثابت ندارد

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sech} x = 0 \rightarrow y=0 \quad \text{موجب منفی}$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad \text{بردار: } (-\infty, +\infty) \quad \text{بردار: } [0, 1]$$

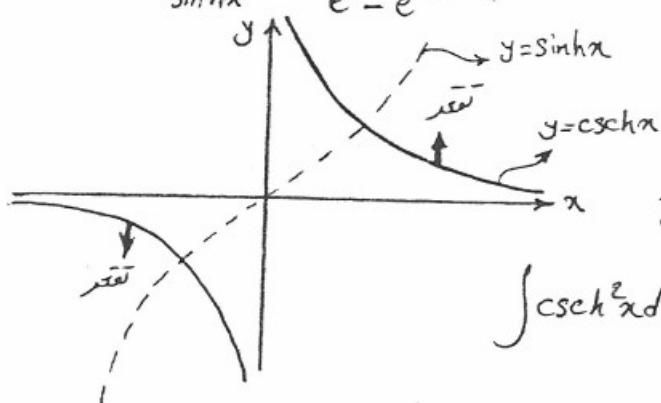
$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

تابع فرد

۵- کسکانت هسبرونیک



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} < 0 \quad \text{نزولی}$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + C, \quad \int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$$

$$\text{بردار: } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\text{بردار: } \mathbb{R} - \{0\}$$

اکسپاننسیال ندارد

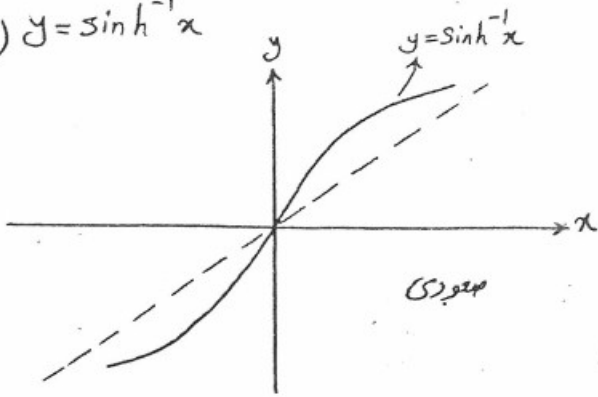
$$e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \text{موجب ثابت}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{csch} x = 0 \Rightarrow \boxed{y=0} \quad \text{موجب منفی}$$



توابع هذلولوی معکوس :

۱)  $y = \sinh^{-1} x$



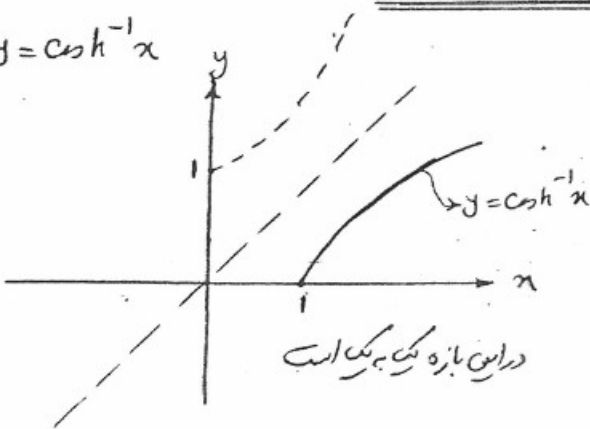
$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\sinh(\sinh^{-1} x) = x$$

۲)  $y = \cosh^{-1} x$

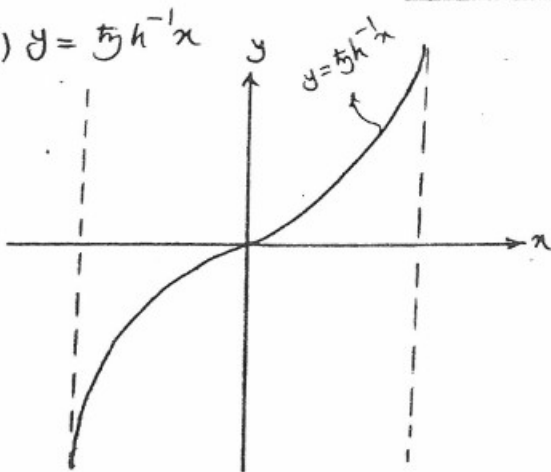


$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\cosh(\cosh^{-1} x) = x$$

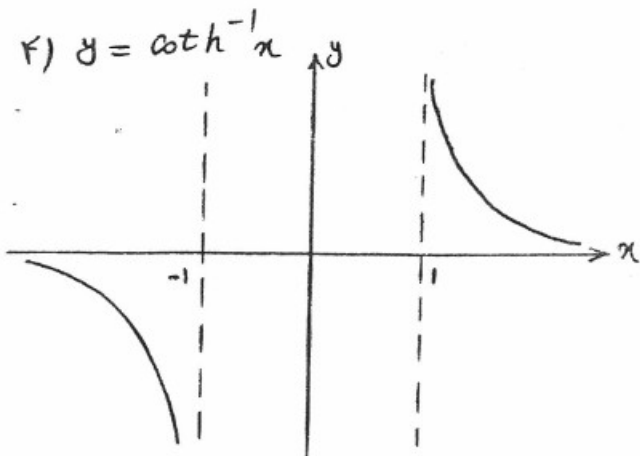
۳)  $y = \tanh^{-1} x$



$$\frac{d}{dx} (\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

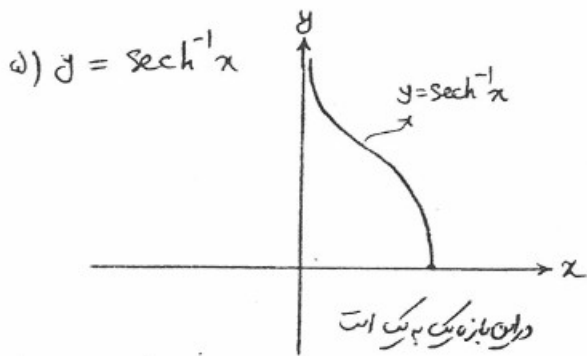
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

۴)  $y = \coth^{-1} x$



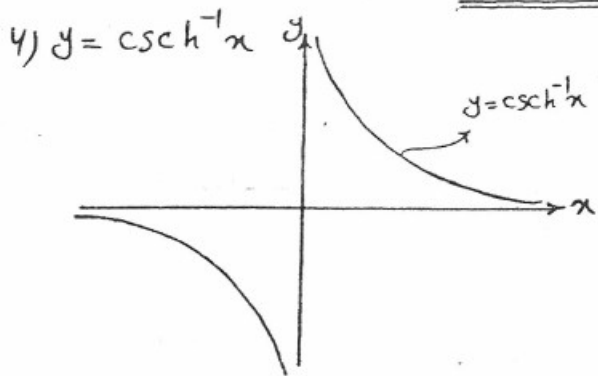
$$\frac{d}{dx} (\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + C$$



$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad 0 < x < 1$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C$$



$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \frac{|x|}{a} + C$$

1)  $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

اثبات طایع منم:

اثبات  $\Rightarrow y = \sinh^{-1} \frac{x}{a} \xrightarrow{I} \sinh y = \frac{x}{a} \quad II \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a \cosh y}$

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\pm a \sqrt{\sinh^2 y + 1}} \xrightarrow{\cosh y > 0 \text{ و } x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{+a \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \star$$

2)  $\sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$

اگر  $a=1 \Rightarrow \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

اثبات  $\Rightarrow \cosh y = \frac{x}{a} = \sinh y \rightarrow e^y = \sinh y + \cosh y = \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$

$\xrightarrow{\ln} y = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \Rightarrow \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$  اثبات: کافیت از عبارت  $\star$  که در بالا اثبات شده استدلال کنیم

4)  $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

اثبات: همانند اثبات اول می باشد.

$$\begin{aligned}
 3) \quad \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{\text{فرض}} x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow (e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1 \\
 &\xrightarrow{\text{نقل } e^{2y} \text{ إلى الطرف الآخر}} e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{\text{نأخذ } \ln} 2y = \ln \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \boxed{\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}} \star \star
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{طريقة إثبات: كافيته لنربط} \star \star \text{ مشتق كروية سوبر}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + C \xrightarrow{\text{فرض}} y = \coth^{-1} \frac{x}{a} \rightarrow \frac{x}{a} = \coth y \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \coth^{-1} \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{a \operatorname{sech}^2 y} = + \frac{1}{a(1 - \coth^2 y)} = \frac{1}{a(1 - \frac{x^2}{a^2})} \\
 \frac{d}{dx} \left( \coth^{-1} \frac{x}{a} \right) &= \frac{a}{a^2 - x^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \coth^{-1} \frac{x}{a} &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} \xrightarrow{\text{إثبات}} y = \coth^{-1} \frac{x}{a} \rightarrow \coth y = \frac{x}{a} \rightarrow \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} = \frac{x}{a} \\
 e^{2y} &= \frac{x+a}{x-a} \xrightarrow{\ln} y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} \rightarrow \boxed{\coth^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} &= -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{|x|}{a} \Rightarrow y = \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} \rightarrow \frac{x}{a} = \operatorname{sech} y \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-a \operatorname{sech} y \tanh y} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\operatorname{sech} y \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 y}} = \frac{-1}{a \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \\
 \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} &= -\frac{a}{x\sqrt{a^2 - x^2}} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \operatorname{sech}^{-1} x &= \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \xrightarrow{\text{فرض}} y = \operatorname{sech}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{sech} y \rightarrow x = \frac{2}{e^y + e^{-y}} \\
 x e^{2y} - 2 e^y + x &= 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4x^2
 \end{aligned}$$

$$e^y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^2}}{2x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \rightarrow \boxed{\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}}$$

مشتق توابع زیر را بدست آورید (هدف از نوشتن این سوالات آشنایی با انواع مشتق ها می باشد که در امتحانات آمده است)

شماره ۱۵  
①  $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

حل:  $\ln f(x) = \ln (\sin x)^{\cos x} \rightarrow \ln f(x) = \cos x \ln (\sin x)$

$\rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \ln (\sin x) + \frac{\cos x \cos x}{\sin x} \rightarrow f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left[ -\sin x \ln (\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]$

شماره ۱۵  
②  $f(x) = \frac{(x^2+1)^3 \sqrt{x+1}}{x(x^2-1)^2 \sqrt[3]{x}} \Rightarrow \ln f(x) = 3 \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(x+1) - \ln x - 2 \ln(x^2-1) - \frac{1}{3} \ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{6x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x} - \frac{4x}{x^2-1} - \frac{1}{3x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1)^3 \sqrt{x+1}}{x(x^2-1)^2 \sqrt[3]{x}} \left( \frac{6x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4x}{x^2-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} \right)$

شماره ۱۵

③  $f(x) = \left[ \tan^{-1}(x^2) \times e^{\sin x} \times \tan(x^2) \right]^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \ln y = \frac{4}{3} \ln \left( \tan^{-1} x^2 \times e^{\sin x} \times \tan x^2 \right)$

$\Rightarrow \ln y = \frac{4}{3} \left[ \ln(\tan^{-1} x^2) + \ln e^{\sin x} + \ln(\tan x^2) \right] \quad \frac{y'}{y} = \frac{4}{3} \left[ \frac{\frac{2x}{1+x^4}}{\tan^{-1} x^2} + \cos x + \frac{2x(1+\tan^2 x^2)}{\tan x^2} \right]$

$y' = \frac{4}{3} \left( \tan^{-1} x^2 \times e^{\sin x} \times \tan x^2 \right)^{\frac{4}{3}} \left[ \frac{2x}{(1+x^4) \tan^{-1} x^2} + \cos x + \frac{2x(1+\tan^2 x^2)}{\tan x^2} \right]$

شماره ۱۴  
④  $f(x) = \int_{\tan^{-1} x}^{\sin^{-1} \sqrt{x}} \frac{t^6 dt}{1+t^4}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{(\sin^{-1} \sqrt{x})^6}{1+(\sin^{-1} \sqrt{x})^4} - \frac{1}{1+x^2} \times \frac{(\tan^{-1} x)^6}{1+(\tan^{-1} x)^4}$

شماره ۱۵

⑤  $f(x) = x \tan^{-1}(\ln x)$

$f'(x) = \tan^{-1}(\ln x) + \frac{\frac{1}{x} \times x}{1+(\ln x)^2} \rightarrow f'(x) = \tan^{-1}(\ln x) + \frac{1}{1+(\ln x)^2}$

قسط ۱۴  
 ④  $f(x) = \frac{\sinh(\sqrt{x}+1)e^{2x} \tan^{-1} x}{(1+x^4)^3 \sqrt[3]{x^2+6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln[\sinh(\sqrt{x}+1)] + \ln e^{2x} + \ln(\tan^{-1} x) - 3 \ln(1+x^4) - \frac{1}{3} \ln(x^2+6)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cosh(\sqrt{x}+1)}{\sinh(\sqrt{x}+1)} + 2 + \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\tan^{-1} x} - \frac{12x^3}{1+x^4} - \frac{1}{3} \times \frac{2x}{x^2+6}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cosh(\sqrt{x}+1) + 2 + \frac{1}{(x^2+1) \tan^{-1} x} - \frac{12x^3}{1+x^4} - \frac{2x}{3(x^2+6)} \right]$$


---

قسط ۱۵  
 ⑤  $y = \ln \sqrt{1+x^2} + \sin^{-1} x + 5^{\cosh x}$

$$y' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} + \sinh x (5^{\cosh x} \ln 5)$$

$$\rightarrow y' = \frac{x}{1+x^2} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} + \sinh x (5^{\cosh x} \ln 5)$$


---

قسط ۱۵  
 ①  $y^{2/3} = \frac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{2x-4}}$

حل:  $\ln y^{2/3} = \ln \frac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{2x-4}} \Rightarrow \frac{2}{3} \ln y = \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(3x+4) - \frac{1}{5} \ln(2x-4)$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{2(3x+4)} - \frac{2}{5(2x-4)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{2} \left( \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{2(3x+4)} - \frac{2}{5(2x-4)} \right) \left( \frac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{2x-4}} \right)^{3/2}$$

ی است

محدای مرتبط به هم (1, 0, ∞) زیر حاصل می آید.

نمونه ۸۵

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \text{ بی معنی}$$

$$\text{رنگ اچا : } I = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cosh x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(\cosh x)} \rightarrow L$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cosh x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ هم } \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tanh x}{1} = \tanh 0^+ = 0$$

$$\Rightarrow I = e^0 = 1$$

نکته:  $e^{\ln f(x)} = f(x)$

نمونه ۸۶

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty \text{ بی معنی}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right)} \rightarrow L$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{\sin x}{x} \right)}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ هم } \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}$$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2(2x \sin x + x^2 \cos x)} = \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x} = \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x}$$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{2 \cos x + 4 \cos x - 4x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^L = e^{-1/6}$$

نمونه ۸۷

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\ln x}{x} \right)^x = 1^\infty \text{ بی معنی}$$

$$\text{در درجه قوت از صحت : } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\ln x}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

حسن پور

جواب

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 0^0 \quad \text{ہم} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} \rightarrow L$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ہو} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cot x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} e^L = e^0 = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-4}{x}\right)^{x-1} = 1^\infty \quad \text{ہم} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)^{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x-1) \ln\left(\frac{x-4}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \ln\left(\frac{x-4}{x}\right) = \infty \times 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{0}{0} \quad \text{ہو} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x^2-4x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-8x+4}{x^2-4x} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^L = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x)^x = \infty^0 \quad \text{ہم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\csc x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(\csc x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L = 0 \times \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\csc x)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \text{ہم}$$

$$\text{ہو} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\csc x \cot x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \frac{0}{0} \quad \text{ہم}$$

$$\text{ہو} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} e^L = e^0 = 1$$

حسن پور

سؤالات تمرین:

فنی ۱۵ (۱) معادله خط راستی را بیابید که از نقطه  $(0,0)$  می‌گذرد و مماس بر  $y = e^x$  است.

$$f(x) = e^x \rightarrow f(\alpha) = e^\alpha \rightarrow f'(\alpha) = e^\alpha$$

برای حل این نقطه مانند  $P(\alpha, f(\alpha))$  در نظر بگیرید:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y - e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha) \xrightarrow{\text{مبدأ } (0,0)} -e^\alpha = e^\alpha(0 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow P(1, e) \Rightarrow y - e = e(x - 1) \Rightarrow y = ex \quad \text{شیب } m = e$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

فنی ۱۵ (۲) الف) نشان دهید برای هر  $x \geq 1$  داریم:

\* ترجمه: موارد مشابه این سؤال در ترم سؤال امتحانی است. بقیه موارد از کتاب سیدین مطابقت شود.

$$\cosh^{-1} x = y \Rightarrow x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow e^y + e^{-y} = 2x \Rightarrow e^y + \frac{1}{e^y} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2y} + 1}{e^y} = 2x \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \xrightarrow{e^y = t} t^2 - 2xt + 1 = 0 \Rightarrow t = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{لگاریتم}} y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \xrightarrow[\substack{x \geq 1 \\ y = \cosh^{-1} x}]{\quad} \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh^{-1} x - \ln x)$$

ب) حد درجه دوم را محاسبه کنید:

$$\xrightarrow{\text{از قسمت الف داریم}} \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} \xrightarrow[\substack{\text{از قسمت الف داریم} \\ x \geq 1}]{\quad}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x + |x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{2x}{x} \right) = \ln 2$$



$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & x < -1 \end{cases}$$

(۳) نشان دهید :

$$\text{حل: } \begin{cases} \tan^{-1} x = \alpha \Rightarrow x = \tan \alpha \\ \tan^{-1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = \beta \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \tan \beta \end{cases}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x \cdot \frac{1-x}{1+x}} \xrightarrow{\text{خرج مشترک}} \frac{\frac{x^2 + x + 1 - x}{1+x}}{\frac{1+x - x + x^2}{1+x}} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \tan^{-1}(1) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & x < -1 \end{cases}$$

فرضی ۱۳ (۴) اگر  $f(x) = \sin^{-1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$  و  $g(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x}$  ،  $x \geq 0$  ،  $f(x) = g(x) + C$  : نشان دهید :

$$\text{برای راحتی در نوشتن} \quad \begin{cases} f(x) = \alpha \\ g(x) = \beta \end{cases}$$

که  $C$  یک ثابت است پس مقدار  $C$  را تعیین کنید.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sin^{-1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \xrightarrow{\text{Sin ی بگیر}} \sin \alpha = \frac{x-1}{x+1} \\ \beta = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \tan^{-1} \sqrt{x} \xrightarrow{\text{tan ی بگیر}} \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{x} \Rightarrow 1 + \tan^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow 1 + x = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1 \Rightarrow \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$f(x) = g(x) + C \Rightarrow \alpha = \beta + C \xrightarrow{\text{از طرفین Sin ی بگیر}} \sin \alpha = \sin(\beta + C)$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \cos C + \sin C \cos \beta \rightarrow \begin{cases} \sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \\ \cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cos C + \sin C \left( \frac{2}{1+x} - 1 \right) = \frac{2\sqrt{x} \cos C}{1+x} + \sin C \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$\frac{x-1}{1+x} = \frac{2\sqrt{x} \cos C - \sin C (x-1)}{1+x} \quad \text{بجمله است اگر } C \text{ را } \frac{3\pi}{2} \text{ در نظر بگیریم در معادله صدق می کند}$$

$$C = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin C = -1 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Rightarrow x-1 = x-1$$

رابطه شد

حسن پور

مساحت به کمک انتگرال :

\* مساحت ناحیه‌ی بین دو منحنی :

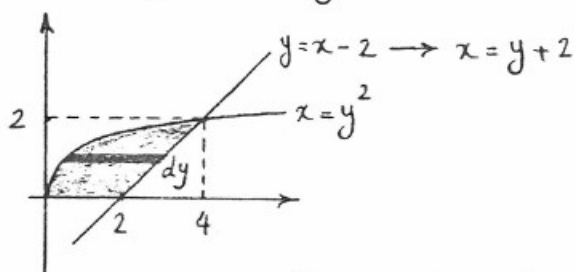
اگر در بازه‌ی  $[a, b]$  داشته باشیم  $f_1(x) \geq f_2(x)$  مساحت ناحیه‌ی بین نمودارهای فوق از  $a$  تا  $b$

$$\text{مساحت} = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad \text{برابر است با}$$

نکته: گاهی برای یافتن یک مساحت آسانتر است که به جای انتگرال گیری از مساحت نوارهای قائم  $(dx)$  از نوارهای

$$\text{افقی} (dy) \text{ استفاده کنیم} \quad \text{مساحت} = \int_a^b [f_1(y) - f_2(y)] dy$$

مثال: مساحت ناحیه‌ی را با پیدا کردن طرف راست به خط  $y = x - 2$  و از طرف چپ به  $x = y^2$  و از پایین به محور  $x$  که



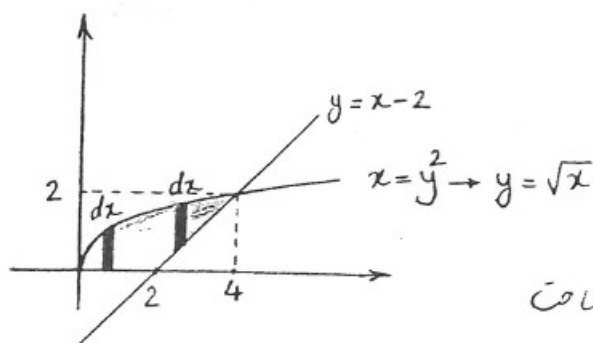
محدود است.

روش اول: استفاده از اعداد به صورت  $dy$

$$y^2 = y + 2 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{مساحت} = \int_0^2 (\underbrace{y+2}_{\text{راست}} - \underbrace{y^2}_{\text{چپ}}) dy = \frac{10}{3}$$

روش دوم: استفاده از اعداد به صورت  $dx$  باید توجه کنیم که  $dy$  و  $dx$  بین چه منحنی‌هایی است.

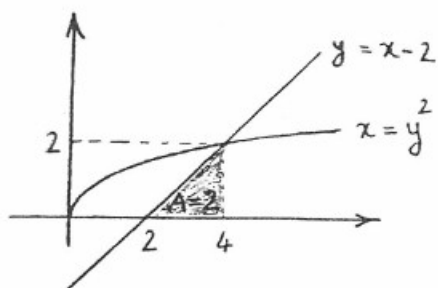


$$0 \rightarrow 2 \rightarrow \int \sqrt{x} dx$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow \int [\sqrt{x} - (x-2)] dx$$

به خاطر ثبت کردن ناحیه اول

$$\text{مساحت} = A = \int_0^2 (\sqrt{x} - 0) dx + \int_2^4 [\sqrt{x} - (x-2)] dx = \frac{10}{3}$$

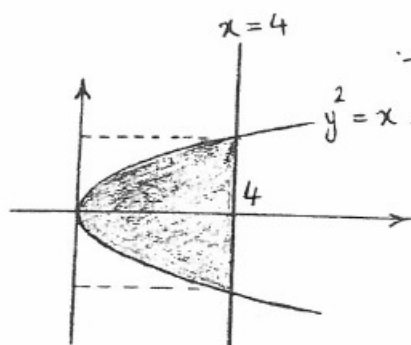


$$\text{مساحت کل} = \int_0^4 (\sqrt{x} - 0) dx = \frac{16}{3}$$

روش دوم: مساحت کل

$$\frac{16}{3} - A = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

①  $y^2 = x, x = 4$

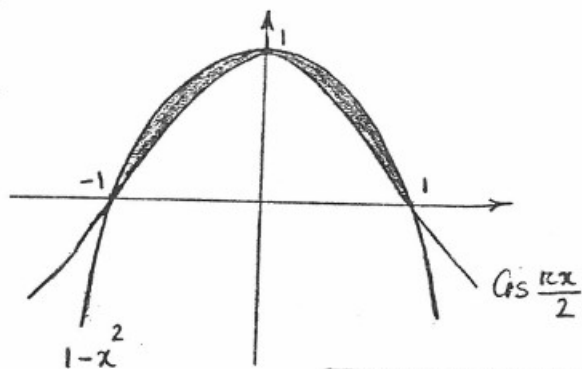


نکته: مساحت محدوده بین دو منحنی زیر را باید.

$$\text{مساحت} = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \frac{32}{3}$$

②  $y = -1, y = \cos x, -\pi \leq x \leq \pi$   $\text{مساحت} = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos x - (-1)] dx = 2\pi$

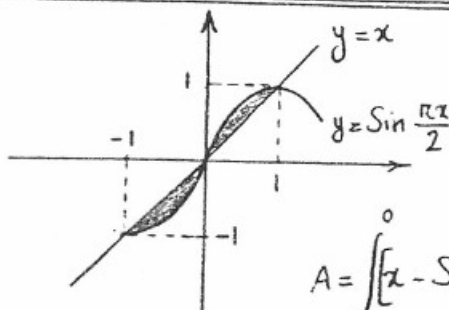
③  $y = \cos \frac{\pi x}{2}, y = 1 - x^2, 1 - x^2 = \cos \frac{\pi x}{2} \rightarrow x = 0, x = \pm 1$



$$\text{مساحت} = A = \int_{-1}^1 [1 - x^2 - \cos \frac{\pi x}{2}] dx = \frac{4(\pi - 3)}{3\pi}$$

④  $y = x, y = \sin \frac{\pi x}{2}$

$$x = \sin \frac{\pi x}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

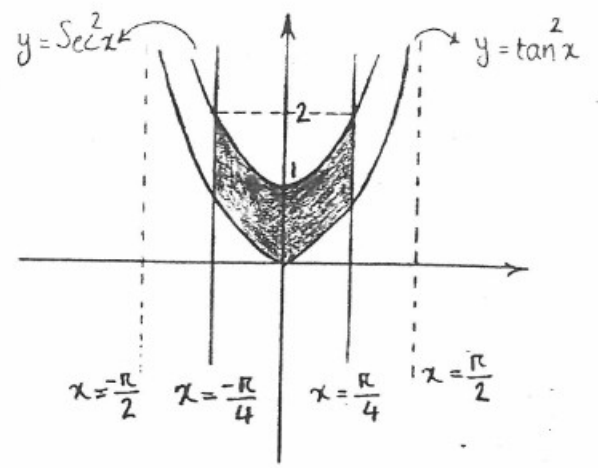


$$A = \int_{-1}^0 [x - \sin \frac{\pi x}{2}] dx + \int_0^1 [\sin \frac{\pi x}{2} - x] dx$$

$$\rightarrow A = \frac{\pi}{4} - 1$$

⑤  $y = \sec^2 x$ ,  $y = \tan^2 x$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$

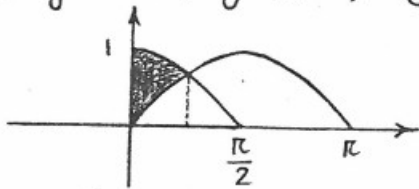
$$CL = A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - \tan^2 x) dx = \frac{\pi}{2}$$



⑥  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y$  محسوس

$\sin x = \cos x \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$x \geq 0$  برای



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = \sqrt{2} - 1$$

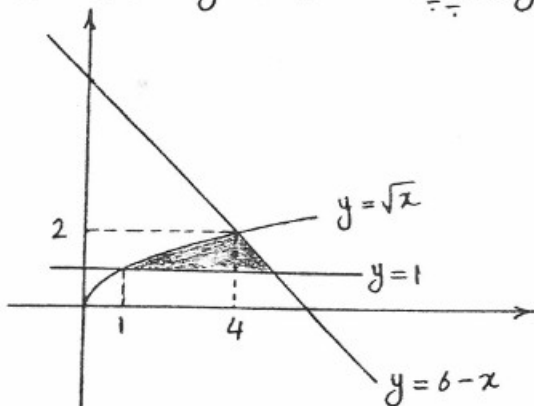
⑦  $y = 6 - x$  از راست

$y = \sqrt{x}$  از چپ

$y = 1$  از پایین

$6 - x = \sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = 2 \\ x = 9 \end{cases}$

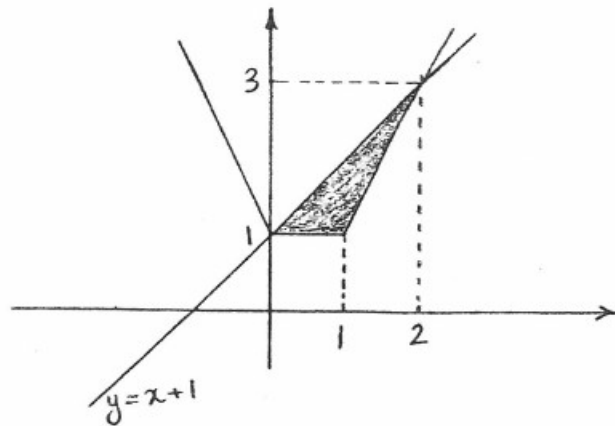
الان به سمت  $dy$



$$A = \int_1^2 (6 - y - y^2) dy = \frac{13}{6}$$

⑧  $y = |x| + |x-1|$ ,  $y = x+1$

$$y = |x| + |x-1| = \begin{cases} -2x+1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$$A = \int_0^1 (x+1-1) dx + \int_1^2 (x+1-2x+1) dx = 1$$

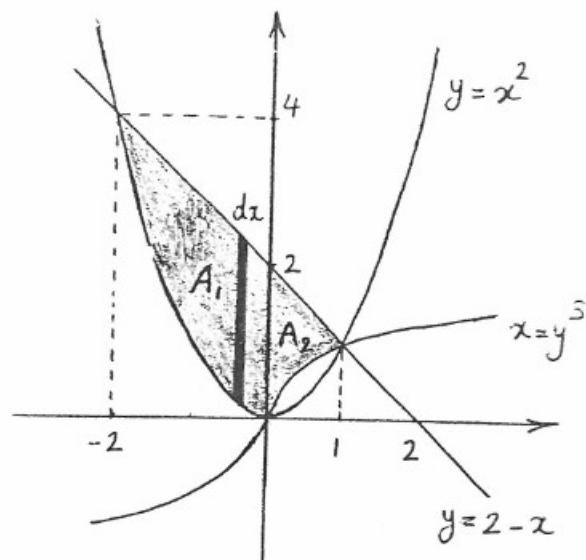
⑨  $x+y=2$ ,  $x=y^3$ ,  $y=x^2$

$$A_1 = \int_{-2}^0 (2-x-x^2) dx = \frac{10}{3}$$

$$A_2 = \int_0^1 (2-x-\sqrt[3]{x}) dx = \frac{3}{4}$$

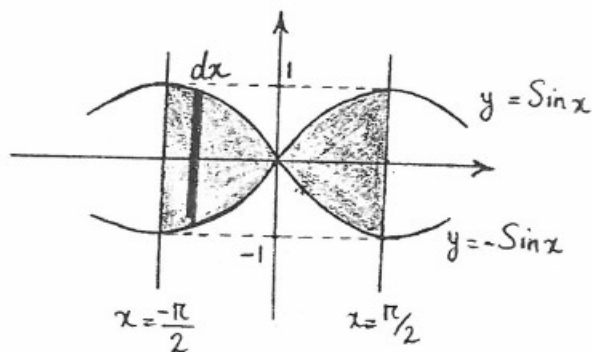
$$\Rightarrow A = \text{CWL} = A_1 + A_2$$

$$\rightarrow A = \frac{49}{12}$$



⑩  $y=\sin x$ ,  $y=-\sin x$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$ ,  $x=-\frac{\pi}{2}$

$$A = \int_{-\pi/2}^0 (-\sin x - \sin x) dx + \int_0^{\pi/2} (\sin x + \sin x) dx = 4$$

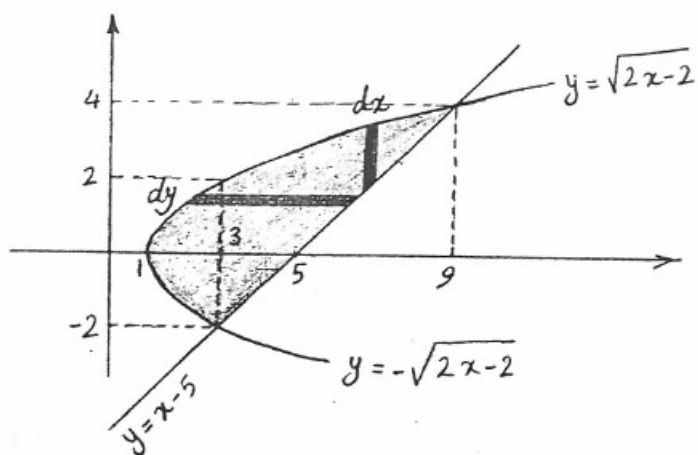


⑪  $y=x-5$ ,  $y^2=2x-2$

$$y^2=2x-2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2x-2}$$

$$\sqrt{2x-2} = x-5 \rightarrow x=9$$

$$-\sqrt{2x-2} = x-5 \rightarrow x=3$$



بالنسبة لـ  $(dx)$ :  $A_1 = \int_1^3 [\sqrt{2x-2} - (-\sqrt{2x-2})] dx = \frac{16}{3}$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = 18$$

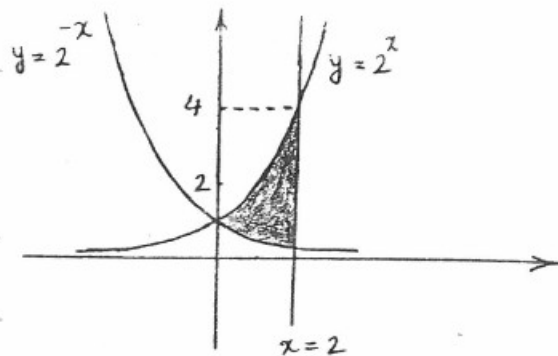
$$A_2 = \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)] dx = \frac{38}{3}$$

بالنسبة لـ  $(dy)$ :  $A = \int_{-2}^4 [(y+5) - (\frac{1}{2}y^2+1)] dy = 18$

⑫  $y = 2^x, y = 2^{-x}, x = 2$

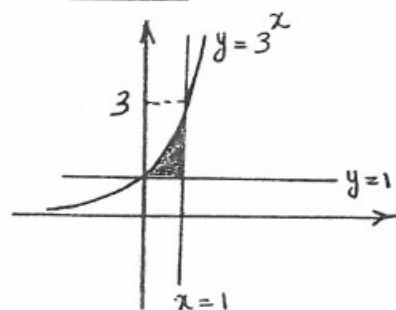
$$A = \int_0^2 (2^x - 2^{-x}) dx = \left[ \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{\ln 2} + \frac{1/4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{9}{4 \ln 2}$$



⑬  $y = 3^x, x = 1, y = 1$

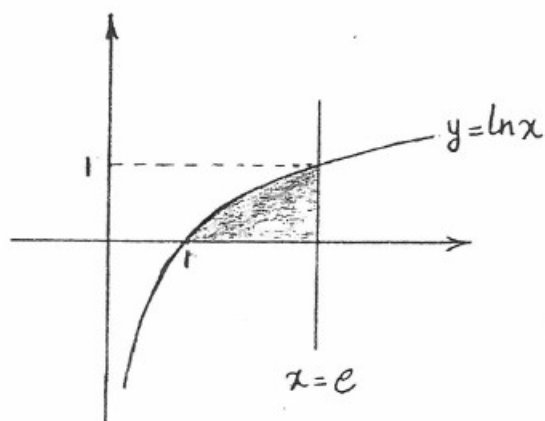
$$A = \int_0^1 (3^x - 1) dx = \left[ \frac{3^x}{\ln 3} - x \right]_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - 1 - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} - 1$$



⑭  $y = \ln x, x = e, \text{ } x \text{ محور}$

$$A = \int_1^e \ln x dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} x \ln x - x \Big|_1^e$$

$$= e(1) - e - (0 - 1) = 1$$

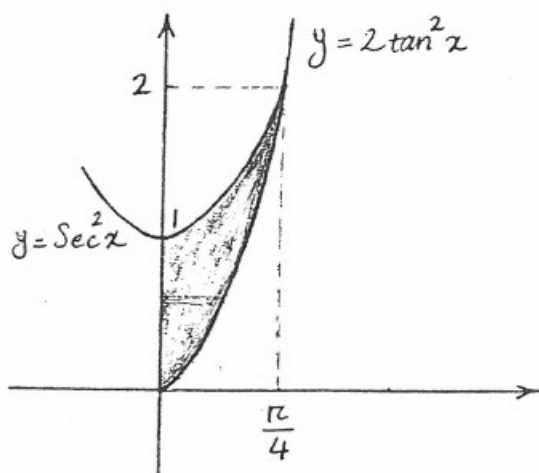


⑮  $y = \sec^2 x, y = 2 \tan^2 x, \text{ } x \text{ محور}$  در ربع اول

$$\sec^2 x = 2 \tan^2 x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow \cos^2 x (2 \sin^2 x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pi/4 \\ x = -\pi/4 \text{ } \leftarrow \text{نقص در ربع اول} \\ x = \pi/2 \text{ } \leftarrow \text{خارج از ربع اول} \end{cases}$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 2 \tan^2 x) dx = \tan x \Big|_0^{\pi/4} - 2 \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \tan x - 2 \tan x + 2x \Big|_0^{\pi/4}$$



$$\rightarrow A = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$(16) \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + t - 2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t=1 \rightarrow x=\pm 1 \\ t=-2 \text{ ODE} \end{cases} \rightarrow A = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

$$(17) \quad y = \ln x, \quad y = \ln^2 x \quad \text{توجه: } \ln^2 x = (\ln x)^2 \neq \ln x^2$$

$$\ln x = \ln^2 x \rightarrow \ln x (\ln x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \\ \ln x = 1 \rightarrow x = e \end{cases}$$

$$1 < x < e \rightarrow 0 < \ln x < 1 \rightarrow \ln^2 x < \ln x$$

$$\rightarrow A = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx \quad \text{(در دو مرحله به جز)} \quad 3 - e$$

$$(18) \quad x = 1 - 3y^2, \quad x = -2y^2 \quad -2y^2 = 1 - 3y^2 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \quad \text{محور لایه منحنی}$$

$$S = \int_{-1}^1 (1 - 3y^2 + 2y^2) dy = y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

نکته: اگر معادله یک منحنی به صورت قطبی بیان شود  $r = f(\theta)$ ، آنگاه مساحت به وسیله آماره متوسط منحنی در فاصله  $[a, b]$  از

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta$$

رابطه ی درجه دو بدست می آید:

مثال: مساحت ناحیه ی محدود به  $\rho = 1 + \cos \phi$  کدام است؟

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \phi)^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \cos \phi d\phi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \frac{3\pi}{2}$$

علامه ای از اعداد مختلط :

$$z = x + yi \Rightarrow |z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نکته : قدر مطلق اعداد مختلط

$$z = x + yi \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

نکته : آرگومان اعداد مختلط

$$* \quad z = \underbrace{x + yi}_{\text{دکای}} = r \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)}_{\text{نشانای (قطبی)}} = \underbrace{r e^{i\theta}}_{\text{نای}}$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

قضیه برادر :

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

ی داریم که :

$$\text{نکته : اگر } z = x + yi \Rightarrow \sqrt{z} = \pm \left[ \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + \underbrace{(\text{Sign } y)}_{\text{علامت } y} i \sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right]$$

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

① ثابت کنید

$$A = \sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 = (1+i\sqrt{3}) + (1-i\sqrt{3}) + 2\sqrt{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2 + 2 \times \sqrt{1-3i^2} \quad \sqrt{1-3i^2} = \sqrt{1-(3 \times (-1))} = 2 \Rightarrow A^2 = 2 + 2 \times 2 = 6 \Rightarrow A^2 = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

② نشان دهید :

$$\text{حل : } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$$

$$= 2(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

حسن پور



$$\left( \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \right)^n = \frac{1+i \tan n\alpha}{1-i \tan n\alpha}$$

③ نشان دهید:

$$\text{حل: } \frac{(1+i \tan \alpha)^n}{(1-i \tan \alpha)^n} = \frac{(1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})^n}{(1-i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})^n} \xrightarrow{\text{خرج مشترک}} \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n} = \frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos n\alpha - i \sin n\alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در } \cos n\alpha} = \frac{\cos n\alpha (1+i \tan n\alpha)}{\cos n\alpha (1-i \tan n\alpha)} = \frac{1+i \tan n\alpha}{1-i \tan n\alpha}$$

$$w = \left( \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \right)^{6n}$$

④ نشان دهید برای هر  $n$  عبارت مقابل یک عدد حقیقی است.

$$\text{حل: } \begin{cases} \sqrt{3}+i = r e^{i\theta} \\ \sqrt{3}-i = r e^{-i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$w = \left( \frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{-\frac{\pi}{6}i}} \right)^{6n} = \left( e^{\frac{\pi}{3}i} \right)^{6n} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

نکته:  $\sin 2n\pi = 0$

$$\Rightarrow w = \cos \frac{6n\pi}{3} + i \sin \frac{6n\pi}{3} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi \Rightarrow w = \cos 2n\pi = 1 \text{ عدد حقیقی است}$$

⑤ مقادیر زیر را محاسبه کنید.

۸۲ شی

$$\text{الف) } \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}} = \frac{((1+i)^2)^{50}}{((1-i)^2)^{48} - i((1+i)^2)^{49}}$$

$$\begin{cases} (1+i)^2 = 1+i^2+2i = 1-1+2i = 2i \\ (1-i)^2 = 1+i^2-2i = 1-1-2i = -2i \end{cases} \Rightarrow \frac{(2i)^{50}}{(-2i)^{48} - i(2i)^{49}}$$

$$\begin{cases} i^{50} = (i^2)^{25} = -1 \\ i^{48} = (i^2)^{24} = +1 \\ i(i)^{49} = i^{50} = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{2^{50} \times (-1)}{(-2)^{48} + (1)(2)^{49}} = -\frac{2^{50}}{2^{48}(1+2)} = -\frac{2^2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{(1+i)^{12}}{(2-2i)^{10}} \xrightarrow{\text{بازنویس}} \frac{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{12}}{(2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^{10}} = \frac{2^{\frac{12}{2}} \cdot e^{3\pi i}}{2^{\frac{10}{2} \cdot 5} \cdot e^{-\frac{5\pi i}{2}}} = 2^{-9} e^{(3\pi + \frac{5\pi}{2})i}$$

$$= 2^{-9} (\cos(3\pi + \frac{5\pi}{2}) + i \sin(3\pi + \frac{5\pi}{2})) = 2^{-9} (0 - i) = -\frac{1}{2^9} i$$

حسن پور

$$ج) \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20} = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \right)^{20} = \left( \frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+1} \right)^{20} = \frac{1}{2^{20}} \left( (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \right)^{20}$$

$$= \frac{1}{2^{20}} \left[ \left( (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \right)^2 \right]^{10} = \frac{1}{2^{20}} (-4i - 4\sqrt{3})^{10} = \frac{4^{10}}{2^{20}} (-i - \sqrt{3})^{10} = (-1)^{10} (i + \sqrt{3})^{10}$$

$$\begin{cases} r=2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow 2^{10} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{10} = 2^{10} \left( \cos \frac{10\pi}{6} + i \sin \frac{10\pi}{6} \right) = 2^{10} \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^9 (\sqrt{3}i + 1)$$

$$* \left[ \left( (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \right)^2 \right] = (1-\sqrt{3})^2 + 2(1-3)i - (1+\sqrt{3})^2$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} + 3 - 4i - 1 - 3 - 2\sqrt{3} = -4i - 4\sqrt{3}$$

جواب آخر

$$> \left( \frac{4}{\sqrt{3}i-1} \right)^{12} = \frac{4^{12}}{(\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}i+1)} = 4^{12} \left( \frac{\sqrt{3}i+1}{-3-1} \right)^{12} = \frac{4^{12}}{4^{12}} (\sqrt{3}i+1)^{12}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \rightarrow 2^{12} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{12} = 2^{12} \left( \cos \frac{12\pi}{3} + i \sin \frac{12\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{12} (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = 2^{12}$$

۸۵:

$$ج) \frac{(1-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^4}$$

$$1-i \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1-i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$1+\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{3}i = 2 e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\frac{(1-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^4} = \frac{(\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i})^6}{(2 e^{\frac{\pi}{3}i})^4} = \frac{2^3 e^{-\frac{3\pi}{2}i}}{2^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \frac{1}{2} e^{(-\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3})i} = \frac{1}{2} e^{-\frac{17\pi}{6}i}$$

۸۳ نیزیک

② قدر مطلق عبارات زیر را محاسبه نمایند.

ا)  $\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3} \rightarrow z = \left| \frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3} \right| = \left| \frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3} \right| = \frac{|3+4i|^4}{|3-4i|^3} = \frac{5^4}{5^3} = 5$

ب)  $\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(\sqrt{3}-i)^{24}} \rightarrow z = \frac{|(1+\sqrt{3}i)^8|}{|(\sqrt{3}-i)^{24}|} = \frac{|1+\sqrt{3}i|^8}{|\sqrt{3}-i|^{24}} = \frac{2^8}{2^{24}} = \frac{1}{2^{16}}$

حسن پور

$$ج) \frac{z-1}{z+2} \rightarrow \left| \frac{z-1}{z+2} \right| = \left| \frac{(x-1)+iy}{(x+2)+iy} \right| = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}$$

⑤ تمام مقادیر ریشه کی زیر را تعیین کنید.

الف)  $\sqrt[3]{1+i}$   $1+i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

$$z = \sqrt[3]{1+i} \Rightarrow z^3 = 1+i \Rightarrow z = R (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\Rightarrow R^3 (\cos 3\phi + i \sin 3\phi) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt[6]{2} \\ 3\phi = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow \phi = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$z_k = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) \right]$$

ب)  $\sqrt{-8-6i}$   $-8-6i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{36+64} = 10 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{-6}{-8} = \tan^{-1} \frac{3}{4} \end{cases}$

برای حل این مسئله از فرمول زیر استفاده می کنیم  
چون بدهی یا فکت  $\theta$  به ما نشان حساب می آید، خاصه چهارم

$$-8-6i = z \Rightarrow |z| = 10 \quad \begin{cases} x = -8 \\ y = -6 \end{cases} \xrightarrow[\text{منفی 19}]{\text{طبق فرمول}} \sqrt{-8-6i} = \pm \left[ \sqrt{\frac{10-8}{2}} - i \sqrt{\frac{10+8}{2}} \right] = \pm (1-3i)$$

ج)  $\sqrt{-i}$   $z = \sqrt{-i} \Rightarrow z^2 = -i$   $-i+0 \rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$z^2 = -i \Rightarrow z = R (\cos \phi + i \sin \phi) \rightarrow -i+0 = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow R^2 (\cos 2\phi + i \sin 2\phi) = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ 2\phi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow \phi = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$z_k = \cos \left( k\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( k\pi - \frac{\pi}{4} \right) \quad k = 0, 1$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حسن پور

$$7) \sqrt[6]{-1} \quad z = \sqrt[6]{-1}, \quad z = R(\cos \phi + i \sin \phi) \Rightarrow -1 + 0i = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\Rightarrow -1 = z^6 \Rightarrow \cos \pi + i \sin \pi = R^6 (\cos 6\phi + i \sin 6\phi) \rightarrow \begin{cases} R^6 = 1 \Rightarrow R = 1 \\ 6\phi = 2k\pi + \pi \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi + \pi}{6} \end{cases}$$

$$z_k = \left[ \cos\left(\frac{2k\pi + \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \pi}{6}\right) \right] \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$8) \sqrt{1-i\sqrt{3}} \quad z = \sqrt{1-i\sqrt{3}} \quad 1-i\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} |1-i\sqrt{3}| = 2 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow 1-i\sqrt{3} = 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$z^2 = 1-i\sqrt{3} \Rightarrow R^2 (\cos 2\phi + i \sin 2\phi) = 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\begin{cases} R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\phi = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \phi = k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad z_k = \sqrt{2} \left[ \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right) \right] \quad k = 0, 1$$

$$z_0 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$$

$$9) (64)^{\frac{1}{6}}$$

$$z = \sqrt[6]{64} \Rightarrow z^6 = 64$$

$$64 = 64 + 0i \rightarrow \begin{cases} r = 64 \\ \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 64 = 64 e^{0i} \\ z^6 = R e^{i\phi} \end{cases} \rightarrow z^6 = R^6 e^{6i\phi} \rightarrow \begin{cases} 6\phi = 2k\pi + 0 \Rightarrow \phi = \frac{k\pi}{3} \\ R^6 = 64 \Rightarrow R = 2 \end{cases}$$

$$z_k = 2 e^{\frac{k\pi}{3}i} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad z_3 = 2e^{\pi i}, \quad z_4 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}, \quad z_5 = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

ترجمه: صورت این مثال می تواند بدین گونه نیز طرح شود (رشته های ششم 64 را پیدا کنید).

**حسن پور**

ترجمه: به عنوان مثال اگر گفته شود رشته ی پنجم واحد را پیدا کنید منظور  $\sqrt[5]{1}$  است.

ترجمه: اکثر مثال های بالا به روش مثلثاتی (قطبی) حل شد. می توانیم به روش نمایی نیز حل کنیم مانند قسمت (و).

①: مسائل زیر را حل کنید.

$$الف) z^3 - 8 = 0 \Rightarrow z^3 - 2^3 = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \end{cases} *$$

$$* \xrightarrow{\text{ریشه}} z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$ب) z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \frac{z-1}{z-1} (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow \frac{z^5 - 1}{z-1} = 0 *$$

$$\Rightarrow z^5 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[5]{1} \quad z = R(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\sqrt[5]{1} \Rightarrow 1 = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0 \rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$z = \sqrt[5]{1} \rightarrow z^5 = 1 \Rightarrow \cos 0 + i \sin 0 = R^5 (\cos(5\phi) + i \sin(5\phi)) \begin{cases} R^5 = 1 \Rightarrow R = 1 \\ 5\phi = 2k\pi + 0 \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad z_0 = 1 \text{ غوی (صفری شود)}$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}, z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}, z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

$$ج) z^4 + 1 = 0 \quad z^4 = -1 \xrightarrow{\text{ریشه}} \begin{cases} -1 = -1 + 0i \\ z^4 = R^4 e^{4\phi i} \end{cases} \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi \end{cases} \rightarrow -1 = e^{\pi i}$$

$$z^4 = -1 \Rightarrow R^4 e^{4\phi i} = 1 e^{\pi i} \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ 4\phi = \pi + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z_k = e^{(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4})i}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i}, z_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

$$د) z^4 + 5z^2 = 36 \Rightarrow (z^2)^2 + 5z^2 - 36 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 = 4 \rightarrow z = \pm 2 \\ z^2 = -9 \rightarrow z^2 = 9i^2 \rightarrow z = \pm 3i \end{cases}$$

حسن پور

8)  $z^3 - 3z^2 + 3z = 1 + i$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = i \rightarrow (z-1)^3 = i$

$i = 0 + i \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$z-1 = (e^{\frac{\pi}{2}i})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z-1 = e^{(\frac{2k\pi + \pi/2}{3})i}$

$\Rightarrow z = e^{(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6})i} + 1, k=0,1,2$

$z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} + 1, z_1 = e^{\frac{5\pi}{6}i} + 1, z_2 = e^{\frac{9\pi}{6}i} + 1$

1)  $z^6 + 7z^3 = 8 \Rightarrow (z^3)^2 + 7z^3 - 8 = 0 \Rightarrow z^3 = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z^3 = 1 \\ z^3 = -8 \end{cases}$  حل به روش متناهی

if  $z^3 = 1 \rightarrow 1 = 1 + 0i \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^3 = R^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) \\ 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R=1 \\ 3\phi = 2k\pi + 0 \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k=0,1,2$   $z_0 = 1, z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

if  $z^3 = -8 \rightarrow -8 = -8 + 0i \rightarrow \begin{cases} r=8 \\ \theta=\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^3 = R^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) \\ -8 = 2\sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R=2 \\ 3\phi = 2k\pi + \pi \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi + \pi}{3} \end{cases}$

$z_k = 2(\cos \frac{2k\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{3}), k=0,1,2$   $z_0 = 1 + \sqrt{3}i, z_1 = -2, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

نکته

1)  $z = \frac{-1+3i}{3+i} \rightarrow \frac{-1+3i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{-3+i+9i+3}{9+1} = i$

$z^3 = i \rightarrow \begin{cases} z = R(\cos \phi + i \sin \phi) \\ i = 0 + i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$R^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} R=1 \\ 3\phi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi + \pi/2}{3} \end{cases}$

$z_k = \cos(\frac{2k\pi + \pi/2}{3}) + i \sin(\frac{2k\pi + \pi/2}{3}), k=0,1,2$

$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$   $z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$

$$c) z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \times \frac{z-1}{z-1} = 0 \Rightarrow \frac{z^6-1}{z-1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^6-1=0 \rightarrow z = \sqrt[6]{1} \Rightarrow z^6=1=1+0i \Rightarrow z_k = e^{\left(\frac{2k\pi+0}{6}\right)i} \\ z \neq 1 \end{cases}, k=0,1,2,3,4,5$$

$$\downarrow z_0 = e^0 = 1, z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}}, z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, z_3 = e^{\pi i}, z_4 = e^{\frac{4\pi i}{3}}, z_5 = e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

غیر قابل قبول (مخرج صفری آئے)

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

$$b) \left(\frac{z+1}{z+2}\right)^2 = \frac{i+1}{3i-3} \xrightarrow{\text{J}} \frac{i+1}{3i-3} = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}}{3\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \left[ \frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{3e^{\frac{3\pi}{4}i}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{3} e^{-\frac{\pi}{2}i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{k+1}}{z_{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\left(\frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{2}\right)i}, k=0,1$$

$$\text{if: } k=0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{4}i} (z_2) \Rightarrow z_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{4}i} - 1$$

$$z_0 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{4}i} - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

$$\text{if: } k=1 \rightarrow \frac{z_2}{z_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{3\pi}{4}i} (z_3) \Rightarrow z_2 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3\pi}{4}i} - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{3\pi}{4}i}}$$

# « سوالات تکمیلی میان ترم »

جدود زیر را محاسبه کنید :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \int_0^x e^{t^2} dt)(e^{x^2})}{e^{2x^2}} = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = 1^\infty \rightarrow \text{مهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}}{1} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{\ln ab}{2} = \ln \sqrt{ab}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \text{Arc Tan } \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right) = \infty \times 0 \rightarrow \text{مهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Arc Tan } \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+2)^2 + (x+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Tan}^{-1} x}{x - \text{Sin}^{-1} x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{Hop}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+ \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}} = -2$$



$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^-} (2^{\cot x})^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\overbrace{x \cot x}^l} = 2^1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} l = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0} \text{ Hop} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \operatorname{sech} t dt}{\ln(1+x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \operatorname{sech}(\sin x) - 2x \operatorname{sech}(x^2)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\overbrace{\frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + x)}^l} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = 2$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{4x} = \frac{1}{4}$$

معادلات مختلط زیر را حل کنید .

$$(1) (z-1)^3 = \left( \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} \right)^{10}$$

قضیه دمووار

$$(z-1)^3 = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = i$$

$$z-1 = t \xrightarrow{t = Re^{i\phi}} t^3 = i \rightarrow R^3 e^{3\phi} = 1 e^{\frac{\pi}{2}i} \rightarrow \begin{cases} R=1 \\ \phi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \rightarrow k=0,1,2 \end{cases}$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i} + 1 \quad z_1 = e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})i} + 1 \quad z_2 = e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})i} + 1$$

$$(2) z^{\frac{1}{2}} = \frac{(1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \frac{(re^{\frac{\pi}{3}i})^{\frac{1}{2}}}{(re^{-\frac{\pi}{3}i})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = e^{i\pi}$$

$$R^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} = e^{i\pi} \rightarrow \begin{cases} R=1 \\ \phi = 2\pi + 2k\pi \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \quad k=0,1,2,3 \end{cases}$$

$$z_k = 1 e^{(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2})i} \rightarrow z_0 = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad z_1 = e^{i\pi} \quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad z_3 = e^{2\pi i}$$

$$z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta$$

اگر  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  باشد، نشان دهید :

$$z^n + z^{-n} = \cos n\theta + i \sin n\theta + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = 2 \cos n\theta$$

تایید فرد  
تایید زوج

$$\int_0^{\pi} x P(\sin x) dx = \frac{\pi}{\gamma} \int_0^{\pi} P(\sin x) dx$$

نشان دهید :

$$I = \int_0^{\pi} x P(\sin x) dx \quad \underline{\underline{\int_0^{\alpha} P(x) dx = \int_0^{\alpha} P(\alpha - x) dx}} \quad \int_0^{\pi} (\pi - x) P(\sin(\pi - x)) dx =$$

$$I = \int_0^{\pi} \pi P(\sin(\pi - x)) dx - \int_0^{\pi} x P(\sin(\pi - x)) dx \quad \underline{\underline{\sin(\pi - x) = \sin x}}$$

$$I = \pi \int_0^{\pi} P(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x P(\sin x) dx \Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} P(\sin x) dx \rightarrow I = \frac{\pi}{\gamma} \int_0^{\pi} P(\sin x) dx$$

فرض کنیم تابع  $P$  بر  $[0, 1]$  پیوسته باشد و  $A = \int_0^1 P(x) \sin^{-1} x dx$  و  $B = \int_0^1 P(x) \cos^{-1} x dx$  را تعریف می‌کنیم.

آنچه باید ثابت کرد  $\int_0^1 x P(x^{\gamma}) dx$  را بر حسب  $A$  و  $B$  بیابیم.

$$I = \int_0^1 x P(x^{\gamma}) dx = \begin{cases} x^{\gamma} = t \\ x dx = \frac{dt}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \int_0^1 P(t) dt \stackrel{*}{=} \frac{A+B}{\gamma}$$

$$A+B = \int_0^1 P(x) \sin^{-1} x dx + \int_0^1 P(x) \cos^{-1} x dx = \int_0^1 P(x) (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) dx$$

$$\underline{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{\gamma}} \rightarrow A+B = \frac{\pi}{\gamma} \int_0^1 P(x) dx \Rightarrow \int_0^1 P(x) dx = \frac{\gamma(A+B)}{\pi} (*)$$

$$\int_a^b P(x) dx = \int_a^b P(t) dt \quad \text{نکته :}$$

اگر  $P$  تابعی مشتق پذیر باشد تابع  $F(x)$  را در تساوی زیر بدست آورید :

$$P'(x) = \int_0^{x^2} \frac{P(\sqrt{t})}{\sqrt{1+t}} dt \Rightarrow \text{مشتق} \quad \swarrow P'(x) \quad \swarrow P(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$P'(x) = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{\int} P(x) = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \begin{cases} 1+x^2 = u \\ 2x dx = du \end{cases} \rightarrow P(x) = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} \Rightarrow$$

$$P(x) = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+x^2} + c$$

تمام ریشه های عدد  $(-1-i)^{\frac{1}{5}}$  را بیابید :

$$z = (-1-i)^{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{توان 5}} z^5 = (-1-i)^1 \rightarrow \begin{cases} z = R e^{i\theta} \\ -1-i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow -1-i = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i}$

$$R^5 e^{5\varphi} = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i} \rightarrow \begin{cases} R^5 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow R = \sqrt[5]{2} \\ 5\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} \rightarrow k=0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$z_k = \sqrt[5]{2} e^{(\pi + \frac{2k\pi}{5})i}$$

$$z_0 = \sqrt[5]{2} e^{0i} \quad z_1 = \sqrt[5]{2} e^{\frac{2\pi}{5}i} \quad z_2 = \sqrt[5]{2} e^{\frac{4\pi}{5}i}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2} e^{\frac{6\pi}{5}i} \quad z_4 = \sqrt[5]{2} e^{\frac{8\pi}{5}i}$$

$$\frac{d}{dx} (\text{Arc cos } x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

نشان دهید:

$$\text{Arc cos } x = y \xrightarrow{\text{نسبت نسبت به } x} \frac{d}{dx} (\text{Arc cos } x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \stackrel{*}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x = \cos y \xrightarrow{\text{نسبت نسبت به } y} \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2} \quad (*)$$

$$\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

نشان دهید:

$$\begin{cases} 0 \leq \text{Arc cos } x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc sin } x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \text{طبق تعریف}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x}_y \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x \xrightarrow{\sin}$$

$$\sin y = \sin(\underbrace{\text{Arc sin } x}_\alpha + \underbrace{\text{Arc cos } x}_\beta) = \sin(\text{Arc sin } x) \cos(\text{Arc cos } x) + \sin(\text{Arc cos } x) \cos(\text{Arc sin } x)$$

$$\sin y = x \cdot x + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 \rightarrow \sin y = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{پس } k=0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

تقرار  $x$  را طوری تعیین کنید که حاصل انتگرال  $\int_x^{x+3} t(t-5) dt$  ماکسیمم شود.

$$f(x) = \int_x^{x+3} t(t-5) dt \xrightarrow{f'(x)=0} f'(x) = 1(x+3)(x+3-5) - 1(x)(x-5) = 0$$

$$(x+3)(x-2) - x^2 + 5x = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 - x^2 + 5x = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

نشان دهید اگر  $f$  تابع فرد باشد:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_{I_1} + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

$$I_1 = \int_{-a}^0 f(x) dx \xrightarrow{\substack{x=-t \\ dx=-dt}} - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt \xrightarrow{\text{فرض تابع فرد}} f(-t) = -f(t)$$

$$- \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(x) dx$$

معادله زیر را حل کنید:

$$(1 - i\sqrt{3})z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0 \rightarrow z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{1+3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$z^3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$R^3 e^{3\phi i} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}i} \rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ 3\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi \rightarrow \phi = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad k=0,1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

$$z_0 = e^{\frac{\sqrt{3}}{6}i} \quad z_1 = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}i} \quad z_2 = e^{\frac{5\sqrt{3}}{6}i} \quad z_3 = e^{\frac{7\sqrt{3}}{6}i} \quad z_4 = e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}i} \quad z_5 = e^{\frac{7\sqrt{3}}{2}i}$$

$$z_6 = e^{\frac{9\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \xi$$

c را چنان بیابیم که :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+c+c-c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2c}{x-c} \right)^x = e^{2c} = \xi \rightarrow 2c = \ln \xi \rightarrow c = \frac{\ln \xi}{2} \rightarrow c = \ln \sqrt{\xi}$$

اگر  $f(x) = \int_{-x}^x e^{t^2} dt$  باشد مقدار  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  را بیابید.

$$f(x) = \int_{-x}^x e^{t^2} dt \rightarrow f(-x) = \int_x^{-x} e^{t^2} dt = - \int_{-x}^x e^{t^2} dt = -f(x) \rightarrow \text{تابع فرد است.}$$

$$\rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

فرد

$$(z+1)^5 + (z-1)^5 = 0 \quad \text{را بیابید}$$

ریشه های معادله

$$(z+1)^5 = -(z-1)^5 \rightarrow \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^5 = -1$$

$$t = \frac{z+1}{z-1} \rightarrow t^5 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$t = \cos \frac{2k\pi + \pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{5} \quad k=0, 1, 2, 3, 4$$

از طرفی  $\frac{z+1}{z-1} = t \rightarrow z+1 = (z-1)t$

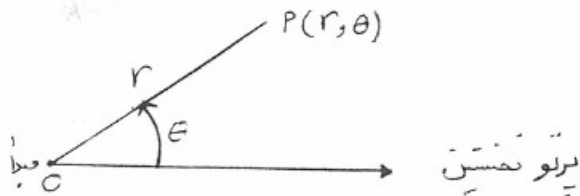
$$z = \frac{t+1}{t-1} \rightarrow z = \frac{\cos\left(\frac{2k\pi + \pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \pi}{5}\right) + 1}{\cos\left(\frac{2k\pi + \pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \pi}{5}\right) - 1}$$

$$k=0, 1, 2, 3, 4$$

مختصات قطبی: محل نقطه را براساس فاصله آن از مبدأ ( $r$ ) و یک زاویه جهت دار است ( $\theta$ )

مترق قطبی با دکارتی: یک نقطه در صفحه، فقط یک مختصات دکارتی دارد حال آنکه دارای بی نهایت

جهت مختصات قطبی است

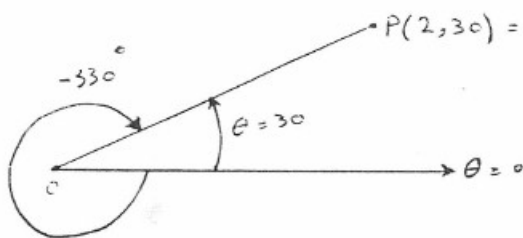


$r$ : فاصله جهت دار از  $P$  تا  $O$

$\theta$ : زاویه جهت دار از پرتو نخستین  $OP$

کذا زاویه  $\theta$  مثبت است اگر در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری شود و منفی است اگر در جهت حرکت

عقربه های ساعت اندازه گیری گردد.

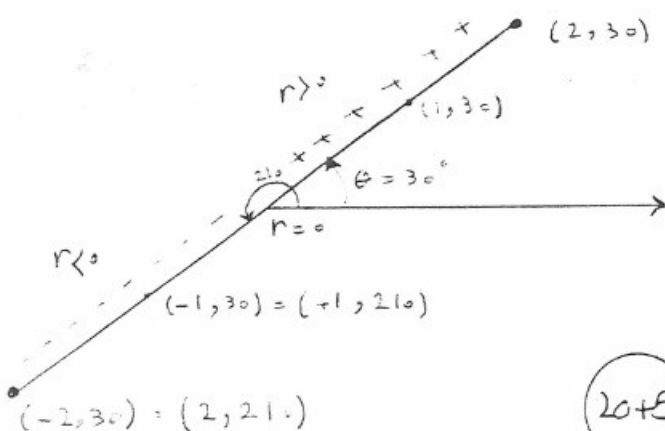


مقادیر منفی  $r$ : پرتو  $\theta = 30^\circ$  و پرتو  $\theta = 210^\circ$  همراه با هم یک خط کامل می سازند نه از  $O$  می گذرد. هرگاه زاویه بین پرتو

$180^\circ$  باشد آنجا یک خط راست می سازند در این صورت می گوئیم که هر پرتو مقابل پرتو دیگر است. نقاط روی پرتو

$\theta = \alpha$  دارای مختصات قطبی  $(r, \alpha)$  با ضابطه  $r \geq 0$  اند نقاط روبرو پرتو مقابل  $\theta = \alpha + 180$  دارای مختصات

$(r, \alpha)$  با ضابطه  $r \leq 0$  هستند.





معادله ها و نامعادلات مختصات قطبی :

$r = a \rightarrow |a|$  معادله دایره ای به شعاع

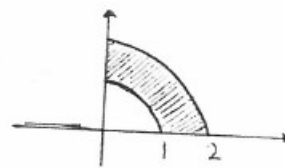
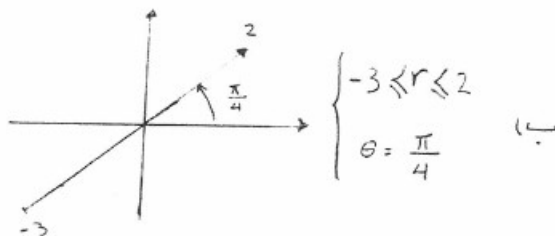
هر دو دایره ای به شعاع از مرکز مبدأ است

$r = -1$  و  $r = 1$

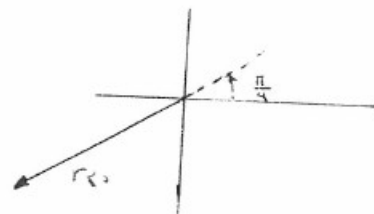
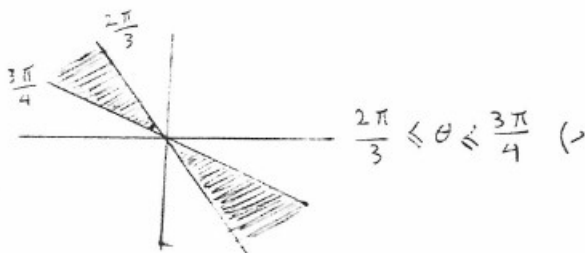
$\theta = \theta_0$

خطی است که از مبدأ گذرد و زاویه  $\theta_0$  با محور مختصات (محور x) دارد

مثال: نمودار معادله های زیر را رسم کنید

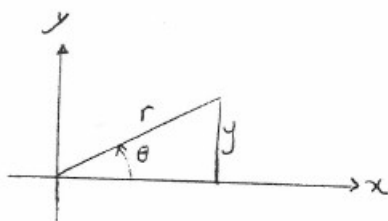


(الف)  $\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$



(ب)  $\begin{cases} r \leq 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

تبدیل معادله های دکارتی به قطبی و برعکس:



برون مختصات

$x = r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

$\frac{y}{x} = \tan \theta$

(این روابط  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  در حقیقت که  $r$  مثبت است تعریف می شود)

$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$

$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$

که در حقیقت هم که  $r$  منفی باشد برقرارند چون

مثال: معادلات زیر را به فرم قطبی تبدیل کنید

①  $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$

$\rightarrow r^2 \sin^2 \theta - 3r^2 \cos^2 \theta - 4r \cos \theta - 1 = 0$

$r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta - 4r^2 \cos^2 \theta - 4r \cos \theta - 1 = 0$

$r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 4r^2 \cos^2 \theta - 4r \cos \theta - 1 = 0$

$r^2 = 4r^2 \cos^2 \theta + 4r \cos \theta + 1 \rightarrow r^2 = (2r \cos \theta + 1)^2 \rightarrow r = 2 \cos \theta + 1$

$$\textcircled{2} x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$$

$$r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta + 2r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$r^4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 + 2r^3 \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - r^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$r^4 + 2r^3 \cos \theta - r^2 \sin^2 \theta = 0 \rightarrow r^2 + 2r \cos \theta - \sin^2 \theta = 0$$

$$r^2 + 2r \cos \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 0 \rightarrow (r + \cos \theta)^2 = 1 \xrightarrow{\text{بجای}} r = 1 - \cos \theta$$

$$\textcircled{3} x^2 - y^2 = 25 \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 25 \sqrt{r^2} = 25r$$

$$r^2 \cos 2\theta = 25r \rightarrow r \cos 2\theta = 25$$

← مثال) معادلات زیر را به فرم دکارتی تبدیل کنید.

$$\textcircled{1} r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta} \rightarrow r(2 \cos \theta - \sin \theta) = 4 \rightarrow 2x - y = 4 \rightarrow y = 2x - 4 \quad \begin{matrix} \text{(شیب خط 2)} \\ \text{(بخش از مبدأ 4)} \end{matrix}$$

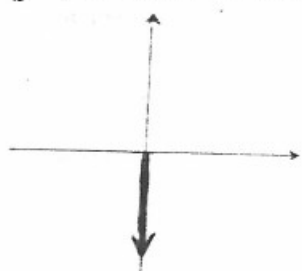
$$\textcircled{2} r + \sin \theta = 2 \cos \theta \xrightarrow{\times r} r^2 + r \sin \theta = 2r \cos \theta \rightarrow x^2 + y^2 + y = 2x$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 5/4 \quad \text{دایره}$$

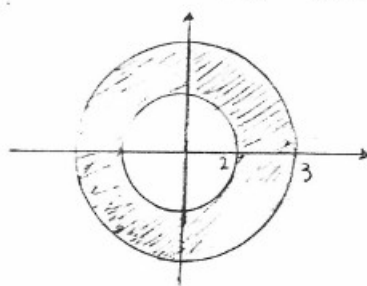
$$\textcircled{3} r = 4 \tan \theta \sec \theta \rightarrow r = 4 \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \xrightarrow{\times r} r^2 \cos^2 \theta = 4r \sin \theta \rightarrow x^2 = 4y$$

$$\textcircled{4} r \sin \theta = e^{r \cos \theta} \rightarrow y = e^x \quad \text{تابع نمایی}$$

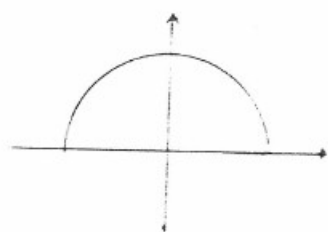
← مثال) نمودار مجرعه‌های متناهی را که مختصات قطبی آنها در معادله دارد یا معادله‌های بر صدق می‌کند را بکشید.



$$\begin{cases} r \leq 0 \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

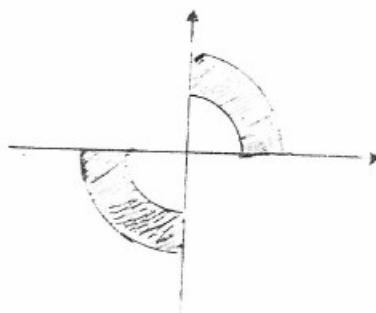


$$2 < r < 3 \quad \textcircled{1}$$



$$\begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

20+6



$$\begin{cases} 1 \leq |r| \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

← مثال) مختصات قطبی زیر را به دکارتی تبدیل کنید

$$\textcircled{1} (0, \pi) \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta = 0 \cos(\pi) = 0 \\ y = r \sin \theta = 0 \sin(\pi) = 0 \end{cases} \quad (0, 0)$$

$$\textcircled{2} (2, 5\frac{\pi}{6}) \rightarrow \begin{cases} x = 2 \cos(5\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} \\ y = 2 \sin(5\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases} \quad (-\sqrt{3}, 1)$$

← مثال) نمایش های نقطه به مختصات دکارتی را به قطبی تبدیل کنید. (به انضمام  $r$  های منفی)

$$\textcircled{1} (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2+2} = \pm 2 \\ \tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (2, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi) \\ (-2, \frac{\pi}{4} + 2n\pi) \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} (0, 4) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0+16} = \pm 4 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{4}{0}) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (4, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \\ (-4, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi) \end{matrix}$$

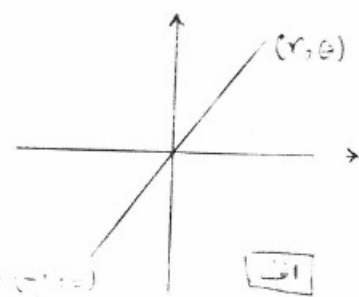
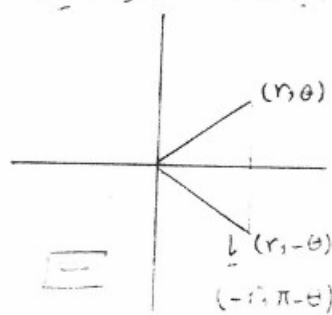
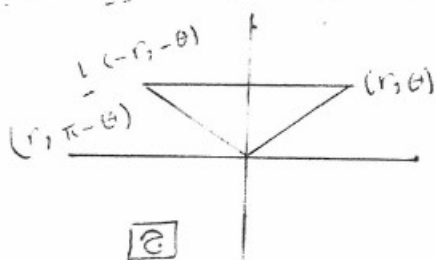
ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی.

خطی و شیب در ابتدا: ۳ نوع مختار را به آسانی می توان در نمودار یک معادله قطبی تشخیص داد.

الف) نمودار نسبت به مبدأ مختار است اگر با تبدیل  $r$  به  $-r$  یا تبدیل  $\theta$  به  $\theta + \pi$  معادله تغییر نکند.

ب) نمودار نسبت به محور  $x$  ها مختار است اگر با تبدیل  $\theta$  به  $-\theta$  یا تبدیل جهت  $(r, \theta)$  به جهت  $(-r, \pi - \theta)$  معادله تغییر نکند.

ج) نمودار نسبت به محور  $y$  ها مختار است اگر با تبدیل  $\theta$  به  $\pi - \theta$  یا تبدیل جهت  $(r, \theta)$  به جهت  $(-r, -\theta)$  معادله تغییر نکند.



که روشی برای ترسیم نمودار: راهی برای ترسیم نمودار یک معادله قطبی  $r = f(\theta)$  این است که جدولی از مقادیر

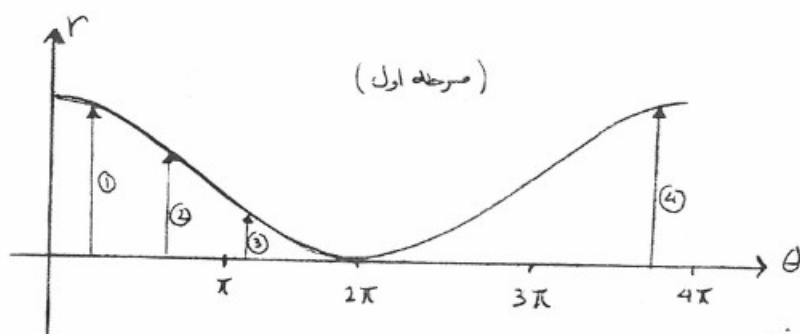
$(r, \theta)$  تشکیل دهیم، نقاط منظر را مشخص کنیم و آنها را به ترتیب صعودی  $\theta$  بهم وصل کنیم. اگر تعداد نقاط

کافی نبود که طوق حاصل ضرورتی حای نمودار مشخص گردد این روش کار ساز است.

که روشی اساسی و سریعتر برای رسم نمودار  $r = f(\theta)$ : ① نسبت نمودار  $r = f(\theta)$  را در صفحه  $r\theta$ ی دکارتی رسم

ی کنیم (یعنی مقادیر  $\theta$  را روی یک محور افقی و مقادیر متناظر  $r$  را روی یک محور قائم مشخص می کنیم)

② سپس نمودار دکارتی را به عنوان یک «جدول» به کاری گیریم و با استفاده از آن، نمودار مختصات قطبی را رسم می کنیم

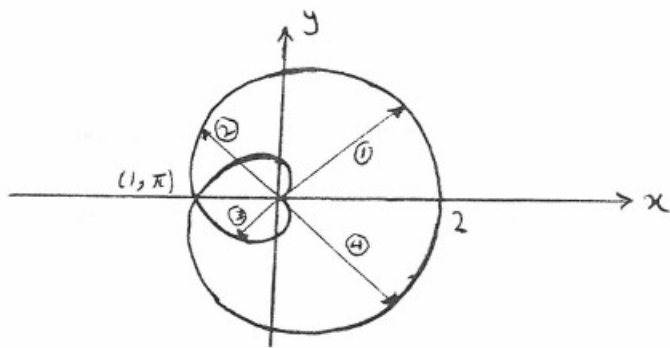


← مثال  $r = 1 + \cos \frac{\theta}{2}$  را ترسیم می کنیم

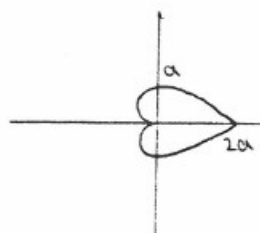
$\cos \theta$  ← دوره تناوب  $2\pi$

$\cos \frac{\theta}{2}$  ← دوره تناوب  $4\pi$

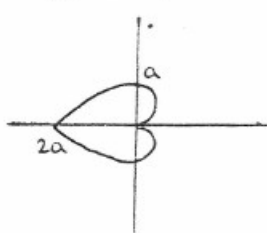
نمودار نسبت به محور  $x$  حتماً دارد چون  $\theta \rightarrow -\theta$  تغییر نمی کند



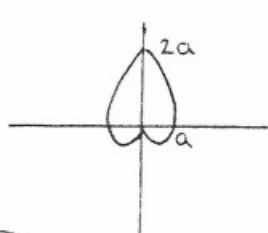
به طور کلی معادلات بصورت  $r = a(1 \pm \cos \theta)$  و  $r = a(1 \pm \sin \theta)$  را دلواری کنید



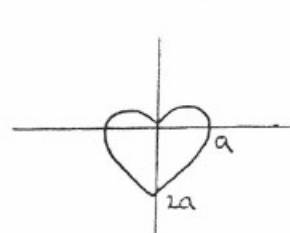
$$r = a(1 + \cos \theta)$$



$$r = a(1 - \cos \theta)$$



$$r = a(1 + \sin \theta)$$



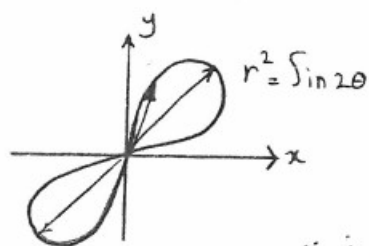
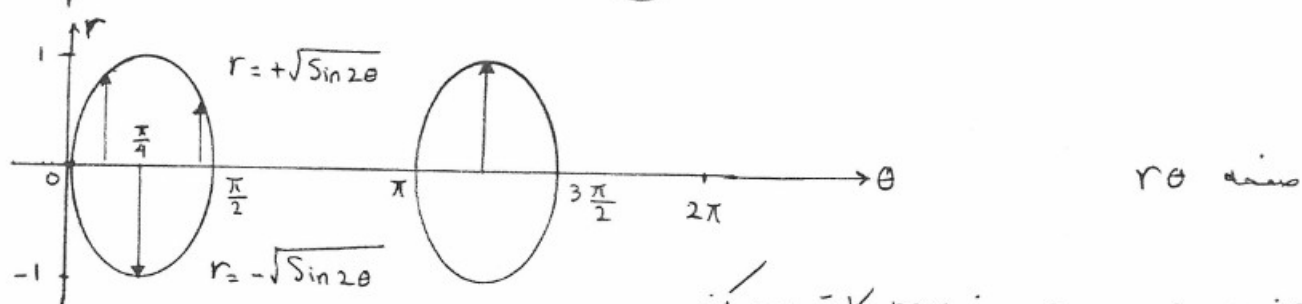
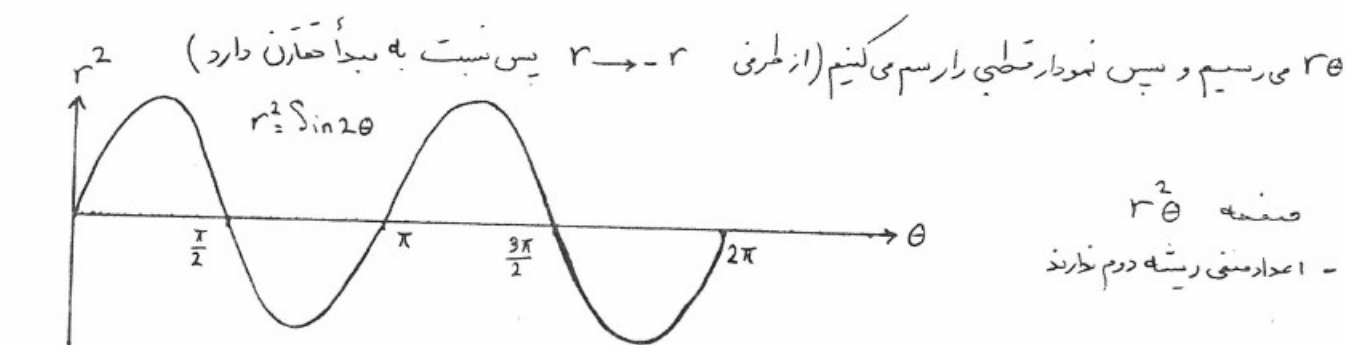
$$r = a(1 - \sin \theta)$$

✓ به طور کلی نمودار معادله  $r = a \cos n\theta$  یا  $r = a \sin n\theta$  یک گل است که اگر  $n$  فرد باشد

دارای  $n$  پر و اگر  $n$  زوج باشد دارای  $2n$  پری باشد.

← مثال) یک پروانه: نمودار  $r^2 = \sin 2\theta$  را رسم کنید.

ابتدا نمودار را با ترسیم  $r^2$  (نه  $r$ ) بصورت مایه بر حسب  $\theta$  غازی کنیم پس از اینجا به نمودار  $r = \pm \sqrt{\sin 2\theta}$  در صفحه



- وقتی نمودار  $r$  را بر حسب  $\theta$  در صفحه  $r\theta$  دکارتی رسم می کنیم

خطای را که در آنجا  $r^2$  منفی است نادیده می گیریم ولی قسمت های

$+$  و  $-$  را از روی خطای که  $r^2$  در آنجا مثبت است رسم می کنیم

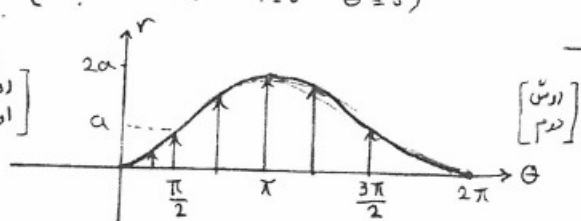
- در صفحه  $r\theta$  ی قطبی بردارهای شعاعی نمودار قبلی نمودارهای رادوبار «ی پوشاند»

← مثال) دلوار: نمودار  $r = a(1 - \cos \theta)$  ،  $a > 0$  ، را رسم کنید.

چون  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  پس نمودار نسبت به محور  $x$  متقارن دارد.

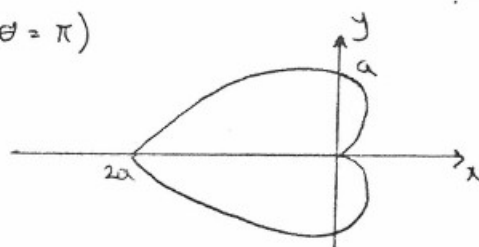
$$-1 \leq \cos \theta < 1$$

$$(\text{پس } \min r = 0 \quad \theta = 0)$$

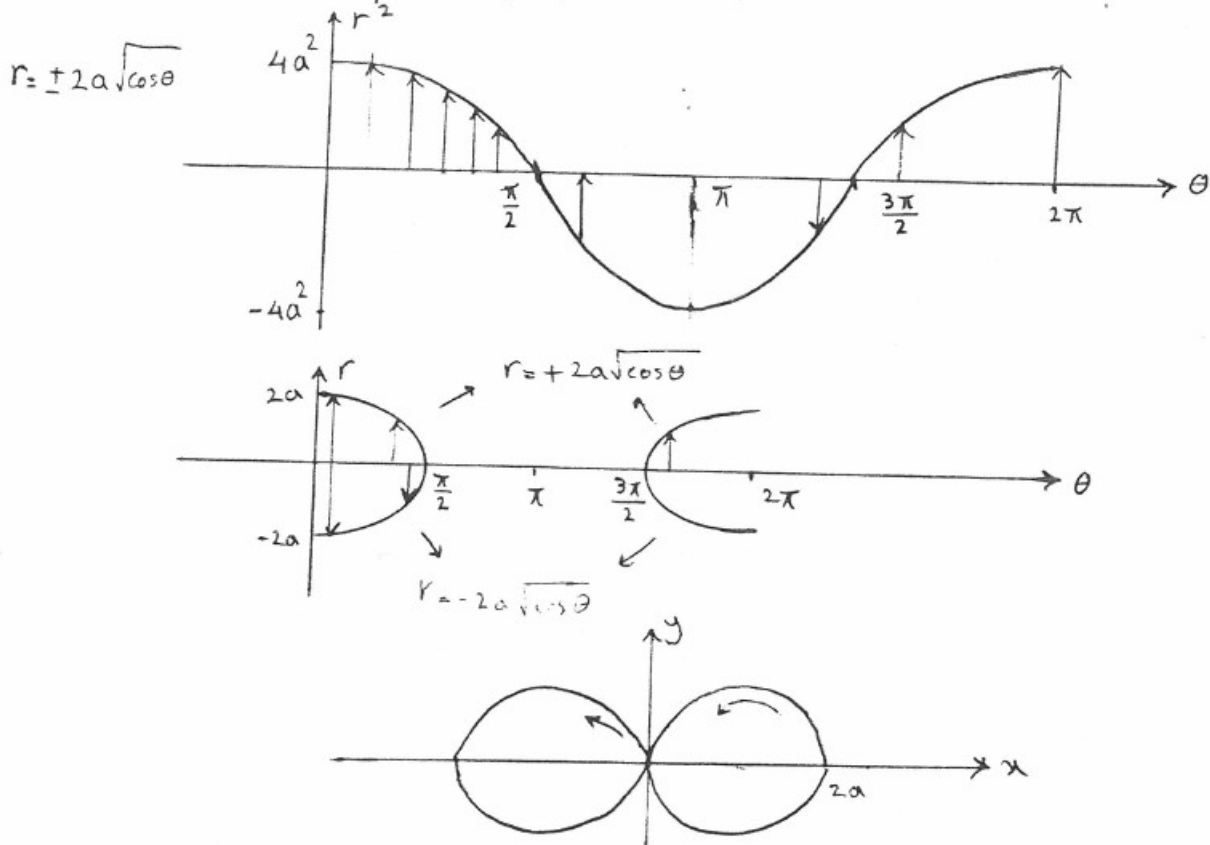


$$(\max r = 2a \quad \theta = \pi)$$

$\theta$	$r$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$a$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3a}{2}$
$\pi$	$2a$



مثال ۱:  $r^2 = 4a^2 \cos \theta$  را رسم کنید؟ (بین این دو نسبت - مبدأ مختار است)  
 (نسبت به محور x حاکم مختار دارد)  $\theta \rightarrow -\theta$   $r \rightarrow -r$

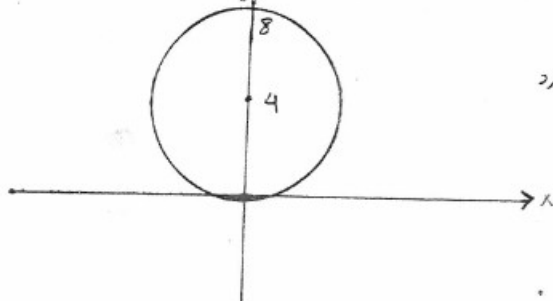


مثال ۲:  $r = 8 \sin \theta$  را رسم کنید.

روش اول:  $xr \rightarrow r^2 = 8r \sin \theta \rightarrow x^2 + y^2 - 8y = 0 \rightarrow (x)^2 + (y-4)^2 = 16$

دایره ای

$\theta$	$r$
$-\frac{\pi}{2}$	-8
$-\frac{\pi}{6}$	-4
0	0
$\frac{\pi}{6}$	4
$\frac{\pi}{2}$	8



روش دوم: نسبت به محور y مختار دارد

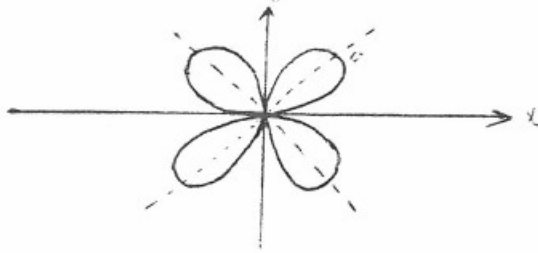
$r \rightarrow -r$   
 $\theta \rightarrow -\theta$

مثال ۳:  $r = a \sin 2\theta$  را رسم کنید.

- نسبت به محور y مختار دارد  $\rightarrow$  معادله تغییر می کند  $(r, \theta) \rightarrow (-r, -\theta)$
- " " " "  $\rightarrow$  معادله تغییر می کند  $(r, \theta) \rightarrow (-r, \pi - \theta)$
- " " " "  $\rightarrow$  معادله تغییر می کند  $(r, \theta) \rightarrow (r, \pi + \theta)$

وقتی سنفق از  $\theta = \frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{3\pi}{4}$  تغییر می کند  $r$  از  $a$  به  $0$  می رسد و وقتی  $\theta$  از  $\frac{3\pi}{4}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  می رسد  $r$  از  $0$  به  $a$  می رسد و وقتی  $\theta$  از  $\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{5\pi}{4}$  تغییر می کند  $r$  از  $a$  به  $0$  می رسد و وقتی  $\theta$  از  $\frac{5\pi}{4}$  تا  $\frac{3\pi}{2}$  می رسد  $r$  از  $0$  به  $a$  می رسد و وقتی  $\theta$  از  $\frac{3\pi}{2}$  تا  $\frac{7\pi}{4}$  تغییر می کند  $r$  از  $a$  به  $0$  می رسد و وقتی  $\theta$  از  $\frac{7\pi}{4}$  تا  $\frac{2\pi}$  می رسد  $r$  از  $0$  به  $a$  می رسد.

$\theta$	$r$
$0$	$a$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$0$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$a$



$\theta$	$r$
$0$	$1$
$\frac{\pi}{6}$	$0$
$\frac{\pi}{2}$	$0$
$\frac{5\pi}{6}$	$0$
$\pi$	$1$
$\frac{7\pi}{6}$	$0$
$\frac{3\pi}{2}$	$0$
$\frac{11\pi}{6}$	$0$
$2\pi$	$1$

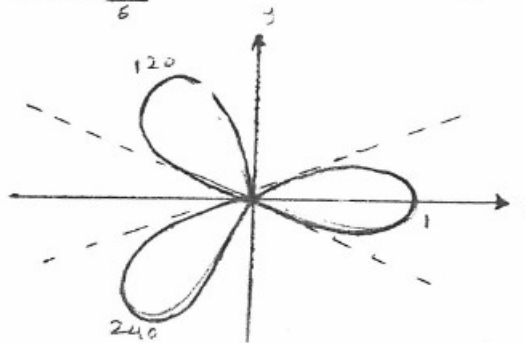
$$\cos 3\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} k=0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ k=1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ k=2 \rightarrow \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=3 \rightarrow \frac{7\pi}{6} \\ k=4 \rightarrow \frac{3\pi}{2} \\ k=5 \rightarrow \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$k=5 \rightarrow \frac{11\pi}{6}$$

هرای 3 پراست  
جایای که صفر می شود

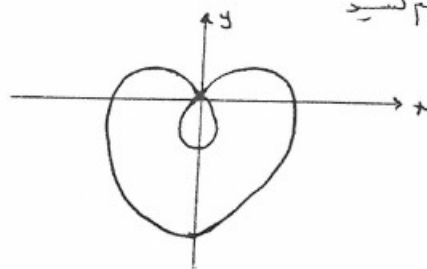


$$\begin{cases} a > b & \text{لیپاسیون (یک حلقه)} \\ a = b & \text{دایره} \\ b > a & \text{لیپاسیون در حلقه} \end{cases}$$

$$r = a \pm b \cos \theta$$

$$r = a \pm b \sin \theta$$

$\theta$	$r$
$-\frac{\pi}{2}$	$3$
$0$	$1$
$\frac{\pi}{2}$	$-1$
$\pi$	$1$
$\frac{3\pi}{2}$	$3$



$$r = 1 - 2 \sin \theta$$

نسبت به محورهای مختصات

که یافتن نقاط تقاطع خط های قطبی :

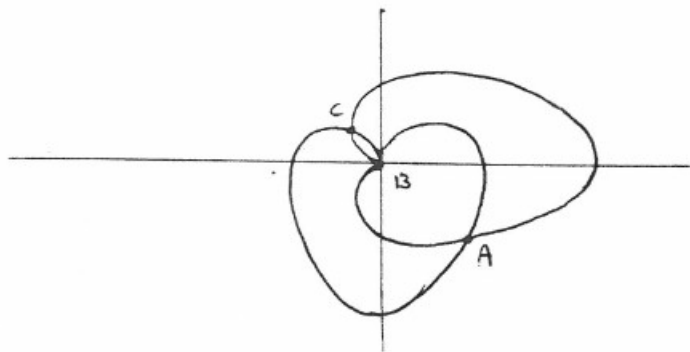
راه مطمئن برای تشخیص کردن چه نقاط تقاطع، ترسیم نمودار معادله است.

$$\textcircled{1} \begin{cases} r = a(1 - \sin \theta) \\ r = a(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad a > 1$$

← مثال) محل تقاطع دو منحنی زیر را بیابید.

$$r_1 = r_2 \rightarrow 1 - \sin \theta = 1 + \cos \theta \rightarrow \tan \theta = -1 \quad \begin{cases} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

پس محل تقاطع  $(a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{3\pi}{4})$  و  $(a(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{7\pi}{4})$  نیز  $(0, 0)$



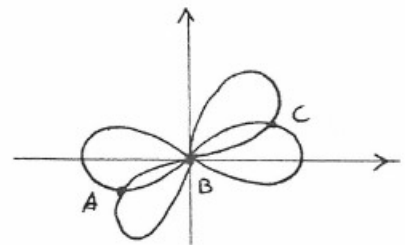
$$\textcircled{2} \begin{cases} r^2 = \sin 2\theta \\ r^2 = \cos 2\theta \end{cases}$$

$$\text{چون: } r_1^2 = r_2^2 \rightarrow \sin 2\theta = \cos 2\theta \rightarrow \tan 2\theta = 1$$

$$2\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}, \quad 2\theta = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{8}$$

$$r^2 = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

محل تقاطع  $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pi}{8})$  و  $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{5\pi}{8})$  و  $(0, 0)$

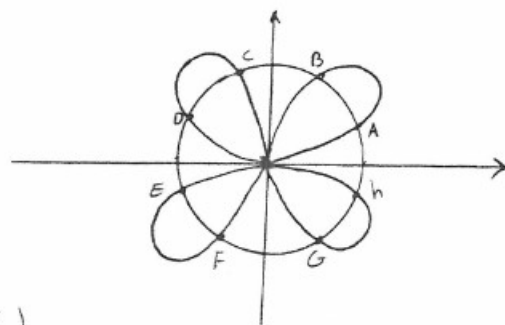


$$\textcircled{3} \begin{cases} r = 1 & \text{معادله دایره} \\ r = 2 \sin 2\theta & \text{یک منحنی 4 پر} \end{cases}$$

20+9

$$2 \sin 2\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \dots$$

$(1, \pm \frac{\pi}{12}), (1, \pm \frac{5\pi}{12}), (1, \pm \frac{13\pi}{12}), (1, \pm \frac{17\pi}{12})$





$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

که مساحت در مختصات قطبی: مساحت ناحیه بین دو کمان  $r = f(\theta)$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

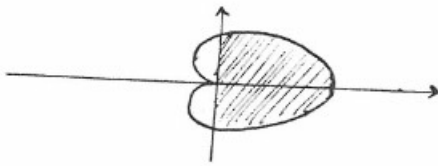
مساحت ناحیه:  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$  ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2 - r_1^2) d\theta$$

مساحت  
مساحت در مختصات قطبی: مساحت ناحیه محدود به دو کمان را باید.

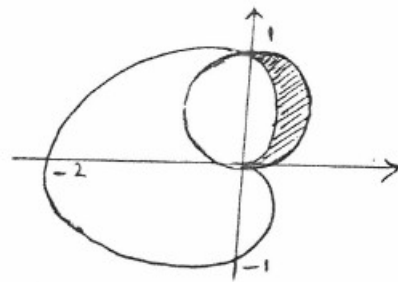
①  $r = 2(1 + \cos \theta)$  دایره

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} 4(1 + \cos \theta)^2 = 6\pi$$



②  $\begin{cases} r = \sin \theta & \text{داخل} \\ r = 1 - \cos \theta & \text{خارج} \end{cases}$

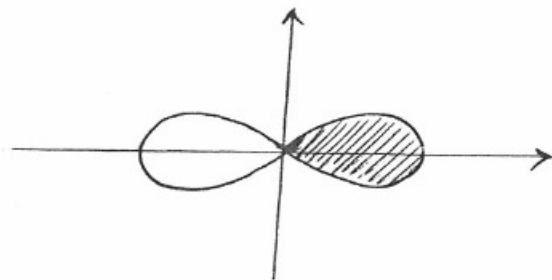
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)^2 d\theta = 1 - \frac{\pi}{4}$$



③ مساحت یک حلقه از پروانه  $r^2 = \cos 2\theta$

$$A = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}$$

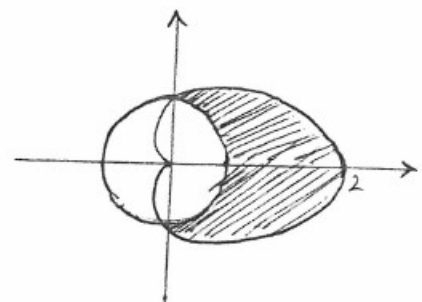
$\begin{cases} 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \rightarrow 0 \end{cases}$



④  $\begin{cases} r = 1 & \text{خارج} \\ r = 1 + \cos \theta & \text{داخل} \end{cases}$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} [1 - (1 + \cos \theta)^2] d\theta$$

$$= 2 + \frac{\pi}{4}$$



$$\textcircled{1} \int x (\sqrt{x-2}) dx =$$

انتگرال های زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید.

$$\xrightarrow{\text{کم و زیاد کنیم } (-2+2)} \int (x-2+2) \sqrt{x-2} dx = \int (x-2)^{\frac{3}{2}} dx + 2 \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\xrightarrow{\substack{x-2=u \\ dx=du}} = \frac{(x-2)^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}} + \frac{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{x-5}{x\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{x} \int (x-1-2) (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{x} \int (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{2}{x} \int (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\xrightarrow{\substack{x-1=u \\ dx=du}} = \frac{1}{x} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{x} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{x^r}{1+x^r} dx = \int \frac{x^r + 1 - 1}{x^r + 1} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^r} = x - \tan^{-1} x + C$$

$$\textcircled{4} \int (x-1)(\sqrt{x-2}) dx = \int (x-2+1)(x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \int (x-2)^{\frac{3}{2}} dx + \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\xrightarrow{\substack{x-2=u \\ dx=du}} = \frac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\textcircled{5} \int (x^r - rx)(x-2)^q dx \xrightarrow{\text{کم و زیاد کنیم } (-2+2) \text{ اگر به پرانتز اولی کم و زیاد کنیم تبدیل می شود}} = \int (x^r - rx + r - r)(x-2)^q dx$$

$$\int (x-2)^{12} dx - r \int (x-2)^9 dx \xrightarrow{\substack{x-2=u \\ dx=du}} = \frac{(x-2)^{13}}{13} - \frac{r(x-2)^{10}}{10} + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{x^r - rx + 5}{(x-1)^r} dx = \int \frac{x^r - rx + 1 + r}{(x-1)^r} dx = \int \frac{(x-1)^r + r}{(x-1)^r} dx$$

$$\int dx + r \int \frac{dx}{(x-1)^r} = \xrightarrow{x-1=u} x - \frac{r}{(x-1)} + C$$

$$\textcircled{v} \int \sqrt{x+r} dx = \int (x+r)^{\frac{1}{r}} dx = \frac{x+r=u}{dx=du} = \frac{(x+r)^{\frac{r}{r}}}{\frac{r}{r}} + C$$


---

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x dx}{\sqrt{rx-1}} &= \int x (rx-1)^{-\frac{1}{r}} dx \xrightarrow{\substack{rx-1=u \\ dx=\frac{du}{r}}} \frac{1}{r} \int rx (rx-1)^{-\frac{1}{r}} dx = \\ &= \frac{1}{r} \int (rx-1+1)(rx-1)^{-\frac{1}{r}} dx = \frac{1}{r} \int (rx-1)^{-\frac{1}{r}} dx + \frac{1}{r} \int (rx-1)^{-\frac{1}{r}} dx = \frac{rx-1=u}{dx=\frac{du}{r}} \rightarrow \\ &= \frac{r(rx-1)^{\frac{r}{r}}}{\frac{r}{r}} + \frac{r(rx-1)^{\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r}} + C \end{aligned}$$


---

$$\textcircled{9} \int e^{rx} dx = \frac{rx=u}{dx=\frac{du}{r}} = \frac{e^{rx}}{r} + C$$


---

$$\textcircled{10} \int \sin vx dx \Rightarrow \frac{vx=u}{dx=\frac{du}{v}} = -\frac{1}{v} \cos vx + C$$


---

$$\textcircled{11} \int x^r (1+\tan^r(x)^v) dx \Rightarrow \frac{x^v=u}{x^r dx=\frac{du}{v}} = \frac{1}{v} \int (1+\tan^r u) du = \frac{1}{v} \tan x^v + C$$


---

$$\textcircled{12} \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow{\substack{\sqrt{x}=u \\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=2du}} 2 \int \sin u du = -2 \cos \sqrt{x} + C$$


---

$$\textcircled{13} \int (rx+1)^r \sqrt[rx]{(rx+1)} dx \xrightarrow{\substack{rx+1=u \\ du=(rx+1)dx}} = \int \sqrt[r]{u} du = \frac{(rx+1)^{\frac{r}{r}}}{\frac{r}{r}} + C$$


---

$$\begin{aligned} \textcircled{14} \int (\tan^r x + \tan^0 x) dx &= \int \tan^r x (1 + \tan^r x) dx \xrightarrow{\substack{\tan x=u \\ (1+\tan^r x)dx=du}} \\ &= \int u^r du = \frac{\tan^r x}{r} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{13} \int \sqrt[r]{\frac{\sin x}{\cos^r x}} dx = \int \sqrt[r]{\frac{\sin x}{\cos x \cos^{r-1} x}} dx = \int \frac{1}{\cos^r x} \sqrt[r]{\tan x} dx$$

$$\int \sec^r x \sqrt[r]{\tan x} dx \xrightarrow[\sec^r x dx = du]{\tan x = u} \int u^{\frac{1}{r}} du = \frac{\tan^{\frac{r+1}{r}} x}{\frac{r}{r+1}} + C$$


---

$$\textcircled{14} \int (\cos^r x - \sin^r x) (\sin x + \cos x)^n dx \xrightarrow[\text{ب}^1]{\text{ا}^1} \int (\cos^r x + \sin^r x) (\cos^r x - \sin^r x) x \rightarrow$$

$$\leftarrow (\sin x + \cos x)^n dx = \int (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) (\sin x + \cos x)^n dx =$$

$$\int (\cos x - \sin x) (\sin x + \cos x)^n dx \xrightarrow[(\cos x - \sin x) dx = du]{\sin x + \cos x = u} \int u^n du = \frac{(\sin x + \cos x)^{n+1}}{n+1} + C$$


---

$$\textcircled{15} \int (\tan x + \cot x)^n (\tan x - \cot x) dx = \int (\tan x + \cot x)^r (\tan^r x - \cot^r x) dx \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[(\frac{1}{r} \tan^r x - \cot^r x) dx = du]{\tan x + \cot x = u} \int u^r du = \frac{(\tan x + \cot x)^{r+1}}{r+1} + C$$


---

$$\textcircled{16} \int \sin^r x \tan x dx = \int \cos^r x \sin^r x \frac{\sin x dx}{\cos x} = r \int \cos x \sin^r x dx$$

$$\xrightarrow[\cos x dx = du]{\sin x = u} = r \frac{\sin^{r+1} x}{r+1} + C = \frac{\sin^{r+1} x}{r+1} + C$$


---

$$\textcircled{17} \int \frac{dx}{\sin^r x \sqrt{\cot x}} = \int \frac{\csc^r x dx}{(\cot x)^{\frac{1}{r}}} \xrightarrow[-\csc^r x dx = du]{\cot x = u} - \int u^{-\frac{1}{r}} du = \frac{-\cot^{\frac{1}{r}} x}{\frac{1}{r}} + C$$


---

$$\textcircled{18} \int r(r+1) \sqrt{x} (x+1)^{\frac{1}{r}} dx = r \int (r+1) \sqrt{x(x+1)} dx \xrightarrow[(r+1) dx = du]{x(x+1) = u}$$

$$r \int u^{\frac{1}{r}} du = \frac{r(x^r + x)^{\frac{r}{r+1}}}{\frac{r}{r+1}} + C$$


---

$$(YI) \int \sin^r x (a \sin^r x + b \cos^r x + C)^m dx \xrightarrow{\substack{a \sin^r x + b \cos^r x + C = u \\ (r a \sin x \cos x - r b \sin x \cos x) dx = du}} \int \frac{1}{a-b} u^m du = \frac{1}{(a-b)} \frac{(a \sin^r x + b \cos^r x + C)^{m+1}}{m+1}$$

$\sin^r x = r \sin x \cos x : \checkmark$

---

$$(YII) \int \frac{(rx+1)^{10}}{(x+1)^{11}} dx = \int \frac{(rx+1)^{10}}{(x+1)^{10}} \times \frac{1}{(x+1)^1} dx = \int \left( \frac{rx+1}{x+1} \right)^{10} \frac{1}{(x+1)^1} dx$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{rx+1}{x+1} = u \\ \frac{dx}{(x+1)^1} = du}} = \int u^{10} du = \frac{1}{11} \left( \frac{rx+1}{x+1} \right)^{11} + C$$


---

$$(YIII) \int \frac{\sin^v x}{\cos^q x} dx = \int \frac{\sin^v x}{\cos^v x \cos^r x} dx = \int \tan^v x \sec^r x dx = \frac{\tan^1 x}{1} + C$$


---

$$(YIV) \int \frac{(rx+r)^r}{(rx+d)^d} dx = \int \left( \frac{rx+r}{rx+d} \right)^r \frac{1}{(rx+d)^r} dx = \frac{\frac{rx+r}{rx+d} = u}{\frac{-r dx}{(rx+d)^r} = du} \rightarrow \frac{dx}{(rx+d)^r} = \frac{-du}{r}$$

$$= \frac{-1}{r} \int u^r du = \frac{-1}{rx+r} \left( \frac{rx+r}{rx+d} \right)^r + C$$


---

$$(YV) \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt[r]{\ln(x^r+rx)} (x^r+rx)} = \frac{\ln(x^r+rx) = u}{\frac{r(x+1) dx}{x^r+rx} = du} = \frac{1}{r} \int \frac{du}{u^{1/r}} = \frac{1}{r} \int u^{-\frac{1}{r}} du$$

$$= \frac{1}{r} \times \frac{(\ln(x^r+rx))^{\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r}} + C$$


---

$$(YVI) \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx \xrightarrow{\substack{1+e^x = u \\ e^x dx = du}} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{(1+e^x)^{\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r}} + C$$


---

$$(YVII) \int \frac{dx}{(\tan^{-1} x)^r (1+x^2)} = \frac{\tan^{-1} x = u}{\frac{dx}{1+x^2} = du} = \frac{(\tan^{-1} x)^{-r}}{-r} + C$$

$$(۲۸) \int x \cos r x^r dx \xrightarrow[r dx = \frac{du}{r}]{rx^r = u} = \frac{1}{r} \int \cos u du = \frac{1}{r} \sin rx^r + C$$


---

$$(۲۹) \int \frac{\sin(\tan x)}{\cos^r x} dx = \int \sec^r x \sin(\tan x) dx \xrightarrow[\sec^r x dx = du]{\tan x = u} = -\cos(\tan x) + C$$


---

$$(۳۰) \int \sin rx^r \sqrt{\cos x} dx = r \int \sin x \cos x (\cos x)^{\frac{1}{r}} dx = r \int \sin x (\cos x)^{\frac{r}{r}} dx$$

$$\xrightarrow[-\sin x dx = du]{\cos x = u} = -r \frac{\cos^{\frac{r}{r}+1} x}{\frac{r}{r}} + C$$


---

$$(۳۱) \int \frac{1}{(x+r)^r} \sqrt{\frac{x+r}{x-1}} dx = \int \frac{1}{(x+r)^r} \left( \frac{x-1}{x+r} \right)^{-\frac{1}{r}} dx \xrightarrow[r dx = du]{\frac{x-1}{x+r} = u}$$

$$\frac{1}{r} \int u^{-\frac{1}{r}} du = \frac{1}{r} \times \frac{(\frac{x-1}{x+r})^{\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r}} + C \Rightarrow \frac{r}{r} \sqrt{\frac{x-1}{x+r}} + C$$


---

$$(۳۲) \int \frac{\cos x + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx \xrightarrow[\sin^2 x = 1 - \cos^2 x]{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x + \sin x}{(\sin x - \cos x)^2} dx$$

$$\xrightarrow[(\cos x + \sin x) dx = du]{\sin x - \cos x = u} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{\sin x - \cos x} + C$$


---

$$(۳۳) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^r+1} - x} = x \frac{\text{فرجه}}{\text{فرجه}} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^r+1} - x} \times \frac{\sqrt{x^r+1} + x}{\sqrt{x^r+1} + x} \int \frac{x(\sqrt{x^r+1} + x)}{x^r+1 - x^2} dx$$

$$\int (x\sqrt{x^r+1} + x^r) dx = \frac{1}{r} (x^r+1)^{\frac{r}{r}} + \frac{x^r}{r} + C \quad \left\{ \begin{array}{l} x^r+1 = u \\ rx dx = du \end{array} \right. \quad \text{نکته}$$


---

$$(۳۴) \int \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \frac{\ln x = u}{\frac{dx}{x} = du} \int \frac{du}{u^r} = \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{\ln x} + C$$


---

$$\textcircled{35} \int \sqrt{1 - \sin^2 x} \, dx \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} \rightarrow \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} \, dx \xrightarrow{\text{بما أن } \cos x > \sin x} \int (\cos x - \sin x) \, dx = \sin x + \cos x + C$$

$$\textcircled{36} \int \frac{dx}{1 + \sin x} \times \frac{\text{مخرج}}{\text{مخرج}} = \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec^2 x \, dx - \int \sec x \tan x \, dx = \tan x - \sec x + C$$

$$\textcircled{37} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \times \frac{\text{مخرج}}{\text{مخرج}} = \int \frac{\sin x (1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} \, dx = \int \frac{\sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx \Rightarrow \int \sec x \tan x \, dx - \int \tan^2 x \, dx = \int \sec x \tan x - \int (\tan^2 x + 1 - 1) \, dx = \sec x - \tan x + x + C$$

$$\textcircled{38} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \rightarrow \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} = u}{\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du} = 2 \int \frac{du}{1+u^2} \Rightarrow 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$$

$$\textcircled{39} \int \frac{r^{x+1} - \Delta^{x+1}}{10^x} \, dx \Rightarrow \int \frac{r \times r^x - \Delta \times \Delta^x}{10^x} \, dx = r \int \left(\frac{1}{\Delta}\right)^x \, dx - \Delta \int \left(\frac{1}{r}\right)^x \, dx = r \left(\frac{1}{\Delta}\right)^x \frac{1}{\ln \frac{1}{\Delta}} - \Delta \left(\frac{1}{r}\right)^x \frac{1}{\ln \frac{1}{r}} + C \Rightarrow \frac{\Delta}{\ln r} \left(\frac{1}{r}\right)^x - \frac{r}{\ln \Delta} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^x + C$$

$$\textcircled{40} \int \frac{\sqrt{x^F + x^{-F} + 1}}{x^F} \, dx = \int \frac{\sqrt{x^F + \frac{1}{x^F} + 1}}{x^F} \, dx \rightarrow \int \frac{\sqrt{\frac{x^{2F} + 1 + x^F}{x^F}}}{x^F} \, dx = \int \frac{\sqrt{x^{2F} + 1 + x^F}}{x^{2F}} \, dx \rightarrow \int \frac{\sqrt{(x^F + 1)^2}}{x^{2F}} \, dx = \int \frac{x^F + 1}{x^{2F}} \, dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^{2F}} = \ln x - \frac{1}{F x^F} + C$$

$$(F1) \int (1 - \frac{1}{x^r}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int (1 - \frac{1}{x^r}) x^{\frac{r}{2}} dx = \int (x^{\frac{r}{2}} - x^{-\frac{r}{2}}) dx = \frac{r}{r} x^{\frac{r}{2}} + r x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$(F2) \int \frac{\sqrt[{\Delta}]{1-rx+x^r}}{1-x} dx = \int \frac{\sqrt[{\Delta}]{(1-x)^r}}{1-x} dx = \int (1-x)^{\frac{r}{\Delta}} (1-x)^{-1} dx = \int (1-x)^{-\frac{r}{\Delta}} dx = -\frac{\Delta}{r} (1-x)^{\frac{r}{\Delta}} + C$$

$$(F3) \int \frac{x^{\frac{n}{r}}}{\sqrt{1+x^{\frac{n+r}{r}}}} dx \quad \begin{array}{l} u=x^{\frac{n+r}{r}} \rightarrow x^{\frac{n}{r}}=u^{\frac{r}{n+r}} \\ du=\frac{n+r}{r} x^{\frac{n}{r}} dx \end{array} = \frac{n+r}{r} \int \frac{du}{\sqrt{1+u}} = \frac{n+r}{r} \sinh^{-1} u + C \Rightarrow \frac{n+r}{r} \sinh^{-1} (x^{\frac{n+r}{r}}) + C$$

$\frac{n+r}{r} = \frac{n}{r} + 1$

$$(F4) \int \frac{(1 - \sin \frac{x}{\sqrt{r}})^r}{\sin \frac{x}{\sqrt{r}}} dx \Rightarrow \int \frac{1 - r \sin \frac{x}{\sqrt{r}} + \sin^r \frac{x}{\sqrt{r}}}{\sin \frac{x}{\sqrt{r}}} dx = \int (\csc \frac{x}{\sqrt{r}} - r + \sin^r \frac{x}{\sqrt{r}}) dx = \sqrt{r} \ln | \csc \frac{x}{\sqrt{r}} - \cot \frac{x}{\sqrt{r}} | - rx - \sqrt{r} \cos \frac{x}{\sqrt{r}} + C$$

$$(F5) \int \sec x dx = x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \Rightarrow \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \quad \begin{array}{l} u = \sec x + \tan x \\ du = (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx \end{array} \int \frac{du}{u} = \ln |\sec x + \tan x|$$

$$(F6) \int \frac{e^{\sqrt{x}} \cos e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \begin{array}{l} u = e^{\sqrt{x}} \\ du = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \Rightarrow 2 \int \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin e^{\sqrt{x}} + C$$



انتگرال‌گیری از توابع گویایی  $\sin x$  و  $\cos x$ : اگر تابع انتگرال تابع گویایی از  $\sin x$  و  $\cos x$  باشد می‌توان با جایگزینی زیر انتگرال تابع گویا

$$\begin{cases} \sin x = \frac{ru}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{rdu}{1+u^2} \end{cases} \quad \text{if } u = \tan \frac{x}{r}$$

از آن تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \sin x = \frac{ru}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{cases} \quad \text{if } u = \tan x$$

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{\frac{rdu}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\cancel{r}du}{\cancel{r}u^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{r}} + C = -\cot \frac{x}{r} + C$$

$$\textcircled{2} \int \csc x \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{\frac{rdu}{1+u^2}}{\frac{ru}{1+u^2}} = \ln u + C = \ln |\tan \frac{x}{r}| + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1-\frac{ru}{1+u^2}} = \int \frac{du}{1+u^2-ru} = \int \frac{du}{(u-1)^2} = -\frac{1}{u-1} + C = \frac{-1}{\tan x - 1} + C$$

نکته: در این مثال با توجه به  $u = \tan x \leftarrow \sin$  کمان

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{1-\sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{rdu}{1+u^2}}{1-\frac{ru}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = r \int \frac{du}{1+u^2-ru+1-u^2} = r \int \frac{du}{2-ru} = \int \frac{du}{1-u} = -\ln |1-u| + C = -\ln |1-\tan \frac{x}{r}| + C$$

نکته: برای انتگرال‌گیری توان‌های فرد  $\sin x$  و  $\cos x$ ، توان یک را کنار گذاشته و بقیه را به نسبت مثلثاتی مخالف

: تبدیل می‌کنیم.

نکته: برای انتگرال‌گیری توان‌های زوج  $\sin x$  و  $\cos x$  از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \sin x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx \xrightarrow{\substack{\cos x = u \\ -\sin x \, dx = du \\ \sin x \, dx = -du}} \\ &= -\int (1 - u^2) \, du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cos x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx \xrightarrow{\substack{\sin x = u \\ \cos x \, dx = du}} \\ &= \int (1 - u^2) \, du = \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int \sin^4 x \, dx &= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \, dx = \int \frac{1}{4} \, dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx \\ &+ \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \xrightarrow{\substack{\text{آمار فرزوج} \\ \sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2} \\ \cos^2 ax = \frac{1 + \cos 2ax}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \Rightarrow \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} \, dx = \int \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} \, dx = \int \frac{\sin x (1 - \cos x)}{1 + \cos x} \, dx = \frac{(1 - \cos x)^2}{2} + C$$

نکته: برای اشتغال گیری از توان های زوج  $\tan x$  و  $\cot x$  در توان کسر، اضافه و کم می کنیم تا به 1 و -1 برسیم و بعد در اشتغال

عوامل  $(1 + \tan^2 x)$  و  $(1 + \cot^2 x)$  را تولید می کنیم.

$$⑤ \int \tan^5 x \, dx = \int (\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x - \tan^2 x + \tan^2 x + 1 - 1) \, dx \Rightarrow$$

$$\int [\tan^4 x (\tan^2 x + 1) - \tan^2 x (\tan^2 x + 1) + (\tan^2 x + 1) - 1] \, dx \Rightarrow \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$

نکته:  $\xrightarrow{\text{این زوج باشد}} \int \cot^n x \, dx = \frac{-\cot^{n-1}}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}}{n-3} + \dots - \cot x + x + C$

نکته:  $\xrightarrow{\text{این زوج باشد}} \int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - \frac{\tan^{n-3}}{n-3} + \dots + \tan x - x + C$

نکته: برای اشتغال گیری از توان های فرد  $\tan x$  و  $\cot x$  در توان کسر، اضافه و کم می کنیم تا به  $(-\tan x, \tan x)$  و  $(-\cot x, \cot x)$

برسیم و بعد در اشتغال عوامل  $(1 + \tan^2 x)$  و  $(1 + \cot^2 x)$  را تولید می کنیم.

$$⑥ \int \cot^5 x \, dx \Rightarrow \int (\cot^4 x + \cot^2 x - \cot^2 x - \cot x + \cot x) \, dx =$$

$$\int \cot^4 x (1 + \cot^2 x) - \cot x (1 + \cot^2 x) + \cot x \, dx = \frac{-\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$$

نکته: برای اشتغال گیری از توان های زوج  $\csc x$  و  $\sec x$ ؛  $\csc x$  و  $\sec x$  فاکتور می کشیم و تغییر متغیر می دهیم  $\tan x$  و  $\cot x$

$$⑦ \int \sec^3 x \, dx \Rightarrow \int \sec x \sec^2 x \, dx = \int \sec x (1 + \tan^2 x) \, dx \Rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{cases}$$

$\xrightarrow{\tan x = u} \frac{1}{\sec^2 x} dx = du \Rightarrow \int (1 + u^2) du = u + \frac{u^3}{3} + C = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

$$⑧ \int \csc^3 x \, dx \Rightarrow \int \csc x \csc^2 x \, dx \Rightarrow \int \csc x (1 + \cot^2 x) \, dx = \frac{\cot x = u}{-\csc x \, dx = du} =$$

$$-\int (1 + u^2) du = -\int (1 + 2u^2 + u^4) du \Rightarrow -\cot x - \frac{2\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + C$$

نکته: برای محاسبه توان های فرد  $\sec x$  یا  $\csc x$ : حل به روش جزء به جزء:

$$\textcircled{9} \int \sec^r x dx = \int \sec x (1 + \tan^2 x) dx \quad \begin{cases} u = \sec x \rightarrow du = \sec x \tan x dx \\ dv = (1 + \tan^2 x) dx \rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

$$\int \sec^r x dx = \tan x \sec x - \int \sec x \tan^2 x dx \rightarrow \int \sec^r x dx = \tan x \sec x + \int \sec x dx$$

$$\leftarrow \int \sec^r x dx \Rightarrow 2 \int \sec^r x dx = \tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x| \rightarrow$$

$$\int \sec^r x dx = \frac{1}{r} \tan x \sec x + \frac{1}{r} \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\textcircled{10} \int \sec^{\Delta} x dx = \int \sec^r x \cdot \sec^r x dx = \begin{cases} u = \sec^r x \rightarrow du = r \sec^r x \tan x dx \\ dv = \sec^r x dx \rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

$$\int \sec^{\Delta} x dx = \tan x \sec^r x - r \int \frac{\sec^r x \tan^2 x}{(\sec^r x - 1)} dx \Rightarrow \int \sec^{\Delta} x dx = \tan x \sec^r x -$$

$$\frac{r}{r-2} \int \sec^{\Delta} x + r \int \sec^r x dx \Rightarrow r \int \sec^{\Delta} x dx = \tan x \sec^r x + r \int \sec^r x dx$$

باید جاذبه محاسبه شود و چون در مثال قبلی محاسبه شده فقط موازنه را ذکر می کنیم.

$$\rightarrow \int \sec^{\Delta} x dx = \frac{1}{r} \tan x \sec^r x + \frac{r}{r-2} [\tan x \sec x + \ln (\sec x + \tan x)]$$

نکته در مورد محاسبه  $\int \sin^m x \cos^n x dx$

الف) حداقل یکی از  $m$  و  $n$  فرد باشد  $\Rightarrow$  توان  $\frac{1}{2}$  را از قسمت فرد جدا کرده و مانند مثال محل حل کنیم.

$$\textcircled{11} \int \sin^r x \cos^r x dx = \int \sin x \sin^{r-2} x \cos^r x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^r x dx = \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \\ \sin x dx = -du \end{cases}$$

$$-\int (1 - u^2) u^r du = -\int u^r du + \int u^r du = -\frac{\cos^r x}{r} + \frac{\cos^{\Delta} x}{\Delta} + C$$

درین مثال توان  $\frac{1}{2}$  از  $\sin$  جدا کنیم

$$\textcircled{12} \int \cos^{\Delta} x \sin^r x dx = \int \cos x \cos^{r-2} x \sin^r x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^r \sin^r x dx =$$

$$\int \cos x (1 - r \sin^2 x + \sin^4 x) \sin^r x dx = \begin{cases} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{cases} = \int (1 - r u^2 + u^4) u^r du =$$

$$\frac{u^{r+1}}{r+1} - \frac{r u^{r+3}}{r+3} + \frac{u^{r+5}}{r+5} + C = \frac{\sin^{r+1} x}{r+1} - \frac{r \sin^{r+3} x}{r+3} + \frac{\sin^{r+5} x}{r+5} + C$$

ب)  $m$  و  $n$  هر دو زوج باشند در این صورت از فرمول‌های زیر استفاده می‌شوند:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

تجسبات

$$(13) \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$\frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \underbrace{\cos^2 2x}_{I_1} - \underbrace{\cos^3 2x}_{I_2}) dx$$

$$\int I_1 = \int \cos^2 2x dx = \int \left( \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C_1$$

$$\int I_2 = \int \cos^3 2x dx = \int \cos 2x (1 - \sin^2 2x) dx \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = u \\ \cos 2x dx = \frac{du}{2} \end{cases} = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) du = \frac{1}{2} u - \frac{u^3}{6} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_2$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x - \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C_1 \right) - \left( \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_2 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{24} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$$

نکته: در مورد انتگرال  $\int \sec^m x \tan^n x dx$  اگر توان  $\sec x$  زوج باشد در این صورت  $\sec^2 x$  را جایگزین به مقام  $\sec$  ها را

استفاده از قاعده  $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$  و  $\tan x$  تبدیل کنیم:

$$(14) \int \sec^2 x \cdot \tan^2 x dx \xrightarrow[u = \tan x]{\substack{u = \tan x \\ du = \sec^2 x dx}} = \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

$$(15) \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (\tan^2 x + 1) \tan^2 x dx$$

$$\xrightarrow[u = \tan x]{du = \sec^2 x dx} \int (u^2 + 1) u^2 du = \int (u^4 + u^2) du \Rightarrow \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

$$\textcircled{17} \int \sec^r x \tan^q x dx = \int \sec^{r-2} x \sec^2 x \tan^q x dx = \int \sec^{r-2} x \cdot (1 + \tan^2 x)^{\frac{q-1}{2}} \cdot \tan^q x dx$$

$$\frac{u = \tan x}{du = \sec^2 x dx} \rightarrow \int (1+u^2)^{\frac{q-1}{2}} u^q du = \int (u^q + 2u^{q+2} + u^{q+4}) du = \frac{\tan^q x}{q} + \frac{2 \tan^{q+2} x}{q+2} + \frac{\tan^{q+4} x}{q+4} + C$$

نکته: در مورد انتگرال  $\int \sec^m x \tan^n x dx$  و اگر توان  $\sec x$  فرد باشد در این صورت یک  $\sec x \cdot \tan x$  جدا کنیم و بقیه  $\sec x$  ها را به صورت  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$  تبدیل می‌کنیم.

$$\textcircled{17} \int \sec^r x \tan x dx = \int \sec x \tan x \sec^{r-1} x dx \Rightarrow \begin{cases} \sec x = u \\ \sec x \tan x dx = du \end{cases} = \int u^r du = \frac{u^r}{r} + C = \frac{\sec^r x}{r} + C$$

$$\textcircled{18} \int \sec x \tan^r x dx = \int \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^{r-1} x dx = \int \sec x \cdot \tan x (\sec^2 x - 1) dx \xrightarrow[u = \sec x]{du = \sec x \tan x dx} \int (u^r - 1) du = \frac{u^r}{r} - u + C = \frac{\sec^r x}{r} - \sec x + C$$

$$\textcircled{19} \int \sec^{\Delta} x \tan^r x dx \Rightarrow \int \sec x \tan x \cdot \sec^{\Delta-2} x \tan^{r-1} x dx = \int \sec x \tan x \sec^{\Delta-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x dx \end{cases} \rightarrow \int u^{\Delta-2} (u^2 - 1) du = \frac{u^{\Delta}}{\Delta} - \frac{u^{\Delta-1}}{\Delta-1} + C = \frac{\sec^{\Delta} x}{\Delta} - \frac{\sec^{\Delta-1} x}{\Delta-1} + C$$

نکته: در ۳ مثال بالا توان  $\tan x$  و  $\sec x$  هر دو فرد بودند اما اگر توان  $\sec x$  فرد و  $\tan x$  زوج باشد تمام  $\tan$  ها را به  $\sec$  تبدیل

کرده  $(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$  می‌کنیم. در این عمل باید انتگرال‌های توان فرد  $\sec x$  حل شود.

$$(10) \int \sec^r x \tan^r x dx = \int \sec x (\sec^r x - 1) dx = \int \sec^r x dx - \int \sec x dx =$$

$$\frac{1}{r} \tan x \sec x + \frac{1}{r} \ln |\sec x + \tan x| - \ln |\sec x + \tan x| + C = \frac{1}{r} \tan x \sec x - \frac{1}{r} |\sec x + \tan x| + C$$

$$(11) \int \cot^r x \csc^r x dx$$

$$= \int \cot^r x (1 + \cot^2 x) \csc^r x dx = \int (\cot^r x + \cot^{\frac{r}{\Delta}} x) \csc^r x dx = \frac{-1}{r} \cot^r x - \frac{1}{\Delta} \cot^{\frac{\Delta}{\Delta}} x + C$$

$$(12) \int \cot^r x \csc^r x dx$$

$$= \int \cot^r x \csc^r x \csc^r x dx = \int \cot^r x (1 + \cot^2 x) \csc^r x dx$$

$$= \int (\cot^r x + \cot^{\frac{r}{\Delta}} x) \csc^r x dx = \frac{-1}{r} \cot^r x - \frac{1}{\Delta} \cot^{\frac{\Delta}{\Delta}} x + C$$

$$(13) \int \sec^r x \csc^r x dx$$

$$\begin{cases} \sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \sec^r x = \frac{1}{\cos^r x} \\ \csc x = \frac{1}{\sin x} \rightarrow \csc^r x = \frac{1}{\sin^r x} \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^r x} \times \frac{1}{\sin^r x} dx = \int \frac{\sin^r x + \cos^r x}{\cos^r x \sin^r x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^r x} + \frac{1}{\sin^r x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^r x + \csc^r x) dx = \tan x - \cot x + C$$

نتیجہ حاصل ہوا:  $\sec^r x \csc^r x = \sec^r x + \csc^r x$

$$\textcircled{1} \int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^r+1}} \rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{x^r+1} \Rightarrow u^2 = x^r+1 \rightarrow x^r = u^2-1 \\ r u du = r x dx \rightarrow x dx = u du \end{cases} \rightarrow \int \frac{x^r x dx}{\sqrt{x^r+1}} = \int \frac{(u^2-1) u du}{u} =$$

$$\frac{u^r}{r} - u + C = \frac{\sqrt{(x^r+1)}^r}{r} - \sqrt{x^r+1} + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{(x+1) dx}{x \sqrt{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{x-1} \rightarrow u^2 = x-1 \rightarrow x = u^2+1 \\ u^2 + r = x+1 \end{cases} \rightarrow r u du = dx = \int \frac{(u^2+r)(r u du)}{(u^2+1) u} =$$

$$r \int \frac{u^2+r}{u^2+1} du = r \int \frac{(u^2+1)+1}{u^2+1} du = r \int \frac{du}{u^2+1} + r \int \frac{du}{u^2+1} = r u + r \tan^{-1} u + C =$$

$$r \sqrt{x-1} + r \tan^{-1}(\sqrt{x-1}) + C$$

$$\textcircled{3} \int \sqrt{1+x\sqrt{x}} \sqrt{x} dx \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x\sqrt{x}} = u \Rightarrow u^2 = 1+x\sqrt{x} \\ r u du = (\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}) dx = \frac{r}{r} \sqrt{x} dx \rightarrow \frac{r}{r} u du = \sqrt{x} dx \end{cases}$$

$$= \int u x \frac{r}{r} u du = \frac{r}{r} \frac{u^r}{r} + C = \frac{r}{r} \sqrt{(1+x\sqrt{x})^r} + C$$

$$\textcircled{4} \int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x} = u^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = r u du \\ \sqrt{x} = u^2-1 \rightarrow dx = r u (u^2-1) du \end{cases} \Rightarrow \int u (r u) (u^2-1) du =$$

$$r \int (u^3 - u) du = r \frac{u^4}{4} - \frac{r u^2}{2} + C = \frac{r}{4} \sqrt{(1+\sqrt{x})^4} - \frac{r}{2} \sqrt{(1+\sqrt{x})^2} + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{x (\text{Arcsin } x^r)^r}{\sqrt{1-x^r}} \Rightarrow \begin{cases} u = \text{Arcsin } x^r \\ du = \frac{r x}{\sqrt{1-x^r}} dx \Rightarrow \frac{1}{r} \int u^r du = \frac{1}{r} \frac{u^{r+1}}{r+1} = \frac{1}{r+1} (\text{Arcsin } x^r)^{r+1} \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \int \frac{\cos^r x}{\sqrt[r]{\sin x}} dx = \int \cos x (\cos x)^r (\sin x)^{-\frac{1}{r}} dx = \int \cos x (1-\sin^2 x) \sin x^{-\frac{1}{r}} dx \Rightarrow$$

$$\int \cos x (\sin^{-\frac{1}{r}} x - \sin^{\frac{2}{r}} x) dx \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \int (u^{-\frac{1}{r}} - u^{\frac{2}{r}}) du = \frac{u^{\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r}} - \frac{u^{\frac{5}{r}}}{\frac{5}{r}} + C =$$

$$\frac{r}{1} (\sin x)^{\frac{1}{r}} - \frac{r}{5} (\sin x)^{\frac{5}{r}} + C$$



$$\textcircled{v} \int \frac{(x^r+1)(x^r+\ln x)}{x^r} dx \Rightarrow \frac{1}{r} \int \left( \frac{x^r+1}{x} \right) (x^r+\ln x) dx \Rightarrow \frac{1}{r} \int \left( x + \frac{1}{x} \right) (x^r+\ln x) dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = x^r + \ln x \\ du = (rx + \frac{1}{x}) dx \end{cases} = \frac{1}{r} \int u du = \frac{1}{r} \frac{u^r}{r} + C = \frac{1}{r^2} (x^r + \ln x)^r + C$$


---

$$\textcircled{A} \int \frac{dx}{\csc x - 1} \xrightarrow{\text{ضرب جزيء}} \int \frac{\sin x dx}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} dx \Rightarrow \int \frac{(\sin x)(1 + \sin x) dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (\sec x \tan x dx + \int (\tan^2 x) dx = \sec x + \tan x - x + C$$

$$\textcircled{A} I_1 = \sec x + C$$

$$\textcircled{A} I_r = \int (\tan^r x + \underbrace{1}_{-1}) dx = \int (\tan^r x + 1) dx - \int dx = \tan x - x + C$$


---

$$\textcircled{A} \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \times \text{ضرب جزيء} = \int \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{x-1 - x-1} = -\frac{1}{r} \int (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) dx = -\frac{1}{r} \int \frac{1}{du} \underbrace{\frac{1}{r}}_u dx$$

$$= -\frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{r^2} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{r^2} \ln |u| + C = -\frac{1}{r^2} \ln |\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}| + C$$


---

$$\textcircled{10} \int \frac{\sin^r x - \cos^r x}{\sqrt{1 + \sin^r x}} dx \xrightarrow{\text{ضرب جزيء}} \int \frac{\sin^r x - \cos^r x}{1 + \sin^r x} \times \frac{1 + \sin^r x}{1 + \sin^r x} dx = \int \frac{\sin^r x - \cos^r x}{\sqrt{(1 + \sin^r x)^2}} dx =$$

$$\int \frac{\sin^r x - \cos^r x}{1 + \sin^r x} dx = \begin{cases} \cos^r x + \sin^r x = u \\ du = r(-\sin^{r-1} x + \cos^{r-1} x) dx \Rightarrow (\sin^r x - \cos^r x) dx = -\frac{du}{r} \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{r} \int \frac{du}{|u|} = -\frac{1}{r} \ln |u| + C = -\frac{1}{r} \ln |\cos^r x + \sin^r x| + C$$


---

$$\textcircled{11} \int \frac{\cos^r \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin^r \sqrt{x}} dx = \int \frac{\cos^r \sqrt{x}}{\sqrt{x} (\sin^r \sqrt{x})} \times \frac{1}{\sin^r \sqrt{x}} dx \Rightarrow \text{ضرب جزيء: } \frac{1}{\sin^r u} = 1 + \cot^2 u$$

$$= \int \frac{\cot^r \sqrt{x} (1 + \cot^2 \sqrt{x})}{-r \sqrt{x}} dx = \begin{cases} \cot^2 \sqrt{x} = u \\ \Rightarrow \frac{1}{-r \sqrt{x}} (1 + \cot^2 \sqrt{x}) dx \Rightarrow \end{cases}$$

$$= \int u^r du = \frac{-r \cot^r \sqrt{x}}{r} + C$$

$$\textcircled{17} \int \cot^r x (\cot x + \tan x) dx \xrightarrow{\cot x + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}} \\ = \int \cot^r x \times \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos^r x}{(\sin x)^r} dx \Rightarrow \begin{cases} \sin^r x = u \\ \cos x dx = \frac{du}{r} \end{cases} = \int \frac{du}{u^r} = \frac{-1}{u} + C \\ = \frac{-1}{\sin^r x} + C$$


---

$$\textcircled{18} \int \frac{e^x (1+x) dx}{\sin^r(xe^x)} \rightarrow \begin{cases} xe^x = u \\ du = (e^x + xe^x) dx = e^x (1+x) dx \end{cases} = \int \frac{du}{\sin^r u} = \int \csc^r u du = \\ -\cot u + C = -\cot(xe^x) + C$$


---

$$\textcircled{19} \int \frac{\sin^r x}{\sqrt{r \cos^2 x + \Delta \sin^2 x + 1}} dx = \int \frac{\sin^r x}{\sqrt{r \cos^2 x + r \sin^2 x + r \sin^2 x + 1}} dx = \int \frac{\sin^r x dx}{\sqrt{r + r \sin^2 x}} = \begin{cases} \sin^r x = u \\ du = r \sin x \cos x dx \\ = \sin^r x dx \end{cases} \\ \int \frac{du}{\sqrt{r + ru}} = \int (r + ru)^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{r} \int r (r + ru)^{-\frac{1}{2}} du = \begin{cases} r + ru = t \\ r du = dt \end{cases} = \frac{1}{r} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ \frac{1}{r} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{r + ru} + C = \sqrt{r + r \sin^2 x} + C$$


---

$$\textcircled{20} \int \frac{\sin x}{\sqrt{r + r \cos x + \sin^2 x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{r + r \cos x + (1 - \cos^2 x)}} dx \Rightarrow \begin{cases} \cos x = u \\ \sin x dx = -du \end{cases} \Rightarrow \int \frac{-du}{\sqrt{-u^2 + ru + r}} \\ \xrightarrow[\text{استبدال}]{\text{مشتق ايجاد}} - \int \frac{du}{\sqrt{-(u^2 - ru + 1) + r}} = - \int \frac{-du}{\sqrt{-(u-1)^2 + r}} = - \int \frac{du}{r \sqrt{1 - (\frac{u-1}{r})^2}} = \\ \begin{cases} \frac{u-1}{r} = t \\ du = r dt \end{cases} = \frac{-r}{r} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sin^{-1} t + C = -\sin^{-1} \left( \frac{u-1}{r} \right) + C = -\sin^{-1} \left( \frac{\cos x - 1}{r} \right) + C$$


---

$$\textcircled{21} \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^r}{\sqrt{x}} dx = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = u \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = r du \end{cases} \rightarrow \int r u^r du = r \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1} (\sqrt{x} + 1)^{r+1} + C$$


---

$$\textcircled{22} \int \frac{\cos^r x}{\cos^r x \sin^r x} dx \Rightarrow \frac{\cos^r x = \cos^r x - \sin^2 x}{\sin^2} \Rightarrow \int \frac{\cos^r x - \sin^2 x}{\cos^r x \sin^r x} dx \Rightarrow \frac{\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}}{\text{تفكيك}}$$

$$\int \csc^r x dx - \sec^r x dx \Rightarrow -\cot x - \tan x + C \quad (29)$$

$$(18) \int \cot x \cdot \sec^r x dx = \int \frac{\sec^r x dx}{\tan x} = \ln |\tan x| + C$$


---

$$(19) \int \frac{1 - r \sin^r x - \sin^r x}{\sqrt{1 + \sin^r x}} dx = \begin{cases} 1 - r \sin^r x = \cos^r x \\ \sin^r x + \cos^r x = 1 \\ \sin^r x = r \cos^r x \sin^r x \end{cases}$$

$$\int \frac{\cos^r x - \sin^r x}{\sqrt{\cos^r x + \sin^r x}} dx \Rightarrow \begin{cases} \cos^r x + \sin^r x = u \\ (-\sin^r x + \cos^r x) dx = \frac{du}{r} \end{cases} = \frac{1}{r} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{r} \int \frac{du}{|u|} =$$

$$= \frac{1}{r} \ln |\cos^r x + \sin^r x| + C$$


---

$$(20) \int \sqrt[r]{\tan x} \sec^r x dx = \int \tan^{\frac{1}{r}} x \sec^r x \sec^r x dx = \int \tan^{\frac{1}{r}} x (\tan^r x + 1) \sec^r x dx =$$

$$\begin{cases} \tan x = u \\ \sec^r x dx = du \end{cases} = \int u^{\frac{1}{r}} (u^r + 1) du = \int (u^{\frac{r+1}{r}} + u^{\frac{1}{r}}) du = \frac{r}{r+1} u^{\frac{r+1}{r}} + \frac{r}{r} u^{\frac{1}{r}} + C = \frac{r}{r+1} \tan^{\frac{r+1}{r}} x + \frac{r}{r} \tan^{\frac{1}{r}} x + C$$


---

$$(21) \int \frac{e^{rx}}{\sqrt{1-e^x}} dx = \begin{cases} 1-e^x = t \rightarrow -e^x dx = dt \\ e^x = 1-t \end{cases} = \int \frac{(e^x) e^x dx}{\sqrt{1-e^x}} = - \int \frac{(1-t) dt}{\sqrt{t}} =$$

$$- \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{t}{\sqrt{t}} dt = -\sqrt{t} + \frac{r}{r} t^{\frac{r}{r}} + C = -\sqrt{1-e^x} + \frac{r}{r} (1-e^x)^{\frac{r}{r}} + C$$


---

$$(22) I = \int \frac{1 - \cos^r x}{(1 + \cos^r x)^r} dx = \begin{cases} \cos^r x = 1 - r \sin^r x \\ \cos^r x = r \cos^r x - 1 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{r \sin^r x}{(r \cos^r x)^r} dx = \frac{1}{r} \int \frac{\sin^r x}{\cos^r x \cos^r x} dx = \frac{1}{r} \int \tan^r x \sec^r x dx =$$

$$\begin{cases} \tan^r x = u \rightarrow du = r(\sec^r x) dx \rightarrow \sec^r x dx = \frac{du}{r} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{r} \int u^{\frac{r}{r}} \frac{du}{r} = \frac{1}{r} \frac{u^{\frac{r}{r}+1}}{\frac{r}{r}+1} + C = \frac{1}{r} \tan^{\frac{r}{r}+1} x + C$$


---

نکته ۱)  $\int u dv = uv - \int v du$  روش جزء به جزء

نکته ۲) به طور کلی  $\text{Arc}$  ها،  $e^{ax}$ ،  $\ln x$  را در حل مسائل جزء به جزء  $u$  می گیریم.

نکته ۳) استثنائین  $e^{ax}$  و  $x^n$  و  $u = x^n$  می گیریم.

۴) در اکثر مواقع هم  $x^n$  را  $u$  می گیریم.

۵) در حل مسائل جزء به جزء موردی که مشتق آن راحت است را  $u$  و موردی که انتگرال گیری آن راحت تر است را  $dv$  می گیریم.

۶) در این روش زمانی که  $x^n$  (یک چند جمله ای) در توابع مثل  $e^{ax}$  و  $\ln x$  و  $\text{Arc}$  ها و  $\cos x$  و  $\sin x$  ضرب شده باشد از جدول زیر استفاده می شود از محور  $u$  مشتق گرفته می شود تا به صفر برسد و از  $dv$  به اندازه ای که باز  $u$

$u$	$dv$
$x^n$	سایر توابع

زیر استفاده می شود از محور  $u$  مشتق گرفته می شود تا به صفر برسد و از  $dv$  به اندازه ای که باز  $u$

مشتق می گیریم انتگرال می گیریم پس این مثال را عمل می کنیم (به نحوه ضرب و علامت فلس هارقت شود).

①  $\int x^r \cos x dx =$

$x^r \sin x + r x^{r-1} \cos x - r(r-1) \int x^{r-2} \cos x dx$

$u = x^r$	$dv = \cos x dx$
$r x^{r-1}$	$\sin x$
$(r-1) x^{r-2}$	$-\cos x$
$(r-2) x^{r-3}$	$\sin x$
$(r-3) x^{r-4}$	$-\cos x$
$\vdots$	$\vdots$
$0$	$\cos x$

②  $\int \text{Arc sin } x dx =$   $\begin{cases} \text{Arc sin } x = u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dx = dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} x = v \end{cases}$

$= x \text{Arc sin } x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \text{Arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + C$

حل  $I_1 = \int \frac{1-x^2}{-2x} dx = \int \frac{1-x^2}{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$

$$\textcircled{3} \int e^{-x} \sin 2x \, dx = \begin{cases} u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x} dx \\ dv = \sin 2x \, dx \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$I = \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x \, dx$$

$$\textcircled{4} I_1 = \int e^{-x} \cos 2x \, dx = \begin{cases} e^{-x} = u \rightarrow -e^{-x} dx = du \\ dv = \cos 2x \, dx \rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases} \quad I_1 = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x \, dx$$

بگذاریم در  $I$

$$\textcircled{5} I = \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x \, dx \right]$$

$$\frac{5}{2} \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{2}{5} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x + C$$

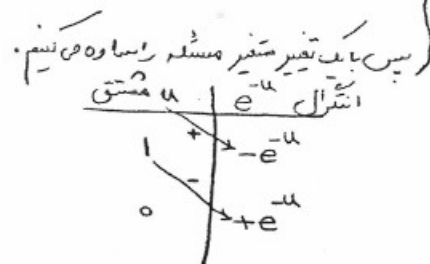
نکته: کلاً در مورد انتگرال هایی که  $(\cos x, \sin x, e^{ax})$  هستند همین مثال بالا بسیار در مورد خود انتگرال در جواب ظاهر می شود.

$$\textcircled{6} \int x^r e^{-x^r} \, dx =$$

در این مثال طبق نکته های گفته شده باید  $dv = e^{-x^r}$  بگیریم اما این انتگرال قابل حل نیست

$$= \begin{cases} x^r = u \\ r x dx = du \end{cases} \Rightarrow \int x^r e^{-x^r} \, dx = \frac{1}{r} \int u^{\frac{r}{r}-1} e^{-u} \, du =$$

$$\frac{1}{r} \int u e^{-u} \, du = \frac{1}{r} [-u e^{-u} - e^{-u}] = -\frac{1}{r} e^{-x^r} [x^{r+1}] + C$$



$$\textcircled{7} \int \ln(x+1) \, dx \Rightarrow \begin{cases} \ln(x+1) = u \rightarrow du = \frac{dx}{x+1} \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{cases}$$

$$= x \ln(x+1) - \int \frac{x \, dx}{x+1} = x \ln(x+1) - [x - \ln|x+1|] + C$$

$$\textcircled{8} I_1 = \int \frac{x+1-1}{x+1} \, dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1|$$

$$\textcircled{9} \int \ln x \, dx = \begin{cases} \ln x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv \quad x = v \end{cases} = x \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\textcircled{v} \int (\ln x)^r dx = \begin{cases} (\ln x)^r = u \Rightarrow \frac{r dx}{x} \ln x = du \\ dx = dr \Rightarrow x = r \end{cases}$$

$$\int (\ln x)^r dx = x(\ln x)^{r-1} - \int \ln x dx = x(\ln x)^{r-1} - r x \ln x + r x + C$$


---

$$\textcircled{A} \int x^{-r} \text{Arc tan } x dx = \begin{cases} \frac{dx}{x^r} = dr \rightarrow \frac{-1}{x} = r \\ u = \tan^{-1} x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \end{cases} = -\frac{1}{x} \tan^{-1} x - \int \frac{-dx}{x(1+x^2)} =$$

$$-\frac{1}{x} \tan^{-1} x + \ln|x| - \frac{1}{r} \ln|x^r+1| + C$$


---

$$\textcircled{q} \int \sec^r x dx = \int \sec^r x \sec x dx \Rightarrow \begin{cases} u = \sec x \rightarrow du = \sec x \tan x dx \\ \sec^r x dx = dr \Rightarrow r = \tan x \end{cases}$$

$$I = \int \sec^r x dx = \tan x \sec x - \int \sec x \tan^r x dx =$$

$$\text{جہ } I_1 = \int \sec x \tan^r x dx = \int \sec x (\sec^r x - 1) dx = \int \sec^r x dx - \int \sec x dx \xrightarrow{\text{جائزہ دینا}}$$

$$\int \sec^r x dx = \tan x \sec x - \int \sec^r x dx + \int \sec x dx = \int \sec^r x dx = \frac{\tan x \sec x}{r} + \frac{1}{r} \ln|\sec x + \tan x|$$


---

$$\textcircled{10} \int \tan^r x \sec^r x dx = \int (\sec^r x - 1) \sec^r x dx = \int \sec^{\Delta} x dx - \int \sec^r x dx \quad \textcircled{1}$$

$$\text{جہ } I_1 = \int \sec^{\Delta} x dx = \begin{cases} \sec^r x dx = dr \rightarrow r = \tan x \\ u = \sec^r x \rightarrow du = r \sec^r x \tan x dx \end{cases} \quad \int \sec^{\Delta} x dx = \sec^r x \tan x - r \int \tan^r x \sec^r x dx$$

$$\text{جہ } I_r = \int \sec^r x dx = \frac{\tan x \sec x}{r} + \frac{1}{r} \ln|\sec x + \tan x|$$

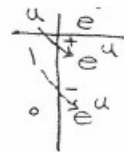
$$\textcircled{1} \rightarrow I_r, I_1 \text{ جائزہ دینا}$$

$$\int \tan^r x \sec^r x dx = \sec^r x \tan x - r \int \tan^r x \sec^r x dx - \frac{\tan x \sec x}{r} - \frac{1}{r} \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \tan^r x \sec^r x dx = \frac{1}{r} \sec^r x \tan x - \frac{1}{r} \tan x \sec x - \frac{1}{r} \ln|\sec x + \tan x| + C$$


---

$$\textcircled{11} \int e^{\sqrt{x}} dx = \xrightarrow{\text{1. ابدال}} \begin{cases} \sqrt{x} = u \rightarrow u^2 = x \\ 2u du = dx \end{cases} = 2 \int e^u u du \xrightarrow{\text{2. قاعدة بجزء جزئية}} 2 \left[ u e^u - e^u \right] + C = 2 \left[ e^{\sqrt{x}} \right] [\sqrt{x} - 1] + C$$



$$\textcircled{12} I = \int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx \quad \begin{cases} x dx = dr \rightarrow \frac{x^2}{2} = r \\ u = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \rightarrow du = \frac{-2}{1-x^2} dx \end{cases}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \Rightarrow \text{3. ابدال} \quad I = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1-x^2} dx = \int \frac{1-x^2}{1-x^2} dx - \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$\int \frac{1-x^2}{1-x^2} dx = \int 1 dx = x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \int \left( \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx = -\ln|1-x| + \ln|1+x| + C$$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \ln|1-x| + \ln|1+x| + C$$

$$\textcircled{13} I = \int x \tan^{-1} x dx = \begin{cases} x dx = dr \rightarrow \frac{x^2}{2} = r \\ \tan^{-1} x = u \rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = du \end{cases}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx + C$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \left( x - \tan^{-1} x \right) + C$$

$$\textcircled{14} \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \xrightarrow{\text{1. ابدال}} \sinh^{-1} x$$

$$I = \int \sinh^{-1} x dx \quad \begin{cases} dx = dr \rightarrow x = r \\ \sinh^{-1} x = u \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$$I = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\textcircled{15} I = \int x a^x dx \quad \begin{cases} u = x \\ \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \end{cases} \quad I = \frac{x a^x}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2} + C$$





$$t = \sin^{-1} x \rightarrow I = \frac{\sin^{-1} x}{r} \tan^r(\sin^{-1} x) + \frac{1}{r} \sin^{-1} x \tan^r(\sin^{-1} x) - \frac{1}{r} \tan(\sin^{-1} x) + \frac{1}{r} \sin^{-1} x - \frac{1}{1r} \tan^r(\sin^{-1} x) + C$$


---

$$(19) I = \int \frac{x \cos x}{\sin^r x} dx = \begin{cases} x = u \rightarrow dx = du \\ \frac{\cos x}{\sin^r x} dx = dv \rightarrow v = \frac{-1}{\sin x} \end{cases}$$

$$I = \frac{-x}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{-x}{\sin x} + \ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx = \int \frac{\csc^2 x + \cot x \csc x}{\csc x + \cot x} dx$$

$$\begin{cases} \csc x + \cot x = u \\ (-\csc x \cot x - \csc^2 x) dx = du \end{cases} \quad I_1 = - \int \frac{du}{u} = -\ln|\csc x + \cot x|$$


---

$$(20) \int \cos^r(\ln x) dx \Rightarrow \begin{cases} \ln x = t \rightarrow x = e^t \rightarrow dx = e^t dt \end{cases}$$

$$I = \int \cos^r(t) e^t dt = \int \frac{1 + \cos^r t}{r} e^t dt = \frac{1}{r} \int e^t dt + \frac{1}{r} \int \frac{e^t \cos^r t dt}{I_1}$$

$$I_1 \text{ حل: } (21) \text{ بالترتيب } \rightarrow I = \frac{1}{r} e^t + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} e^t (\cos^r t + r \sin t \cos^{r-1} t) \right] + C$$

$$= \frac{1}{r} x + \frac{1}{r} x [\cos^r(\ln x) + r \sin(r \ln x)] + C$$


---

$$(21) I = \int \sin x \ln(\cos x) dx = \begin{cases} \cos x = t \\ \sin x dx = dt \end{cases} \quad I = - \int \ln t dt = \text{تجزئة} \rightarrow$$

$$- [t \ln t - t] + C = -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$$


---

$$(22) I = \int \frac{\cot^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2t dt \Rightarrow I = 2 \int \cot^{-1} t dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot^{-1} t = u \rightarrow du = \frac{-dt}{1+t^2} \\ dt = dr \rightarrow t = r \end{cases} \quad I = 2 \left[ t \cot^{-1} t + \int \frac{t dt}{1+t^2} \right] = 2t \cot^{-1} t + \ln|1+t^2| + C$$

$$= 2\sqrt{x} \cot^{-1} \sqrt{x} + \ln|1+x| + C$$

$$(22) I = \int x^r e^{x^r} dx = \begin{cases} x^r = t \rightarrow r x dx = dt \\ x^r = t \end{cases} \quad I = \frac{1}{r} \int t e^t dt =$$

$$I = \frac{1}{r} [t e^t - e^t] + C \rightarrow I = \frac{1}{r} e^{x^r} [x^r - 1] + C$$

$$\begin{array}{c|c} t & e^t \\ \hline 1 & e^t \\ 0 & e^t \end{array}$$

$$(23) \int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int e^{-x} \sin x dx \rightarrow (3) \text{ بقدرت}$$

$$(24) I = \int \tan^{-1} x dx = \begin{cases} \tan^{-1} x = u \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{cases}$$

$$I = x \tan^{-1} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

$$(25) \int x \csc x \cot x dx = -x \csc x - \ln |\csc x + \cot x| + C$$

$$\begin{array}{c|c} u=x & dv = \csc x \cot x dx \\ \hline 1 & -\csc x \\ 0 & +\ln |\csc x + \cot x| \end{array}$$

$$(26) I = \int \sec^{-1} \sqrt{x} dx \Rightarrow \sqrt{x} = t \quad x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$$

$$I = \int t \sec^{-1} t dt \quad \begin{cases} t dt = dv \rightarrow v = \frac{t^2}{2} \\ u = \sec^{-1} t \rightarrow du = \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$$

$$I = \left[ \frac{t^2}{2} \sec^{-1} t - \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} \right] = t^2 \sec^{-1} t - \sqrt{t^2-1} + C$$

$$= x \sec^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + C$$

$$(28) I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\begin{cases} u = \arcsin x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \rightarrow v = \sqrt{1-x} \end{cases}$$

$$I = \sqrt{1-x} \arcsin x - \int \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x} \arcsin x + \int \sqrt{1-x} dx + C$$

$$I_1: I_1 = \int \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} = \int (1+x)^{-1/2} dx = -2\sqrt{1+x}$$

$$(29) I = \int \sin(\ln x) dx$$

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \rightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = x \sin(\ln x) - \int \frac{x \cos(\ln x)}{x} dx = x \sin(\ln x) - (x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx)$$

$$2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$I = \int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + C$$

$$I_1 = \int \cos(\ln x) dx \rightarrow \begin{cases} \cos(\ln x) = u \rightarrow du = \frac{-\sin(\ln x)}{x} dx \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x \cos(\ln x) + \int \frac{x \sin(\ln x)}{x} dx$$

$$\textcircled{1} I = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

فرمول های تحویل زیر را اثبات نمایید.

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow I = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$


---

$$\textcircled{2} I = \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

$$\begin{cases} x^n = u \\ \cos x dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = \sin x \end{cases} \rightarrow I = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$


---

$$\textcircled{3} I = \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

$$\begin{cases} (\ln x)^n = u \\ dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx = du \\ x = v \end{cases} \rightarrow I = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$


---

$$\textcircled{4} I = \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$I = \int \tan^2 x \tan^{n-2} x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \underbrace{\int \sec^2 x \tan^{n-2} x dx}_{I_1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$\textcircled{4} I_1: \begin{cases} \tan x = u \\ \sec^2 x dx = du \end{cases} \rightarrow I_1 = \int u^{n-2} du = \frac{u^{n-1}}{n-1} + C = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1}$$

$$\rightarrow I = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$


---

⑤  $I = \int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-1} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$  . که  $n$  عددی صحیح و زوج است

$$I = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx \quad \begin{cases} u = \sec^{n-2} x \\ dv = \sec^2 x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = (n-2) \sec^{n-2} x \tan x dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \tan x \sec^{n-2} x - \int (n-2) \sec^{n-2} x \tan^2 x dx$$

$$\text{و } I_1 : (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx = (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = (n-2) \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x) dx$$

$$I \text{ و } I_1 : I = \int \sec^n x dx = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int \sec^n x dx = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow (n-1) \int \sec^n x dx = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow I = \int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

⑥  $I = \int x^a (\ln x)^n = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx$

( $n$  عدد صحیح مثبت،  $a \neq -1$ )

$$\begin{cases} (\ln x)^n = u \\ x^a dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} dx = du \\ \frac{x^{a+1}}{a+1} = v \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx$$

تجزیه کسر  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  که  $P(x)$  و  $Q(x)$  چند جمله‌ای اند.

نکته 1: قبلاً ملاحظه شد که اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر بیشتر باشد کسری نامنتظاف است و در این حالت به صورت کسر را به مخرج آن تقسیم

می‌کنیم تا کسری منتظاف به دست آید (کسر منتظاف = درجه صورت کمتر از درجه مخرج کسر باشد)

نکته 2: به طور کلی با اشتغال گیری از عباراتی به صورت زیر سروکار داریم که درجه  $P(x)$  کمتر از درجه  $Q(x)$  است

① اگر  $Q(x)$  کاملاً تجزیه پذیر باشد در حالت وجود دارد،

الف) عوامل  $Q(x)$  همگی خطی و هیچکدام تکرار نشده‌اند.

مثال: 
$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{(x-1)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

ب) عوامل  $Q(x)$  همگی خطی اند و بعضی از آنها تکرار شده‌اند.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{(ax+b)^n} + \frac{B}{(ax+b)^{n-1}} + \dots + \frac{C}{(ax+b)^1}$$

مثال 
$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x}$$

② اگر در مخرج عاملی وجود داشته باشد که غیر قابل تجزیه باشد (هم درجه 1 و هم درجه 2 و ...) داریم در حالت داریم:

الف) عوامل  $Q(x)$  خطی و درجه دوم اند و هیچکدام از عوامل درجه 2 تکرار نشده‌اند.

مثال 
$$= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

غیر قابل تجزیه

ب) عوامل  $Q(x)$  خطی و درجه دوم اند و بعضی از عوامل درجه دوم تکرار شده‌اند

مثال 
$$\Rightarrow \frac{x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

نکته: به طور کلی در تجزیه کسر درجه صورت از درجه مخرج یک واحد کمتر است.

نکته: تجزیه کسرهایی که به صورت  $\frac{CB+AD}{AB}$  اند به صورت زیر است.

$$\frac{CB+AD}{AB} = \frac{C}{A} + \frac{D}{B}$$

①  $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2} dx$

$\begin{cases} e^x = u \\ du = e^x dx \rightarrow dx = \frac{du}{u} \end{cases}$

$I = \int \frac{(u+1)}{(u^2-u+2)} \times \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u+1}{u(u^2-u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2-u+2} = \frac{Au^2 - Au + 2A + Bu^2 + Cu}{u(u^2-u+2)}$

$(A \neq 0)$  رشته‌دار  $\Rightarrow \frac{u^2(A+B) + u(-A+C) + 2A}{u(u^2-u+2)} =$

$\begin{cases} A+B=0 \\ C-A=1 \\ 2A=1 \end{cases}$  برای به دست آوردن اینها  $\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\therefore \frac{u+1}{u(u^2-u+2)} = \frac{1}{2u} + \frac{-\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}}{u^2-u+2}$

$I = \int \left( \frac{1}{2u} + \frac{-\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}}{u^2-u+2} \right) du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{u-3}{u^2-u+2} du =$  هنگامی که مشتق در صورت و مخرج درجه دوم باشد

$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \frac{2(u-3)}{u^2-u+2} du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{4} \int \frac{2u-1-5}{u^2-u+2} du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} -$

$\frac{1}{4} \int \frac{2u-1}{u^2-u+2} du + \frac{5}{4} \int \frac{du}{u^2-u+2} = \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{4} \ln |u^2-u+2| + \frac{5}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left( \frac{2u-1}{\sqrt{5}} \right) +$

$= \frac{1}{2} \ln e^x - \frac{1}{4} \ln |e^{2x} - e^x + 2| + \frac{5}{2\sqrt{5}} \tan^{-1} \left( \frac{e^x - 1}{\sqrt{5}} \right) + C$

یا  $I_1 = \int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left( \frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2} \right)$

⑦  $\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x^3-1)(x^3+1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$= \frac{Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^2+Dx^2-Cx-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{x^3(A+B+C)+x^2(A-B+D)+x(A+B-C)+A-B-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$\begin{cases} A+B+C=0 & ① \\ A-B+D=0 & ② \\ A+B-C=0 & ③ \\ A-B-D=1 & ④ \end{cases}$

①-② =  $2C=0 \rightarrow C=0$

②-④ =  $2D=-1 \rightarrow D=-\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} ③ & A-B=\frac{1}{2} & A=\frac{1}{2} \\ ① & A+B=0 & B=-\frac{1}{2} \end{cases}$

پس  $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \int \left[ \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1} + \frac{0-\frac{1}{2}}{x^2+1} \right] dx =$

پس جواب مسئله در صفحه بعد  $\leftarrow$

$$= \frac{1}{x} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{x} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{x} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{x} \ln|x-1| - \frac{1}{x} \ln|x+1| - \frac{1}{x} \tan^{-1} x + C$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x} \tan^{-1} x + C$$

ادامه جواب سوال ۲)

$$\textcircled{۳} I = \int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+4x} dx$$

نکته: اگر در صورت و مخرج برابر باشند باز هم صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم

$$\frac{x^2+1}{x^3-5x^2+4x} = 1 + \frac{5x^2-4x+1}{x^3-5x^2+4x} \Rightarrow x^3-5x^2+4x = x(x^2-5x+4) = x(x-2)(x-3)$$

$$I = \int \left( 1 + \frac{5x^2-4x+1}{x(x-2)(x-3)} \right) dx$$

$$\frac{5x^2-4x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\begin{cases} A = 1/4 \\ B = -9/4 \\ C = 1/4 \end{cases}$$

$$I = \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{9}{4} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x + \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{9}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x-3| + C$$

$$\textcircled{۴} I = \int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} dx \rightarrow \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = 1/3 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$I = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

$$\textcircled{۵} I = \int \frac{(x^2-2x-2)dx}{(x-1)(x^2+2x+2)} \Rightarrow \frac{x^2-2x-2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\begin{cases} A = 9/5 \\ B = 4/5 \\ C = -1/5 \end{cases}$$

$$I = \frac{9}{5} \int \frac{x dx}{x^2+2x+2} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-1} =$$

حسن پور

برای محاسبه  $I_1$  مشاهده می‌شود که مشتق مخرج  $2(x+1)dx$  برابر است با  $2x+2$  در  $I_1$  عدد یک را کم می‌کنیم و سپس  $2x+2$  ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$I_1 = \int \frac{x dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)-1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1) dx}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2} \int \frac{1 dx}{x^2+2x+2}$$

$$I = \frac{9}{5} \times \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1) dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2+2x+2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-1} \quad (36)$$



$$I = \frac{q}{\Delta} \times \frac{1}{r} \int \frac{r(x+1) dx}{x^r + rx + r} - \frac{r}{\Delta} \int \frac{dx}{\underbrace{x^r + rx + r}_{I_1}} - \frac{r}{\Delta} \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\text{حل } I_1 = \int \frac{dx}{x^r + rx + r} = \int \frac{dx}{(x+1)^r + 1} = \tan^{-1}(x+1)$$

$$I = \frac{q}{10} \ln|x^r + rx + r| - \frac{r}{\Delta} \tan^{-1}(x+1) - \frac{r}{\Delta} \ln|x-1| + C$$

⑨  $\int \frac{x^r + rx^r}{x^r - 1} dx$  قسم اول بر قسمت دوم  $\frac{x^r + rx^r}{x^r - 1} = x + \frac{rx^r + x}{x^r - 1}$

$$I = \int \left( x + \frac{rx^r + x}{x^r - 1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{(rx^r + x) dx}{x^r - 1}$$

$$\frac{rx^r + x}{x^r - 1} = \frac{rx^r + x}{(x-1)(x^r + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^r + x + 1} \quad \begin{cases} A=+1 \\ B=1 \\ C=+1 \end{cases}$$

$$I = \int x dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{(x+1) dx}{\underbrace{x^r + x + 1}_{I_1}}$$

حل  $I_1 = \frac{(x^r + x + 1)' = (rx + 1) dx}{x^r + x + 1} \rightarrow \frac{1}{r} \int \frac{r(x+1)}{x^r + x + 1} dx = \frac{1}{r} \int \frac{rx+1}{x^r + x + 1} dx + \frac{1}{r} \int \frac{dx}{x^r + x + 1}$

$$I_1 = \frac{1}{r} \int \frac{rx+1}{x^r + x + 1} dx + \frac{1}{r} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{r})^r + \frac{r}{r}} = \frac{1}{r} \ln|x^r + x + 1| + \frac{1}{r} \times \frac{r}{\sqrt{r}} \tan^{-1}\left(\frac{rx+1}{\sqrt{r}}\right) + C$$

$$I = \frac{1}{r} x^r + \ln|x-1| + \frac{1}{r} \ln|x^r + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}\left(\frac{rx+1}{\sqrt{r}}\right) + C$$

⑤  $\int \frac{\sec^r x}{1 + \tan^r x} dx = \int \frac{\sec^r x \sec^r x}{1 + \tan^r x} dx \Rightarrow \begin{cases} \tan x = u \rightarrow du = \sec^2 x dx \\ \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \end{cases}$

$$I = \int \frac{(u^r + 1) du}{1 + u^r} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{u^r + 1}{1 + u^r} = \frac{u^r + 1}{(1+u)(u^r - u + 1)} = \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{u^r - u + 1} =$$

$$= \frac{Au^r - Au + A + Bu + C + Bu^r + Cu}{(1+u)(u^r - u + 1)} \quad \begin{cases} A+B=1 \text{ ①} \\ -A+B+C=0 \text{ ②} \\ A+C=1 \text{ ③} \end{cases} \rightarrow \text{②} - \text{①} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{r}{r} \\ B = \frac{1}{r} \\ C = \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\frac{r}{r}}{1+u} du + \int \frac{\frac{1}{r}u + \frac{1}{r}}{u^r - u + 1} du = \frac{r}{r} \int \frac{du}{u+1} + \frac{1}{r} \int \frac{u+1}{u^r - u + 1} du$$

حل  $I_1 = \int \frac{u+1}{u^r - u + 1} du = \frac{1}{r} \int \frac{ru+r}{u^r - u + 1} du \xrightarrow{\text{قسم اول بر قسمت دوم}} \frac{ru-1}{u^r - u + 1}$

$$= \frac{1}{r} \int \frac{ru-1+r}{u^r - u + 1} du = \frac{1}{r} \int \frac{ru-1}{u^r - u + 1} du + \frac{r}{r} \int \frac{du}{u^r - u + 1} = \frac{1}{r} \int \frac{ru-1}{u^r - u + 1} du + \frac{r}{r} \int \frac{du}{(u-\frac{1}{r})^r + \frac{r}{r}}$$

$$I_1 = \frac{1}{r} \ln|u^r - u + 1| + \frac{r}{r} \frac{r}{\sqrt{r}} \tan^{-1}\left(\frac{ru-1}{\sqrt{r}}\right) + C_1$$

$$I = \frac{r}{r} \ln|u+1| + \frac{1}{r} \ln|u^r - u + 1| + \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}\left(\frac{r-1}{\sqrt{r}}\right) + C$$

ادام جواب سوال ⑦

$$I = \frac{r}{r} \ln|\tan x + 1| + \frac{1}{r} \ln|\tan^r x - \tan x + 1| + \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}\left(\frac{r \tan x - 1}{\sqrt{r}}\right) + C$$

$$\textcircled{A} \int \frac{dx}{x^{r+1}} = \frac{1}{x^{r+1}} \rightarrow x^{r+1} = x^r - rx^r + rx^r + 1$$

$$x^{r+1} = (x^r + 1)^r - rx^r \xrightarrow{\text{تقسیم}} (x^r + 1 + \sqrt{r}x)(x^r + 1 - \sqrt{r}x)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{r+1}} &= \frac{1}{(x^r + \sqrt{r}x + 1)(x^r - \sqrt{r}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^r + \sqrt{r}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^r - \sqrt{r}x + 1} = \\ &= \frac{Ax^r - \sqrt{r}Ax + Ax + Bx^r - \sqrt{r}Bx + B + Cx^r + \sqrt{r}Cx + Cx + Dx^r + \sqrt{r}xD + D}{(x^r + \sqrt{r}x + 1)(x^r - \sqrt{r}x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{ضرب } 2x^r & A + C = 0 \quad \textcircled{1} \rightarrow A = -C \quad (*) \\ \text{ضرب } 2x^r & -\sqrt{r}A + B + \sqrt{r}C + D = 0 \quad \textcircled{2} \\ \text{ضرب } 2x & A - \sqrt{r}B + C + \sqrt{r}D = 0 \quad \textcircled{3} \\ \text{ضرب عدد} & B + D = 1 \quad \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{اضرب (*)} \text{ و (*)} \text{ را در رابطه 2 می آوریم و از آنجا که} \\ \text{ضرب عدد در } D \text{ و } C \text{ نیست پس} \end{aligned} \quad \begin{cases} +\sqrt{r}C + (1-D) + \sqrt{r}C + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{\sqrt{r}} & A = \frac{1}{\sqrt{r}} \\ -C - \sqrt{r}(1-D) + C + \sqrt{r}D = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{r} & B = \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{r}}x + \frac{1}{r}}{x^r + \sqrt{r}x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{\sqrt{r}}x + \frac{1}{r}}{x^r - \sqrt{r}x + 1} dx \xrightarrow{\text{از } \frac{1}{\sqrt{r}} \text{ و } \frac{1}{r} \text{ به صورت } \frac{1}{\sqrt{r}} \text{ درآوریم}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{r}} \int \frac{x + \sqrt{r}}{x^r + \sqrt{r}x + 1} dx - \frac{1}{\sqrt{r}} \int \frac{x - \sqrt{r}}{x^r - \sqrt{r}x + 1} dx \xrightarrow{\text{مشتق فوق را در صورت ظاهر کنیم}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{r}} \int \frac{1}{r} \frac{r(x + \sqrt{r})}{x^r + \sqrt{r}x + 1} dx - \frac{1}{\sqrt{r}} \int \frac{1}{r} \frac{r(x - \sqrt{r})}{x^r - \sqrt{r}x + 1} dx$$

$$I = \frac{1}{r\sqrt{r}} \int \frac{rx + \sqrt{r}}{x^r + \sqrt{r}x + 1} dx + \frac{1}{r\sqrt{r}} \int \frac{\sqrt{r}}{x^r + \sqrt{r}x + 1} dx - \frac{1}{r\sqrt{r}} \int \frac{rx - \sqrt{r}}{x^r - \sqrt{r}x + 1} dx + \frac{1}{r\sqrt{r}} \int \frac{\sqrt{r}}{x^r - \sqrt{r}x + 1} dx$$

$$\text{چون } I_1 = \int \frac{dx}{x^r + \sqrt{r}x + 1} = \int \frac{dx}{(x + \frac{\sqrt{r}}{r})^r + \frac{1}{r}} = \sqrt{r} \tan^{-1}(\sqrt{r}x + 1) + C_1$$

$$\text{چون } I_2 = \int \frac{dx}{x^r - \sqrt{r}x + 1} = \int \frac{dx}{(x - \frac{\sqrt{r}}{r})^r + \frac{1}{r}} = \sqrt{r} \tan^{-1}(\sqrt{r}x - 1) + C_2$$

$$I = \frac{1}{r\sqrt{r}} \ln|x^r + \sqrt{r}x + 1| + \frac{\sqrt{r}}{r} \tan^{-1}(\sqrt{r}x + 1) - \frac{1}{r\sqrt{r}} \ln|x^r - \sqrt{r}x + 1| + \frac{\sqrt{r}}{r} \tan^{-1}(\sqrt{r}x - 1) + C$$

حسن پور

$$④ \int \frac{4-4x-2x^2}{x^4-5x^2+4} dx$$

$$\frac{4-4x-2x^2}{x^4-5x^2+4} = \frac{4-4x-2x^2}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{4-4x-2x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2} \quad \begin{cases} A=2 \\ D=-2 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$I = \int \left( \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+2} - \frac{2}{x-2} \right) dx = 2 \ln|x+1| + \ln|x-1| - \ln|x+2| - 2 \ln|x-2| + C$$

$$I = \ln \left| \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x+2)(x-2)^2} \right| + C$$

نکته خنثی هم: ۱) در تجزیه کسر اگر مجموع ضرایب ضرایب هم نامی صفر باشد  $(x-1)$  می توان حاصل است.

نکته ۲) اگر عددی مثل  $a$  را جایگزین کنیم و مجموع ضرایب هم نامی صفر شود (یعنی صفر کنند)  $(x-a)$  می توان حاصل است.

$$① x^4 - x^3 - 41x^2 + x + 40 = \rightarrow x^4 - x^3 - 40x^2 - x^2 + x + 40$$

$$= x^2(x^2-1) - x(x^2-1) - 40(x^2-1) \Rightarrow (x^2-1)(x^2-x-40) = (x-1)(x+1)(x-10)(x+4)$$

$$⑤ x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1$$

$$= x^2(x^2+1) + x(x^2+1) + (x^2+1) = (x^2+1)(x^2+x+1)$$

① حالت  $\sqrt{a^2 - u^2} \rightarrow a > 0 \quad u = a \sin \theta$

$$\begin{aligned} \int_1^r \begin{cases} u > 0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{r} \\ u < 0 & -\frac{\pi}{r} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \rightarrow du = a \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a \sqrt{\cos^2 \theta} \\ &\xrightarrow[\cos \geq 0]{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta \geq 0} a \cos \theta \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{u}{a}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{پہلے کی جگہ پر}} \theta = \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\textcircled{2} \text{ 速度 } \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{also} \quad u = a \tan \theta$$

$$r \begin{cases} u \geq 0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{r} \\ u < 0 & -\frac{\pi}{r} < \theta < 0 \end{cases} \rightarrow du = a \sec^r \theta d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = a \sqrt{\sec^2 \theta} \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \sec \theta \geq 1 \end{matrix} \rightarrow a \sec \theta$$

$$\tan \theta = \frac{u}{a}, \quad -\frac{\pi}{r} \leq \theta \leq \frac{\pi}{r} \xrightarrow{\text{دائرہ کے مرکز پر}} \theta = \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

(3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 - a^2}}$        $a > 0$        $u = a \sec \theta$

$$\begin{cases} u \geq a & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{r} \\ u \leq -a & \pi \leq \theta \leq \frac{r\pi}{r} \end{cases} \longrightarrow du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$C_{\theta} = \sqrt{u^r - a^r} = \sqrt{a^r \sec^2 \theta - a^r} = a \sqrt{\tan^2 \theta} =$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{r}$        $\pi \leq \theta \leq \frac{r\pi}{r}$        $\tan \theta \geq 0$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{\tan \theta} = \tan \theta$$

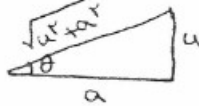
$$\sec \theta = \frac{u}{a} \quad \text{और} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \longrightarrow \theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\sec \theta = \frac{u}{a} \quad \text{--- (3)} \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \rightarrow \theta = \pi - \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

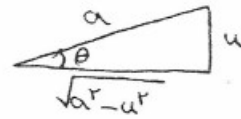
روش های زیر راه مناسبی برای به کار بردن اطلاعات لازم جهت تبدیل استوای متغیرها می باشد.



$$u = a \sec \theta$$



$$u = a \tan \theta$$



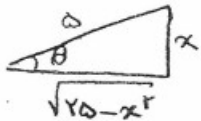
$$u = a \sin \theta$$

$$\textcircled{1} \int \frac{x^r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$x = r \sin \theta \rightarrow dx = r \cos \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{r^r \sin^r \theta \cdot r \cos \theta d\theta}{\sqrt{(r^2 - r^2 \sin^2 \theta)^r}} = \int \frac{r^r \sin^r \theta \cos \theta d\theta}{r^r \cos^r \theta}$$

$$= \int \frac{\sin^r \theta}{\cos^r \theta} d\theta = \int \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^r \theta} d\theta = \int \left( \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) d\theta + C$$

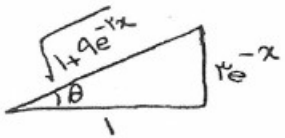


$$\cos \theta = \frac{\text{جایگاه}}{\text{فرض}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

$$I = \int \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \right) dx + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{e^{-x} dx}{(r e^{-x} + 1)^{3/2}} \rightarrow r e^{-x} = \tan \theta \rightarrow -r e^{-x} dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$I = -\frac{1}{r} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\tan^2 \theta + 1)^{3/2}} = -\frac{1}{r} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^{3/2}} = -\frac{1}{r} \int \cos \theta d\theta = -\frac{1}{r} \sin \theta + C$$



$$\sin \theta = \frac{\text{جایگاه}}{\text{فرض}} = \frac{r e^{-x}}{\sqrt{1 + r^2 e^{-2x}}}$$

$$I = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - r^2 e^{-2x}}} + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{\sqrt{14 - e^{2x}}}{e^x} dx \rightarrow e^x = r \sin \theta \rightarrow e^x dx = r \cos \theta d\theta \quad dx = \cot \theta d\theta$$

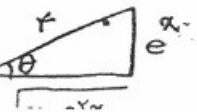
$$I = \int \frac{\sqrt{14 - 14 \sin^2 \theta} \cot \theta d\theta}{r \sin \theta} = \int \frac{\sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = \int \cot^2 \theta d\theta = \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta =$$

$$(\cot \theta + \theta) + C$$

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{14 - e^{2x}}}{e^x}$$

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{e^x}{r} \right)$$

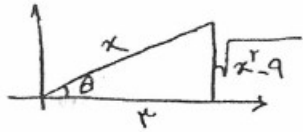
$$I = - \left( \frac{\sqrt{14 - e^{2x}}}{e^x} + \sin^{-1} \frac{e^x}{r} \right) + C$$



$$\textcircled{F} I = \int \frac{dx}{x^r \sqrt{x^r - a}} = \quad x = r \sec \theta \rightarrow dx = r \sec \theta \tan \theta d\theta$$

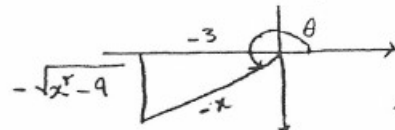
$$I = \int \frac{r \sec \theta \tan \theta d\theta}{r \sec^r \theta \cdot r \tan \theta} = \frac{1}{r} \int \cos^r \theta d\theta = \frac{1}{\Delta F} \int (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{\Delta F} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C$$

①  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$   $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  مثبت ہیں  
① درست جواب آویں



①

②  $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$   $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  منفی ہیں  
② درست جواب آویں



②

①  $\theta = \sec^{-1} \left( \frac{x}{r} \right)$

②  $\theta = \pi - \sec^{-1} \left( \frac{x}{r} \right)$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{\Delta F} \left( \sec^{-1} \frac{x}{r} + \frac{\sqrt{x^r - a}}{x} \cdot \frac{r}{x} \right) + C & x > r \\ \frac{1}{\Delta F} \left( \pi - \sec^{-1} \frac{x}{r} + \frac{\sqrt{x^r - a}}{x} \cdot \frac{r}{x} \right) + C & x < -r \end{cases}$$

$$\textcircled{G} \int \frac{\sqrt{r - x^r}}{x^r} dx \quad x = r \sin \theta \quad dx = r \cos \theta d\theta \quad \begin{cases} x > 0 & 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ x < 0 & -\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\sqrt{r - r \sin^2 \theta} \cdot r \cos \theta d\theta}{r \sin^r \theta} = \frac{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}{\cos \theta \geq 0} \int \cot^r \theta d\theta$$

$$= -\cot \theta - \theta + C = -\frac{\sqrt{r - x^r}}{x} - \sin^{-1} \left( \frac{x}{r} \right) + C$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \sin^{-1} \left( \frac{x}{r} \right)$

$\cot \theta = \frac{\sqrt{r - x^r}}{x}$

①  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

②  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$

$$\textcircled{H} \int \frac{dx}{(x^r - 4x + 11)^{3/2}} \Rightarrow x^r - 2x + 11 = (x - r)^r + a$$

$$I = \int \frac{dx}{((x - r)^r + a)^{3/2}} \rightarrow \begin{cases} x - r = r \tan \theta \\ dx = r \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \quad I = \int \frac{r \sec^2 \theta d\theta}{(a \tan^2 \theta + a)^{3/2}} =$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{d\theta}{\sec \theta} = \frac{1}{a} \sin \theta + C$$

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$

$$\sin \theta = \frac{x - r}{\sqrt{x^r - 4x + 11}}$$

39

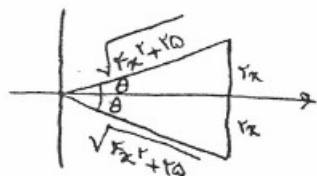
$$I = \frac{1}{a} \frac{x - r}{\sqrt{x^r - 4x + 11}} + C$$

حسن پور

$$\textcircled{v} \int \sqrt{rx^r + r\Delta} dx = r \int \sqrt{x^r + \frac{r\Delta}{r}} \quad x = \frac{\Delta}{r} \tan \theta \rightarrow dx = \frac{\Delta}{r} \sec^2 \theta d\theta$$

$$I = r \int \sqrt{\frac{r\Delta}{r} (\tan^2 \theta + 1)} \times \frac{\Delta}{r} \sec^2 \theta d\theta \xrightarrow[-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}]{\sec \theta \geq 1} = \frac{r\Delta}{r} \int \sec^2 \theta d\theta \xrightarrow{\text{مربع}} =$$

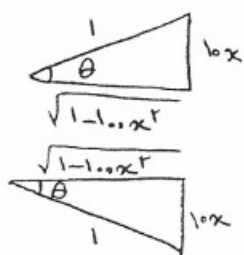
$$\frac{r\Delta}{r} [\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|] + C$$



$$\Rightarrow \frac{r\Delta}{r} \left[ \frac{r}{\Delta} \sqrt{x^r + \frac{r\Delta}{r}} + \frac{rx}{\Delta} + \ln \left| \frac{1}{\Delta} \sqrt{rx^r + r\Delta} + \frac{rx}{\Delta} \right| \right] + C$$

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log x^r}} = \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{1}{100} - x^r}} \quad x = \frac{1}{10} \sin \theta \quad dx = \frac{1}{10} \cos \theta d\theta$$

$$I = \frac{1}{10} \int \frac{\frac{1}{10} \cos \theta d\theta}{\frac{1}{10} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1}{100} \sin^2 \theta}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \xrightarrow[-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}]{\cos \theta \geq 0} = \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int \csc \theta d\theta = -\ln |\csc \theta + \cot \theta| + C$$



$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\log x}$$

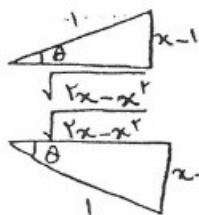
$$\cot \theta = \frac{\sqrt{1 - \log x^r}}{\log x}$$

$$I = -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \log x^r}}{\log x} \right| + C$$

$$\textcircled{1} \int \sqrt{rx - x^r} dx = \int \sqrt{1 - 1 + rx - x^r} dx = \int \sqrt{1 - (x-1)^r} dx \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \times \cos \theta d\theta \xrightarrow[-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}]{\cos \theta \geq 0} = \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{r} \theta + \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + C = \frac{1}{r} \sin^{-1}(x-1) + \frac{1}{r} (x-1) \sqrt{rx - x^r} + C$$



$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$$

$$\sin \theta = (x-1)$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{rx - x^r}}{1}$$

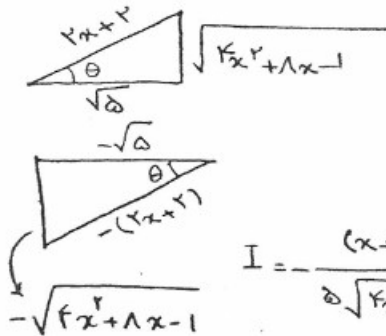
$$\theta = \sin^{-1}(x-1)$$

$$(10) \int \frac{dx}{(rx^2+1)x-1} = \int \frac{dx}{[(rx-r)^2 - a]^{\frac{1}{2}}} = I$$

$$rx+r = \sqrt{a} \sec \theta \rightarrow dx = \frac{\sqrt{a}}{r} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{a}}{r} \sec \theta \tan \theta d\theta}{(a \sec^2 \theta - a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{r} \times \frac{1}{\frac{a}{r}} \int \frac{\sec \theta d\theta}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{10} \int \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}}$$

$$= \frac{1}{10} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{-1}{10 \sin \theta} + C = -\frac{1}{10} \csc \theta + C$$



$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$   
 $\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

در هر دو بازه  $\csc \theta = \frac{rx+r}{\sqrt{rx^2+1}}$

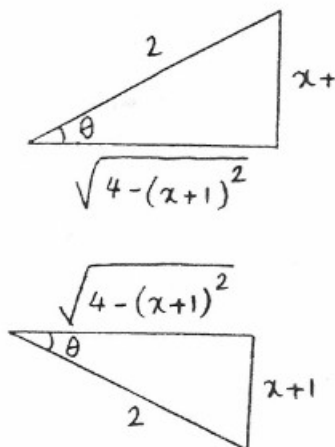
$$I = -\frac{(x+1)}{10\sqrt{rx^2+1}} + C \leftarrow \text{جواب}$$

$$(11) \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$$

$$= \int \sqrt{-(x^2+2x-3)} dx = \int \sqrt{-(x^2+2x+1-4)} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx$$

$$\begin{cases} x+1 = 2 \sin \theta \\ dx = 2 \cos \theta d\theta \end{cases} = 2 \int \sqrt{4-4 \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = 4 \int \cos^2 \theta d\theta = 4 \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\theta + \sin 2\theta + C = 2\theta + 2 \sin \theta \cos \theta + C$$



$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$   
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$

در هر دو بازه  $\begin{cases} \theta = \sin^{-1} \frac{x+1}{2} \\ \sin \theta = \frac{x+1}{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} \end{cases}$

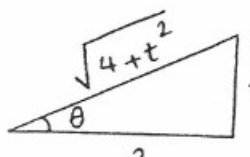
$$= 2 \sin^{-1} \left( \frac{x+1}{2} \right) + \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + C$$



$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} \quad 5+2x+x^2 = 4+(x+1)^2 \rightarrow \begin{cases} x+1=t \\ dx=dt \end{cases}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}} \quad t=2 \tan \theta \rightarrow dt = 2 \sec^2 \theta d\theta \rightarrow \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{(4+4 \tan^2 \theta)^3}}$$

$$= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{4^3} \sqrt{(\sec^2 \theta)^3}} = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\sec \theta} = \frac{1}{4} \int \cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta + C$$



$$\rightarrow \sin \theta = \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} = \frac{1}{4} \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} + C$$

$$= \frac{1}{4} \frac{x+1}{\sqrt{4+(x+1)^2}} = \frac{1}{4} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C$$

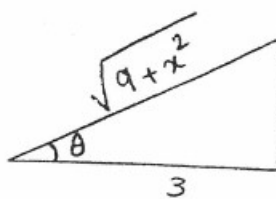
$$(13) \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx \rightarrow \begin{cases} x = 3 \tan \theta \\ dx = 3 \sec^2 \theta d\theta \end{cases} = \int \frac{9 \tan^2 \theta}{\sqrt{9+9 \tan^2 \theta}} \times 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= 9 \int \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = 9 \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta = 9 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta$$

$$= 9 \int \sec^3 \theta d\theta - 9 \int \sec \theta d\theta \quad \begin{array}{l} \text{ایں انٹگرل کو تبدیل} \\ \text{کیا جائے گا} \end{array} \quad \frac{9}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{9}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta|$$

$$\rightarrow -9 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= \frac{9}{2} \tan \theta \sec \theta - \frac{9}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| = \frac{1}{2} x \sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C$$



$$\rightarrow \begin{cases} \tan \theta = \frac{x}{3} \\ \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} \end{cases}$$

انتگرال: توابعی که دارای  $e^u$  و  $a^u$  هستند با فرمول های زیر در دسترس است:

$$\textcircled{1} \int e^u du = e^u + C$$

$$\textcircled{2} \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\textcircled{1} \int (rx+1)e^{x(x+1)} dx \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = x^2 + x \\ u = x^2 + x \\ du = (2x+1)dx \end{cases}$$

$$= \int e^u du = e^u + C = e^{x^2+x} + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx \Rightarrow \begin{cases} \arctan x = u \\ \frac{dx}{1+x^2} = du \end{cases} = \int e^u du = e^{\arctan x} + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{\tan x \sec x}{\cos x} dx = \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \sec x \tan x dx = du \quad \text{sec } x = u \rightarrow \sec x \tan x dx = du$$

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{\sec^{r+1} x}{r+1} + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{x e^{(x^2+x+1)}}{\sqrt{e^{2x+2}}} dx = \int \frac{x e^{(x^2+x+1)}}{e^{x+1}} dx = \int x e^{(x^2+x+1)-(x+1)} dx = \int x e^{x^2} dx$$

$$= \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \quad \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1+e^{rx}}{e^x} dx = \int \frac{1}{e^x} dx + \int \frac{e^{rx}}{e^x} dx = \int e^{-x} dx + \int e^{(r-1)x} dx = -e^{-x} + \frac{e^{(r-1)x}}{r-1} + C$$

$$\textcircled{6} \int e^{rx} e^{rx} dx = \int e^{2rx} dx = \frac{1}{2r} e^{2rx} + C$$

$$\textcircled{v} \int r e^x r e^x e^x dx = \longrightarrow \begin{cases} a^u \cdot b^u = (ab)^u \\ \int r e^x e^x dx \end{cases} \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases}$$

$$= \int r^u du = \frac{r^u}{\ln r} + C = \frac{r e^x}{\ln r} + C$$


---

$$\textcircled{1} \int a^{x \ln x} (\ln x + 1) dx \Rightarrow \begin{cases} x \ln x = u \\ (\ln x + 1) dx = du \end{cases} = \int a^u du = \frac{a^{x \ln x}}{\ln a} + C$$


---

$$\textcircled{9} \int \frac{r^{\ln(1/x)}}{x} dx = \begin{cases} \ln(1/x) = u \\ du = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{x} dx = -du \end{cases} = - \int r^u du = \frac{-r^{\ln(1/x)}}{\ln r} + C$$


---

$$\textcircled{6} \int \frac{e^{rx} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x)^r + 1}{e^x + 1} dx \quad \begin{matrix} \text{w: } (e^x)^r + 1 \\ R = 0 \end{matrix}$$

$$= \int [(e^x)^r - e^x + 1] dx = \frac{e^{rx}}{r} - e^x + x + C$$


---

$$\textcircled{11} \int \frac{e^{rx} dx}{e^x + r} \quad \begin{cases} e^x + r = u \rightarrow e^x = u - r \\ du = e^x dx \end{cases}$$

$$\int \frac{(u-r) du}{u} = \int du - r \int \frac{du}{u} = u - r \ln u + C = e^x + r - r \ln |e^x + r| + C$$


---

$$\textcircled{12} \int \frac{dx}{1+e^x} = \begin{cases} 1+e^x = u \rightarrow e^x = u-1 \\ e^x dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{u-1} \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{u(u-1)} \xrightarrow{\text{partial}} \int \left( \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\ln |1+e^x| + \ln |e^x| + C$$


---

$$\textcircled{13} \int \operatorname{sech} x dx = \left\{ \operatorname{sech} x = \frac{r}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow \int \frac{r dx}{e^x + e^{-x}} \cdot x \frac{e^x}{e^x} = \right.$$

$$I = r \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} \Rightarrow \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} I = r \int \frac{du}{u^2 + 1} = r \tan^{-1}(e^x) + C$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{17} \int \operatorname{csch} r x \, dx &= \int \frac{r}{e^{rx} - e^{-rx}} \, dx \times \frac{e^{rx}}{e^{rx}} = r \int \frac{e^{rx} \, dx}{(e^{rx})^2 - 1} = \begin{cases} e^{rx} = u \\ e^{rx} \, dx = \frac{1}{r} du \end{cases} \\
 \frac{r}{r} \int \frac{du}{u^2 - 1} &\xrightarrow{\text{partial fractions}} \frac{1}{r} \int \left( \frac{1/2}{u-1} + \frac{-1/2}{u+1} \right) du = \frac{1}{r} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{r} \int \frac{du}{u+1} = \\
 \frac{1}{r} \ln(u-1) - \frac{1}{r} \ln(u+1) + C &= \frac{1}{r} \ln(e^{rx} - 1) - \frac{1}{r} \ln(e^{rx} + 1) + C \\
 \ln \left| \frac{\sqrt[r]{e^{rx} - 1}}{\sqrt[r]{e^{rx} + 1}} \right| + C &= \ln \sqrt[r]{\frac{e^{rx} - 1}{e^{rx} + 1}} + C
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 \textcircled{18} \int \frac{r^x}{\sqrt{r^x + 1}} \, dx &\Rightarrow u = r^x \rightarrow du = r^x \ln r \, dx \\
 &= \frac{1}{\ln r} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{1}{\ln r} \sinh^{-1} u + C = \frac{1}{\ln r} \sinh^{-1}(r^x) + C
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 \textcircled{19} \int \frac{e^{rx}}{e^{rx} - 1} \, dx &\Rightarrow u = e^{rx} - 1 \Rightarrow du = r e^{rx} \, dx \\
 &= \frac{1}{r} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{r} \ln u + C = \frac{1}{r} \ln |e^{rx} - 1| + C
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 \textcircled{20} \int \frac{dx}{e^{rx} - e^{-x}} &\rightarrow \int \frac{dx}{e^x(e^{rx} - 1)} = \begin{cases} e^x = u \\ du = e^x \, dx \\ \frac{du}{u} = dx \end{cases} \\
 \int \frac{du}{u^r(u^r - 1)} &\xrightarrow{\text{partial fractions}} \int \left( \frac{1}{u^r - 1} - \frac{1}{u^r} \right) du = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + \frac{1}{u} + C \\
 &= \frac{1}{r} \ln \left| \frac{1-e^x}{1+e^x} \right| + \frac{1}{e^x} + C
 \end{aligned}$$


---

$$\textcircled{21} \int \frac{dx}{1 - \tanh x} = \int \frac{dx}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{1}{r} \int (e^{rx} + 1) du = \frac{1}{r} e^{rx} + \frac{1}{r} x + C$$


---

حل انتگرال هایی که بی تران مکرر نسبت های مثلثاتی را  $u = \sin^{-1} x$  در نظر گرفت مانند

$$\textcircled{1} I = \int \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x \, dx$$

$$\begin{cases} \sin^{-1} x = u \rightarrow x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \end{cases} \rightarrow I = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos^2 u} \times u \times \cos u \, du$$

$\cos u > 0$  فرض

$$I = \int u \cos^2 u \, du = \int \frac{u(1+\cos 2u)}{2} \, du = \frac{1}{2} \int u \, du + \frac{1}{2} \int u \cos 2u \, du$$

جزء جزء

$u$	$\cos 2u$
1	$+\frac{1}{2} \sin 2u$
0	$-\frac{1}{4} \cos 2u$

$$\rightarrow I_1 = \frac{u}{2} \sin 2u + \frac{1}{4} \cos 2u$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{2} \sin 2u + \frac{1}{4} \cos 2u \right) = \frac{1}{4} (\sin^{-1} x)^2 + \frac{1}{4} \sin^{-1} x \sin(2\sin^{-1} x) + \frac{1}{8} \cos(2\sin^{-1} x) + C$$

$$\textcircled{2} I = \int \frac{\sin^{-1} x}{x^2} \, dx \quad \begin{cases} \sin^{-1} x = u \rightarrow x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{u \cos u \, du}{\sin^2 u}$$

$$\rightarrow I = \int u \cot u \csc u \, du \quad \xrightarrow{\text{جزء جزء}}$$

$u$	$\cot u \csc u \, du = dv$
1	$-\csc u$
0	$+\ln \csc u + \cot u $

$$\rightarrow I = -u \csc u - \ln|\csc u + \cot u| + C$$

$$\rightarrow I = -\sin^{-1} x \csc(\sin^{-1} x) - \ln|\csc(\sin^{-1} x) + \cot(\sin^{-1} x)| + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (\cos^{-1} x)^2} \quad \begin{cases} \cos^{-1} x = u \rightarrow x = \cos u \\ dx = -\sin u \, du \end{cases}$$

$$= \int \frac{-\sin u \, du}{\underbrace{\sqrt{1-\cos^2 u}}_{\sin^2 u} u^2} = \int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos^{-1} x} + C$$

$\sin u > 0$  فرض

$$\textcircled{\text{I}} \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arc tan } u + C$$

حل انتگرال هایی با فرمول های زیر:

$$\textcircled{\text{II}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc sin } u + C$$

$$\textcircled{\text{III}} \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} |u| + C$$

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+(x)^2} \rightarrow \begin{cases} x = u \\ dx = \frac{du}{1} \end{cases} = \frac{1}{1} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{1} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{1} \tan^{-1} x + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\sin^r x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^r x dx}{1+(\sin^2 x)} \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = u \\ 2 \sin x \cos x dx = du \\ \sin x = \frac{du}{2 \cos x} \end{cases} = \int \frac{du}{1+u} = \tan^{-1} (\sin^2 x) + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax)^2}} \rightarrow \begin{cases} ax = u \\ dx = \frac{du}{a} \end{cases} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{a} \sin^{-1} u + C = \frac{1}{a} \sin^{-1} (ax) + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2 (1+(\frac{x}{a})^2)} = \begin{cases} \frac{x}{a} = u \\ dx = a du \end{cases} = \frac{1}{a^2} \times a \int \frac{du}{(1+u^2)} = \frac{1}{a} \tan^{-1} (\frac{x}{a}) + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2(1-(\frac{1}{x^2})^2)}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-(\frac{1}{x^2})^2}} = \begin{cases} u = \frac{1}{x^2} \\ du = -\frac{2}{x^3} dx \\ -\frac{du}{2} = \frac{dx}{x^3} \end{cases} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2} \sin^{-1} (\frac{1}{x^2}) + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{x} (1+x)} \xrightarrow{x=(\sqrt{x})^2} \int \frac{dx}{\sqrt{x} (1+(\sqrt{x})^2)} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = u \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = du \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = r du \end{cases} = r \int \frac{du}{1+u^2} = r \tan^{-1} (\sqrt{x}) + C$$

$$\textcircled{v} \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^r}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)^{\frac{1}{r}}}} \xrightarrow{x=(\sqrt{x})^r} \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-(\sqrt{x})^r}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=u \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = r du \end{cases} = r \int \frac{du}{\sqrt{1-u^r}} = r \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - r^2 x^r}} = \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 (1 - (\frac{r}{r} x)^r)}} = \begin{cases} \frac{r}{r} x = u \\ dx = \frac{r}{r} du \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{r^2}} \times \frac{r}{r} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^r}} = \frac{1}{r} \sin^{-1}(\frac{r}{r} x) + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{a^r + b^r x^r} = \int \frac{dx}{a^r (1 + (\frac{b}{a} x)^r)} = \begin{cases} \frac{b}{a} x = u \\ dx = \frac{a}{b} du \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^r} \int \frac{\frac{a}{b} du}{1+u^r} = \frac{1}{ab} \tan^{-1}(\frac{b}{a} x) + C$$

$$\textcircled{10} \int \frac{(rx^r + \Delta) dx}{(x^r + 1)(x^r + F)} \xrightarrow{rx^r + \Delta = (x^r + F) + (x^r + 1)} \int \frac{(x^r + F) + (x^r + 1)}{(x^r + 1)(x^r + F)} dx = \int \frac{dx}{x^r + 1} + \int \frac{dx}{x^r + F} = \tan^{-1} x + \frac{1}{r} \tan^{-1}(\frac{x}{r}) + C$$

$$\textcircled{11} \int \frac{dx}{(1+x^r) \sqrt{1 - (\tan^{-1} x)^r}} = \begin{cases} \tan^{-1} x = u \\ \frac{dx}{1+x^r} = du \end{cases} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^r}} = \sin^{-1}(\tan^{-1} x) + C$$

$$\textcircled{12} \int \frac{\log x^r dx}{\sqrt{a - x^{10}}} \quad \text{نکته: } x^{10} = (x^{\frac{10}{r}})^r \quad \text{موضوعی است که اگر } u \text{ تعریف شود } x^{\frac{10}{r}} \text{ شود در بالا میسر آید.}$$

$$10 \int \frac{x^r dx}{\sqrt{a(1 - (\frac{x^{10}}{r})^r)}} = \begin{cases} \frac{x^{10}}{r} = u \\ \frac{10}{r} x^r dx = du \rightarrow x^r dx = \frac{r}{10} du \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{a}} \times \frac{r}{10} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^r}} = r \sin^{-1}(\frac{x^{10}}{r}) + C$$

$$\textcircled{13} \int \frac{dx}{e^x + 14e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{14}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 14} = \int \frac{e^x dx}{14(1 + (\frac{e^x}{r})^r)} = \begin{cases} \frac{e^x}{r} = u \\ e^x dx = r du \end{cases}$$

$$\frac{r}{14} \int \frac{du}{1+u^r} = \frac{1}{r} \tan^{-1}(\frac{e^x}{r}) + C$$

$$\textcircled{13} \int \frac{dx}{\sqrt{rx-x^2-r}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{r} - (x-\frac{r}{r})^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{r} (1 - r(x-\frac{r}{r})^2)}} = \frac{1}{r} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (rx-r)^2}} =$$

$$\begin{cases} rx-r=u \\ dx=\frac{du}{r} \end{cases} \Rightarrow r \times \frac{1}{r} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(rx-r) + C$$


---

$$\textcircled{13a} \int \frac{r dx}{(x+r) \sqrt{x^2+rx+r(1-1)}} = r \int \frac{dx}{(x+r) \sqrt{(x+r)^2-1}} \quad \begin{cases} x+r=u \\ dx=du \end{cases} = r \int \frac{dx}{u \sqrt{u^2-1}} =$$

$$r \sec^{-1}|x+r| + C$$


---

$$\textcircled{14} \int \frac{dx}{x \sqrt{rx^2-1}} = \int \frac{dx}{x \sqrt{(x)^2-1}} \xrightarrow{x=\frac{1}{r}} = r \int \frac{dx}{rx \sqrt{(rx)^2-1}} = \begin{cases} rx=u \\ dx=\frac{du}{r} \end{cases} = \frac{r}{r} \int \frac{du}{u \sqrt{u^2-1}} =$$

$$\sec^{-1}|rx| + C$$


---

$$\textcircled{15} \int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \tan^{-1}x + \frac{1}{r} \ln|1+x^2| + C$$


---

$$\textcircled{16} \int \frac{\sin x}{\sqrt{r-\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{r(1-(\frac{\cos x}{\sqrt{r}})^2)}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sqrt{r}} = u \\ -\sin x dx = \sqrt{r} du \end{cases} \Rightarrow -\int \frac{\sqrt{r} du}{\sqrt{r} \sqrt{1-u^2}} =$$

$$-\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{r}}\right) + C$$


---

$$\textcircled{17} \int \frac{e^{-x} \sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x - e^{-x}}} = \int \frac{e^{-x} \sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x (1 - \frac{e^{-x}}{e^x})}} = \int \frac{e^{-x} \sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x (1 - e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} =$$

$$\begin{cases} e^{-x} = u \\ e^{-x} dx = -du \end{cases} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1} e^{-x} + C$$


---

$$\textcircled{18} \int \frac{x dx}{\sqrt{r-rx-x^2}} = \int x(r-rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{r} \int -rx(r-rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{r} \int (-rx-r^2)(r-rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{r} \left[ \int (-rx-r^2)(r-rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + r \int (r-rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \right]$$

انتهى

44



$$I_1 \Rightarrow \int (-rx-r)(r-rx-x^r)^{-\frac{1}{r}} dx \rightarrow \begin{cases} r-rx-x^r=u \\ -r-rx=du \end{cases} = \int u^{-\frac{1}{r}} du \Rightarrow$$

اراضہ سوال (۲۰)

$$r\sqrt{u} + C = r\sqrt{r-rx-x^r} + C_1$$

$$I_r = r \int (r-rx-x^r)^{-\frac{1}{r}} dx = r \int \frac{dx}{\sqrt{r-rx-x^r}} = r \int \frac{dx}{\sqrt{r-(x+1)^r}} = r \int \frac{dx}{\sqrt{r(1-(\frac{x+1}{r})^r)}} =$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{r} = u \\ dx = r du \end{cases} = \frac{r}{\sqrt{r}} \int \frac{r du}{\sqrt{1-u^r}} = r \sin^{-1}(\frac{x+1}{r}) + C_r$$

$$\text{جواب آخر} = -\frac{1}{r} [I_1 + I_r] \Rightarrow -\sqrt{r-rx-x^r} - \sin^{-1}(\frac{x+1}{r}) + C$$

$$(21) \int \frac{dx}{x^r + rx + 1^r} = \int \frac{dx}{(x+r)^r + 9} = \frac{1}{r} \tan^{-1}(\frac{x+r}{r}) + C$$

$$(22) \int \frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r+x}} dx \Rightarrow \div X (\text{در صورت}) = \int \frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r+x}} \times \frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r-x}} dx = \int \frac{r-x}{\sqrt{r-x^r}} dx =$$

$$r \int \frac{dx}{\sqrt{r-x^r}} - \int \frac{x}{\sqrt{r-x^r}} = r \int \frac{dx}{\sqrt{r(1-(\frac{x}{r})^r)}} + \frac{1}{r} \int \frac{-rx}{u} (r-x^r)^{-\frac{1}{r}} dx = r \sin^{-1}(\frac{x}{r}) + \sqrt{r-x^r} + C$$

$$(23) \int \frac{rx+r}{x^r + rx + 1^r} dx =$$

معمولاً ہم مسبقاً فیوچر یا در صورت ظاہر نہیں  
ہیں در  $\frac{r}{r}$  ضرب و تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{r}{r} \int \frac{\frac{r}{r}(rx+r)}{x^r + rx + 1^r} dx =$$

$$\frac{r}{r} \int \frac{rx + \frac{r}{r}(r-r)}{x^r + rx + 1^r} = \frac{r}{r} \int \frac{(rx+r) dx}{x^r + rx + 1^r} - \frac{r}{r} \int \frac{\frac{r}{r} dx}{x^r + rx + 1^r} = \frac{r}{r} \int \frac{(rx+r) dx}{x^r + rx + 1^r} - \frac{r}{r} \int \frac{dx}{x^r + rx + 1^r}$$

$$= \frac{r}{r} \ln|x^r + rx + 1^r| - \frac{r}{r} \tan^{-1}(\frac{x+r}{r}) + C$$

حسن پور

$$\textcircled{1} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad a > 0$$

$$\textcircled{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \quad u > a > 0$$

$$\textcircled{3} \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} & |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} & |u| > a \end{cases} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\gamma \delta - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \tanh^{-1} \frac{x}{\delta} + C & |x| < \delta \\ \frac{1}{\delta} \coth^{-1} \frac{x}{\delta} & |x| > \delta \end{cases} = \frac{1}{2\delta} \ln \left| \frac{\delta+x}{\delta-x} \right| + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\gamma e^x - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{e^x dx}{\gamma e^{2x} - 1} \quad I = \frac{1}{\gamma} \int \frac{\gamma e^x dx}{(\gamma e^x)^2 - 1} \quad \begin{cases} u = \gamma e^x \\ du = \gamma e^x dx \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{\gamma} \int \frac{du}{u^2 - 1} = -\frac{1}{\gamma} \int \frac{du}{1 - u^2} = -\frac{1}{\gamma} \begin{cases} \tanh^{-1} u + C & u < 1 \\ \coth^{-1} u + C & u > 1 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{\gamma} \begin{cases} \tanh^{-1} \gamma e^x + C & \gamma e^x < 1 \\ \coth^{-1} \gamma e^x + C & \gamma e^x > 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + rx}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + rx + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{r}{2})^2 - \frac{r^2}{4}}} \quad \begin{cases} x+\frac{r}{2} = u \\ dx = du \end{cases} \rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{r^2}{4}}}$$

$$= \cosh^{-1} u + C = \cosh^{-1} (x + \frac{r}{2}) + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{rx dx}{\sqrt{x^2 + rx + r^2}} = \int \frac{rx dx}{\sqrt{(x+r)^2 - r^2}} = \frac{r}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{(x+r)^2 - r^2}} \quad \begin{cases} x+r = u \\ rx dx = du \end{cases}$$

$$I = \frac{r}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} = \frac{r}{2} \cosh^{-1} \frac{u}{r} = \frac{r}{2} \cosh^{-1} \frac{(x+r)}{r} + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{dx}{\sqrt{a - e^{-rx}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a - \frac{1}{e^{rx}}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{ae^{rx} - 1}{e^{rx}}}} \xrightarrow[e^{rx} > 0]{\text{ضرب}} \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(\sqrt{a} e^x)^2 - 1}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} e^x = u \\ \sqrt{a} e^x dx = du \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cosh^{-1} \frac{u}{1} + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \cosh^{-1} (\sqrt{a} e^x) + C$$


---

نقطة: جابجی اشتغال جایی به صورت

$$u = \sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow \int \frac{f(x)}{\sqrt[n]{ax+b}} dx = \int f(x) \sqrt[n]{(ax+b)} dx$$

$$\sqrt[n]{ax+b} = (ax+b)^{1/n}$$


---

$$\textcircled{1} \int \sqrt{r+x} (x+1)^r dx \quad \begin{cases} u = \sqrt{r+x} \rightarrow u^2 = r+x \rightarrow x = u^2 - r \\ r u du = dx \end{cases}$$

$$= \int u (u^2 - r)^r r u du = r \int u^2 (u^2 - r)^r du = \frac{r}{2} \int (u^2 - r)^r du = \frac{r}{2} \frac{u^{2r+2}}{2r+2} - \frac{r}{2} \frac{u^{2r}}{2r} + C$$

$$= \frac{r}{2} (r+x)^{\frac{2r+2}{2}} - \frac{r}{2} (r+x)^{\frac{2r}{2}} + \frac{r}{2} (r+x)^{\frac{2r}{2}} + C$$


---

$$\textcircled{2} \int (x^r + r)^{\frac{1}{f}} x^{\frac{\delta}{f}} dx \quad \begin{cases} u = (x^r + r)^{\frac{1}{f}} \rightarrow u^f = x^r + r \rightarrow x^r = u^f - r \\ r x^{\frac{r-1}{f}} dx = f u^{f-1} du \rightarrow x^{\frac{r}{f}} dx = \frac{f}{r} u^{f-1} du \end{cases}$$

$$= \int u (u^f - r) \left( \frac{f}{r} \right) u^{f-1} du = \frac{f}{r} \int (u^f - r u^{f-1}) du = \frac{f (x^r + r)^{\frac{f+1}{f}}}{r(f+1)} - \frac{f}{\delta} (x^r + r)^{\frac{\delta}{f}} + C$$


---

الف) اگر انتگرال شامل توان‌های کسری از متغیرهای مثل  $x$  باشد، می‌توان آن را با جابجایی زیر ساده کرد  $x = t^n$  که  $n$  کوچکترینخرج مشترک

نماهاست.

ب) در بعضی از موارد نیز از جابجایی عکس  $x = \frac{1}{t}$  استفاده می‌شود (مثال ۱۰)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x\sqrt{x}} & \quad \left\{ \begin{array}{l} x=t^4 \rightarrow dx=4t^3 dt, \quad t=x^{1/4} \\ \sqrt{x}=t^2 \\ t^2\sqrt{x}=t^4=t^2 \end{array} \right. \\ & = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{1+t^2} = 4 \int \frac{t^5}{t^2+1} dt \Rightarrow \text{صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم} = 4 \int (t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}) dt \\ & = \frac{4}{4} x^{1/4} - \frac{4}{2} x^{3/4} + 2x^{1/2} - 4x^{1/4} + 4 \tan^{-1} x^{1/4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int x^5 \sqrt{x^2+4} dx & \Rightarrow \int (x^2)^2 x \sqrt{x^2+4} dx \Rightarrow \text{بگذاریم } \begin{cases} x^2+4=t \\ 2x dx=dt \end{cases} \\ & = \frac{1}{2} \int (t-4)^2 t^{1/2} dt \Rightarrow \frac{1}{2} \int (t^2 - 8t + 16) t^{1/2} dt = \\ & \frac{1}{2} \int (t^{5/2} - 8t^{3/2} + 16t^{1/2}) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{7} t^{7/2} - 8 \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + 16 \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \right) \\ & = \frac{1}{7} \sqrt{(x^2+4)^7} - \frac{8}{5} \sqrt{(x^2+4)^5} + \frac{16}{3} \sqrt{(x^2+4)^3} + C \\ \text{برعکس، } t &= \sqrt{x^2+4} \rightarrow t^2 = x^2+4 \rightarrow 2t dt = 2x dx \\ \int x^5 \sqrt{x^2+4} dx &= \int (x^2)^2 x \sqrt{x^2+4} dx = \int (t^2-4)^2 t (t dt) = \frac{1}{2} t^7 - \frac{8}{5} t^5 + \frac{16}{3} t^3 + C = \\ & \frac{1}{7} (\sqrt{x^2+4})^7 - \frac{8}{5} (\sqrt{x^2+4})^5 + \frac{16}{3} (\sqrt{x^2+4})^3 + C \end{aligned}$$

⑬  $\int \frac{\Delta \sqrt{x} - r \sqrt{x^r+1}}{\sqrt{x}} dx$  كوكبي من مفر - مستر  $r, \Delta$  ثابت  $x = t^{r_0} \rightarrow dx = r_0 t^{r_0-1} dt$

$$= \int \frac{\Delta t^{r_0} - r t^{r_0 r} + 1}{t^{r_0/2}} (r_0 t^{r_0-1}) dt = r_0 \int \frac{\Delta t^{1-r_0} - r t^{r_0 r-1} + 1}{t^{1/2}} t^{r_0} dt$$

$$= r_0 \int (\Delta t^{r_0} - r t^{r_0 r} + t^{r_0}) dt = r_0 \left( \frac{\Delta}{r_0} t^{r_0+1} - \frac{r}{r_0 r} t^{r_0 r+1} + \frac{1}{r_0+1} t^{r_0+1} \right) + C$$

$$= \Delta \sqrt{x^{r_0+1}} - \frac{r r_0}{r_0 r} \sqrt{x^{r_0 r+1}} + \frac{1}{r_0+1} \sqrt{x^{r_0+1}} + C = \Delta \sqrt{x^{r_0+1}} - \frac{r_0}{r} \sqrt{x^{r_0 r+1}} + \frac{1}{r_0+1} \sqrt{x^{r_0+1}} + C$$


---

⑭  $\int \frac{x}{r+\sqrt{x}} dx \rightarrow \begin{cases} x = t^r \rightarrow dx = r t dt \\ \sqrt{x} = t \end{cases}$

$$\int \frac{t^r (r t dt)}{r+t} = r \int \frac{t^r dt}{r+t} = r \int (t^r - r t + r - \frac{r^2}{t+r}) dt$$

$$= r \frac{t^{r+1}}{r+1} - r t^r + r t - \Delta \ln|t+r| + C = \frac{r}{r+1} \sqrt{x^{r+1}} - r x + r \sqrt{x} - \Delta \ln|\sqrt{x}+r| + C$$


---

⑮  $\int \frac{dx}{r+\sqrt{x+r}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+r} = u \rightarrow \frac{dx}{r+\sqrt{x+r}} = du \rightarrow dx = r u du \end{cases}$

$$= r \int \frac{u du}{r+u} = r \int \frac{u+r-r}{u+r} du = r \int du - r \int \frac{du}{u+r} =$$

$$r u - r \ln|u+r| + C = r \sqrt{x+r} - r \ln|\sqrt{x+r}+r| + C$$


---

⑯  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = u \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = du \rightarrow dx = 2u du \end{cases}$

$$= \int \frac{2u du}{u+1} = 2 \int u(u+1)^{-1/2} du = 2 \int (u+1-1)(u+1)^{-1/2} du =$$

$$2 \int (u+1)^{1/2} du - 2 \int (u+1)^{-1/2} du = \frac{2}{3} (u+1)^{3/2} - \frac{2}{1/2} (u+1)^{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 4 \sqrt{x+1} + C$$

$$\textcircled{v} \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x+f}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+f}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+f}} = \int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+f})}{x-f} dx = \sqrt{f} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\underbrace{x-f}_{I_1}} + \int \frac{\sqrt{x+f}}{\underbrace{x-f}_{I_2}} dx =$$

$$r\sqrt{x} + r\sqrt{f} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-r}{\sqrt{x}+r} \right| + r\sqrt{x+f} + \frac{f}{\sqrt{f}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+f}-r\sqrt{f}}{\sqrt{x+f}+r\sqrt{f}} \right| + C$$

$$\text{وہ } I_1 = \begin{cases} x=t^r \leftrightarrow \sqrt{x}=t \\ dx=r t dt \end{cases} \rightarrow \sqrt{f} \int \frac{t(r t dt)}{t^r - f} = r\sqrt{f} \int \frac{t^r - f + f}{t^r - f} dt$$

$$= r\sqrt{f} \int dt + \sqrt{f} \int \frac{dt}{t^r - f} = r\sqrt{f} t + \sqrt{f} \ln \left| \frac{t-r}{t+r} \right| = r\sqrt{x} + r\sqrt{f} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-r}{\sqrt{x}+r} \right|$$

$$\text{وہ } I_2 \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x+f}}{x-f} dx = \begin{cases} x+f=u \rightarrow x=u-f \rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$= \int \frac{\sqrt{u}}{u-f} du \Rightarrow \begin{cases} u=t^r \rightarrow du=r t dt \end{cases} \Rightarrow r \int \frac{t^r dt}{t^r - f} = r \int \frac{(t^r - f + f) dt}{t^r - f} =$$

$$r t + \frac{f}{\sqrt{f}} \ln \left| \frac{t-r\sqrt{f}}{t+r\sqrt{f}} \right| = r\sqrt{u} + \frac{f}{\sqrt{f}} \ln \left| \frac{\sqrt{u}-r\sqrt{f}}{\sqrt{u}+r\sqrt{f}} \right| = r\sqrt{x+f} + \frac{f}{\sqrt{f}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+f}-r\sqrt{f}}{\sqrt{x+f}+r\sqrt{f}} \right| + C$$

$$\textcircled{1} \int \frac{x^r dx}{\sqrt{ax^r+f}} = \begin{cases} ax^r+f=u \rightarrow x^r = \frac{u-f}{a} \\ \frac{1}{a} dx = du \end{cases}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{a} x^r dx}{\sqrt{ax^r+f}} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{u-f}{a} du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{a} \int \frac{u-f}{\sqrt{u}} du =$$

$$\frac{1}{a} \left( \int \sqrt{u} du - f \int \frac{du}{\sqrt{u}} \right) = \frac{1}{a} u^{\frac{r}{2}} - \frac{f}{a} \sqrt{u} + C = \frac{1}{a} \sqrt{ax^r+f} - \frac{f}{a} \sqrt{ax^r+f} + C$$

$$\textcircled{a} \int \frac{dx}{\sqrt{x}^r \sqrt{x} (1+\sqrt{x})^r} \rightarrow \begin{cases} x=t^r \rightarrow dx=r t^{r-1} dt \\ \sqrt{x}=t^r \\ \frac{r}{\sqrt{x}} = t^r \end{cases}$$

$$I = \int \frac{r t^{r-1} dt}{t^r t^r (1+t^r)^r} = r \int \frac{dt}{(1+t^r)^r} = \begin{cases} t=\tan \theta \rightarrow dt = \sec^2 \theta d\theta \end{cases}$$

$$= r \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(1+\tan^2 \theta)^r} = r \int \frac{d\theta}{\sec^r \theta} = r \int \cos^r \theta d\theta = r \int \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} d\theta$$

$$= r\theta + \frac{r}{2} \sin 2\theta + C = r \tan^{-1} t + \frac{r}{2} \frac{t}{t^2+1} + C = r \tan^{-1} \sqrt[r]{x} + \frac{r}{2} \frac{\sqrt[r]{x}}{1+\sqrt[r]{x}} + C$$

$$⑩ \int \frac{dx}{x^r \sqrt{1+rx+rx^r}} \quad \text{فرض } x = \frac{1}{t} \rightarrow -\frac{dt}{t^2} = dx$$

$$= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^r} \sqrt{1+\frac{r}{t}+\frac{r}{t^r}}} = - \int \frac{t dt}{\sqrt{t^r+rt+r}} = -\frac{1}{r} \int \frac{(rt+r-r) dt}{\sqrt{t^r+rt+r}} =$$

$$-\frac{1}{r} \int \frac{(rt+r) dt}{\sqrt{t^r+rt+r}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^r+rt+r}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I}_1 \\ \text{I}_r \end{array} \right\} = -\frac{1+rx+rx^r}{x} + \sinh^{-1} \left( \frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{r}} \right) + C$$

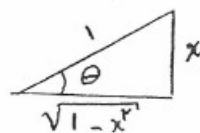
$$\text{أو } I_1 = \begin{cases} t^r+rt+r=u \\ (rt+r)dt=du \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{r} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{t^r+rt+r} + C$$

$$\text{أو } I_r = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{t})^r+r}} \quad \left\{ \begin{array}{l} t+1=u \\ dt=du \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{r} \int \frac{du}{\sqrt{u^r+r}} = \sinh^{-1} \frac{u}{\sqrt{r}} = \sinh^{-1} \frac{t+1}{\sqrt{r}} + C$$

$$⑪ \int \frac{1}{x^r \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} dx \quad \text{أو } x = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \int \frac{(1+x) dx}{x^r \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x^r \sqrt{1-x^2}} + \int \frac{\tilde{dx}}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \end{array} \right. \Rightarrow \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^r \theta \cos \theta} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \int \csc^r \theta + \int \csc \theta d\theta$$

$$= -\cot \theta - \ln |\csc \theta + \cot \theta| + C = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right| + C$$



$$⑫ \int \frac{\sqrt[r]{1+\sqrt[r]{x}}}{\sqrt{x}} = \begin{cases} 1+\sqrt[r]{x}=u \rightarrow dx = r(u-1)^{r-1} du \\ \sqrt{x} = (u-1)^r \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt[r]{u} \times r(u-1)^{r-1} du}{(u-1)^r} = r \int u^{\frac{1}{r}} (u-1)^{r-1} du = r \int (u^{\frac{r}{r}} - u^{\frac{1}{r}}) du = \frac{r}{\frac{r}{r}} u^{\frac{r}{r}} - r u^{\frac{1}{r}} + C$$

$$= \frac{r}{\frac{r}{r}} (1+\sqrt[r]{x})^{\frac{r}{r}} - r (1+\sqrt[r]{x})^{\frac{r}{r}} + C$$

$$⑬ \int \frac{dx}{x^{\frac{r}{r}} - x^{\frac{1}{r}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=t^r \rightarrow dx = rt^{r-1} dt \\ x^{\frac{1}{r}} = t \end{array} \right.$$

$$I = \int \frac{t^{r-1} dt}{t^r - t} = \int \frac{t^{r-1} dt}{t^{r-1}(t-1)} = \int \frac{dt}{t-1} = \ln |t-1| + C$$

$$\int \frac{(t^r + t^r)}{t^r - t} dt = \frac{1}{r} t^r + r \ln |t-1| - r \ln |t+1| + r \tan^{-1} t + C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r} x^{\frac{r}{r}} + r \tan^{-1} x^{\frac{1}{r}} + r \ln \left| \frac{x^{\frac{1}{r}}-1}{x^{\frac{1}{r}}+1} \right| + C$$

$$(14) \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1}+1=u \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}=du \Rightarrow dx=2(u-1)du \end{array} \right.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx = \int \frac{u-2}{u} (2(u-1)du) =$$

$$2 \int \frac{u^2-2u+2}{u} du = 2 \int (u-2+\frac{2}{u}) du = u^2 - 4u + 4 \ln u + C$$

$$(x+1+2\sqrt{x+1}+1) - 4(\sqrt{x+1}+1) + 4 \ln |\sqrt{x+1}+1| + C$$

$$= x - 2(\sqrt{x+1}+1) + 4 \ln |\sqrt{x+1}+1| + C$$

$$(15) \int \frac{\sqrt[2]{2x-3} dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-3=t^6 \\ 2dx=6t^5 dt \end{array} \right. = 3 \int \frac{t^3 t^5 dt}{t^2+1} \xrightarrow{\text{عمل}} \frac{t^8}{t^2+1}$$

$$= 3 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt + 3 \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^3}{3} - 3t + 3 \tan^{-1} t + C$$

$$= 3 \left[ \frac{1}{7} (2x-3)^{7/6} - \frac{1}{5} (2x-3)^{5/6} - \frac{1}{3} (2x-3)^{1/2} - (2x-3)^{1/6} + \tan^{-1} (2x-3)^{1/6} \right] + C$$

$$(16) I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x}=t^3 \\ \sqrt[3]{x}=t^2 \end{array} \right.$$

$$I = 6 \int \frac{(t^6+t^4+t)t^5}{t^6(1+t^2)} dt = 6 \int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2} dt \xrightarrow{\text{عمل}} \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}$$

$$= 6 \int t^3 dt + 6 \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2} t^4 + 6 \tan^{-1} t + C$$

$$= \frac{3}{2} x^{2/3} + 6 \tan^{-1} \sqrt[6]{x} + C$$

حسین پور

نکته: اگر انگشتان به صورت توان های کبری از  $\frac{ax+b}{cx+d}$  باشد از تغییر متغیر  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$  استفاده می کنیم که  $m$  کوچکترین مضرب مشترک است.



$$\textcircled{IV} \quad I = \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t \\ \frac{2-x}{2+x} = t^3 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2-2t^3}{1+t^3} \rightarrow 2-x = \frac{4t^3}{1+t^3} \\ dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2} dt \end{array} \right.$$

$$I = - \int \frac{2(1+t^3)^2 t \times 12t^2}{16x^6(1+t^3)^2} = \frac{-3}{2} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C$$

$$\rightarrow I = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$$


---

$$\textcircled{1A} \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$$

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = \sqrt[4]{\frac{(x-1)^4}{x-1} (x+2)^4 (x+2)} = (x-1)(x+2) \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = t^4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \frac{3}{t^4-1} \\ x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1} \\ dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I = - \int \frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3}{3 \times 3t^4(t^4-1)^2} dt = \frac{-4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$$


---

انگترال مجازی (غیر عادی، ناسره، نامتناهی) :

در تعریف انگترال معین  $\int_a^b f(x) dx$  فرض کردیم که تابع  $f$  در بازه‌ی بسته‌ی  $[a, b]$  معین باشد و حال، در نظر گرفتن یک بازه‌ی نامتناهی (انگترال گیری، تعریف انگترال معین را تعمیم می‌دهیم و می‌گوییم انگترال نامتناهی است.

دو نوع انگترال مجازی بررسی می‌کنیم:

حالت الف) وقتی حدود انگترال گیری بی‌نهایت اند:

① شرط: تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a, +\infty)$  پیوسته است. 
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

② شرط: تابع  $f$  در بازه‌ی  $(-\infty, b]$  پیوسته است. 
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

③ شرط: تابع  $f$  در بازه‌ی  $(-\infty, +\infty)$  پیوسته است. معمولاً  $c=0$  است. 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

\* در صورت وجود حد‌های مورد نظر گوئیم انگترال مجازی همگرا است و در صورتی که حاصل حد نامتناهی باشد و یا وجود نداشته باشد، انگترال مجازی واگرا است.

حالت ب) انگترال مجازی شامل توابع بی‌کران باشد:

اگر  $f(x)$  تابعی پیوسته بر بازه‌ی  $[a, b]$  باشد که وقتی  $x \rightarrow b$ ،  $f$  به بی‌نهایت نزدیک شود و  $\lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx$  وجود و متناهی باشد در این صورت می‌گوییم انگترال مجازی  $\int_a^b f(x) dx$  همگرا است (تا اگر حد موجود نباشد و یا نامتناهی باشد، انگترال مجازی واگرا است. همین حالت برای  $\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx$  نیز برقرار است.

آزمون مقایسه برای انگترال‌های مجازی: اگر  $f$  و  $g$  توابعی پیوسته باشند به طوری که برای  $x > a$

① اگر  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  در این صورت  $\int_a^\infty g(x) dx$  همگرا باشد،  $\int_a^\infty f(x) dx$  نیز همگرا است.

② اگر  $\int_a^\infty f(x) dx$  واگرا باشد،  $\int_a^\infty g(x) dx$  نیز واگرا است.

نکته: در مواردی که محاسبه انتگرال کمی دشوار است استفاده از آزمون مقایسه کار را راحت می کند.

مثال: اگر انتگرال مجازی داده شد، همگرا باشد، مقادیر را باید در غیر این صورت بگوید مگر است.

$$\textcircled{1} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sec^{-1} x \Big|_2^a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \text{مکمل}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} + \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \sin^{-1}(2x-1) \Big|_a^{\frac{1}{2}} + \lim_{b \rightarrow 1^-} \sin^{-1}(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^b \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{مکمل} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta \\ dx = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta \end{cases} \rightarrow \int \frac{\frac{1}{2} \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{1}{4} (1 - \sin^2 \theta)}} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1}(2x-1) + C$$

$$\textcircled{3} \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx \quad \begin{cases} u = \tan^{-1} x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x^2+1} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \tan^{-1} x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{1}{x} \tan^{-1} x + \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x} \tan^{-1} x + \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \tan^{-1} x + \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^a$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \tan^{-1} x + \ln \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_1^a = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{مکمل}$$



$$(12) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+1}{2} \right) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+1}{2} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{مختل}$$

$$\text{حل انتگرال: } \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+1}{2} + C$$

$$(13) \int_0^{\infty} x \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x \sin x dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \lim_{a \rightarrow +\infty} (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^a$$

این حد وجود ندارد  
پس واگر است

$$(14) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-3}} \Big|_2^a = 1 \rightarrow \text{مختل}$$

$$\text{حل انتگرال: } \int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} \begin{cases} x^2-3=u \\ 2x dx=du \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^3}} = \frac{1}{2} \int u^{-3/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{-1}{\sqrt{x^2-3}} + C$$

$$(15) \int_0^{\pi} \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow \pi/2^-} \int_0^a \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx + \lim_{b \rightarrow \pi/2^+} \int_b^{\pi} \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx = \lim_{a \rightarrow \pi/2^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^a + \lim_{b \rightarrow \pi/2^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_b^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} \right) - 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0 \rightarrow \text{مختل}$$

$$\text{حل انتگرال: } \int \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx \begin{cases} \tan x = u \\ (1+\tan^2 x) dx = du \end{cases} \rightarrow \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

$$(16) \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{\ln x dx}{x} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_a^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^b = \infty \rightarrow \text{مختل}$$

$$\textcircled{17} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \tan^{-1} x \Big|_0^b = -\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

پس گھراست

$$\textcircled{18} \int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_0^b = +\infty \rightarrow \text{گھراست}$$

$$\textcircled{19} \int_1^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x dx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{2x dx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}(x^2)) \Big|_1^a = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{8}$$

گھرا

$$\textcircled{20} \int_0^{\infty} \ln x dx = \int_0^1 \ln x dx + \int_1^{\infty} \ln x dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \ln x dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_a^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} (x \ln x - x) \Big|_1^b = (-1 - 0) + \infty = \infty \rightarrow \text{گھرا}$$

(بیحد):  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \times \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln x - 1) = \infty \times \infty = \infty$$

$$\textcircled{21} \int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} \times \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}} dx = \int_0^2 \frac{(x+2) dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^2 \frac{2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2^-} \left[ \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^a \frac{2 dx}{\sqrt{4-x^2}} \right] = \lim_{a \rightarrow 2^-} \left( -\sqrt{4-x^2} + 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^a = \pi + 2 \rightarrow \text{گھرا}$$

$$\textcircled{1} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

مسئله: نوع انتگرال های زیر را تعیین نمایید. (آزمون مقایسه)

$$x^3+1 > \sqrt{x^3+1} \rightarrow \frac{1}{x^3+1} < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\underline{\underline{\text{تجزیه کسر}}}$$

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} - \frac{1}{2(x^2-x+1)} \right) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \right) \Big|_0^b = \infty \rightarrow \text{طایفه}$$

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

$$\textcircled{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < \sin x < 1 \rightarrow \frac{\sin x}{x^{3/2}} < \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\pi/2} x^{-3/2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{-2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_a^{\pi/2} = \infty \rightarrow \text{طایفه}$$

پس در مورد انتگرال داده شده نمی توان نظر داد چون از ماکزیمم تابع بزرگتر و در این تابع کوچکتر نمی توان رسید از روش دیگری استفاده می کنیم

$$\text{if } 0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin x > 0 \quad \text{و می دانیم: } \sin x < x \xrightarrow{x^2 > x} \sin x < x \xrightarrow{\div x\sqrt{x}} \frac{\sin x}{x^{3/2}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} \Big|_0^{\pi/2} = 2 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq \infty \rightarrow \text{هنگامی}$$

پس انتگرال داده شده همگراست.

$$\textcircled{3} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = x+1 \rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x+1) \Big|_1^b = \infty \rightarrow \text{واگرا}$$

پس انتگرال داده شده واگراست.

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$0 < x < 1 \rightarrow x^3 < x^2 \rightarrow -x^3 > -x^2 \rightarrow 1-x^3 > 1-x^2 \rightarrow \sqrt{1-x^3} > \sqrt{1-x^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1} \sin^{-1} x \Big|_0^b = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{هنگامی}$$

پس انتگرال داده شده همگراست.

$$\textcircled{3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{x^2+1}} \quad \circ \langle x < 1 \rightarrow \circ \langle x^2 < 1 \rightarrow 1 < x^2+1 < 2 \rightarrow 1 < \sqrt{x^2+1} < \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x} \sqrt{x^2+1} < \sqrt{2} x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2} x}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ گھراست } \rightarrow \text{ گھراست } I_1$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} \quad \text{if } x \gg 1 \rightarrow x^3 \gg 1 \rightarrow x^3+x \gg x^3 \rightarrow \sqrt{x^3+x} \gg \sqrt{x^3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \ll \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \text{ گھراست } \rightarrow I_2 \text{ گھراست } \rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} \text{ گھراست}$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx}_{I_2} \quad \begin{cases} \circ \langle x < 1 & e^{-x} < e^{-x^2} \\ x > 1 & e^{-x^2} < e^{-x} \end{cases} \quad I_1 \text{ گھراست (تناهی)}$$

$$I_2: \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{e^{-x^2}}{2x} + \int \frac{e^{-x^2}}{2x} dx \right]_1^a \rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ گھراست} \rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ گھراست}$$

$$\text{(Error Function)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{نقطہ:}$$

$$\textcircled{5} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \sin x} \quad \circ \langle x < \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \circ \langle x \sin x < x \rightarrow \frac{1}{x \sin x} > \frac{1}{x} > 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_a^{\pi/2} = \ln \frac{\pi}{2} - \ln a^+ = +\infty \rightarrow \text{دائر است} \xrightarrow{\text{آزمون}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \sin x} \text{ دائر است}$$

$$\textcircled{6} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx}_{I_2} \quad \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} e^x}$$

$$I_1: \circ \langle \frac{1}{\sqrt{x} e^x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \circ \langle x < 1 \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ گھراست } \rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ گھراست}$$

$$I_2: \circ \langle \frac{1}{\sqrt{x} e^x} \leq \frac{1}{e^x} \quad x > 1 \quad \int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ گھراست } \rightarrow \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ گھراست} \rightarrow I \text{ گھراست}$$

حسن پور



$$(9) I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$I_1: 0 < x \leq 1 \rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \rightarrow 1 < x^2+1 \leq 2 \rightarrow 1 < \sqrt{x^2+1} \leq 2 \xrightarrow{x \cdot x} x < x\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}x$$

$$\rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2}x} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \text{ و اگر است } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}x} \text{ چوں}$$

چوں  $I_1$  و اگر است  $I$  نیز و اگر است

$$(10) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\cosh x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x dx}{\cosh x} \quad \frac{x}{\cosh x} = \frac{2x}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{2xe^x}{e^{2x} + 1} \quad \frac{2xe^x}{e^{2x}} > \frac{2xe^x}{e^{2x} + 1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2xe^x}{e^{2x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2xe^{-x} dx \xrightarrow{\text{جزء ب جزء}} -2 \lim_{b \rightarrow \infty} (xe^{-x} + e^{-x}) \Big|_0^b = -2(0-1) = 2 \rightarrow \text{هنگام}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = \infty \times 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{طبق آزمون مقایسه انتگرال مورد نظر نیز همگرا است}$$

$$(11) \int_1^{\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx \quad -1 \leq \sin 2x \leq 1 \xrightarrow{x(-4)} 4 > -4\sin 2x > -4 \xrightarrow{+1} 5 > -4\sin 2x + 1 > -3$$

$$\rightarrow \frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} < \frac{5}{x^3} \quad \int_1^{\infty} \frac{5 dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} 5 \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-5}{2x^2} \Big|_1^b = \frac{-5}{2}(0-1) = \frac{5}{2} \rightarrow \text{هنگام}$$

طبق آزمون مقایسه انتگرال مورد نظر نیز همگرا است

$$(12) \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx \quad \frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^a = \infty \rightarrow \text{و اگر}$$

طبق آزمون مقایسه انتگرال مورد نظر و اگر است

$$(13) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx \quad \frac{\cos x}{x} < \frac{1}{x} \rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \infty \text{ و اگر است} \rightarrow \text{از آنجایی که } \frac{1}{x} \text{ نمی تواند در این } \frac{\cos x}{x} \text{ را تغییر نرود}$$

$$\begin{cases} \cos x dx = dv \\ \frac{1}{x} = u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x = v \\ -\frac{dx}{x^2} = du \end{cases} \rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \Big|_a^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$I_1: 0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < \sin x < 1 \text{ و } \sin x < x \text{ و } x < x^2 \rightarrow \sin x < x^2 \xrightarrow{\div x^2} \frac{\sin x}{x^2} < 1$$

$$\rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_a^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx = \frac{2}{\pi} - 1 + \frac{\pi}{2} = \text{عدد} \rightarrow \text{همگرا است}$$

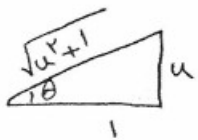
$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = I \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{e^x})^2+1}} \quad * \rightarrow \sqrt{e^x}=u \rightarrow e^x=u^2 \quad e^x dx = 2u du \rightarrow$$

$$dx = \frac{2}{u} du$$

$$I = \int \frac{2u du}{u \sqrt{u^2+1}} \quad u = \tan \theta \quad du = \sec^2 \theta d\theta \quad u \geq 0$$

$$I = 2 \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta \sqrt{\sec^2 \theta}} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \sec \theta > 1 \rightarrow I = 2 \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta \sec \theta}$$

$$I = 2 \int \frac{1}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = 2 \int \csc \theta = -2 \ln |\csc \theta + \cot \theta| + C$$



$$I = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+1}}{u} + \frac{1}{u} \right| + C = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1} + 1}{\sqrt{e^x}} \right| + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\sin^r x dx}{1+\sin^r x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{r} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{r-\cos^2 x} dx = I$$

$$u = \tan x \quad \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{r-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{u^2 du}{(u^2+1)(ru^2+1)}$$

$$= \int \left( \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{ru^2+1} \right) du = \tan^{-1} u - \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}(\sqrt{r}u) + C =$$

$$\tan^{-1}(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}(\sqrt{r} \tan x) + C = x - \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}(\sqrt{r} \tan x) + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sin x \cos^r x} \times \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x (r \cos^2 x - 1)} = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)(r \cos^2 x - 1)} = \begin{cases} \cos x = u \\ \sin x dx = -du \end{cases}$$

$$= - \int \frac{du}{(1-u^2)(ru^2-1)} \Rightarrow \text{تجزیه کسر} = \int \left( \frac{-1}{r(1+u)} + \frac{1}{r(u-1)} + \frac{1}{\sqrt{r}u+1} - \frac{1}{\sqrt{r}u-1} \right) du$$

$$\frac{1}{r} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{r}u+1}{\sqrt{r}u-1} \right| + C = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{1 + \cos x} \right| + \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{r} \cos x + 1}{\sqrt{r} \cos x - 1} \right| + C$$

$$\textcircled{F} \int \operatorname{csch} x = \int \frac{r dx}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{x e^x}{e^x} = r \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases}$$

$$= r \int \frac{du}{u^2 - 1} = r x \frac{1}{r} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$$


---

$$\textcircled{G} \int e^{rx} \sqrt{e^x + r} dx = \begin{cases} u = e^x + r \rightarrow e^x = u - r \\ du = e^x dx \end{cases}$$

$$I = \int e^x \cdot e^x \sqrt{e^x + r} dx = \int (u - r) \sqrt{u} du = \int u^{\frac{3}{2}} du - r \int u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$\frac{r}{2} u^{\frac{3}{2}} - r x \frac{r}{r} u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{r}{2} r \sqrt{(e^x + r)^3} - \frac{r}{r} r \sqrt{(e^x + r)^2} + C$$


---

$$\textcircled{H} I = \int (\sin^{-1} x)^r dx = \begin{cases} u = (\sin^{-1} x)^r \\ dv = dx \end{cases} \begin{cases} du = \frac{r \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ x = v \end{cases}$$

$$I = x (\sin^{-1} x)^r - r \int \frac{x \sin^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x (\sin^{-1} x)^r + r \sin^{-1} x \sqrt{1-x^2} - r x + C$$

$$\text{so } I_1 = \begin{cases} \sin^{-1} x = u \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv \rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases} \rightarrow I_1 = -\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2} + \int dx$$

$$I_1 = -\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2} + x$$


---

$$\textcircled{I} \int \frac{\sin^r x}{\sin^r x + \cos^r x} dx = r \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^r x + \cos^r x} \quad \text{مخرج } \cos^r x \text{ تقسم } \sin^r x$$

$$I = r \int \frac{\tan x \sec^r x}{1 + \tan^r x} dx = \begin{cases} \tan x = u \\ \sec^r x dx = du \end{cases}$$

$$I = r \int \frac{u du}{1 + u^r} = \int \frac{r u du}{1 + (u^r)^r} = \begin{cases} u^r = t \\ r u du = dt \end{cases}$$

$$I = \int \frac{dt}{1+t^r} = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1} u^r + C = \tan^{-1} (\tan^r x) + C$$


---

$$\textcircled{J} \int \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \int \sqrt{\frac{\sin^2 x}{r} + \frac{\cos^2 x}{r}} - r \sin \frac{x}{r} \cos \frac{x}{r} dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin \frac{x}{r} - \cos \frac{x}{r})^2} dx = \int \left| \sin \frac{x}{r} - \cos \frac{x}{r} \right| dx = r \left| \cos \frac{x}{r} + \sin \frac{x}{r} \right| + C$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \int \frac{x^r-1}{x^r-1} dx &= \int \frac{(x^r-1)(x^r+1) dx}{(x^r-1)(x^r+x^r+1)} = \int \frac{(x^r+1) dx}{x^r+x^r+1} \\ &= \int \frac{(x^r+1) dx}{(x^r+x+1)(x^r-x+1)} \xrightarrow{\text{Partial Fractions}} = \frac{1}{r} \int \left( \frac{1}{x^r+x+1} + \frac{1}{x^r-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{r} \int \left[ \frac{1}{\left(x+\frac{1}{r}\right)^r + \frac{r}{r}} + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{r}\right)^r + \frac{r}{r}} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1} \left( \frac{rx+1}{\sqrt{r}} \right) + \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1} \left( \frac{rx-1}{\sqrt{r}} \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &\Rightarrow \begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow v = 2\sqrt{x} \end{cases} \\ I &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{11} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x+1}-1} dx = \int (\sqrt{x+1}-1) dx \\ I &= \int (\sqrt{x+1}-1) dx = \frac{r}{r} (x+1)^{\frac{r}{r}} - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{12} I &= \int \frac{x^r+1}{x^r-1} dx \Rightarrow \frac{x^r+1}{x^r-1} = \frac{x^r+1}{(x^r-1)(x^r+1)} = \frac{(x^r+1)}{(x-1)(x^r+x+1)(x+1)(x^r-x+1)} \\ &= \frac{1}{r(x+1)} + \frac{rx+1}{r(x^r+x+1)} - \frac{1}{r(x+1)} + \frac{rx-1}{r(x^r-x+1)} \\ I &= \int \frac{x^r+1}{x^r-1} = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{r} \ln \left| \frac{x^r-x+1}{x^r+x+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{13} \int \frac{x^{11}}{(x^2+1)^r} dx &= \int \frac{x^r x^1}{(x^2+1)^r} dx = \int \frac{x^r}{(x^2+1)^r} dx = \int \frac{u^{\frac{r}{2}}}{(u^2+1)^r} du \quad \begin{cases} x^2 = u \\ 2x dx = du \end{cases} \\ I &= \frac{1}{r} \int \frac{u^{\frac{r}{2}} du}{(u^2+1)^r} \xrightarrow{\text{Partial Fractions}} \Rightarrow \frac{1}{r} \int \frac{1}{u^r+1} - \frac{1}{(u^r+1)^r} du \quad \begin{cases} u = \tan \theta \\ du = \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \\ I_1 &= \int \frac{du}{(u^r+1)^r} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^r} = \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{r} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{r} \theta + \frac{1}{r} \sin 2\theta + C \\ \frac{1}{r} \tan^{-1} u + \frac{1}{r} \frac{u}{u^r+1} &= \frac{1}{r} \tan^{-1} u - \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \tan^{-1} u + \frac{1}{r} \frac{u}{u^r+1} \right) + C \\ &= \frac{1}{r} \tan^{-1}(x^r) - \frac{1}{r} \frac{x^r}{x^r+1} + C \end{aligned}$$

$$(17) \int x \sqrt{rx+r} dx = \begin{cases} rx+r=u \rightarrow rdx=du \\ x=\frac{u-r}{r} \end{cases}$$

$$= \int \frac{(u-r)}{r} \sqrt{u} \frac{du}{r} = \frac{1}{r} \int u^{\frac{r}{2}} du - \frac{r}{r} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{10} u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{r} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{10} \sqrt{(rx+1)^5} - \frac{1}{r} \sqrt{(rx+1)^3} + C$$


---

$$(18) \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} \rightarrow \sqrt{\tan x} = u \rightarrow u^r = \tan x \rightarrow r u du = \sec^2 x dx$$

$$\frac{1+\tan^2 x = \sec^2 x}{1+u^2} \frac{r u du}{1+u^2} = dx$$

$$I = \int \frac{r u du}{(1+u^2) u} = \int \frac{r du}{1+u^2} \xrightarrow{\text{integration}} \frac{1}{r\sqrt{r}} \ln \frac{x^r + x\sqrt{r} + 1}{x^r - x\sqrt{r} + 1} + \frac{1}{\sqrt{r}} [\tan^{-1}(x\sqrt{r} + 1) + \tan^{-1}(x\sqrt{r} - 1)] + C$$


---

$$(19) \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin^2 x} dx$$

$$\begin{cases} \tan x = u \rightarrow x = \tan^{-1} u \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\sqrt{u}}{\frac{ru}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{\sqrt{u} \times \frac{du}{1+u^2}}{\frac{ru}{1+u^2}} \Rightarrow \int \frac{du}{r\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{\tan x} + C$$


---

$$(20) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \quad \begin{cases} \sqrt{x}+1=u \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = r du \end{cases}$$

$$= \int \frac{r du}{u} = r \ln u + C = r \ln(\sqrt{x} + 1) + C$$


---

$$(21) \int \frac{dx}{\sinh x \cosh x} = \int \frac{(\cosh^2 x - \sinh^2 x) dx}{\sinh x \cosh x} =$$

$$\int (\coth x - \tanh x) dx = \ln |\sinh x| - \ln |\cosh x| + C$$

$$\textcircled{19} \int \operatorname{sech}(\ln x) dx = \int \frac{r}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} dx$$

$$= r \int \frac{dx}{x + \frac{1}{x}} \times \frac{x}{x} = r \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \ln|x^2 + 1| + C$$


---

$$\textcircled{20} \int \tan^{-1} \sqrt{x} dx = \left\{ \sqrt{x} = t \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \rightarrow dx = 2t dt \right.$$

$$I = \int 2t \tan^{-1} t dt \quad \begin{cases} \tan^{-1} t = u \rightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ 2t dt = dv \rightarrow t^2 = v \end{cases}$$

$$I = t^2 \tan^{-1} t - \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = t^2 \tan^{-1} t - t + \tan^{-1} t + C$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{x} (x+1) - \sqrt{x} + C$$


---

$$\textcircled{21} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \Rightarrow \sqrt{e^x - 1} = u \rightarrow u^2 = e^x - 1 \rightarrow 2u du = e^x dx$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{2u du}{u(u^2 + 1)} = 2 \tan^{-1} u + C = 2 \tan^{-1} (\sqrt{e^x - 1}) + C$$


---

$$\textcircled{22} \int \frac{dx}{x + x^{\frac{1}{r}}} = \int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[r]{x})} \Rightarrow x = t^r \Rightarrow dx = r t^{r-1} dt$$

$$I = \int \frac{r t^{r-1} dt}{t^r (1+t)} = r \int \frac{dt}{t(t+1)} = r \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= r [\ln t - \ln(t+1)] + C = r \ln \left( \frac{\sqrt[r]{x}}{\sqrt[r]{x} + 1} \right) + C$$


---

$$\textcircled{23} \int \frac{dx}{\sin x - r \cos x} = \int \frac{dx}{\sin x - \frac{r}{\sin x}} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x - r} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x - r} = - \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$$

$$\begin{cases} \cos x = u \\ \sin x dx = du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1} u + C \Rightarrow \tan^{-1} (\cos x) + C$$

$$(2F) \int \frac{\sin^{-1} \sqrt{rx}}{\sqrt{1-rx}} dx = \int \frac{\sin^{-1} \sqrt{rx} dx}{\sqrt{1-(\sqrt{rx})^2}}$$

$$\sqrt{r} \sqrt{x} = \sin \theta \rightarrow \frac{\sqrt{r} dx}{\sqrt{x}} = \cos \theta d\theta \xrightarrow{\text{we}} dx = \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

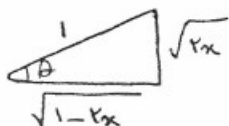
$$I = \int \frac{\sin^{-1}(\sin \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos^2 \theta} = \int \theta \sin \theta d\theta$$

$$u = \theta \quad \sin \theta = \sqrt{rx}$$

$$1 + x = \cos \theta$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\int \theta \sin \theta d\theta = -\theta \cos \theta + \sin \theta + C$$



$$\theta = \sin^{-1}(\sqrt{rx})$$

$$\sin \theta = \sqrt{rx}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1-rx}$$

$$I = -\sin^{-1}(\sqrt{rx}) \sqrt{1-rx} + \sqrt{rx} + C$$

$$(2D) \int \frac{x^r}{\sqrt{x^r+x+1}} dx \Rightarrow \int \frac{x^r+x+1-x-1}{\sqrt{x^r+x+1}} dx = \int (\sqrt{x^r+x+1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^r+x+1}}) dx$$

$$= \int \sqrt{x^r+x+1} dx - \frac{1}{r} \int \frac{rx+1}{\sqrt{x^r+x+1}} dx - \frac{1}{r} \int \frac{dx}{\sqrt{x^r+x+1}} = I_1 + I_r + I_r' + C$$

$$\text{Let } I_1 \Rightarrow \int \sqrt{(x+\frac{1}{r})^r + \frac{r}{r}} dx \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r} \tan \theta \\ dx = \frac{\sqrt{r}}{r} \sec^2 \theta d\theta \end{cases}$$

$$I_r = \int \sqrt{\frac{r}{r} \tan^2 \theta + \frac{r}{r}} \times \frac{\sqrt{r}}{r} \sec^2 \theta d\theta = \frac{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta} \rightarrow$$

$$= \frac{r}{r} \int \sec^2 \theta d\theta \xrightarrow{\text{we use the formula}} = \frac{r}{r} \tan \theta \sec \theta + \frac{r}{r} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_1$$

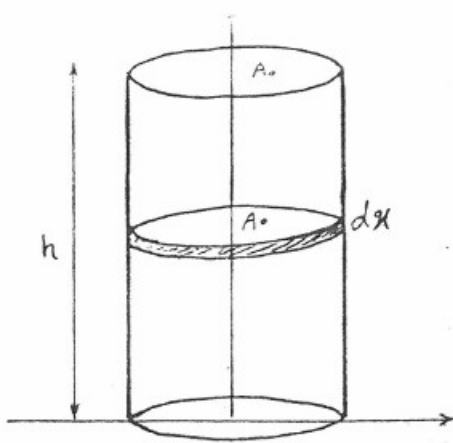
$$= \frac{r}{\sqrt{r}} (rx+1) \times \frac{\sqrt{x^r+x+1}}{\frac{\sqrt{r}}{r}} + \frac{r}{r} \ln \left| \frac{r\sqrt{x^r+x+1}}{\sqrt{r}} + \frac{rx+1}{\sqrt{r}} \right| + C_1$$

$$\text{Let } I_r' = -\frac{1}{r} \int \frac{rx+1}{\sqrt{x^r+x+1}} \Rightarrow \begin{cases} x^r+x+1 = u \\ (rx+1)dx = du \end{cases} = -\sqrt{x^r+x+1} + C_r$$

$$\text{Let } I_r' = -\frac{1}{r} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{r})^r + \frac{r}{r}}} \begin{cases} x+\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r} \tan \theta \\ dx = \frac{\sqrt{r}}{r} \sec^2 \theta d\theta \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{r} \int \frac{\frac{\sqrt{r}}{r} \sec^2 \theta d\theta}{\frac{\sqrt{r}}{r} \sqrt{\sec^2 \theta}} = -\frac{1}{r} \int \sec \theta d\theta = -\frac{1}{r} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_r$$

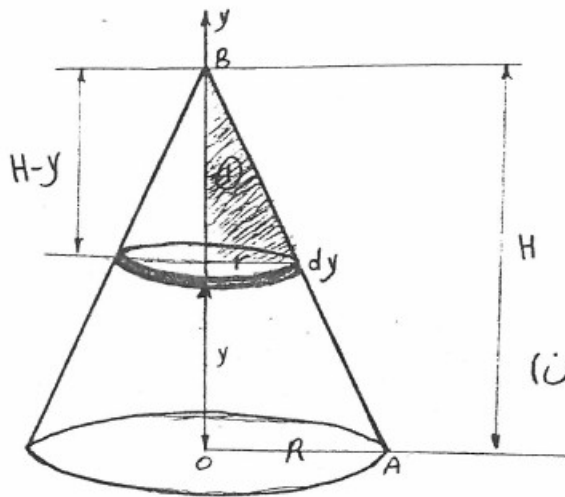
$$= -\frac{1}{r} \ln \left| \frac{r\sqrt{x^r+x+1}}{\sqrt{r}} + \frac{rx+1}{\sqrt{r}} \right| + C_r$$



روش مقطع عرضی (برش دادن):

$$V = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h (\pi r^2) dx = \pi r^2 h$$

نمونه: حجم مخروط کامل:



$$V = \int_0^H A(y) dy$$

باید رابطه مساحت، ابعاد را بر حسب y بدست آوریم

$$(مساحت ابر): A = \pi r^2$$

از شباهت مثلث OAB داریم:

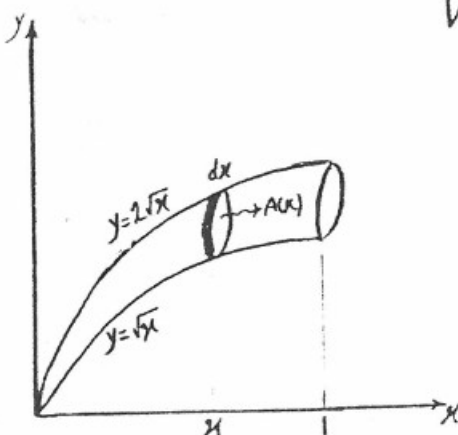
$$\frac{r}{H-y} = \frac{R}{H} \Rightarrow r = \frac{R(H-y)}{H} \Rightarrow A = \frac{\pi R^2 (H-y)^2}{H^2}$$

$$V = \int_0^H \frac{\pi R^2 (H-y)^2}{H^2} dy \Rightarrow V = \frac{-\pi R^2}{H^2} \int_0^H (H-y)^2 dy = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2}{H^2} (H-y)^3 \Big|_H^0$$

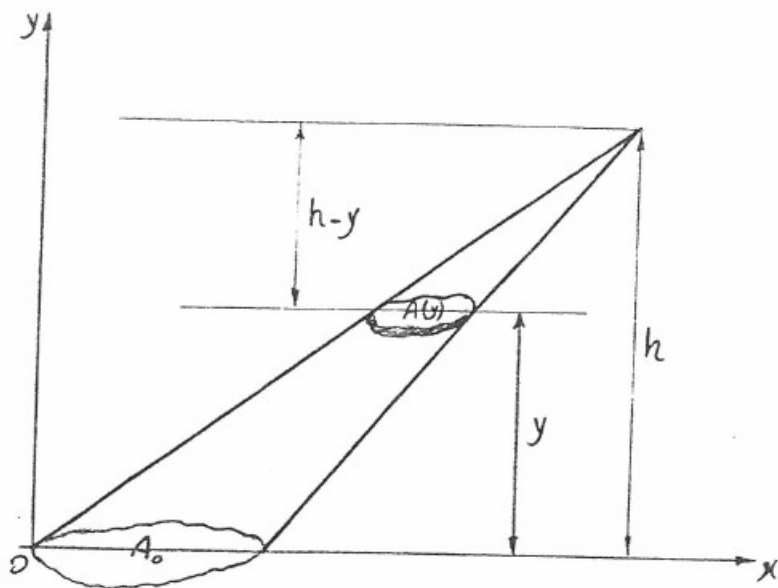
$$= \boxed{\frac{1}{3} \pi R^2 H}$$

$$V = \int_0^1 A(x) dx \quad \text{مساحت ابر: } \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 \pi \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 dx \Rightarrow V = \pi \frac{x}{8} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$







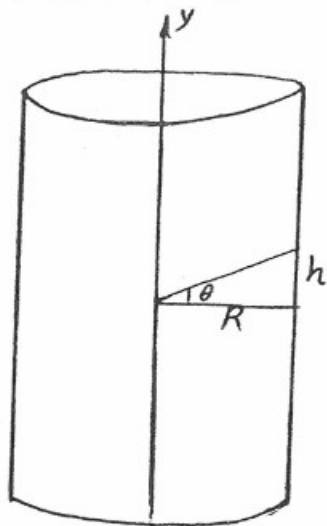
$$V = \int_0^h A(y) dy$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow \frac{A(y)}{A_0} = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \Rightarrow A(y) = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 A_0$$

$$\Rightarrow A(y) = \left(\frac{h-y}{h}\right)^2 A_0 \Rightarrow V = \int_0^h \left(\frac{h-y}{h}\right)^2 A_0 dy \Rightarrow V_0 = \frac{A_0}{3h^2} (h-y)^3 \Big|_h^0$$

$$\boxed{V_0 = \frac{A_0 H}{3}}$$

از استوانه مستطیلی به شعاع  $R$  به وسیله دو منته گوه مجده ای می رسم. یکی از منتهات  
بر محور استوانه عمود است و دیگری با ادلی زاویه حاده  $\alpha$  می سازد و آن را در سر استوانه قطع  
می کند. حجم گوه را بیابید.

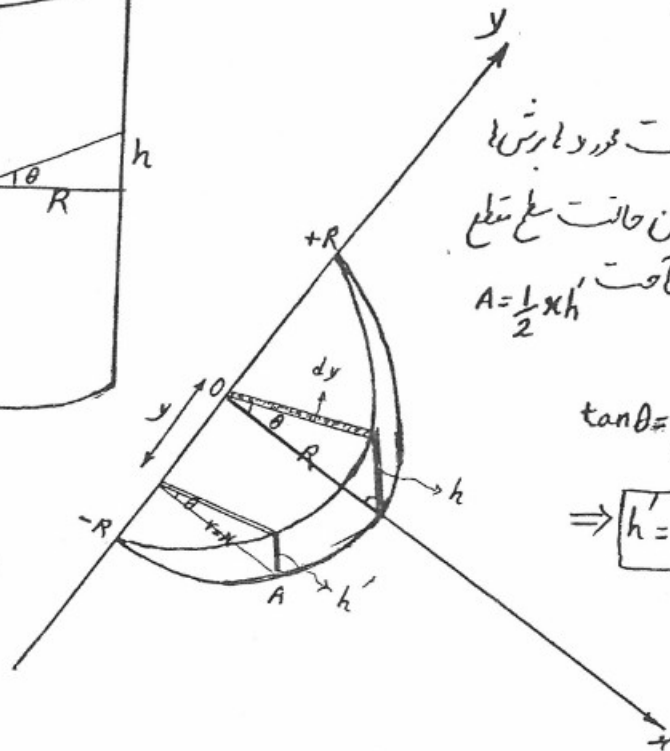


روش اول: در جهت محور و ابرش را  
را انجا ای دهم در این حالت سطح مقطع  
مثلثی است با مساحت  $A = \frac{1}{2} x h'$

$$\tan \theta = \frac{h}{R} = \frac{h'}{r(y)}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{h}{R} r \quad (1)$$

$$\Rightarrow V = \int_{-R}^R A(y) dy = \int_{-R}^R \frac{h' \times r}{2} dy$$



هم  $h$  و هم  $r$  بر حسب  $y$  تغییر می کنند پس آنها را باید بر حسب  $y$  بدست آوریم.

$$r^2 + y^2 = (OA)^2 \quad OA: \text{ شعاع استوانه } = R \Rightarrow r^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - y^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{h}{R} \sqrt{R^2 - y^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow V = \int_{-R}^R \frac{h' \times r}{2} dy = \int_{-R}^R \frac{h}{2R} (R^2 - y^2) dy$$

$$\Rightarrow V = \frac{h}{2R} \left[ R^2 (2R) - \frac{2}{3} R^3 \right] = \frac{2}{3} h R^2 = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

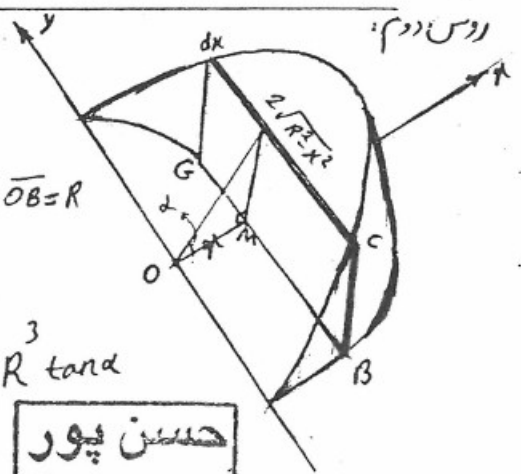
روش دوم: در جهت محور و ابرش را انجا ای دهم در این حالت سطح مقطعی خواهد بود

$$A = \overline{GB} \times \overline{BC}$$

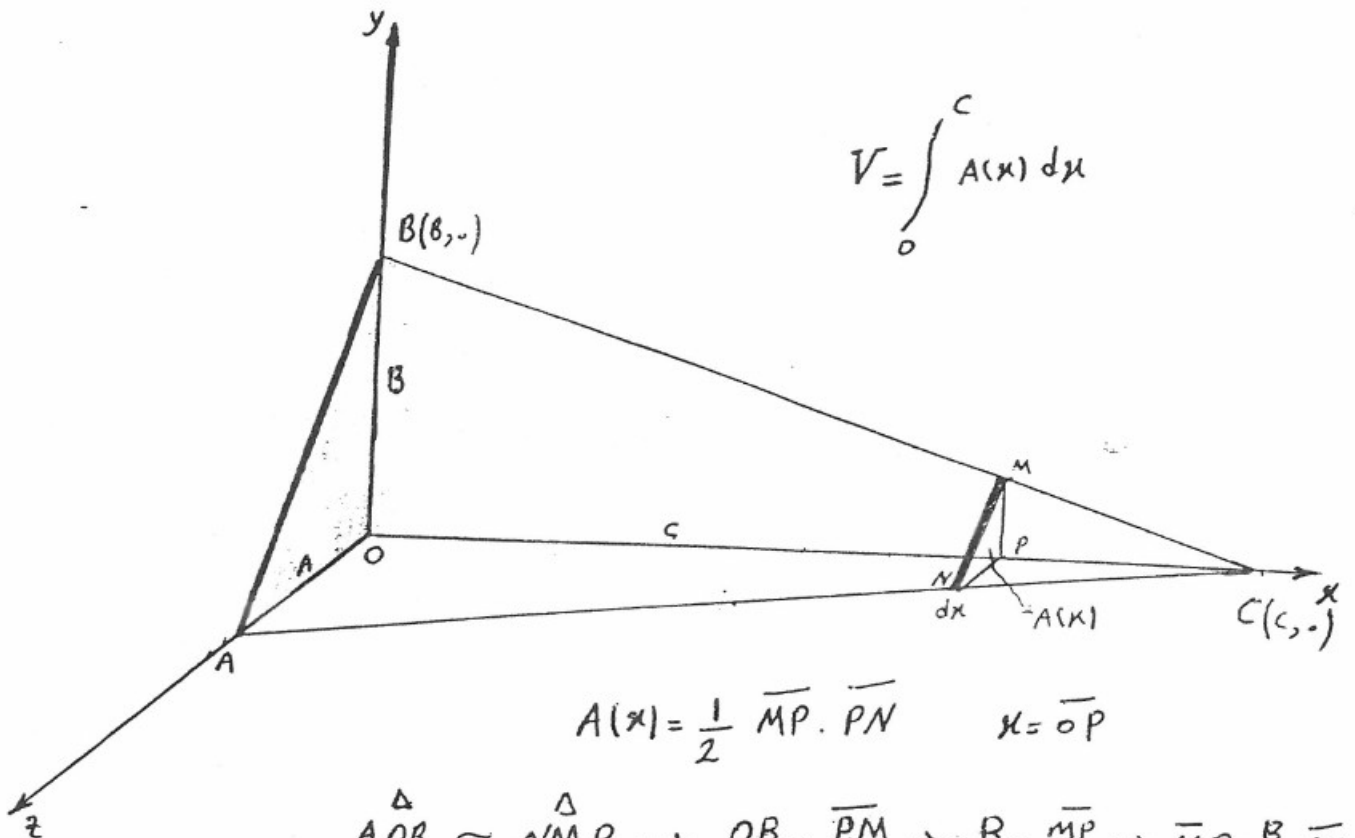
$$\begin{cases} \overline{BC} = x \tan \alpha \\ \overline{BG} = 2 \overline{MB}, \overline{MB}^2 = \overline{OB}^2 - x^2, \overline{OB} = R \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(x) = 2(\sqrt{R^2 - x^2}) x \tan \alpha \Rightarrow V = \int_{-R}^R A(x) dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-R}^R 2 \tan \alpha \cdot x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} \tan \alpha (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{-R}^0 = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$



حجم چهاروجهی (هرم مثلثی) با سه وجه (۲-۲) متعامد و شش ضلع (۲-۲) متعامد که طول ضلع ای آن A و B و C هستند را بیابید.



$$V = \int_0^c A(x) dx$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \overline{MP} \cdot \overline{PN} \quad x = \overline{OP}$$

$$\triangle AOB \sim \triangle MNP \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{PM}{PN} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} \Rightarrow \overline{MP} = \frac{B}{A} \overline{PN}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{B} \cdot \overline{MP}^2$$

باید  $\overline{MP}$  را بر حسب  $x$  بیابیم.

معادله خط عبورکننده از B و C:  $y - B = \frac{0-B}{0-0} (x-0) \Rightarrow y = \frac{-B}{C} x + B$

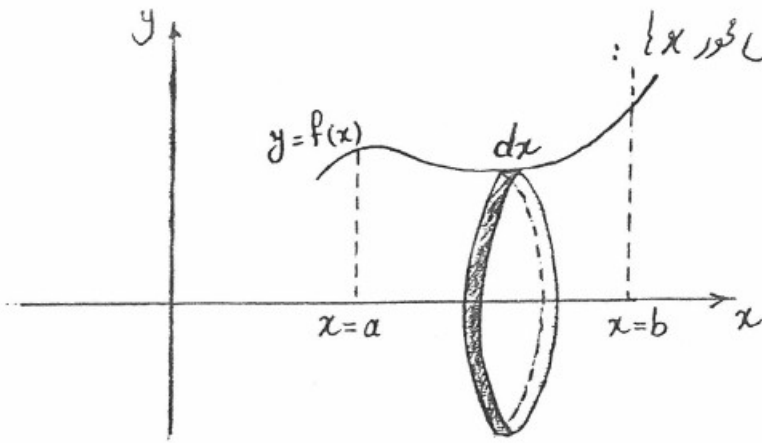
نقطه M روی خط BC است پس باید مختصات آن در معادله خط

$$M \Big|_0^x \leftarrow P \Big|_{-\frac{B}{C}x+B}^x$$

$$\Rightarrow \overline{MP} = \left( \frac{-B}{C} x + B \right)^2 \Rightarrow A(x) = \frac{A}{2B} \left( \frac{-B}{C} x + B \right)^2 \Rightarrow V = \int_0^c \frac{A}{2B} \left( \frac{-B}{C} x + B \right)^2 dx$$

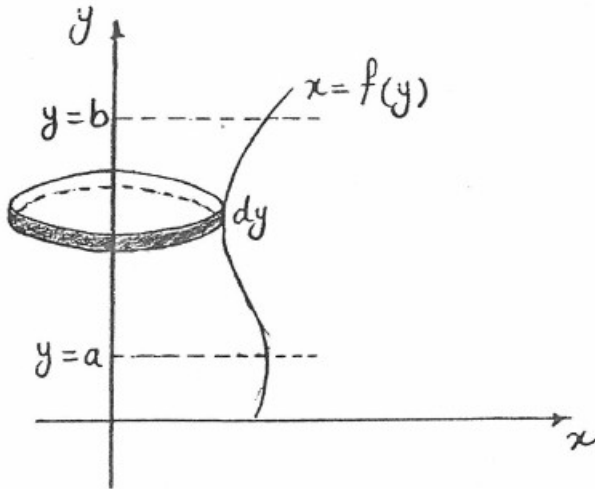
$$\Rightarrow V = \frac{A}{2B} \cdot \frac{-C}{B} \left( \frac{-B}{C} x + B \right)^3 \Big|_0^c = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} (A \times B) \times C \right) = \frac{A \times B \times C}{6}$$

روش قرصها: محاسبه حجم متنی دوار حول محور  $x$ :



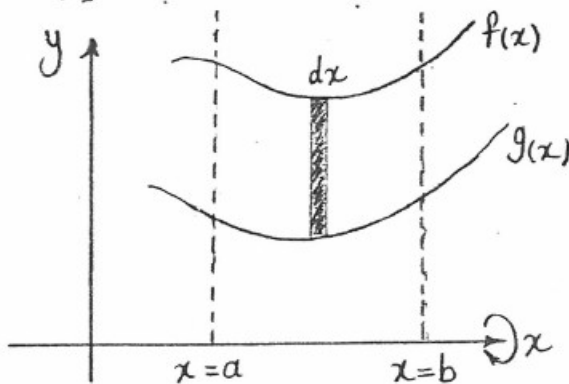
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

محاسبه حجم دوار حول محور  $y$ :



$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy$$

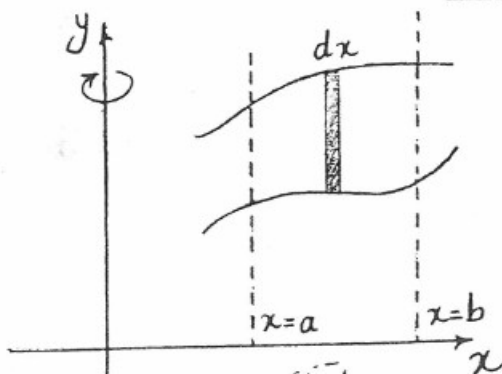
روش واشتراک: حجم ناحیه محصور بین خطوط  $x=a$ ,  $x=b$ , نمودار تابع  $y=f(x)$  از رابطه زیر بدست می آید



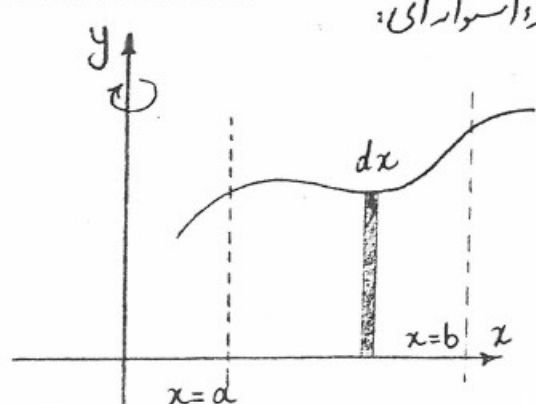
$$x \in [a, b] \quad 0 < g(x) < f(x)$$

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

روش پوسته استوانه ای:

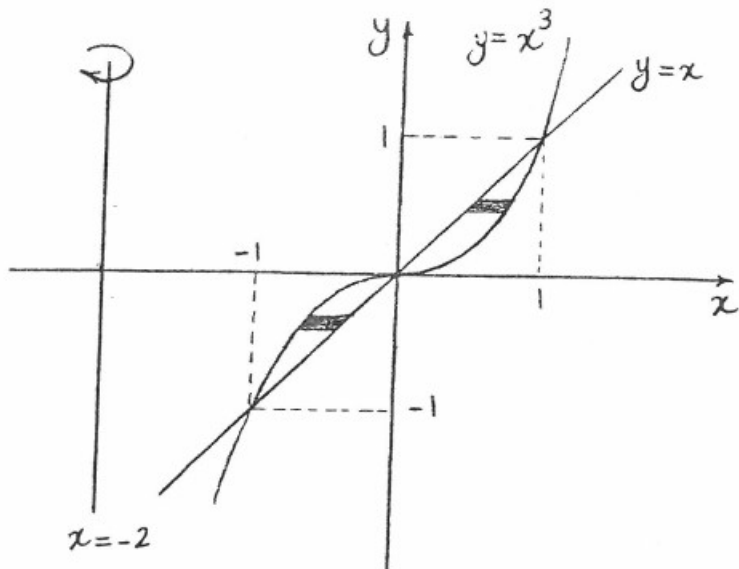


$$V = 2 \int_a^b \pi x (f(x) - g(x)) dx$$



$$V = 2 \pi \int_a^b x f(x) dx$$

تعیین حجم حاصل از دوران سطح محورین منتهی  $y=x^3$  و خط  $y=x$  حول محور  $x=-2$ :



روش اول: واشرها

الف) دوران ناحیه ① حول خط  $x=-2$ :

نامنه منتهی  $y=x^3$  از خط  $x=-2$  برابر  $y+2$

که همان شعاع داخلی باشد و نامنه منتهی

$y=x^3$  از خط  $x=-2$  برابر  $\sqrt[3]{y}+2$  که همان

شعاع خارجی باشد بنابراین

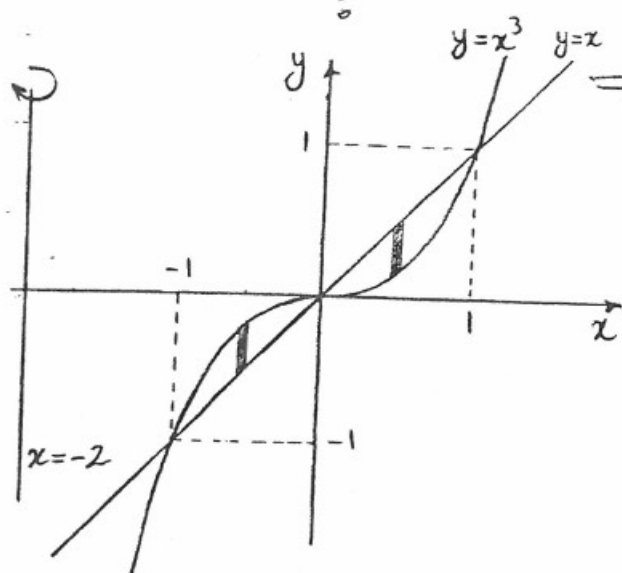
$$V_1 = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{y}+2)^2 - (y+2)^2 dy = \frac{19}{15} \pi$$

ب) دوران ناحیه ② حول خط  $x=-2$ :

$$V_2 = \pi \int_0^{-1} (\sqrt[3]{y}+2)^2 - (y+2)^2 dy = \frac{11}{15} \pi$$

روش دیگر دوران ناحیه ② حول خط  $x=-2$  دوران

$$\text{ناحیه ① حول خط } x=2 \text{ است پس: } V_2 = \pi \int_0^1 (2-y)^2 - (2-\sqrt[3]{y})^2 dy = \frac{11}{15} \pi$$



$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \left( \frac{11}{15} \pi + \frac{19}{15} \pi \right) = 2\pi$$

روش دوم: پوسته استوانه‌ای:

$$V_1 = 2\pi \int_0^1 (x+2)(x-x^3) dx = \frac{19}{15} \pi$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{30}{15} \pi$$

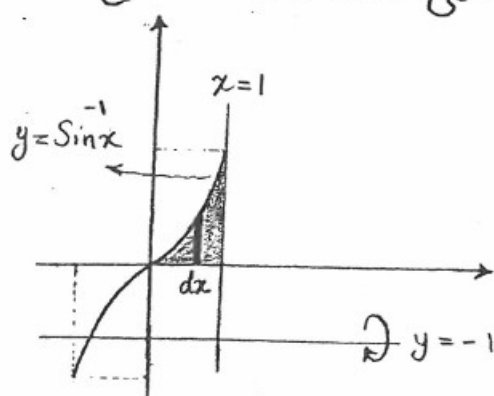
$$V_2 = 2\pi \int_0^{-1} (2+x)(x-x^3) dx = \frac{11}{15} \pi$$

روش دیگر دوران ناحیه ② حول خط  $x=-2$  دوران ناحیه ① حول

خط  $x=-2$  است پس:

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 (2-x)(x-x^3) dx = \frac{11}{15} \pi$$

مطلوب است محاسبه حجم جسم حاصل از دوران سطح محورین منتهی  $y=\sin^{-1}x$  و خط  $x=1$  واقع



در ربع اول حول خط  $y=-1$ :

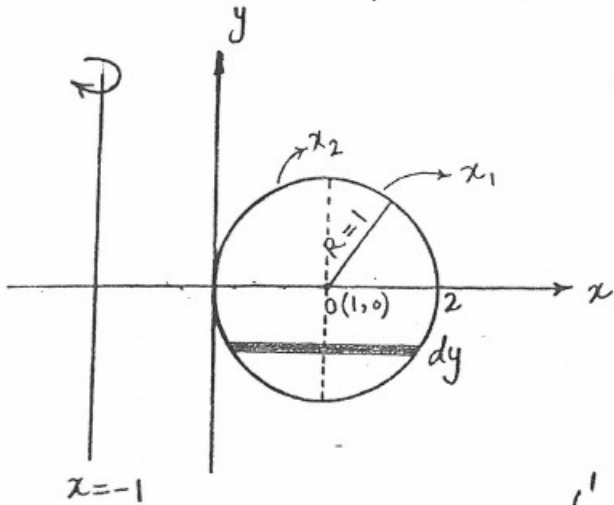
حل بر روش واشرها:

$$V = \pi \int_0^1 ((1+\sin^{-1}x)^2 - 1^2) dx = 1.61 \pi$$

حل بر روش پوسته استوانه‌ای:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+y)(1-\sin y) dy = 1.61 \pi$$

→ نمودار معادله  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  را حول خط  $x = -1$  دوران می دهیم حجم حاصل را میابیم:



معادله  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  دایره ای به مرکز  $(1,0)$  و شعاع 1 باشد

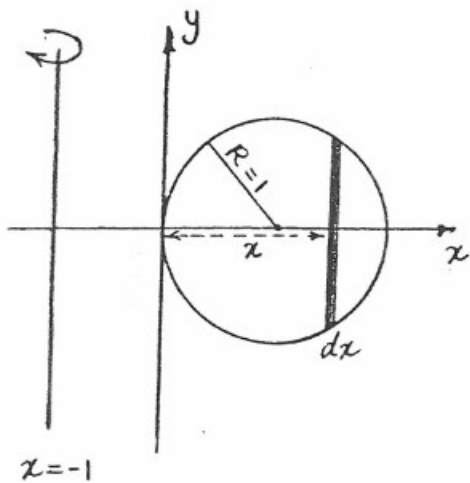
$$x-1 = \pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{1-y^2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

روش اول: واکشایی

$$V = \pi \int_{-1}^1 \underbrace{(1 + \sqrt{1-y^2})^2}_{\text{شعاع بیرونی}} - \underbrace{(1 - \sqrt{1-y^2})^2}_{\text{شعاع داخلی}} dy \Rightarrow V = 4\pi^2$$

روش دوم: روش پوسته استوانه ای

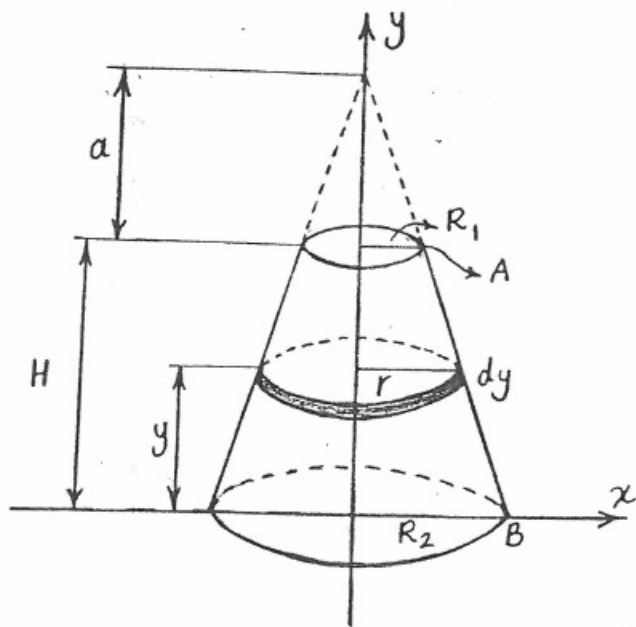


$$V_1 = 2\pi \int_1^2 2(\sqrt{R^2 - (x-R)^2})(x+R) dx = 2\pi(x + \frac{2}{3})$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 (x+R) \times 2(\sqrt{R^2 - (R-x)^2}) dx = 2\pi(x - \frac{2}{3})$$

$$V_t = V_1 + V_2$$

→ حجم مخروط ناقص زیر را بدست آورید



روش اول: مقاطع عرضی

$$\frac{a}{R_1} = \frac{a+H}{R_2} \Rightarrow aR_2 = aR_1 + HR_1$$

$$\Rightarrow a = \frac{HR_1}{R_2 - R_1}, \quad \frac{r}{(H-y)+a} = \frac{a}{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{a[(H-y)+a^2]}{R_1}} \Rightarrow V = \int_0^H (\pi r^2) dy$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R_1^2 a - \frac{1}{3}\pi R_2^2 (a+H)$$

روش دوم: روش قرص ها: دوران خط AB حول محور y ها:

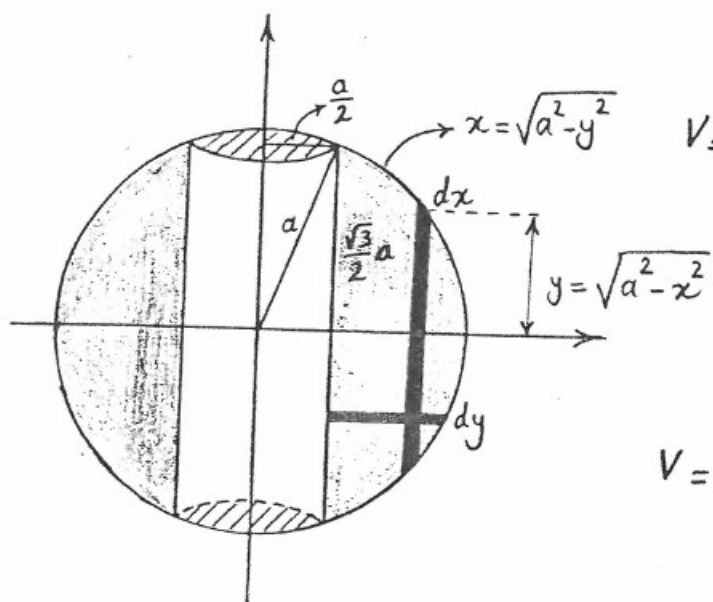
معادله خطی که از نقاط  $A(R_1, a)$  و  $B(R_2, 0)$  می گذرد عبارت است از:

$$y = \frac{R_2 - R_1}{-H} (x - R_2)$$

$$x = \frac{H}{R_1 - R_2} y + R_2 \Rightarrow V = \int_0^H \pi x^2 dy$$

→ قوس محدود به دایره  $x^2 + y^2 = a^2$  حول محور  $y$  را دوران می‌کنند و منی کروی ایجاد می‌کنند. سوراخی به قطر  $a$  در استند  $y$  را در ردن کره ایجاد می‌کنیم. حجم کره سوراخ دار را بیابید:

حل به روش واشرا:



$$V = \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left( (a^2 - y^2) - \frac{a^2}{4} \right) dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3$$

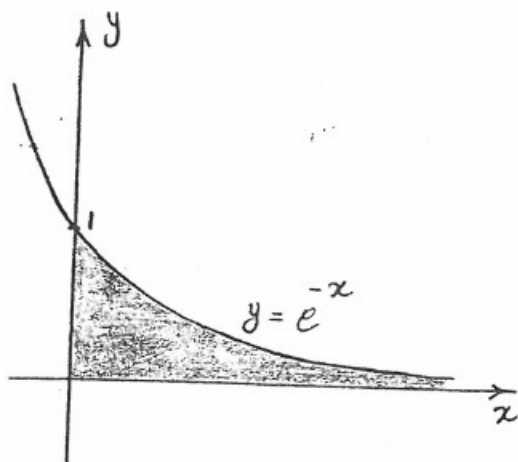
حل به روش پوسته استوانه‌ای:

$$V = 2\pi \int_{\frac{a}{2}}^a x(2\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3$$

حل به روش قوس با و تفریق:

$$\left. \begin{aligned} \text{حجم استوانه داخلی به فرست باشد} \quad V_1 &= \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 (a\sqrt{3}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} a^3 \\ \text{حجم کره به فرست باشد} \quad V_2 &= \pi \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \pi(a^2 - y^2) dy = \frac{3\pi\sqrt{3}}{4} a^3 \end{aligned} \right\} V = V_1 - V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} a^3$$

→ حجم حاصل از دوران منی  $y = e^{-x}$  در فاصله  $(-\infty, +\infty)$  را حول هر یک از محاور  $x$  و  $y$  را به طور جداگانه بدست آورید:



دوران حول محور  $x$ :

$$V = \pi \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -\pi e^{-x} \Big|_0^{\infty} = \pi$$

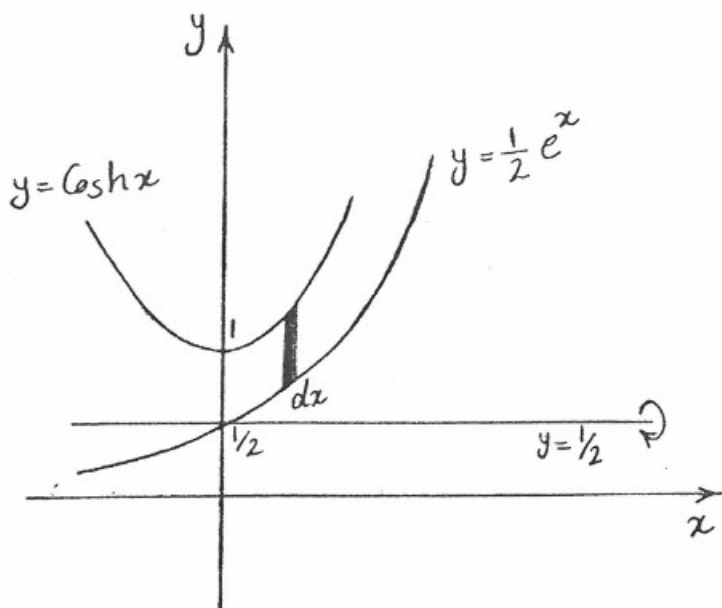
دوران حول محور  $y$ :

$$y = e^{-x} \Rightarrow \ln y = -x \Rightarrow x = \ln \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow V = -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi [y \ln y - y]_0^1 = \pi$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{hosp}} \frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = -y = 0$$

← ناصیه محورین دوشنبی  $y = \cosh x$  و  $y = \frac{1}{2}e^x$  در ربع اول را حول  $y = \frac{1}{2}$  دوران می دهیم  
 حجم حاصل را بیابید



$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

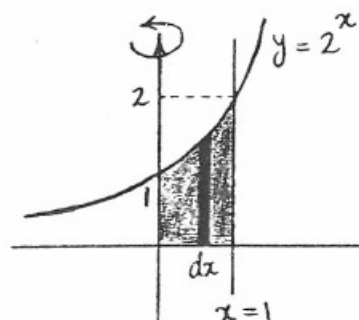
$$\Rightarrow \text{میل متقاطع در اینجا: } \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x$$

$$\Rightarrow x = \infty$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right)^2 - \left( \frac{1}{2}e^x \right)^2 \right) dx$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{4}e^{-2x} + 2 \right) dx = +\infty$$

← حجم حاصل از دوران ناصیه  $y = 2^x$  و خطوط  $x = 0$ ,  $x = 1$  و محور  $x$  را حول محور  $y$  را



$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot 2^x dx =$$

$$= 2\pi \left[ \frac{x}{\ln 2} 2^x - \frac{1}{(\ln 2)^2} 2^x \right]_0^1 = 0.8$$

$x$	$2^x$
1	$\frac{1}{\ln 2} 2^x$
0	$\frac{1}{(\ln 2)^2} 2^x$

حاسبه طول قوس :

اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته و در بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد طول منحنی  $y = f(x)$  از  $a$  تا  $b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

برابری است با :

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + x_y'^2} dy$$

نکته: در صورتی که  $x = f(y)$  باشد آنگاه

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$$

نکته: در صورتی که تعادلات به صورت پارامتری بیان شوند



مثال: طول قوس منحنی کی زیر را بیابید.

$$\textcircled{1} y = \sqrt{4-x^2}, [0, 2] \quad y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow L = \int_0^2 \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$\Rightarrow L = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}} dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = \pi$$


---

$$\textcircled{2} y = \ln(\cos x), [0, \frac{\pi}{4}] \quad y' = \frac{-\sin x}{\cos x} \quad L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2}+1)$$


---

$$\textcircled{3} x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2} \quad y=1 \text{ و } y=2 \quad x'_y = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y})^2} dy = \int_1^2 (\frac{y}{2} + \frac{1}{2y})^2 dy = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$


---

$$\textcircled{4} x = \ln\left(\frac{1}{\sin y}\right) \quad y = \frac{\pi}{4} \text{ و } y = \frac{3\pi}{4} \quad x' = \frac{-\cos y}{\frac{1}{\sin y}} = -\cot y$$

$$L = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{1+\cot^2 y} dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\csc y| dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc y dy = \ln |\csc y - \cot y| \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln \left| \frac{1-2}{\sqrt{2}} \right| - \ln \left| \frac{2-1}{\sqrt{2}} \right|$$


---

$$\textcircled{5} \begin{cases} x = 1-t \\ y = t^{3/2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad L = \int_0^1 \sqrt{(-1)^2 + (\frac{3}{2}\sqrt{t})^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}t} dt \quad \begin{matrix} 1+\frac{9}{4}t = u \\ \frac{9}{4}dt = du \end{matrix} \begin{cases} t=0 \rightarrow u=1 \\ t=1 \rightarrow u=\frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow L = \int_1^{13/4} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{13/4} = \frac{8}{27} \left[ \left( \frac{13}{4} \times \frac{\sqrt{13}}{2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{27} [13\sqrt{13} - 8]$$


---

$$\textcircled{6} f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos x} dx \quad [0, \frac{\pi}{2}] \quad f'(x) = \sqrt{\cos x} \quad L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} dx = \sqrt{2} \times 2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 2$$

قضیه: (آزمون مقایسه) : فرض کنید سری  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  یک سری مثبت باشد  $(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n)$  در این قضیه فرض خردمان است.

(i) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  سری مثبت باشد که در این همگراست و برای تمام اعداد صحیح مثبت  $n$  ،  $a_n \leq b_n$  ، آنگاه سری  $a_n$  همگراست.

(ii) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  سری مثبت باشد که در این واگراست و برای تمام اعداد صحیح مثبت  $n$  ،  $a_n \geq b_n$  ، آنگاه سری  $a_n$  واگراست.

قضیه: (آزمون مقایسه حد) فرض کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  دو سری مثبت باشند ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$  باشد

(i) اگر  $c > 0$  باشد آنگاه هر دو سری یا همگراست یا واگراست.

(ii) اگر  $c = 0$  باشد و اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  همگرا باشد آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگراست.

(iii) اگر  $c = \infty$  باشد و اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  واگرا باشد آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  واگراست.

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} \longrightarrow a_n = \frac{n^r}{n!} \quad b_n = \frac{1}{n!} \quad (\text{در این همگراست})$$

اثبات همگرای  $b_n$  : طبق قضیه سری نامتناهی مثبت همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموعهای جزو داشته باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Rightarrow S_1 = 1 \quad S_2 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} \quad S_3 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

هر وقت کنیم این مجموع همیشه به عدد ۲ نمی رسد پس کران بالا دارد

و عدد ۲ یک کران بالای  $S_n$  است پس این سری همگراست.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^r}{n!}}{\frac{1}{n!}} = +\infty$$

حال با استفاده از آزمون مقایسه حد

اما از قسمت سوم آزمون مقایسه حد کاربرد ندارد چون سری  $b_n$  همگراست نه واگرا ، اما راهی هست که آزمون مقایسه حد قابل اجرا باشد.

قضیه: (آر) اگر  $a_n$  و  $b_n$  دو سری نامتناهی باشند که اختلاف آنها در  $m$  جیم اول تفاوت آنگاه یا هر دو سری همگراست یا هر دو واگرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} = \frac{n^r}{n!} = \frac{1^r}{1!} + \frac{2^r}{2!} + \frac{3^r}{3!} + \frac{4^r}{4!} + \frac{5^r}{5!} + \dots + \frac{n^r}{n!} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+r)^r}{(n+r)!} = \frac{r^r}{r!} + \frac{5^r}{5!} + \dots + \frac{(n+r)^r}{(n+r)!} + \dots \quad c_n$$

حال  $c_n$  را با  $b_n$  مقایسه کنیم چون  $b_n$  همگراست پس  $c_n$  هم همگراست در نتیجه  $a_n$  هم همگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+r)^r}{(n+r)!}}{\frac{1}{n!}} = 1$$

نکته: در مورد دلیل انتخاب نوع سری  $c_n$  وقت شود. تذکر: البته این با آزمون نسبت به راحتی حل می شود (معمولاً آزمون نسبت حل می شود)

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)^{1/2}} \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n^2+2)^{1/2}} \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}} \quad (\text{و آنرا})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0 \quad \text{سری } a_n \text{ واگراست}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2} \rightarrow -1 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sin n + 1 \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1+\sin n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \quad \text{چون } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \text{ یک سری با } p=2 > 1 \text{ می باشد همگراست پس طبق آزمون مقایسه}$$

سری همگراست. نکته: در مواردی که سری شامل عبارت  $\sin$  و  $\cos x$  است معمولاً از این فن استفاده می شود.

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad \ln n < n \rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \text{ سری واگرا} \xrightarrow{\text{پس}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad (\text{مقایسه و آنرا})$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad ( \text{آزمون مقایسه} ) \quad n^n > n^2 \rightarrow \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ همگرا}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 1}{5^n - 1} \quad (\text{مقایسه سری}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n - 1}{5^n - 1}}{\frac{4^n}{5^n}} = 1 > 0$$

سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n}$  یک سری هندسی است  $\frac{4}{5} < 1$  است پس همگراست پس سری همگراست.

$$\textcircled{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

نکته: در این سوال خاص می‌کنیم متغیر را بدون در نظر گرفتن برده‌های نه‌باشی

جمع و تفویض شده ساده می‌کنیم و بعد سری نه‌قرار است انتخاب شود و مقایسه شود با سری اولی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = 1 \xrightarrow{\text{سری } \frac{1}{n} \text{ واریات}} \text{پس سری واریات. انتخاب می‌کنیم} \frac{1}{n} \text{ را انتخاب می‌کنیم}$$

$$\textcircled{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}} \xrightarrow{\text{طبق نکته سوال (v)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \text{ سری واریات}$$

$$\textcircled{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{5n^2 - n^2 - 2} \xrightarrow{\text{طبق نکته سوال (v)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{5n^2 - n^2 - 2} = \frac{3}{5} > 0 \text{ سری همگراست}$$

(نکته:  $\frac{1}{n^2}$  همگراست سری p)

$$\textcircled{b} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{2^n}$$

نکته: در حل اینگونه مسائل برای پیدا کردن سری ای که مقایسه کنیم همین محل می‌کنیم

$$\text{چون } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{2^n} = 0 \text{ پس می‌توانیم } \sin \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n} \text{ نوشت}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{1}{2^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 > 0 \xrightarrow{\text{چون سری همگراست}} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ همگراست}$$

$$\textcircled{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^2} \quad \left\{ -1 \leq \cos n \leq 1 \rightarrow 0 \leq \cos^2 n \leq 1 \right\}$$

از طرف برای پیدا کردن سری که بخواهیم از همون مقایسه را برقرار کنیم از نکته مثال (v) استفاده می‌کنیم.

$$(\sqrt{n}+1) > \sqrt{n} \rightarrow (\sqrt{n}+1)^2 > (\sqrt{n})^2 \rightarrow \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2} < \frac{1}{(\sqrt{n})^2}$$

پس سری همگراست.

(نکته:  $\frac{1}{n}$  همگراست (سری p)  $n = \frac{2}{2}$ )

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n} \quad (c > 1)$$

البته در اینجا دوباره از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم.

$$c^n > 2^n \rightarrow \frac{1}{c^n} < \frac{1}{2^n} \quad nc^n > c^n \rightarrow \frac{1}{nc^n} < \frac{1}{c^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} \text{ پس همگراست}$$

همگراست چون  $\left(\frac{1}{nc^n} < \frac{1}{c^n}\right)$  پس سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n}$  نیز همگراست.

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$$

$$\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n + e^{-n}}$$

سری هندسی است

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n} \rightarrow 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\text{پس همگراست} \quad S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2 - 5}$$

طبق نکته سوال (7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2 - 5} = \frac{\pi}{2} > 0$$

سری همگراست

و عین یک عدد حاصل می‌کنند.

$$(15) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad \text{در این نوع مسائل از روابط ظاهری استفاده می‌شود} \quad \cos x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{n} \rightarrow 1 - \cos \frac{1}{n} = 2 \sin^2 \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \quad \text{طبق نکته سوال (10)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 2 > 0$$

همگراست.

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+c^n} \quad (c > 0)$$

چون می‌خواهیم با  $\sum \frac{1}{c^n}$  مقایسه کنیم این سری هندسی است و باید مقدار  $c$  را بازه بندی کنیم.

و اگر  $(0 < c < 1)$  در این بازه شرایط اولیه همگراست که باید حد دنباله داخل سری برابر صفر شود و چون  $c < 1$  اگر  $c < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+c^n} = 1 \neq 0 \rightarrow$  اگر  $c > 1 \rightarrow 1+c^n > c^n \rightarrow \frac{1}{1+c^n} < \frac{1}{c^n} \rightarrow$  پس  $\sum \frac{1}{1+c^n}$  همگراست.

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\text{نقشه 7}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0 \quad \text{سری واگرا}$$

در انتخاب سری که می خواهیم مقایسه کنیم باید عمل کنند چون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} \xrightarrow{\text{Hop (مخرج)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^0} = 1$$

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt[n]{n}}{n^r + 1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n^r + 1} + \frac{\sqrt[n]{n}}{n^r + 1} \right) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^r + 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^r + 1}$$

$$A: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^r + 1} \xrightarrow{\text{نقشه 7}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^r + 1} = \frac{1}{r} > 0 \quad \text{سری A واگراست}$$

$$B: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^r + 1} \xrightarrow{\text{نقشه 7}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^r + 1} = \frac{1}{r} > 0 \quad \text{سری B هم واگراست}$$

بنابراین جمع سری هم واگراست و اگر از هم نبود.

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^r + 1} \xrightarrow{\text{نقشه 7}} \text{فرض } b_n = \frac{1}{n^r} \quad (\text{هنگامی})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^r + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r \ln n}{n^r + 1} \xrightarrow{\text{Hop (مخرج)}} = 0 \quad \text{سری هم واگراست.}$$

$$(20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r + \cos n}{n(1 + e^{-n})} \quad -1 \leq \cos n \leq 1 \rightarrow r - 1 \leq r + \cos n \leq r + 1 \xrightarrow{\div}$$

$$\frac{r}{n(1 + e^{-n})} \leq \frac{r + \cos n}{n(1 + e^{-n})} \leq \frac{r + 1}{n(1 + e^{-n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n(1 + e^{-n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{1 + e^{-n}} = r > 0 \quad \text{سری واگرا}$$

دلیل انتخاب  $b_n = \frac{1}{n}$  برای مقایسه سری:  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$  است نه

در انتخاب  $b_n$  مانعش چندان ندارد.

$$(21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^r} =$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow 0 \leq |\sin n| \leq 1$$

$$\frac{|\sin n|}{n^r} < \frac{1}{n^r}$$

پس بر طبق آزمون مقایسه سری همگراست

$$(22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^r}$$

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1$$

$$\frac{\cos^2 n}{n^r} < \frac{1}{n^r}$$

سری همگرا (مقایسه)

(آزمون مقایسه) پس سری همگراست.

$$(23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^r}{(n+r)!} \rightarrow \frac{(n+1)^r}{(n+r)!} = \frac{(n+1)(n+1)^{r-1}}{(n+r)(n+1)^{r-1}(n)!} = \frac{(n+1)}{(n+r)n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(n+r)n!} = 1 > 0$$

سری همگراست.

$$(24) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1 > 0$$

همگراست

$$(25) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r n^n} \Rightarrow n^r > r^n \rightarrow \frac{1}{n^r n^n} < \frac{1}{r^n}$$

همگرا

طبق آزمون مقایسه

سری همگراست.

$$(26) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{n^r + n}} \rightarrow \sqrt{n^r + n} > \sqrt{n^r} \text{ حال } n^{\frac{r}{2}} \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{n^r + n}} < \frac{r}{\sqrt{n^r}}$$

پس سری همگراست

همگرا

$$(27) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$\ln n < n \rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

پس سری واگراست

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \text{HOP} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1} = 1 > 0$$

پس سری واگراست.

آزمون اشتراک: فرض کنید  $f$  تابعی از پیوسته تری و مقدارش به ازای  $x$  مثبت باشد در این صورت سری نامتناهی همگراست  
وقتی که اشتراک مجازی وجود داشته باشد.

آزمون اشتراک: در این قضیه از نظریه اشتراک های مجازی برای آزمایس همگرایی سری های نامتناهی مثبت استفاده می شود.

①  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$   $x \gg 1$   $f(x)$  همیشه مثبت

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} < 0$  نزولی و  $\sqrt{x}+1 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x} \neq -1$   $Df=1$

پس در  $[1, \infty)$  پیوسته است.

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \xrightarrow[\text{تعین}]{\text{علا اشتراک}} \sqrt{x}+1 = u \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \\ dx = 2(u-1)du \end{cases}$

$\int \frac{2(u-1)du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} - 2 \int \frac{du}{u} = 2(\sqrt{x}+1) - 2 \ln|\sqrt{x}+1|$

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \infty$  پس واگرا

②  $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/2} \rightarrow f(x) = e^{-x/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2}$   $\frac{e^{-x/2}}{e^{-x/2}} > 0$   $e^{-x/2}$  همواره

$f'(x) < 0$  تابع نزولی

$f(x) = e^{-x/2} > 0$  همواره  $f(x)$  همیشه مثبت  $(2, \infty)$  پیوسته و بازه

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a e^{-x/2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (-2e^{-x/2}) \Big|_2^a = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$  پس همگرا

حسن پور



	0	2
-	+	-

$$f(x) = x^r e^{-x} \xrightarrow[e^{-x} > 0]{x > 0} \frac{x^r}{e^{-x}}$$

سین سری همگراست.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{e-x} dx = \frac{5}{e}$   $\frac{\text{علی از این جزء جزء}}{}$

$$\textcircled{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^r} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x [\ln(\ln x)]^r}$$

$$f'(x) = - \left[ \frac{x^1 \text{ (مستخرج)}}{(x^2 \text{ (مخرج)})^2} \right] < 0$$

$$Df \rightarrow \begin{cases} x \ln x [\ln(\ln x)]^r \neq 0 \\ x > r \end{cases} \xrightarrow{\text{در } r} f \text{ در } [r, +\infty) \text{ پیوسته است.}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_r^a \frac{dx}{x \ln x [\ln(\ln x)]^r} \xrightarrow{\text{تبدیل متغیر}} \begin{cases} \ln(\ln x) = t \\ dt = \frac{dx}{x \ln x} \end{cases}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{\ln(\ln x)} \right]_r^a = \frac{1}{\ln(\ln r)}$$

$$\textcircled{d} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch}^r n \rightarrow f(x) = \operatorname{csch}^r x$$

فقط در  $x=0$  ناپوشانی داریم در بازه معین نظر داشته باشیم در (۰ و ۱) ناپوشانی است.

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \operatorname{csch}^r x \, dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\coth x) \Big|_1^u = -1 + \coth(1)$$

$$\textcircled{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \sqrt{\ln(n+1)}} \quad f(x) = \frac{1}{(x+1) \sqrt{\ln(x+1)}}$$

به ازای  $\lambda$  بیوسه است  
و مقدارش مثبت است.

$f(x_1) > f(x_n)$   $\leftarrow 1 \leq x_1 \leq x_n$  پس نزولی است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}}{\ln(x+1)=u} \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ r \sqrt{\ln(x+1)} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ r \sqrt{\ln(b+1)} - r \sqrt{\ln 1} \right]$$

$$\textcircled{v} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+r)^{\frac{r}{r}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+r)^{\frac{r}{r}}} \xrightarrow{\text{بررسی}} f(x), x \gg 1 \text{ حدیث} \rightarrow f'(x) < 0 \text{ نزولی}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{(x+r)^{\frac{r}{r}}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a (x+r)^{-\frac{r}{r}} dx \xrightarrow{\substack{x+r=u \\ dx=du}} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-r}{\sqrt{x+r}} \right]_1^a = 0 + \frac{r}{\sqrt{r}} = \frac{r}{\sqrt{r}} \text{ حدیث}$$

$$\textcircled{A} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n^r+1} \rightarrow f(x) = \frac{r_x}{x^r+1} \rightarrow f'(x) = \frac{r(x^r+1) - r x^r \cdot r x}{(x^r+1)^2} = \frac{-4x^r+r}{(x^r+1)^2} \xrightarrow{x \gg 1 \text{ حدیث}}$$

$$f'(x) < 0: \text{در } \{x \gg 1 \text{ حدیث} \rightarrow f(x) \text{ نزولی و متناقص است.}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{r(x) dx}{x^r+1} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{r_x dx}{(x^r)^r+1} = \begin{cases} x^r = u \rightarrow r_x dx = du \\ x=1 \rightarrow u=1 \\ x=a \rightarrow u=a^r = \infty \end{cases}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{du}{u^r+1} du = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \tan^{-1} x^r \right]_1^a = \frac{\pi}{r} - \frac{\pi}{r} = \frac{\pi}{r} \text{ حدیث}$$

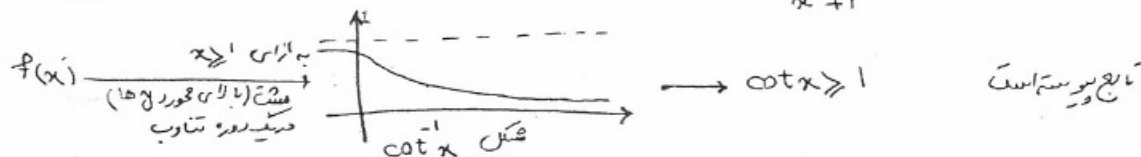
$$\textcircled{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^r+1} \rightarrow f(x) = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{x^r+1} \quad \begin{cases} e^{\tan^{-1} x} \geq 0 \text{ همواره} \\ x^r+1 \geq 0 \text{ همواره} \end{cases} \rightarrow f(x) \text{ نزولی و متناقص است.}$$

$$f'(x) = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{x^r+1} \cdot x(x^r+1) - r x e^{\tan^{-1} x} = \frac{e^{\tan^{-1} x} (1-rx)}{(x^r+1)^2} \rightarrow \left\{ \frac{e^{\tan^{-1} x}}{(x^r+1)^2} \right\} > 0 \text{ همواره مثبت است.}$$

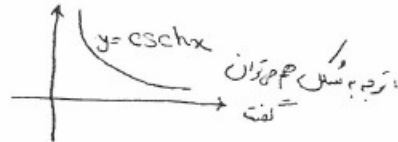
$$(1-rx) \xrightarrow{x \gg 1} \text{ در } \{x \gg 1 \text{ حدیث} \rightarrow f'(x) < 0 \text{ نزولی}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{e^{\tan^{-1} x}}{x^r+1} dx \xrightarrow{\tan^{-1} x = u} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ e^{\tan^{-1} x} \right]_1^a = e^{\frac{\pi}{r}} - e^{\frac{\pi}{r}} \text{ حدیث}$$

$$\textcircled{b} \sum_{n=1}^{+\infty} \cot^{-1} n \rightarrow f(x) = \cot^{-1} x \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2+1} < 0 \text{ نزولی}$$



$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \cot^{-1} x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ x \cot^{-1} x + \frac{1}{r} \ln |1+x^r| \right]_1^a = \infty \text{ سری واگرا}$$

$$\textcircled{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{csch } n = f(x) = \text{csch } x \quad f'(x) < 0 \quad \text{نزول}$$


تابع  $\text{csch } x$  را از آنجا که  $x$  بالای محور  $y$  است و مثبت است، می‌توان گفت که این تابع به سمت  $y=0$  میل می‌کند.

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \text{csch } x \, dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{\sinh x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| \right]_1^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left| \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \right| - \ln \left| \frac{e - 1}{e + 1} \right| \right] \rightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \right] \xrightarrow{\text{H\ddot{o}p}} \frac{ae^a}{ae^a} = 1 \rightarrow 1 - \ln \left| \frac{e - 1}{e + 1} \right| \end{aligned}$$

\* مشتق  $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} \xrightarrow{e^x = u} \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right|$

$$\textcircled{12} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \quad f(x) = e^{-\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} < 0 \quad \text{نزول}$$

$e^{-\sqrt{x}}$  برای  $x > 1$  مثبت و نزول است.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a e^{-\sqrt{x}} \, dx \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t \, dt \\ x=1 \rightarrow t=1 \\ x=a \rightarrow t=\sqrt{a} \end{cases} \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \int_1^{\sqrt{a}} t e^{-t} \, dt \xrightarrow{\text{جزء دوم}} = 2 \left( -t e^{-t} \right)_1^{\sqrt{a}} + \int_1^{\sqrt{a}} e^{-t} \, dt = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$\textcircled{13} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\Delta} e^{-n^r} \quad f(x) = x^{\Delta} e^{-x^r} \xrightarrow{x > 1 \text{ مثبت و نزول است}} f'(x) = \Delta x^{\Delta-1} e^{-x^r} - r x^{\Delta} e^{-x^r} =$$

$= x^{\Delta} e^{-x^r} (\Delta - x^r)$  (برای  $x > 1$  و  $r > 1$ ،  $\Delta - x^r < 0$  است)

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^{\Delta} e^{-x^r} \, dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a x^{\Delta} e^{-x^r} \, dx \rightarrow \begin{cases} x^r = t \\ r x^{\Delta-1} dx = dt \end{cases} = \frac{1}{r} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{a^r} t e^{-t} \, dt \\ &\xrightarrow{\text{جزء دوم}} = \frac{\Delta}{re} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\Delta} e^{-(n+1)^r}}{n^{\Delta} e^{-n^r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\Delta} \frac{e^{-n^r-rn-r+1}}{e^{-n^r}} =$$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\Delta} e^{-rn-r+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r+1}} = 0 < 1$  پس همگرایی.

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^r}{n^r} \quad f(x) = \frac{(\ln x)^r}{x^r} \xrightarrow{\text{تابع مشتق پذیر است}} \text{برای } x \geq 1$$

$$f'(x) = \frac{r \ln x - r(\ln x)^r}{x^r} = \frac{r \ln x (1 - \ln x)}{x^r} < 0 \quad \text{نزول}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^r} dx \xrightarrow{\begin{cases} \ln x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du, x = e^u \\ x=1 \rightarrow u=0 \\ x=\infty \rightarrow u=\infty \end{cases}}$$

$$\int_0^{\infty} u^r e^{-u} du \xrightarrow{\text{جزء دوم}} = r \quad \text{هنگام}$$

$$(13) \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n \ln n} \Rightarrow f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} \xrightarrow{\text{تابع مشتق پذیر است}} \text{برای } x \geq r$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln r}{x \ln x} \ln(\ln x) - \ln(\ln x)}{x^2 \ln x - \ln(\ln x) x [\ln x - 1]}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(\ln x) [\ln r - (\ln x - 1)]}{x^2 \ln x} \xrightarrow{x \geq r} < 0 \quad \text{نزول}$$

$$\int_r^{\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \frac{\ln(\ln x) = t}{dt = \frac{dx}{x \ln x}} \rightarrow \int_{\ln(\ln r)}^{\infty} t^t dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\ln(\ln r)}^a t^t dt$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{t^t}{\ln t} \Big|_{\ln(\ln r)}^a = \infty \quad \text{والتر}$$

$$(14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n+1}} \xrightarrow{\text{آزمون}} n \sqrt{n+1} = \sqrt{n^3 + n^2} > \sqrt{n^3} = n^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^3 + n^2}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \xrightarrow{x \ln n} \frac{\ln n}{n \sqrt{n+1}} < \frac{\ln n}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n+1}} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}} \quad \text{هنگام (آزمون اشتراک)}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx \xrightarrow{\text{ابتدا با گیری د}} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{-2 \ln x}{x^{1/2}} - \frac{4}{x^{1/2}} \right) \Big|_2^b = \sqrt{2} (\ln 2 + 2) \quad \text{هنگام}$$

پس سری مورد نظر نیز همگراست.

$$\textcircled{IV} \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\left(\frac{\ln n}{n}\right)} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\ln n}{n}\right)' \sec^2\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\left(\frac{\ln n}{n}\right)'} \xrightarrow{\text{hop}=0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sec^2\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \sec^2 0 = 1 > 0 \rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$\frac{\ln n}{n} \text{ دلیل واگرایی} : \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right|_1^b = \infty$$

⑮ فرض کنید  $P$  یک عدد ثابت مثبت است، نشان دهید  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^P}$  همگراست اگر و تنها اگر  $P > 1$

نکته: این سری به  $P$ -سری لگاریتمی معروف است.

$$\text{از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^P} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{(\ln x)^{1-P}}{1-P} \right|_2^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} - \frac{(\ln 2)^{1-P}}{1-P} \right]$$

$$\begin{cases} 1-P > 0 \rightarrow P < 1 \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} = \infty \rightarrow \text{واگرا} \\ 1-P < 0 \rightarrow P > 1 \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} = \text{عدد} \rightarrow \text{همگرا} \\ P = 1 \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} = \infty \rightarrow \text{واگرا} \end{cases}$$

شرط استفاده از آزمون انتگرال که برقرار بود:  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^P}$  برای  $x \geq 2$  تابعی پیوسته، مثبت و نزولی است.

آزمون نسبت وریشه :

فرض کنیم  $\sum a_n$  یک سری با جملات نامنفی باشد به طوری که :

$$\text{آزمون نسبت : } ① \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad \text{آزمون ریشه : } ② \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

الف) اگر  $0 < L < 1$  باشد سری مطلقاً همگراست .

ب) اگر  $L > 1$  یا  $L = \infty$  سری واگراست .

ج) اگر  $L = 1$  باشد آزمون بی حاصل است . (یعنی بی توان نظر دارد)

نکته ۱ : از آزمون نسبت اغلب در مواردی که سری شامل فاکتوریل است بی توان استفاده کرد .

نکته ۲ : از آزمون ریشه اغلب در مواردی که  $n$  در توان ظاهر شود بی توان بهره جفت .

نکته ۳ : آزمون ریشه از آزمون نسبت قوی تر است .

مثال : در مورد همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث کنید .

$$\begin{aligned} ① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n} & \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow \text{سری مطلقاً همگراست} \end{aligned}$$

$$⑤ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! (n!)^2}{[(n+1)!]^2 (2n)!} = 4 > 1 \rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$③ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \rightarrow \text{سری به طور مطلق همگراست}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{سری به طور مطلق همگراست}$$

$$\textcircled{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{100}} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{e^n}{n^{100}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(\sqrt[n]{n})^{100}} = e > 1 \rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$\textcircled{6} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{(\ln n)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

نکته:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\textcircled{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n-1+2}{1+n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1+n} - 1 \right)^n \neq 0 \rightarrow \text{پس سری واگراست}$$

$$\textcircled{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln n}{5^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{5} = \frac{1}{5} < 1 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

نکته:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \ln n}{n}} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n \ln n}} = e^0 = 1$

تواناثرینک  $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

$$\textcircled{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \left( \frac{17}{6} \right)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n} \left( \frac{17}{6} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17}{6} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{17}{6e} > 1 \rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$\textcircled{10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \times \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 2 \rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$\textcircled{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\frac{n}{2}}}{n \pi^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{10^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1) \pi^{n+1}} \cdot \frac{n \pi^n}{10^{\frac{n}{2}}}{n \pi^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \sqrt{10}}{\pi(n+1)} \right| = \frac{\sqrt{10}}{\pi} > 1 \rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$\textcircled{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \xrightarrow[\text{آزمون بنی مقیاس است}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}} = 1$$

\* به دلیل قوی بودن ریشه لذا آزمون نسبت اگر آزمون ریشه جواب نداد سرانجام آزمون نسبت نمی رویم.

آزمون مقایسه:  $n+1 > n \rightarrow (n+1)^n > n^n \rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$

چون  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (سری هارمونیک) واگراست پس سری مورد نظر نیز واگراست.

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{e^{n^2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2} (n+1)^2}{e^{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2} (n+1)^2}{e^{n^2 + 2n + 1}} = 0 < 1$$

چون خارج قسارت  
پس سری همگراست

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n)!}{(3n)!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)! (2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{n! (2n)!}{(3n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3}{27n^3} = \frac{4}{27} < 1 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

$$(15) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n!}{n^n} \right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left( \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right)^{n+1}}{\left( \frac{n!}{n^n} \right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left( \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n (n+1)} \right)^n \left( \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n (n+1)} \right)}{\left( \frac{n!}{n^n} \right)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \left( \frac{n!}{(n+1)^n} \right) = 0 < 1 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

خرج قسارت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n!}{n^n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \rightarrow \text{همگرا}$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\pi^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\pi^n n!}{n^n}} \right| = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right| = \frac{\pi}{e} > 1 \rightarrow \text{سری نامگراست}$$

نکته: در مواردی که دیده می شود از آزمون نسبت استفاده می شود.

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n n!}{n^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^n 2^{n+1} (n+1)!}{2^n n! (n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \right| = \frac{2}{e} < 1 \rightarrow \text{سری به طور مطلق همگراست}$$

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{همگراست}$$

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 < 1 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

حسن پور





سری های متناوب با جلات منفی مثبت (مجموعی مطلق و شروط):

تعریف: سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  به طور مطلق همگراست اگر سری مربوطی  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  که جلاتش قدر مطلق های جلات  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  هستند، همگرا باشد.

سری های به طور شروط همگرا: سری هایی که بدون همگرایی مطلق، همگرایی باشند را به طور شروط همگرایی می نامیم.

تفسیر: فرض کنیم  $\sum a_n$  یک سری باشد بطوری که  $|a_n|$  همگرا باشد در این صورت  $\sum a_n$  نیز همگراست.

نتیجه: همگرایی مطلق، همگرایی را ایجاب می کند.

تعریف: گوئیم یک سری نامتناهی متناوب است اگر جلاتش به تناوب مثبت و منفی باشند. (جلات متوالی همواره مختلف العلامه)

باشند یعنی یک جمله مثبت و یک جمله منفی)

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \dots$$

این سری متناوب نیست

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

این سری ها متناوب اند

تفسیری ①: آزمون سری متناوب (لایب نیتز)

هرگاه  $\{a_n\}$  یک دنبالی اعداد مثبت باشد به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  آنگاه سری متناوب

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots - (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

مثال: در مورد همگرایی و واگرایی سری های زیر بحث کنید. (همگرایی مطلق یا شروط).

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

طبق تفسیری ① همگرایی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

نزولی با جلات مثبت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

این سری همگرایی مطلق است.

②  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0$  و  $a_n = \frac{1}{(2n+1)^3}$  نزولی با جلات مثبت  
 این طبق قضیه ① همگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون مقایسه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{8} > 0$  این سری مطلقاً همگراست.

③  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$  و  $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$  نزولی مثبت  $\rightarrow$  همگراست طبق قضیه ① همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \ln(n+1) < n+1 \rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$  این سری همگرا نیست شرط است.

④  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{2n}} = 0$  و  $a_n = \frac{n}{e^{2n}}$  نزولی با جلات مثبت  $\rightarrow$  همگراست طبق قضیه ① همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2n}} \xrightarrow[\text{(جزء جزء)}]{\text{آزمون انتگرال}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x e^{-2x} dx = \frac{1}{2e^2}$  این سری همگراست مطلقاً است

⑤  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = 0$  و  $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$  نزولی با جلات مثبت  $\rightarrow$  همگراست

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{\ln x} \Big|_2^a = \frac{1}{\ln 2}$  این سری مطلقاً همگراست

⑥  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$  و  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$  نزولی با جلات مثبت  $\rightarrow$  همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 > 0 \rightarrow \sum |a_n|$   $\frac{1}{n}$  دارد  
 این سری همگرا نیست شرط است.

$$\textcircled{v} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 0$$

$$\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)' = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}}{n} = \frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \frac{1 - \ln n}{n\sqrt{n}} < 0$$

تدریجی با جلات مثبت  $n\sqrt{n}$ :  $n > 1$  بارزنی  
حراره مثبت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^a = \infty$$

پس سری همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad \text{پس} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \text{ نیز واگراست پس سری به طور شرط همگراست.}$$

$$\textcircled{A} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} \rightarrow \text{سری متناوب}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0 \quad \text{پس سری واگراست}$$

$$\textcircled{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \quad \text{سری متناوب} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots \quad \text{پس سری متناوب است} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

$$a_n = \frac{1}{2n} \quad \text{تدریجی با جلات مثبت} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0 \rightarrow \text{پس سری همگراست}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \xrightarrow[\text{متا}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \text{واگراست}$$

پس سری به طور شرط همگراست.

$$\textcircled{10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{a}{n}, \quad a > 0 \quad a_n = \sin \frac{a}{n} \rightarrow (a_n)' = \frac{-a}{n^2} \cos \frac{a}{n} < 0 \quad \text{تدریجی با جلات مثبت}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{a}{n} \stackrel{\text{محدود}}{=} 0 \rightarrow \text{پس سری همگراست.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow[\text{متا}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} = 1 > 0 \rightarrow \text{واگراست}$$

پس سری به طور شرط همگراست

$$\textcircled{11} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{10}\right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{پس سری واگراست}$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}} \quad a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad \text{نسبتی با جلات مثبت}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0 \rightarrow \text{پس سری همگراست}$$

$$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{8}{9} < 1 \rightarrow \text{سری به طور مطلق همگراست}$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n} \quad a_n = \frac{n}{(n+1)e^n} \quad \text{نسبتی با جلات مثبت} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)e^n} = 0 \rightarrow \text{پس سری همگراست}$$

$$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)e^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(n+2)e^{n+1}}}{\frac{n}{(n+1)e^n}} \right| = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow \text{پس سری مطلقاً همگراست}$$

$$(14) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad a_n = \frac{1}{(2n)!} \quad \text{نسبتی با جلات مثبت} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)!} = 0 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{[2(n+1)]!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| = 0 < 1 \rightarrow \text{پس سری مطلقاً همگراست}$$

$$(15) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\ln n^2} \xrightarrow{\ln a^b = b \ln a} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2 \ln n} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$$

$$a_n = (-1)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \text{وجود ندارد} \rightarrow \text{پس سری دایگرام نیست}$$

$$\text{ریشه دوم: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow \text{پس سری دایگرام نیست}$$

$$(16) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n!)^2}{(2n)!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!n!}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)n!(n+1)n!}{(2n+2)(2n+1)2n!}}{\frac{n!n!}{(2n)!}} \right| = \frac{1}{4}$$

سری مطلقاً همگراست پس سری همگراست چون همگرا در مطلق همگرا را ایجاب می کند.

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+5^n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n+5^n}$$

پس سری همگراست  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n+5^n} = 0$  و نزولی با جملات مثبت (مخرج قویتر)  $\frac{2^n}{n+5^n}$  (هنگرا)  $r = \frac{2}{5}$  سری هندسی

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+5^n} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \frac{2^n}{n+5^n} < \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow \text{پس سری مورد نظر مطلقاً همگراست}$$

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2} \quad \left(\frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}\right)' < 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2} = 0 \rightarrow \text{پس سری همگراست}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} \right|_1^a = \text{عدد شود} \rightarrow \text{همگراست}$$

پس سری مورد نظر مطلقاً همگراست.

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{نزولی با جملات مثبت}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \rightarrow \text{پس سری همگراست}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[\text{مقایسه سری}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \text{واگرا (آزمون انتگرال)}$$

پس سری مورد نظر همگرا نیست.

$$(20) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)} \quad a_n = \frac{1}{\ln(n!)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n!)} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{\ln(n!)} \quad \text{نزولی با جملات مثبت}$$

پس سری همگراست

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \ln(n!) < n \rightarrow \frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n} \rightarrow \text{واگرا}$$

پس سری مورد نظر به شرط همگراست.

$$(21) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n^{10}} = \infty \neq 0 \rightarrow \text{پس سری واگراست}$$

حسن پور

حل تعدادی مثال هم از آزمون های مختلف :

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \frac{n}{3n+1} < \frac{n}{3n} \rightarrow \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ سری هندسی } r = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{پس سری همگراست}$$

$$\text{پس } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \text{ همگراست}$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tan(2^{-n} \ln n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1} \times 2}}{\frac{\ln n}{2^n}} \right| = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{پس همگراست}$$

$$\xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\ln n}{2^n}\right)}{\frac{\ln n}{2^n}} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sec^2(2^{-n} \ln n) = 1 > 0 \rightarrow \text{پس سری مورد نظر همگراست}$$

$$\textcircled{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{n+1}{n}}} \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{n+1}{n}}} = 1 > 0 \rightarrow \text{پس سری واگراست}$$

از آزمون اشتراکال نتیجه نمی شود واگراست

$$\textcircled{4} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \stackrel{\text{hop}}{=} 1 > 0 \rightarrow \text{سری مورد نظر همگراست}$$

همگرا (P=2، سری P)

$$\textcircled{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n} \quad a_n = \frac{A}{n2^n} - \frac{B}{2^n} \quad A: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} n2^n > 2^n \rightarrow \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n} \text{ (هندسی) همگراست}$$

B:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  سری هندسی با  $r = \frac{1}{2}$  همگراست

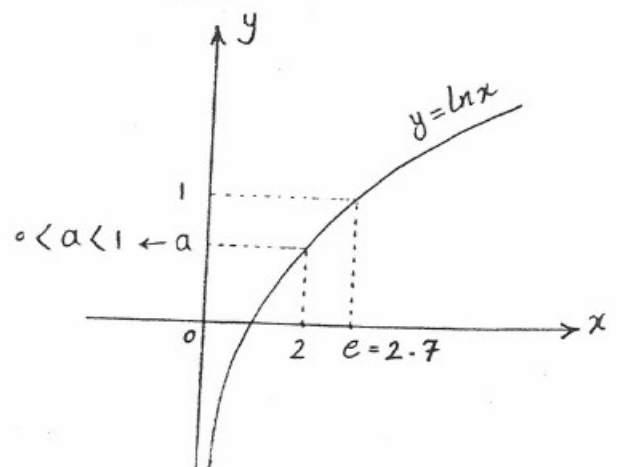
پس A همگراست

نکته: تفاضل دو سری همگرا، همگراست.

$$\textcircled{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n \text{ سری هندسی } r = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\ln 2 = a \stackrel{\text{مثلا}}{=} \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 > 1 \rightarrow \text{پس سری واگراست}$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

یک سری توانی نسبت به  $x$

نکته : قرارداد در سری که  $x^0 = 1$

نکته : سری توانی به طور کلی به ازای مقادیر خاصی از  $x$  همگرا به ازای سایر مقادیر واگرا می باشد.

قضیه ① (خاصیت همگرایی سری توانی) : هرگاه  $\sum a_n x^n$  سری توانی به ازای  $x = r$  ( $r \neq 0$ ) همگرا باشد، آنگاه

به ازای هر  $x$  که  $|x| < |r|$  به طور مطلق همگراست. هرگاه  $x = s$  واگرا باشد، آنگاه به ازای  $|x| > |s|$  نیز واگراست.

قضیه ② (بازدهی همگرایی یک سری توانی) : فرض کنیم  $I$  مجموعه ای تمام نقاط  $x$  باشد که به ازای آن که سری توانی  $\sum a_n x^n$

همگراست در این صورت،  $I$  بازه ای است که ۰ نقطه ای میانی آن است. (چون هر سری توانی به ازای  $x=0$  همگراست)

نتایج قضیه ② :

۱. اگر سری نقطه به ازای  $x=0$  همگرا باشد، آنگاه بازدهی همگرایی آن  $[0, \infty)$  است که نقطه شامل  $x=0$  است.

۲. اگر سری به ازای هر  $x$  مطلقاً همگرا باشد، آنگاه بازدهی همگرایی  $(-\infty, \infty)$  است.

۳. اگر سری به ازای مقادیر خاصی از  $x$  همگرا به ازای سایر مقادیر واگرا باشد در این صورت  $I$  یک بازه متناهی به شکل

$(-R, R)$ ،  $[-R, R]$ ،  $(-R, R]$ ،  $[-R, R)$  که  $R > 0$  است. در نتیجه  $x = \pm R$  باید جداگانه

بررسی شود.

شعاع همگرایی : عدد  $R$  در حالت ۳ را شعاع همگرایی سری توانی  $\sum a_n x^n$  گویند. در حالت ۱  $R=0$  است و در

حالت ۲  $R=\infty$  است.

در بررسی سری های توانی از آزمون های نسبت و ریش، محضراً نسبت استفاده می شود.



در سری توانی به شکل  $\sum a_n(x-c)^n$  (c ثابت و درخواه) سه حالت زیر وجود دارد. (یک سری توانی نسبت به (x-c))  
 ۱. سری نقطه ای از این  $x=c$  همگراست و در این صورت بازه همگرایی I به بازه  $[c, c]$  تبدیل می شود که تنها شامل نقطه  $c$  می باشد. ( $R=0$ )

۲. سری به ازای همه  $x$  (به طور مطلق) همگراست و در این صورت بازه همگرایی  $(-\infty, +\infty)$  است ( $R=\infty$ )

۳. سری به ازای بعضی مقادیر  $x$  که برابر  $c$  نیستند همگرا بوده و به ازای سایر مقادیر واگراست. در این صورت یک بازه

تفاضلی به حالت های  $(c-R, c+R)$ ،  $[c-R, c+R)$ ،  $(c-R, c+R]$ ،  $[c-R, c+R]$  است.  
 (به نقطه  $x = c \pm R$  جواب نه برسی شوند) ( $R$  شعاع همگرایی است)

نکته:  $R$  (شعاع همگرایی) همواره نصف طول بازه همگرایی است.

نکته: طول بازه  $[c, c]$  همگراست و طول  $(-\infty, +\infty)$ ،  $\infty$  است.

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(n+1)^2}$$

مثال: بازه و شعاع همگرایی سری که ی توانی زیر را برسی کنید.

آزمون نسبت:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} 5^n (n+1)^2}{5^{n+1} (n+2)^2 x^n} \right| = \frac{|x|}{5}$

طبق قضیه ۱:  $\begin{cases} \text{سری مطلقاً همگراست} & |x| < 5 \\ \text{سری واگراست} & |x| > 5 \end{cases}$

پس:  $R=5$  همگرا  $\begin{cases} x=5 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ x=-5 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \end{cases}$

بازه همگرایی:  $[-5, 5]$

مطلقاً همگراست

نکته دار  
 ۷  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n}$

آزمون ریشه:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} |x|^2 = 0$

شعاع همگرایی:  $\infty$  بازه همگرایی:  $(-\infty, +\infty)$

این سری به ازای همه  $x$  به طور مطلق همگراست.

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+1} \quad \text{یک سری توانی نسبت به } x-6 \quad \lim \left| \frac{(x-6)^{n+1}}{(n+2)(x-6)^n} \right| = |x-6| \quad \begin{cases} |x-6| < 1 & \text{گرا} \\ |x-6| > 1 & \text{دگرا} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 < x < 7 & \text{گرا} \\ x > 7 \text{ و } x < 5 & \text{دگرا} \end{cases} \quad \text{if: } x=7 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow \text{دایره} \\ \text{if: } x=5 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \rightarrow \text{بدر شرط گرا}$$

$$\text{بازه گرا: } [5, 7) \rightarrow \text{شعاع گرا: } R=1$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+7)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+7)^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+7|}{n+1} = 0 \quad \text{به ازای هر عدد حقیقی گراست}$$

$$(5) \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} x^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\ln n} x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} |x| = |x|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = \infty^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n} \ln n} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \ln n}{1}} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$$

$$\begin{cases} |x| > 1 & \text{دگرا} \\ |x| < 1 & \text{گرا} \end{cases} \rightarrow \text{if: } x = \pm 1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n \cdot \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\ln n)^2} = \infty \neq 0 \quad \text{دگرا}$$

$$\text{بازه گرا: } (-1, 1) \quad \text{شعاع گرا: } R=1$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!(n+4)!} x^n \quad \text{نسبت: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+3)! x^{n+1}}{(n+1)!(n+5)!}}{\frac{(n+2)! x^n}{n!(n+4)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)x}{(n+1)(n+5)} = 0 < 1$$

به ازای هر عدد حقیقی گراست.

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|e^{n^2} (x+e)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n |x+e| = \infty$$

$$\text{پس } x+e=0 \leftarrow \text{نقطه دایره گرا: } x=-e$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-4)^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{(x-4)^{n^2}}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x-4|^{2n+1} = 0$$

به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ، گراست.

حسن پور

$$\textcircled{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} \Rightarrow |x| < 2$$

$$\text{if: } x=2 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \xrightarrow[r=2]{\text{درگرا}} \text{باز می ماند}$$

$$\text{if: } x=-2 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^2} 2^n \quad \text{درگرا (مقادیر ثابت)} \quad \text{باز می ماند} \quad (-2, 2) \quad \text{شعاع همگرایی } R=2$$

$$\textcircled{10} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}}{\frac{\ln n}{n} x^n} \right| = |x| < 1 \quad \text{همگرا}$$

$$\text{if: } x=1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \quad \text{آزمون مقادیر} \quad \begin{cases} \frac{\ln n}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \end{cases} \quad \text{همگرایی}$$

$$\text{if: } x=-1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{\ln n}{n} \quad \text{درگرا}$$

توجه: نیازی به همگرایی شروط و مطلق

$$\text{در اینجا همگرایی چون شرط مطلق.} \quad R=1 \quad \text{شعاع همگرایی} \quad \text{باز می ماند: } [-1, 1]$$

$$\textcircled{11} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n^2} \right) x^n \quad \text{از دیگری تقسیم شد} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n \quad \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}$$

$$I_1: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n x^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x|}{n^{1/n}} = 3|x| < 1 \xrightarrow{\text{همگرا}} |x| < \frac{1}{3}$$

$$I_2: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n x^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x|}{n^{2/n}} = 2|x| < 1 \xrightarrow{\text{همگرا}} |x| < \frac{1}{2}$$

استمرار  
همگرایی

$$|x| < \frac{1}{3}$$

$$\text{if } x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{آزمون مقادیر}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n n^2} \rightarrow \text{همگرایی شرط} \quad \begin{matrix} \text{همگرا شرط} \\ \text{همگرا مطلق} \end{matrix}$$

$$\text{if } x = \frac{1}{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n^2} \rightarrow \text{درگرا} \quad \begin{matrix} \text{درگرا} \\ \text{همگرا} \end{matrix}$$

$$\text{باز می ماند همگرایی: } \left[ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{شعاع همگرایی } R = \frac{1}{3}$$

$$(12) \sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\dots+2^n) x^n \xrightarrow{\text{آرین نسبت}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+2+\dots+2^{n+1}) x^{n+1}}{(1+2+\dots+2^n) x^n} \right| \Rightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

$$\text{if } x = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2+\dots+2^n}{2^n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0 \text{ راکرا}$$

$$\text{if } x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{جاندها} \rightarrow \text{راکرا} \quad \text{بازهی همگرایی: } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{شعاع همگرایی: } R = \frac{1}{2}$$

$$(13) \sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n (x-1)^n} = 2|x-1| \rightarrow |x-1| < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\text{if } x = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ راکرا} \quad \text{بازهی همگرایی: } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{if } x = \frac{3}{2} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1 \text{ راکرا} \quad \text{شعاع همگرایی: } R = \frac{1}{2}$$

$$(14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(x+1)^n}{n \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+1|}{\sqrt[n]{n \ln n}} = |x+1|$$

$$|x+1| < 1 \xrightarrow{\text{همگرا}} -1 < x+1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0$$

$$x = -2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آرین نسبت}} \begin{cases} \frac{1}{n \ln n} \text{ نزولی مثبت} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0 \end{cases} \quad \text{همگرا (شرط)}$$

$$x = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \xrightarrow{\text{آرین انتگرال}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^a = \infty \text{ راکرا}$$

$$\text{بازهی همگرایی: } [-2, 0) \quad \text{شعاع همگرایی: } R = 1$$

$$\text{مقدار: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n \ln n)^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\infty)^0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \ln(n \ln n)}} \rightarrow L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n \ln n)}{n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n + 1}{n \ln n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} \right) = 0$$

$$\text{و نیز: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

۱۵)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^n$  .  $\frac{x+2}{x-1}$  تعریف نشده است.  $x=1$  سری را برای  $x=1$  ، اگر است زیرا برای  $x=1$  ،  $\frac{x+2}{x-1}$  تعریف نشده است.

$$\text{نیز: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \left| \frac{x+2}{x-1} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{x+2}{x-1} < 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} < 1 \xrightarrow{\text{اگر تعیین علامت شود}} x < 1 \\ \frac{x+2}{x-1} > -1 \xrightarrow{\text{اگر تعیین علامت شود}} x > 1 \text{ یا } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

if  $x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$   $\xrightarrow{\text{آزمون سری متناوب}}$   $\text{سری همگرا}$

if  $x = -1 \rightarrow \text{سری متناوب}$   $x \leq -\frac{1}{2}$   $\text{سری همگرا}$

$$۱۶) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n! x^n}{n^n}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1} n!}$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = |x| e^{-1} < 1 \Rightarrow |x| < e \Rightarrow -e < x < e$$

if  $x = e \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n} \xrightarrow{\text{با توجه به اینکه } n! e^n > n^n} = \infty$   $\text{و اگر}$

if  $x = -e \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n n!}{n^n} \xrightarrow{\text{آزمون نسبت سری متناوب جواب نمی دهد}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{e^n n!}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e \sqrt[n]{n!}}{n}$

$\text{نیمه تغییرات} \rightarrow \text{همگرا مطلق } 1 < 0$   $R = e$   $[-e, e]$   $\text{بازی همگرا}$

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n} = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\text{if } x=1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \quad \text{دائرا}$$

بازدهی همگرایی:  $(-1, 1)$

$$\text{if } x=-1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \quad \text{دائرا}$$

$R=1$  شعاع همگرایی

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2n+2)(2n+2)}{2} x^{2n+2}}{\frac{2n+2}{2} x^{2n}} \right| = 4|x|^2 < 1 \Rightarrow |x|^2 < \frac{1}{4} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{if } x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \text{همگرایی شرطی}$$

$$\text{بازدهی همگرایی: } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad R = \frac{1}{2} \text{ شعاع همگرایی}$$

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} (x-3)^{n+1}}{n(n+1)} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{2n+1} (x-3)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2^{2n-1} (x-3)^{n+1}}{n(n+1)}} \right| = 4|x-3| < 1$$

$$-\frac{1}{4} < x-3 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{11}{4} < x < \frac{13}{4}$$

$$\text{if } x = \frac{13}{4} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n(n+1)} \times \frac{1}{2^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-1}}{n(n+1) 2^{2n} \times 2^2}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{همگرا}$$

$$\text{if } x = \frac{11}{4} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} (-1)^{n+1}}{n(n+1) 4^{n+1}} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \text{همگرایی شرطی}$$

$$\text{بازدهی همگرایی: } \left[\frac{11}{4}, \frac{13}{4}\right] \quad R = \frac{1}{4} \text{ شعاع همگرایی}$$

$$(۲۰) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} x^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x^n e^{-\sqrt{n}}|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

if  $x=1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{تاب اوجات}]{\text{آزمون ریشه}} \text{سری هارمات}$

if  $x=-1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}} \rightarrow e^{-\sqrt{n}}$  شرط مثبت  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$  (با سری متناوب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$   
 $R=1$  شعاع همگرایی : بازه همگرایی  $[-1, 1]$

$$(۲۱) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n} = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = |x-1| e$$

$$\Rightarrow |x-1| e < 1 \Rightarrow \frac{1}{e} < x-1 < \frac{1}{e} \Rightarrow 1 - \frac{1}{e} < x < 1 + \frac{1}{e}$$

if  $x = 1 - \frac{1}{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0 \rightarrow \text{درازا}$

if  $x = 1 + \frac{1}{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0 \rightarrow \text{درازا}$

بازه همگرایی :  $\left(1 - \frac{1}{e}, 1 + \frac{1}{e}\right)$  شعاع همگرایی  $R = \frac{1}{e}$

$$(۲۲) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n (1+\sqrt{n})} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{3^n (1+\sqrt{n})} \right|} = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\sqrt{n}}} = \frac{|x|}{3}$$

$$\frac{|x|}{3} < 1 \rightarrow -3 < x < 3$$

if  $x=3 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$  شرط مثبت  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$

if  $x=-3 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \xrightarrow[\sum \frac{1}{n}]{\text{آزمون مقایسه سری}} \text{درازا}$

بازه همگرایی :  $(-3, 3)$  شعاع همگرایی  $R=3$

سری تیلور:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

و اگر  $a=0$  سری را سری مکلاورن می نامند داریم:

$$\textcircled{1} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

\* روابط مختلفی که باید حفظ شوند:

$$\textcircled{2} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\textcircled{3} \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\textcircled{4} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\textcircled{5} \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\textcircled{6} \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\textcircled{7} \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{3}$$

$$\textcircled{8} \frac{1}{1+x} = ? \xrightarrow[\text{در رابطه 1 جای } x \text{ بگذاریم}]{\text{در رابطه 1 جای } -x \text{ بگذاریم}} \frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\textcircled{9} \frac{1}{1-x^2} = ? \xrightarrow[\text{در رابطه 1 جای } x^2 \text{ بگذاریم}]{\text{در رابطه 1 جای } x \text{ بگذاریم}} \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{1+x^2} = ? \xrightarrow[\text{در رابطه 1 جای } -x^2 \text{ بگذاریم}]{\text{در رابطه 1 جای } x \text{ بگذاریم}} \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\textcircled{11} \ln(1+x) = ? \xrightarrow[\text{انتگرال می گیریم}]{\text{در رابطه 8}} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\textcircled{12} \ln \frac{1+x}{1-x} = ? \xrightarrow[\text{انتگرال می گیریم}]{\text{در رابطه 9}} \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\textcircled{13} \tan^{-1} x = ? \xrightarrow[\text{انتگرال می گیریم}]{\text{در رابطه 10}} \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\textcircled{14} \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}} \xrightarrow[\text{در رابطه 1}]{\text{در رابطه 1}} \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right), \quad |x| < a$$

حسن پور



$$\textcircled{1} f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

مثال: سری مکملین توابع زیر را بیابید.

$$\sin x = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\textcircled{2} f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1 \quad f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$$

$$f(x) = e^x = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\textcircled{3} f(x) = e^{1/2} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \dots \quad \text{سری لوران}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{e^{-x}}{x^3} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots \quad \text{سری لوران}$$

$$\xrightarrow{\div x^3} \frac{e^{-x}}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-3}}{n!} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6} + \frac{x}{24} - \dots$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\cos 2x}{x^2} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \rightarrow \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots$$

$$\xrightarrow{\div x^2} \frac{\cos 2x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - 2 + \frac{2x^2}{3} - \frac{4x^4}{25} + \dots \quad \text{سری لوران}$$

$$\textcircled{6} f(x) = \cos^2 x \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\textcircled{7} f(x) = \frac{\sin x}{x^3} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

سری لوران

$$\xrightarrow{\div x^3} \frac{\sin x}{x^3} = \frac{1}{x^3} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \dots$$

①  $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$  حل  $x=0$

بهری لوران

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \rightarrow x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

$$\div x^3 \rightarrow \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots$$

⑨  $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$   $x = \pi$  حل  $\frac{\sin x}{x - \pi} = \frac{\sin[(x - \pi) + \pi]}{x - \pi} \xrightarrow{\text{رابط}} \frac{-\sin(x - \pi)}{x - \pi}$

⑩ رابط  $\frac{-1}{x - \pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{-1}{x - \pi} \left[ (x - \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$

$$= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi)^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - \pi)^{2n}}{(2n+1)!}$$

چون برای  $n=0$  جمله  $-1$  می شود پس  
-۱ را داخل سری می آوریم

⑩  $f(x) = \frac{1-2x}{x^4-1}$   $\frac{1}{1-x^4} \xrightarrow{\text{رابط}} \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$

از طرفی  $f(x) = \frac{1-2x}{x^4-1} = (2x-1) \frac{1}{1-x^4} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$

⑪  $f(x) = \int_0^x \sin^3 t dt$   $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t \rightarrow \sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$

$$\sin^3 t = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

حال با اشتغال گیری از طرفین داریم:

$$f(x) = \int_0^x \sin^3 t dt = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+2)} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)!}$$

⑫ سری توانی به دست آورید که  $\ln(1+x)$  را نمایش دهد؟

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n \quad |t| < 1$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \Big|_0^x \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

(77)  $\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$  حسن پور

$$(13) f(x) = \ln(1+x^2) \xrightarrow{\text{برای مشتق تابع}} f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{\text{رابطه (10)}} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{x \cdot 2x}{1+x^2} \rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 2 \left[ x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^n x^{2n+1} + \dots \right]$$

$$\xrightarrow[\text{یک طرفین انتگرال}]{\text{از طرفین انتگرال}} \int_0^x \frac{2x}{1+x^2} dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$(14) \text{تابع } E \text{ با ضابطه } E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{تابع خطای نام دارد، سری تکسین تابع خطا را باید}$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \quad -\infty < u < +\infty$$

$$u = -t^2 \xrightarrow{\text{آرزش کنیم}} e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots \quad -\infty < t < +\infty$$

طرفین را به  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$  ضرب می‌کنیم و از طرفین انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \times 2!} - \frac{t^7}{7 \times 3!} + \frac{t^9}{9 \times 4!} - \dots \right) \Big|_0^x$$

$$\rightarrow E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

تقریب (تقریبی درجه اول) :

اگر  $m$  عدد صحیح دلخواهی باشد آنگاه به ازای تمام مقادیری از  $x$  که در  $|x| < 1$  صادق باشند داریم :

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

که اگر  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد سری دو جمله ای بعد از تعدادی قسما حین جمله خاتمه می یابد.

مثال : عبارات زیر را به صورت یک سری توانی بر حسب  $x$  بیان کنید.

$$\textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad |x| < 1 \quad (1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\dots}{n!} x^n$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \times \frac{3}{2}}{2!} x^2 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2^4 \cdot 4!} x^4 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \times 3}{2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n (1)(3)(5)\dots(2n-1)}{2^n n!} x^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)(3)(5)(7)\dots(2n-1)}{n! 2^n} x^n$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \quad |x| < 1 \quad \frac{1}{(1-x)^3} \xrightarrow{\text{در فرمول}} \begin{cases} m = -3 \\ x \rightarrow -x \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-4)(-5)\dots(-3-n+1)}{n!} (-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-4)(-5)\dots(-1)^n}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+2)}{1 \times 2 \cdot n!} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2(n!)} x^n \quad |x| < 1 \quad \xrightarrow{\text{طرفین را در } x^3 \text{ ضرب می کنیم}}$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2(n!)} x^{n+3}$$

حسن پور

$$(1-x^2)^{-1/2} \quad |x| < 1 \quad \xrightarrow{\text{در سری}} \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ x \rightarrow -x^2 \end{cases}$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x^2)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \times 3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \cdot 3!} x^6 + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + \dots$$

$$\text{چون: } (1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \xrightarrow{\text{از طریق سری بدست آید}} \text{انتگرال می گیریم}$$

$$\int_0^x (1-x^2)^{-1/2} dx = x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{(1)(3)}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} + \frac{(1)(3)(5)}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(1)(3)(5) \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(3)(5) \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

(۴) یک سری برای  $(1-x^2)^{-1/2}$  بدست آوردیم و به کمک آن یک سری توانی برای  $\sin^{-1} x$  بدست آوردیم. (چل بالا ↑)

$$\textcircled{1} \frac{1}{(1+x)^2} \quad \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

بائنومینل تھیوری کے طریقے سے

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \xrightarrow{x(-1)} \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$$

$$\textcircled{2} \frac{-x}{(1-x^2)^2} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \rightarrow x^2} \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

زیر طرہ سے مشتق کریں

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n-1} \xrightarrow{x \frac{1}{2}} \frac{x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n-1}$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \xrightarrow{\text{تجزیہ کر کے}} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2(\frac{x}{2}-1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \quad \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right] x^n$$

$$\textcircled{4} f(x) = 2^x \rightarrow e^{\ln f(x)} = f(x) \quad e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2} \rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow x \ln 2}$$

$$e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n 2^n}{n!}$$

$$\textcircled{5} \ln x \rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} \ln(1+x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}$$

$$\textcircled{9} \ln(1-x+x^2) \rightarrow \ln\left[(1-x+x^2)\left(\frac{1+x}{1+x}\right)\right] = \ln \frac{1+x^3}{1+x} = \ln(1+x^3) - \ln(1+x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$


---

$$\textcircled{10} f(x) = x e^{1-\cos x} \rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots$$

$$e^x \xrightarrow{x \rightarrow 1-\cos x} 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 + \dots$$

$$x e^{1-\cos x} = x \left[ 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 + \dots \right]$$


---

$$\textcircled{11} \ln(x^2+2x+2) = \ln[(x+1)^2+1]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \xrightarrow{x \rightarrow (x+1)^2} \ln[1+(x+1)^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x+1)^{2n}}{n}$$


---

$$\textcircled{12} \frac{x}{2x+1} \rightarrow \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \rightarrow -2x} \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\xrightarrow{x \times (-2)^n} \frac{x}{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{n+1}$$


---

$$\textcircled{13} f(x) = x e^{x^2} \rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \xrightarrow{x \times x} x e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$


---

# حل سوالات گروه ریاضی

①  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$   $x = \frac{1}{t} \rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2}$  (a) اشتغال های نامعین زیر را می سنجید.

$$\int \frac{-dt}{t^2 \frac{1}{t} \sqrt{(\frac{1}{t})^2 + \frac{2}{t} - 1}} = - \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1+2t-t^2}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2-2t-1+1-1)}}$$

$$\frac{t^2-2t+1=(t-1)^2}{\rightarrow} = - \int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} \begin{cases} t-1=u \\ dt=du \end{cases} \rightarrow = - \int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = - \int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-u^2}}$$

$$= - \sin^{-1} \frac{u}{\sqrt{2}} = - \sin^{-1} \left( \frac{t-1}{\sqrt{2}} \right) = - \sin^{-1} \left( \frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}} \right) = - \sin^{-1} \left( \frac{1-x}{x\sqrt{2}} \right) + C$$

⑦  $I = \int \frac{x'' dx}{x^8+x^4-2} = \int \frac{x^3(x^4)^2 dx}{(x^4)^2+x^4-2} \begin{cases} x^4=u \\ 4x^3 dx=du \end{cases} \rightarrow = \frac{1}{4} \int \frac{u^2 du}{u^2+u-2}$

عمل تقسیم  $\frac{u^2}{u^2+u-2} = 1 + \frac{2-u}{u^2+u-2} \rightarrow \frac{1}{4} \int du + \frac{1}{4} \int \frac{(2-u)du}{u^2+u-2}$   $\frac{2-u=-(u-2)}$

$\frac{1}{4} \int du - \frac{1}{4} \int \frac{u-2}{u^2+u-2} du$   $I_1 = \int \frac{(u-2)du}{u^2+u-2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2u-4)du}{u^2+u-2}$

$= \frac{1}{2} \int \left( \frac{2u+1}{u^2+u-2} \right) du - \frac{1}{2} \int \frac{5du}{u^2+u-2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \ln|u^2+u-2| - \frac{5}{2} \int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$

$= \frac{1}{2} \ln|u^2+u-2| - \frac{5}{2} \times \frac{1}{2 \times \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{u+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{u+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} \right|$

$\xrightarrow{\sigma_1} I = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \ln|u^2+u-2| - \frac{5}{6} \ln \left| \frac{u-1}{u+2} \right| \right] + C$

$\rightarrow I = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \ln|x^8+x^4-2| - \frac{5}{6} \ln \left| \frac{x^4-1}{x^4+2} \right| \right] + C$

حسن پور



$$\textcircled{v} \int \frac{\cos x}{1-\cos x} dx \rightarrow \int \frac{\cos x dx}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \rightarrow I = \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$I = \underbrace{\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int \cot^2 x dx}_{I_2} \quad I_1 = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \begin{cases} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{cases} \rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{\sin x} + C_1$$

$$I_2 = \int (\cot^2 x + 1) dx = -\cot x - x + C_2 \rightarrow I = \frac{-1}{\sin x} - \cot x - x + C$$

$$\textcircled{v} I = \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x} \begin{cases} dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, u = \tan \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2(2u)}{1+u^2} + \frac{3(1-u^2)}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{4u+3-3u^2} = 2 \int \frac{du}{-3(u^2 - \frac{4}{3}u - 1)} = \frac{-2}{3} \int \frac{du}{u^2 - \frac{4}{3}u - 1 + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{-2}{3} \int \frac{du}{(u - \frac{2}{3})^2 - \frac{13}{9}} \begin{cases} u - \frac{2}{3} = t \\ du = dt \end{cases} = \frac{-2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - (\frac{\sqrt{13}}{3})^2} = \frac{-2}{3} \times \frac{1}{\frac{2\sqrt{13}}{3}} \ln \left| \frac{t - \frac{\sqrt{13}}{3}}{t + \frac{\sqrt{13}}{3}} \right| + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{-1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{u - \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}}{u - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}} \right| + C = \frac{-1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - (\frac{2+\sqrt{13}}{3})}{\tan \frac{x}{2} - (\frac{2-\sqrt{13}}{3})} \right| + C$$

$$\textcircled{v} I = \int \ln(x + \sqrt{x}) dx = \int \ln((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}) dx = \int \ln[\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)] dx$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \rightarrow I = \underbrace{\int \ln \sqrt{x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \ln(\sqrt{x} + 1) dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \ln \sqrt{x} dx \begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \rightarrow dx = 2t dt \end{cases} \rightarrow I_1 = \int \ln t (2t) dt \begin{cases} \ln t = u \rightarrow \frac{dt}{t} = du \\ 2t dt = dv \rightarrow t^2 = v \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1 = \int 2t \ln t dt = t^2 \ln t - \int t dt = t^2 \ln t - \frac{t^2}{2} + C_1 \rightarrow I_1 = x \ln \sqrt{x} - \frac{x}{2} + C_1$$

$$I_2 = \int \ln(\sqrt{x} + 1) dx \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = z \rightarrow \sqrt{x} = z - 1 \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dz \rightarrow dx = 2(z-1) dz \end{cases} \rightarrow I_2 = \int 2(z-1) \ln z dz$$

$$\begin{aligned} \text{جزء ۱} \rightarrow \begin{cases} 2(z-1)dz = dv \rightarrow z^2 - 2z = v \\ \ln z = u \rightarrow \frac{dz}{z} = du \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightarrow I_2 = (z^2 - 2z) \ln z - \int (z-2) dz = (z^2 - 2z) \ln z - \frac{z^2}{2} + 2z + C_2$$

$$\rightarrow I_2 = \left[ (\sqrt{x}+1)^2 - 2(\sqrt{x}+1) \right] \ln(\sqrt{x}+1) - \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2} + 2(\sqrt{x}+1) + C_2 \quad I = I_1 + I_2$$

$$\textcircled{4} \int x^{4x} (1 + \ln x) dx \quad \text{حل: } \begin{cases} x^{4x} = e^{\ln x^{4x}} = e^{4x \ln x} \\ e^{\ln f(x)} = f(x) \end{cases}$$

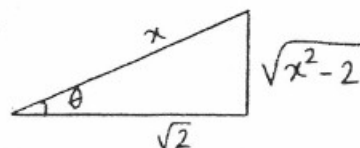
$$= \int e^{4x \ln x} (1 + \ln x) dx \quad \begin{matrix} u = x \ln x \\ du = (1 + \ln x) dx \end{matrix} \rightarrow \int e^{4u} du = \frac{1}{4} e^{4u} + C = \frac{1}{4} e^{4x \ln x} + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \sec \theta \rightarrow dx = \sqrt{2} \sec \theta \tan \theta d\theta \\ x > \sqrt{2} \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ x \leq \sqrt{2} \rightarrow \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \int \frac{2 \sec^2 \theta \times \sqrt{2} \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{2 \sec^2 \theta - 2}} = 2 \int \frac{\sec^3 \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}} = 2 \int \sec^3 \theta d\theta \quad \begin{matrix} \int \sec^3 \theta d\theta \\ \text{جزء ۱ حل شده است} \end{matrix}$$

$$= \tan \theta \sec \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}} \times \frac{x}{\sqrt{2}} + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}} \right| + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| - \underbrace{\ln \sqrt{2}}_{C_1} + C$$



$$\textcircled{6} I = \int e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \underbrace{\int \frac{e^{-x}}{x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{e^{-x}}{x^2} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{e^{-x}}{x} dx \quad \begin{cases} e^{-x} = u \rightarrow -e^{-x} dx = du \\ \frac{dx}{x} = dv \rightarrow \ln x = v \end{cases} \rightarrow I_1 = e^{-x} \ln x + \int \ln x e^{-x} dx$$

$$I_2 = \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{-x} = u \rightarrow -e^{-x} dx = du \\ \frac{dx}{x^2} = dv \rightarrow \frac{-1}{x} = v \end{array} \right. \rightarrow I_2 = -\frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{e^{-x}}{x} dx \quad I_1 \text{ or } I_2$$

$$I_2 = -\frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \ln x - \int \ln x e^{-x} dx$$

$$I = I_1 + I_2 = \cancel{e^{-x} \ln x} + \int \cancel{\ln x e^{-x}} dx - \frac{e^{-x}}{x} - \cancel{e^{-x} \ln x} - \int \cancel{\ln x e^{-x}} dx$$

$$\rightarrow I = \int e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{e^{-x}}{x} + C$$

$$\textcircled{9} \int \sqrt{\tan x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{\tan x} \\ t^2 = \tan x \rightarrow 2t dt = \sec^2 x dx \rightarrow dx = \frac{2t dt}{1+t^4}, \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \end{array} \right.$$

$$I = 2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^4} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^4+1+2t^2-2t^2} = 2 \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2-2t^2} = \int \frac{2t^2 dt}{(t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t)}$$

أكابر زوج

$$\xrightarrow{\text{تجزئة}} \frac{2t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$= \frac{At^3 - \sqrt{2}At^2 + At + Bt^2 - \sqrt{2}Bt + B + Ct^3 + \sqrt{2}Ct^2 + Ct + Dt^2 + \sqrt{2}Dt + D}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+C=0 \rightarrow -A=C \rightarrow A = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=2 \rightarrow \sqrt{2}C-\cancel{\sqrt{2}A}+\sqrt{2}C+\cancel{D}=2 \rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \rightarrow -C+\sqrt{2}D+C+\sqrt{2}D=0 \rightarrow D=0 \\ B+D=0 \rightarrow B=-D \rightarrow B=0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{2t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \frac{\frac{-t}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$I = \int \frac{\frac{-t}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt + \int \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt$$

$$\rightarrow I = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(2t+\sqrt{2})}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(2t-\sqrt{2})}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$\text{for } I_1: \begin{cases} t^2+\sqrt{2}t+1=u \\ (2t+\sqrt{2})dt=du \end{cases} \rightarrow I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln |t^2+\sqrt{2}t+1| + C_1$$

$$\text{for } I_2: \int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \tan^{-1} \left( \frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}t+1) + C_2$$

$$\text{for } I_3: \begin{cases} t^2-\sqrt{2}t+1=u \\ (2t-\sqrt{2})dt=du \end{cases} \rightarrow I_3 = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln |t^2-\sqrt{2}t+1| + C_3$$

$$\text{for } I_4: \int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \int \frac{dt}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}t-1) + C_4$$

$$I = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \ln |t^2+\sqrt{2}t+1| + \frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}t+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |t^2-\sqrt{2}t+1| + \frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}t-1) + C$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{2} \tan x + 1}{\tan x + \sqrt{2} \tan x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \tan^{-1}(\sqrt{2} \tan x + 1) + \tan^{-1}(\sqrt{2} \tan x - 1) \right] + C$$

$$\textcircled{10} \int \frac{x^4 dx}{1+x^{10}} \quad \begin{cases} x^5 = u \rightarrow 5x^4 dx = du \\ x^4 dx = \frac{du}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{5} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{5} \tan^{-1} x^5 + C$$

$$\textcircled{11} I = \int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx \quad \begin{cases} \tan^{-1} x = u \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ \frac{dx}{x^2} = dv \rightarrow \frac{-1}{x} = v \end{cases} \rightarrow I = \frac{-\tan^{-1} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$I = -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C = -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| + C$$

$$(12) I = \int \frac{x^4}{x^3-1} dx \xrightarrow{\text{قسم}} I = \int \left( x + \frac{x}{x^3-1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{x dx}{x^3-1} \quad I_1$$

$$I_1: \frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3 \\ C = 1/3 \end{cases}$$

$$I_1 = \int \frac{1/3 dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx \quad I_2$$

$$I_2 = \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{x dx}{x^2+x+1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} - \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C_1$$

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$(16) \int \frac{2^x}{8^x-1} dx = \int \frac{2^x dx}{(2^x)^3-1} \rightarrow \begin{cases} 2^x = u \\ 2^x \ln 2 dx = du \end{cases} \rightarrow I = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{du}{u^3-1} \xrightarrow{\text{قسم}}$$

$$\frac{1}{u^3-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1} \quad \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3 \\ C = -2/3 \end{cases} \rightarrow I = \frac{1}{\ln 2} \int \left( \frac{1/3}{u-1} - \frac{1/3 u + 2/3}{u^2+u+1} \right) du$$

$$= \frac{1}{3 \ln 2} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{3 \ln 2} \int \frac{u+2}{u^2+u+1} du \quad I_1$$

$$I_1: \int \frac{u+2}{u^2+u+1} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u+1+3}{u^2+u+1} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u+1}{u^2+u+1} du + \frac{3}{2} \int \frac{du}{(u+1/2)^2 + \frac{3}{4}}$$

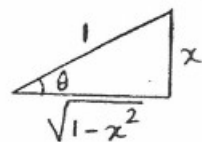
$$= \frac{1}{2} \ln|u^2+u+1| + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{u+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C_1$$

$$I = \frac{1}{3 \ln 2} \ln|u-1| - \frac{1}{3 \ln 2} \left[ \frac{1}{2} \ln|u^2+u+1| + \frac{3}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) \right] + C$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{3 \ln 2} \ln|2^x-1| - \frac{1}{6 \ln 2} \ln|2^{2x}+2^x+1| - \frac{1}{\sqrt{3} \ln 2} \tan^{-1}\left(\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$(13) I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

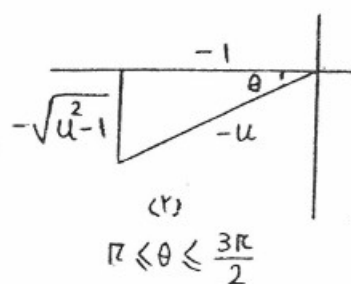
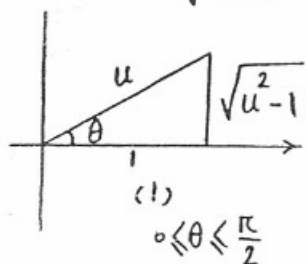
$$\text{Let } I_1: \begin{cases} x = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \end{cases} \rightarrow I_1 = \int \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + C_1$$



$$\rightarrow I_1 = -\sqrt{1-x^2} + C_1 \rightarrow I = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$(14) I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{(x+1)^2-1}} \quad \begin{cases} x+1=u \\ dx=du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{du}{u^3 \sqrt{u^2-1}} \quad \begin{cases} u = \sec \theta \\ du = \sec \theta \tan \theta d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec^3 \theta \sqrt{\sec^2 \theta - 1}} = \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} = \int \cos^2 \theta d\theta = \int \left( \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C$$



$$\begin{cases} \text{نک (1)}: \theta = \sec^{-1} u \\ \text{نک (2)}: \theta = 2\pi - \sec^{-1} u \end{cases}$$

$$\text{در اینجا} \quad \begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \\ \cos \theta = \frac{1}{u} \end{cases}$$

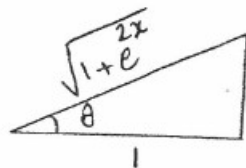
$$I = \begin{cases} \frac{1}{2} \sec^{-1} u + \frac{\sqrt{u^2-1}}{2u} \times \frac{1}{u} + C & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} (2\pi - \sec^{-1} u) + \frac{\sqrt{u^2-1}}{2u} \times \frac{1}{u} + C & \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2} \sec^{-1}(x+1) + \frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{2(x+1)^2} + C & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} [2\pi - \sec^{-1}(x+1)] + \frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{2(x+1)^2} + C & \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$(15) I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(\sinh x + \cosh x)^2}} \quad \text{نک: } \sinh x + \cosh x = e^x$$

$$\rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(e^x)^2}} \quad \begin{cases} e^x = \tan \theta \\ e^x dx = \sec^2 \theta d\theta \rightarrow dx = \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta \sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta \sec \theta} = \int \frac{\sec \theta d\theta}{\sin \theta} = \int \csc \theta d\theta = -\ln |\csc \theta + \cot \theta| + C$$



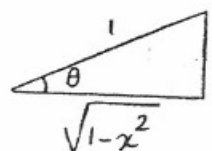
$$e^x \rightarrow I = -\ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1}{e^x} \right| + C$$

$$\textcircled{1A} \int \frac{dx}{x(1-x^2)^{3/2}} \quad \begin{cases} x = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \end{cases} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta (1-\sin^2 \theta)^{3/2}} = \int \frac{d\theta}{\sin \theta \cos^2 \theta} \times \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$$

$$I = \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \int \frac{\sin \theta d\theta}{(1-\cos^2 \theta) \cos^2 \theta} \quad \begin{cases} u = \cos \theta \\ du = -\sin \theta d\theta \end{cases} = -\int \frac{du}{(1-u^2)u^2} \quad \text{جزء$$

$$\frac{1}{(1-u^2)u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{1-u^2} = \frac{Au - Au^3 + B - Bu^2 + Cu^3 + Du^2}{(1-u^2)u^2} \rightarrow \begin{cases} C-A=0 \rightarrow A=C \rightarrow C=0 \\ A=0 \\ B=1 \\ -B+D=0 \rightarrow D=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{(1-u^2)u^2} = \int \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2} \right) du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| + C = -\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta - 1} \right| + C$$



$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \quad I = \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{\sqrt{1-x^2} - 1} \right| + C$$

$$\textcircled{19} I = \int \frac{x^4 + 2x^2}{x^3 - 1} dx \quad \xrightarrow{\text{جزء}} \frac{x^4 + 2x^2}{x^3 - 1} = x + \frac{2x^2 + x}{x^3 - 1} = x + \frac{2x^2 + x}{(x-1)(x^2+x+1)} \quad \text{جزء$$

$$\frac{2x^2 + x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx - Bx - C}{(x-1)(x^2+x+1)} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{2x^2 + x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \rightarrow I = \int \left( x + \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx$$

$$= \int x dx + \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \quad \text{I}_1 \quad \text{I}_2$$

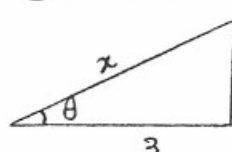
$$\textcircled{I}_1: \begin{cases} x^2 + x + 1 = u \\ (2x+1)dx = du \end{cases} \rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x^2+x+1| + C_1$$

$$\textcircled{I}_2: \begin{cases} x + \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{cases} \rightarrow \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C_2$$

$$\rightarrow I = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$(۲۰) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx \quad \begin{cases} x=3\sec\theta \\ dx=3\sec\theta\tan\theta d\theta \end{cases} = \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}{9\sec^2\theta} 3\sec\theta\tan\theta d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{(\sec^2\theta-1)}{\sec\theta} d\theta = \int \sec\theta d\theta - \int \cos\theta d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| - \sin\theta + C_1$$



$$= \ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C_1$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-9}| - \ln 3 - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C_1$$

$$\xrightarrow{-\ln 3 + C_1 = C} = \ln|x + \sqrt{x^2-9}| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$$

$$(۲۱) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad \begin{cases} x=t^6 \rightarrow dx=6t^5 dt \\ \sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2 \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt \xrightarrow{\text{قسمت}}$$

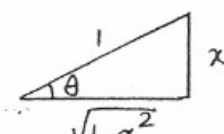
$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \rightarrow I = 6 \int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C$$

$$\rightarrow I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

$$(۲۲) I = \int x \sin^{-1} x dx \quad \begin{cases} \sin^{-1} x = u \\ x dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ x^{2/2} = v \end{cases} \rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad I_1$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{4} \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{یا } I_1: \begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta d\theta \end{cases} \rightarrow I_1 = \int \frac{\sin^2\theta \cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \sin^2\theta d\theta = \int \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta + C_1$$


$$\xrightarrow{\text{یا } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta} \rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$(۲۳) I = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x + 4\tan^2 x} dx = \int \frac{(1+\tan^2 x) dx}{\tan^2 x (\tan^2 x + 4)} \quad \begin{cases} \tan x = u \\ (1+\tan^2 x) dx = du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{du}{u^2(u^2+4)} \xrightarrow{\text{تجزیه}}$$

$$\frac{1}{u^2(u^2+4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{u^2+4} = \frac{Au^3+4Au+B u^2+4B+Cu^3+Du^2}{u^2(u^2+4)} \rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1/4 \\ C=0 \\ D=-1/4 \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int \frac{1/4}{u^2} du - \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{-1}{4u} - \frac{1}{8} \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{-1}{4\tan x} - \frac{1}{8} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C$$

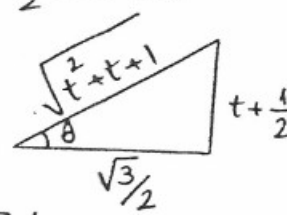


$$(27) I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} \times \frac{x^2}{x^2} = \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{1+x^3+(x^3)^2}} \quad \begin{cases} x^3 = u \\ 3x^2 dx = du \rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u\sqrt{1+u+u^2}} \quad \begin{cases} u = \frac{1}{t} \\ du = -\frac{dt}{t^2} \end{cases} \rightarrow I = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 \times \frac{1}{t} \times \sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{t^2+t+1}{t^2}}}$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} \quad \begin{cases} t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \rightarrow I = -\frac{1}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)}} = -\frac{1}{3} \int \sec \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_1$$


 $\begin{cases} \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{\sqrt{3}/2} \\ \tan \theta = \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} \end{cases}$

$$\rightarrow I = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{t+\frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right| + C_1 \rightarrow I = -\frac{1}{3} \ln \left| t+\frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1} \right| + \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + C_1$$

$$\rightarrow I = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} \right| + C = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^3} + 1} \right| + C$$

$$(28) I = \int \frac{dx}{x(x^{n-1})} \quad \begin{cases} x^{n-1} = t \rightarrow x^n = t+1 \\ nx^{n-1} dx = dt \rightarrow \frac{nx^n}{x} dx = dt \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{n(t+1)} \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int \frac{dt}{nt(t+1)} = \frac{1}{n} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{n} (\ln t - \ln(t+1)) + C = \frac{1}{n} \ln \frac{t}{t+1} + C = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x^n-1}{x^n} \right) + C$$

$$(29) I = \int \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2 dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} dx = \int \left( 1 - \frac{4x}{x^2+2x+1} \right) dx = \int dx - 2 \int \frac{2x dx}{x^2+2x+1} \quad I_1$$

$$\text{or } I_1: \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx - \int \frac{2dx}{(x+1)^2} = \ln |x^2+2x+1| + \frac{2}{x+1} + C_1$$

$$\rightarrow I = x - 2 \ln |x^2+2x+1| - \frac{4}{x+1} + C$$

$$(30) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(\cos^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \csc^2 x dx - 2 \int dx + \int \sin^2 x dx = -\cot x - 2x + \frac{1}{2} \int (1-\cos 2x) dx = -\left( \cot x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{2} x \right) + C$$

نکته: در مواردی که با آنکه ال جایی به صورت  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  در مبدی که  $m$  و  $n$  اعداد گوی هستند  $m+n$  زوج است

از تغییر متغیر  $\tan x = t$  استفاده می نمایم.

$$m+n = -\frac{11}{3} - \frac{1}{3} = -4 \text{ زوج} \rightarrow \begin{cases} t = \tan x \rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

حرفه ایجاد

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}} &= \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt[3]{\tan^{11} x}} = \int \frac{(1+t^2) dt}{\sqrt[3]{t^{11}}} = \int (t^{-11/3} + t^{-5/3}) dt \\ &= -\frac{3}{8} t^{-8/3} - \frac{3}{2} t^{-2/3} + C = \frac{-3}{8 \sqrt[3]{\tan^8 x}} - \frac{3}{2 \sqrt[3]{\tan^2 x}} + C \end{aligned}$$

(۳۲)  $I = \int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}} dx = \int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}} \times \frac{\sec x}{\sec x} dx = \int \frac{\tan x \sec x}{(\sec x)^{3/2}} dx$   $\begin{cases} \sec x = t \\ \sec x \tan x dx = dt \end{cases}$

$$\rightarrow I = \int \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{t^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C = \frac{-2}{\sqrt{t}} + C = \frac{-2}{\sqrt{\sec x}} + C$$

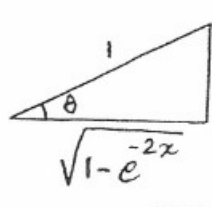
(۳۱)  $I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx = \int \frac{\sin x \sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx = \int \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{(\cos x)^{1/3}} dx$

$$= \int \frac{\sin x dx}{(\cos x)^{1/3}} - \int \sin x \cos^{5/3} x dx \quad \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{cases} \rightarrow I = -\int \frac{du}{u^{1/3}} + \int u^{5/3} du$$

$$\rightarrow I = \frac{-u^{-1/3+1}}{-1/3+1} + \frac{u^{5/3+1}}{5/3+1} + C = \frac{-3}{2} \sqrt[3]{u^2} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{u^8} + C = \frac{-3}{2} \sqrt[3]{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{\cos^8 x} + C$$

(۳۴)  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} \quad \begin{cases} e^{-x} = \sin \theta \\ -e^{-x} dx = \cos \theta d\theta \rightarrow dx = \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \end{cases}$

$$\rightarrow I = -\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta = -\int \csc \theta d\theta = \ln |\csc \theta + \cot \theta| + C$$



$$\begin{cases} \csc \theta = \frac{1}{e^{-x}} \\ \cot \theta = \frac{\sqrt{1-e^{-2x}}}{e^{-x}} \end{cases} \rightarrow I = \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}{e^{-x}} \right| + C$$

(b) انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

$$\textcircled{1} I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^4 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} \quad \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$\text{مثال: } \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x \end{cases} \rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4(\frac{\pi}{2}-x) dx}{\cos^4(\frac{\pi}{2}-x) + \sin^4(\frac{\pi}{2}-x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = I$$

$$\text{چون: } \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \rightarrow \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 1 \xrightarrow{\int_0^{\pi/2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\pi/2} 1 dx \Rightarrow I + I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{2} I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = I_1 + I_2$$

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx \begin{cases} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{cases} \rightarrow I_2 = - \int_{\pi/2}^0 \frac{(\pi-t) \sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi-t) \sin t}{1+\cos^2 t} dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt \rightarrow I = I_1 + I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t} - \int_0^{\pi/2} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt$$

$$\rightarrow I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t} \begin{cases} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \\ t=0 \rightarrow u=1 \\ t=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=0 \end{cases} \rightarrow I = -\pi \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \rightarrow I = \pi \tan^{-1} u \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{v} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} dx = - \int_0^{\pi/4} \frac{-2 \sin 2x \cos 2x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx \quad \frac{\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2}{\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2} \\
 \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = u \\ -2 \times 2 \sin 2x \cos 2x dx = du \end{cases} &\rightarrow - \int_0^{\pi/4} \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln\left|1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x\right| \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= -\ln \frac{1}{2} = \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{f} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx &\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{1/2}}{(\sin x)^{1/2} + (\cos x)^{1/2}} dx \quad \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \\
 \rightarrow I &= \int_0^{\pi/2} \frac{[\sin(\frac{\pi}{2}-x)]^{1/2}}{[\sin(\frac{\pi}{2}-x)]^{1/2} + [\cos(\frac{\pi}{2}-x)]^{1/2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{1/2}}{(\cos x)^{1/2} + (\sin x)^{1/2}} dx \\
 \text{Sol: } \int_0^{\pi/2} dx &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{1/2} + (\cos x)^{1/2}}{(\sin x)^{1/2} + (\cos x)^{1/2}} dx = I + I = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{g} I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{(\sqrt{e^x})^2 - 1} dx$$

$$\begin{cases} \sqrt{e^x} = e^{x/2} = \sec \theta \rightarrow \frac{1}{2} e^{x/2} dx = \sec \theta \tan \theta d\theta \rightarrow dx = \frac{2 \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec \theta} \rightarrow dx = 2 \tan \theta d\theta \\ x=0 \rightarrow \sec \theta = 1 \rightarrow \theta=0 \\ x=\ln 2 \rightarrow \sec \theta = \sqrt{e^{\ln 2}} = \sqrt{2} \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 \theta - 1} \tan \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} (\tan^2 \theta + 1 - 1) d\theta \\
 &= (2 \tan \theta - 2\theta) \Big|_0^{\pi/4} = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}
 \end{aligned}$$

حسن پور

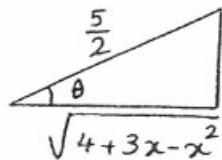
(d) انتگرال های نامعین زیر را بیابید.

$$\textcircled{1} I = \int \frac{5x+2}{\sqrt{4+3x-x^2}} dx = \int \frac{5x dx}{\sqrt{\frac{25}{4} - (x-\frac{3}{2})^2}} + \int \frac{2 dx}{\sqrt{\frac{25}{4} - (x-\frac{3}{2})^2}}$$

$$4+3x-x^2 = -(x^2-3x-4 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) = -\left[(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}\right] = \frac{25}{4} - (x-\frac{3}{2})^2$$

$$\text{چون } I_1: \begin{cases} x-\frac{3}{2} = \frac{5}{2} \sin \theta \\ dx = \frac{5}{2} \cos \theta d\theta \end{cases} \rightarrow I_1 = \frac{25}{2} \int \frac{(\frac{5}{2} \sin \theta + \frac{3}{2}) \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{25}{4} (1-\sin^2 \theta)}} = 5 \int (\frac{5}{2} \sin \theta + \frac{3}{2}) d\theta$$

$$= -\frac{25}{2} \cos \theta + \frac{15}{2} \theta + C$$



$$I_1 = -\frac{25}{2} \times \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{\frac{5}{2}} + \frac{15}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} \right) + C_1$$

$$\rightarrow I_1 = -5 \sqrt{4+3x-x^2} + \frac{15}{2} \left( \frac{2x-3}{5} \right) + C_1$$

$$I_2 = 2 \int \frac{\frac{5}{2} \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{25}{4} (1-\sin^2 \theta)}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} \int d\theta = 2\theta + C_2 = 2 \sin^{-1} \left( \frac{2x-3}{5} \right) + C_2$$

$$\rightarrow I = -5 \sqrt{4+3x-x^2} + \frac{19}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2x-3}{5} \right) + C$$

$$\textcircled{2} I = \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x} (1+\ln x)} \quad \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{du}{\sqrt{u} (1+u)} = \int \frac{du}{\sqrt{u} (1+(\sqrt{u})^2)} \quad \begin{cases} \sqrt{u} = t \\ \frac{du}{2\sqrt{u}} = dt \end{cases}$$

$$\rightarrow I = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \tan^{-1} t + C = 2 \tan^{-1} \sqrt{u} + C = 2 \tan^{-1} \sqrt{\ln x} + C$$

$$\textcircled{4} I = \int e^{\sin^{-1} x} dx \quad \begin{cases} \sin^{-1} x = t \rightarrow x = \sin t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \rightarrow dx = \sqrt{1-\sin^2 t} dt = \cos t dt \end{cases} \rightarrow I = \int e^t \cos t dt$$

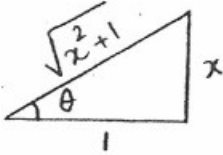
$$\begin{cases} e^t = u \\ \cos t dt = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^t dt = du \\ \sin t = v \end{cases} \rightarrow I = e^t \sin t - \int \sin t e^t dt \quad \begin{cases} e^t = u \\ \sin t dt = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^t dt = du \\ -\cos t = v \end{cases}$$

$$\rightarrow I = e^t \sin t - \left( -\cos t e^t + \int \cos t e^t dt \right) \rightarrow 2I = 2 \int e^t \cos t dt = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$\rightarrow I = \frac{e^{\sin^{-1} x}}{2} (x + \sqrt{1-x^2}) + C$$

$$\textcircled{v} I = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} \quad \begin{cases} x = \tan \theta \\ dx = \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta}{(1+\tan^2 \theta)^2} = \int \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} d\theta = \int \sin^2 \theta d\theta = \int \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int d\theta - \frac{1}{2} \int \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + C$$


$$\rightarrow I = \frac{1}{2} \tan^{-1} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

$$\textcircled{\wedge} I = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = du \\ \frac{-1}{2(1+x^2)} = v \end{cases} \rightarrow I = -\frac{1}{2} \ln x \left[ \frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad I_1$$

$$\textcircled{p} I_1: \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \rightarrow I_1 = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C_1$$

$$\rightarrow I = -\frac{1}{2} \ln x \left[ \frac{1}{1+x^2} \right] + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\textcircled{q} I = \int \cos^2(\sqrt{x}) dx \quad \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \rightarrow dx = 2t dt \end{cases} \rightarrow I = 2 \int t \cos^2 t dt = 2 \int \frac{t(1+\cos 2t)}{2} dt$$

$$\rightarrow I = \int t dt + \int t \cos 2t dt \quad I_1$$

$u = t$	$\cos 2t dt = dv$
1	$\frac{1}{2} \sin 2t$
0	$-\frac{1}{4} \cos 2t$

$$\rightarrow I_1 = \frac{t}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t$$

$$\rightarrow I = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} \sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2\sqrt{x} + C$$

$$\textcircled{10} I = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx \quad \begin{cases} x e^x = u \\ \frac{dx}{(1+x)^2} = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1+x) e^x = du \\ \frac{-1}{1+x} = v \end{cases} \rightarrow I = -\frac{x e^x}{1+x} + \int e^x dx$$

$$\rightarrow I = -\frac{x e^x}{1+x} + e^x + C = e^x \left( \frac{-x}{1+x} + 1 \right) + C = \frac{e^x}{1+x} + C$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{17} \int \frac{\text{ArcSin} e^x}{e^x} dx & \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{t} \end{cases} \rightarrow \int \frac{\text{ArcSint}}{t^2} dt \begin{cases} \text{ArcSint} = u \rightarrow t = \text{Sin} u \\ dt = \text{Cos} u du \end{cases} \\
 &= \int \frac{u \text{Cos} u}{\text{Sin}^2 u} du \\
 & \begin{array}{c} u \\ \text{Cos} u \\ \text{Sin}^2 u \\ -1 \\ \text{Sin} u \\ -\ln|\text{Cos} u - \text{Sin} u| \end{array} \quad \begin{aligned} &= -\frac{u}{\text{Sin} u} + \ln|\text{Cos} u - \text{Sin} u| + C \\ &= -\frac{\text{Sin}^{-1} t}{t} + \ln\left|\frac{1}{t} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + C \end{aligned} \\
 & \begin{cases} \text{Cos} u = \frac{1}{\text{Sin} u} = \frac{1}{t} \\ \text{Sin} u = \frac{\text{Cos} u}{\text{Sin} u} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases} \rightarrow -\frac{\text{Sin}^{-1} x}{e^x} + \ln\left|\frac{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}}{e^x}\right| + C
 \end{aligned}$$

(e) اگر داشته باشیم  $\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  مطلوب است مقدار :

$$\begin{aligned}
 \text{الف) } \int_0^{\infty} \frac{\text{Sin} x^2}{x} dx & \begin{cases} x^2 = t \rightarrow x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{cases} \begin{cases} x = \infty \rightarrow t = \infty \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases} \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\text{Sint}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{Sint} dt}{t} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

ب)  $\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}^2 x}{x^2} dx$  جزء به جزء  $\begin{cases} \text{Sin}^2 x = u \\ \frac{dx}{x^2} = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \text{Sin} x \text{Cos} x dx = du \rightarrow \text{Sin} 2x dx = du \\ \frac{-1}{x} = v \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}^2 x}{x^2} dx = \left. -\frac{\text{Sin}^2 x}{x} \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\text{Sin} 2x}{x} dx = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

در I:  $\begin{cases} 2x = t \\ dx = \frac{dt}{2} \end{cases} \rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sint}}{t/2} \frac{dt}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sint}}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Sin}^2 x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{Sin}^2 x \stackrel{\text{ل‌ه‌سپ}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$



(c) حدیابی یا دگرایی انتگرال حای مجازی زیر را بررسی کنید۔

$$۲) \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{e^x} \quad \ln x < x \rightarrow \frac{\ln x}{e^x} < \frac{x}{e^x}$$

$$\frac{\text{آزمین}}{\text{قالب}} \int_1^{\infty} \frac{x dx}{e^x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a e^{-x} x dx \xrightarrow{\text{جزء جزء}} \lim_{a \rightarrow \infty} (-x e^{-x} - e^{-x}) \Big|_1^a = 0 - 0 - (-e^{-1} - e^{-1}) = \frac{2}{e} \rightarrow \text{مکمل}$$

$$\text{و بجا : } \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x dx \text{ بجا *}$$

$$۵) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x^2 e^{-x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 e^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \right) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \text{مکمل}$$

$$I = \int x^2 e^{-x^2} dx \begin{cases} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{cases} \rightarrow I = \frac{1}{2} \int t e^{-t} dt \xrightarrow{\text{جزء جزء}} \frac{1}{2} e^{-t} (t + 1) = \frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1)$$

$$\text{بجا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{x^2}} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{x^2}} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = 0$$

$$۷) \int_2^{\infty} \frac{5 dx}{(2-x)^2} = \lim_{a \rightarrow 2} \int_a^{\infty} \frac{5 dx}{(2-x)^2} = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{5}{2-x} \Big|_a^{\infty} = \infty \quad \text{دگر است}$$

$$I = \int \frac{5 dx}{(2-x)^2} \begin{cases} 2-x = u \\ -dx = du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{-5 du}{u^2} = \frac{5}{u} + C = \frac{5}{2-x} + C$$

حسن پور



$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x \sin x}{e^{2x} + 1} \xrightarrow{\text{آزمن متايله}} \frac{e^x \sin x}{e^{2x} + 1} \left( \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \right) A$$

$$A \text{ ثابت گجراتي: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \tan^{-1} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \tan^{-1} e^x \Big|_0^b = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{جھرا}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx \text{ آزين متايله گجراتي.}$$

$$9) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\sin x}{x} dx \quad \begin{cases} \sin x dx = dv \\ \frac{1}{x} = u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cos x = v \\ -\frac{dx}{x^2} = du \end{cases}$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \left( -\frac{\cos x}{x} \right) \Big|_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx \right] = \cos 1 - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ گجراتي (طبق آزين متايله) پس } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \frac{\cos x}{x^2} \ll \frac{1}{x^2} \text{ گجراتي چون } \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx : *$$

$$⑦ \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad I_1 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1} \int_{1/2}^b \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx \xrightarrow{\text{آزين متايله}}$$

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \xrightarrow{\text{جھرا}} \lim_{b \rightarrow 1} \int_{1/2}^b \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \rightarrow 1} \left( -\sqrt{1-x^2} \right) \Big|_{1/2}^b = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{جھرا}$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \begin{cases} x = 1/t \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=1/2 \rightarrow t=2 \end{cases} \rightarrow I_2 = \int_{\infty}^2 \frac{-\ln t}{\sqrt{1-(1/t)^2}} \left( \frac{-dt}{t^2} \right) = -\int_2^{\infty} \frac{\ln t}{t \sqrt{t^2-1}} dt$$

$$\xrightarrow{\text{آزين متايله}} \int_2^{\infty} \frac{-\ln t}{t^2} dt \quad \begin{cases} \ln t = u \rightarrow t = e^u \\ \frac{dt}{t} = du \end{cases} \rightarrow -\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{u}{e^u} du = -\int_{\ln 2}^{\infty} u e^{-u} du \xrightarrow{\text{جزء بجزء}} \text{جھرا}$$

$$I \neq I_1 + I_2 = \text{جھرا} + \text{جھرا} = \text{جھرا}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

(d) مطلوب است محاسبی حد زیر با استفاده از بسط سری توانی

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{تفاضل}} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}}{x^2} \xrightarrow{\text{محدود}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^2}{2})}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

(e) مقدار انتگرال رده بردار با استفاده از سری توانی بیان کنید.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)$$

$$\rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{x^3}{(3)3!} + \frac{x^5}{(5)5!} - \frac{x^7}{(7)7!} + \dots \right) \Big|_a^1$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{(5)5!} - \frac{1}{(7)7!} + \dots$$

(f) بسط مکسول تابع  $f(x) = \int_0^x \sin(t^3) dt$  را بنویسید.

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin t^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin t^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

$$\xrightarrow[\text{تفاضل}]{\text{از طرفین انتگرال}} \int_0^x \sin t^3 dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{6n+3}}{(2n+1)!} dt$$

$$\rightarrow \int_0^x \sin(t^3) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)! (6n+4)}$$

(h) تابع  $f(x)$  را که به صورت زیر تعریف شده است را به شکل یک سری توانی درشته و جمله عمومی آن را تعیین کنید پس شعاع همگرایی

$$f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos^2 t}{t} dt$$

آن را بدست آورید.

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \rightarrow \cos 2t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!} \right] \xrightarrow[\text{میزبیم}]{\text{جمله اول سر را}} \frac{1}{2} \left[ 1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \right]$$

$$\rightarrow \cos^2 t = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{انبار}$$

$$\rightarrow 1 - \cos^2 t = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} t^{2n}}{(2n)!} \xrightarrow[\text{تقسیم}]{t} \frac{1 - \cos^2 t}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} t^{2n-1}}{(2n)!} \quad \text{انتگرال می گیریم}$$

$$\int_0^x \frac{1 - \cos^2 t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} t^{2n}}{(2n)! 2n} \Big|_0^x \rightarrow \int_0^x \frac{1 - \cos^2 t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)(2n)!}$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+2)!}}{\frac{2^{2n-1} x^{2n}}{2n(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{2n} \times 2 \times x^{2n} \times x^2}{(2n+2)(2n+2)(2n+1)2n!}}{\frac{2^{2n-1} \times 2 \times x^{2n}}{2n(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n^2} = 0$$

به ازای هر عدد حقیقی  $x$  همگراست.  $R = \infty$

9- اگر  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  باشد، با استفاده از آن بگویم که لایحه زیر را بدست آورید.

$$\textcircled{1} \frac{1}{(1-x)^3} \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

\* با تغییر دو جمله ای زیرین مثل قابل حل است.

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$$

$$\textcircled{2} \ln(1+x) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x)^n = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n) dx$$

$$\rightarrow \ln|x+1| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \rightarrow \ln|x+1| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

$$\textcircled{3} \arctan x \quad \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^n x^{2n}+\dots \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \rightarrow \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ج) بگویم که لایحه زیر را بدست آورید.

$$c) h(x) = x \tan^{-1} x, \quad |x| < 1 \quad f(x) = \tan^{-1} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{با } x \text{ ضرب}} \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^n x^{2n}+\dots \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال گیری}}$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{\text{طرفین در } x \text{ ضرب}}$$

$$x \tan^{-1} x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \rightarrow x \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} (-1)^n$$

(k) با فرض  $P > 1$ ، همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{P+5}} \quad n^{P+5} > n^P \rightarrow \frac{1}{n^{P+5}} < \frac{1}{n^P} \xrightarrow{\times \ln n} \frac{\ln n}{n^{P+5}} < \frac{\ln n}{n^P} \xrightarrow{P > 1 \text{ از لایب نیتز}} \text{مجموعه}$$

$$\xrightarrow{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln n}{n^{P+5}}}{\frac{\ln n}{n^P}} \right| = 1 > 0 \rightarrow \text{مجموعه}$$

(a) حد دنباله‌های زیر را بیابید.

$$1) a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{hop.}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2/n^3}{n^2-1}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n^2-1)n^3} = 0$$

$$r) b_n = \sqrt[n]{n^k} \quad (k \text{ ثابت}) \rightarrow b_n = n^{\frac{k}{n}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{k}{n}} = \infty^0 \quad \text{مجموعه}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{k}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{k}{n} \ln n} = e^0 = 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \ln n}{n} \xrightarrow{\text{hop.}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$$

$$r) C_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{مجموعه} \xrightarrow{\text{بجای}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - \frac{1}{e^n}}{e^n + \frac{1}{e^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} - 1}{e^{2n} + 1} \xrightarrow{\text{hop.}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{2n}}{2e^{2n}} = 1$$

$$f) d_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow A = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}} \rightarrow \ln A = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \dots + \ln \frac{n}{n} \right]$$

$$\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n} = \int_0^1 \ln x dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1 \rightarrow \ln A = -1 \rightarrow A = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

استفاد از رابطه استرلینگ :  $n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$  روش ریاضیاتی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n)^{1/n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-1} n}{n} = \frac{1}{e}$$

(in a cloud)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} = 1$

$$d) e_n = \frac{n!}{n^n} \xrightarrow[\text{استرلینگ}]{\text{رابطه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n}{n^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \xrightarrow[\text{قوت رازعورت}]{\text{لیمیت}} 0$$

$$4) f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty \times 0 \quad \xrightarrow[\text{هوپ}]{\text{قوت رازعورت}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1/n^2}{1 + 1/n}}{\frac{-2}{n^3}} = \infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty \quad \text{دوم} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} e = \infty$$

$$5) g_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[\text{هوپ}]{\text{قوت رازعورت}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{-1}{n^2}} = -1$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^L = e^{-1} = \frac{1}{e} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

(91)

حسن پور

(b) همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

①  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(1+\ln^4 n)}$   $f(x) = \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$  دنبانه  $(1, +\infty)$  نزولی، مثبت و یکنواخت است

آزمون  
انتگرال  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x dx}{x(1+\ln^4 x)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \tan^{-1}(\ln^2 x) \Big|_1^b = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \rightarrow$  همگرا

حل انتگرال بالا:  $\begin{cases} (\ln x)^2 = t \\ \frac{2 \ln x dx}{x} = dt \end{cases} \rightarrow \int \frac{\ln x dx}{x(1+\ln^4 x)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} t + C = \frac{1}{2} \tan^{-1}(\ln^2 x) + C$

②  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$   $\therefore$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$  واگرا

③  $\sum_{n=1}^{\infty} 6t^{-1}n$   $f(x) = 6t^{-1}x$  دنبانه  $(1, +\infty)$  نزولی، مثبت و یکنواخت است

آزمون  
انتگرال  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b 6t^{-1}x dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} 6t^{-1}x = u \\ dx = dv \end{cases} \xrightarrow{\text{جزء برد}} \frac{1}{1x}$   
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( x 6t^{-1} + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right) \Big|_1^b = \infty \rightarrow$  واگرایی

④  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 - 2n + 4}}{n^4 - 2}$   $a_n = \frac{\sqrt{n^5 - 2n + 4}}{n^4 - 2}$   $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sqrt{n^5 - 2n + 4}}{n^4 - 2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} \right| = 1 > 0 \rightarrow$  همگرایی

⑤  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$   $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow f'(x) < 0$  دنبانه  $(1, +\infty)$  مثبت، یکنواخت و نزولی است

آزمون  
انتگرال  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -e^{\ln x^{-1}} (\ln x + 1) \right]_1^b \xrightarrow{e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}} \lim_{b \rightarrow +\infty} - \left( \frac{\ln x + 1}{x} \right) \Big|_1^b = 1 \rightarrow$  همگرایی

$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \begin{cases} \ln x = u \rightarrow x = e^u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} = \int \frac{u du}{e^u} = \int e^{-u} u du$

$\begin{array}{c|c} u & e^{-u} \\ \hline 1 & + \\ & - \\ 0 & - \end{array} \begin{array}{l} e^{-u} \\ -e^{-u} \\ e^{-u} \end{array} = -u e^{-u} - e^{-u} + C = -e^{-\ln x} (\ln x + 1) + C$

④  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} n$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1} n = \frac{\pi}{2} \neq 0 \rightarrow$  واگرات

⑤  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0 \rightarrow$  شرط لازم برای همگرایی را دارد

$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$   $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\xrightarrow[\text{معی}]{\text{آزمون مقایسه}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 > 0 \rightarrow$  بر مبنای نظر واگرات  
 واگرا

⑧  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$   $\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) n^n}{(n+1)(n+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow$  همگرایی

⑨  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$   $a_n = \frac{\arctan n}{n}$   $b_n = \frac{1}{n}$  واگرا

$\xrightarrow[\text{معی}]{\text{آزمون مقایسه}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}} \right| = \frac{\pi}{2} > 0 \rightarrow$  پس بر مبنای واگرات

⑩  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$   $\xrightarrow[\text{مقارب}]{\text{آزمون سری}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = 0 \rightarrow$  پس همگرایی

تسن پور

⑪  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$   $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$   $f'(x) < 0$  نزولی و مثبت است

$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln x \Big|_2^b = \infty \rightarrow$  واگرات

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$  if:  $p > 1$   
 همگرایی



⑫  $\sum_{n=1}^{\infty} 6t^n(1)$  روش اول:  $6t(1) \approx 57.3 > 1$   $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n)$   $r > 1$  سری هندسی است

$\lim_{n \rightarrow \infty} (r^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (57.3)^n = \infty \rightarrow$  واگر است

روش دوم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6t^n(1)} = 6t(1) > 1 \rightarrow$  واگر است

⑬  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n(1)$   $\xrightarrow[\text{روش}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\tan^n(1)} = \tan(1) \approx 0.02 < 1 \rightarrow$  همگرا است

⑭  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} e^{-n}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} e^{-n} \neq 0 \rightarrow$  واگر است

⑮  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$   $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$   $b_n = \frac{1}{n}$   $\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}}{\frac{1}{n}} \right| = 1 > 0 \rightarrow$  واگر است

⑯  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi n!}$   $\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi (n+1)!}}{\frac{n^n}{\pi n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^n}{\pi n^n} \right| = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n$   
 $= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{\pi} \approx \frac{2.7}{3.14} < 1 \rightarrow$  سری مطلقاً همگرا  $\rightarrow$  واگر است

⑰  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$   $a_n = \frac{\ln n}{n}$   $\xrightarrow[\text{مقاربت}]{\text{آزمون سری}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \rightarrow$  سری همگرا است

$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}}$   $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right|_2^b = \infty \rightarrow$  واگرا  
 \* پس سری همگرا نیست

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} n \sinh \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sinh \frac{1}{n} = \infty \times 0 \text{ بی معنی} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \approx 1 \neq 0 \rightarrow \text{دگر است}$$

$$(20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1+(n+1)!}{(n+2)!}}{\frac{1+n!}{(n+1)!}} \right| \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)n!}{(n+2)(n+1)!}}{\frac{n!}{(n+1)!}} \right| = 1 \rightarrow \text{بی نتیجه}$$

$$\frac{1+n!}{(1+n)!} = \frac{1}{(1+n)!} + \frac{n!}{(1+n)!} = \frac{1}{(1+n)!} + \frac{1}{1+n} \quad \text{دگر + هکرا} \rightarrow \text{دگر است}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{آزمون مقایسه} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)n!} \right| = 0 \rightarrow \text{هکرا}$$

$$(21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2} \quad -1 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow \frac{-1}{1+n^2} \leq \frac{\sin n}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \quad \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2} \quad \text{هکرا (P=2, P=2)}$$

$$(22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right| = \frac{2}{e} \approx \frac{2}{2.7} < 1 \rightarrow \text{هکرا است}$$

$$(23) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{1}{n} \right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arctan \frac{1}{n} \right)^n = 0^\infty = 0 \rightarrow \text{شرط لازم برای هکرای را دارد}$$

$$\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \arctan \frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{1}{n} = 0 \rightarrow \text{هکرا است}$$

حسن پور

$$(24) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3} \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3} \quad \text{در بازه } [2, +\infty) \text{ یکنواخت و مثبت است} \quad \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{2(\ln x)^2} \right|_2^b = 0 + \frac{1}{2(\ln 2)^2} = \text{عدد} \rightarrow \text{هکرا است}$$

$$(۲۳) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sqrt[3]{n}} = 0 \rightarrow \text{شرط لازم برای همگرایی دارد} \quad f(x) = e^{-\sqrt[3]{x}} \quad f'(x) < 0$$

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} - \left( 3\sqrt[3]{x^2} e^{-\sqrt[3]{x}} + 6\sqrt[3]{x} e^{-\sqrt[3]{x}} + 6e^{-\sqrt[3]{x}} \right) \Big|_1^b = 0$$

در بازه  $(1, +\infty)$  یک مرتبه در نظر گرفته شد.

$$I = \int e^{-\sqrt[3]{x}} dx \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x} = t \rightarrow x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{cases} \rightarrow I = \int 3t^2 e^{-t} dt$$

$$\rightarrow I = -3t^2 e^{-t} - 6t e^{-t} - 6e^{-t} \rightarrow I = -3\sqrt[3]{x^2} e^{-\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x} e^{-\sqrt[3]{x}} - 6e^{-\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2} e^{-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/3} e^{-\sqrt[3]{x}} = \infty \times 0 \quad \text{هم} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2/3}}{e^{\sqrt[3]{x}}} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} x^{-1/3}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} e^{\sqrt[3]{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{x^{1/3}}{e^{\sqrt[3]{x}}} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\frac{1}{3} x^{-2/3}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} e^{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{\sqrt[3]{x}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} e^{-\sqrt[3]{x}} \stackrel{\text{همانند بالا}}{=} 0$$

$$(۲۴) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n e^n} \xrightarrow{\text{آزمون ریش}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^{1/n} = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow \text{همگرایی}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^{1/n} = 0 \quad \text{هم} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left( \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\ln n}{n} \right) \right)} \quad \lim L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{\ln n}{n} \right)}{n} \stackrel{\text{hop}}{=}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - \ln n}{n^2}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \ln n}{n \ln n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^L = e^0 = 1$$

$$(۲۹) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200 e^n}{n!} \xrightarrow{\text{آزمون ریش}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{200 e^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{200} e}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{e}{\infty} = 0 \rightarrow \text{همگرایی}$$

نکته: از آزمون ریش راحت تر حل می شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C} = 1$$

(۳۲)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$   $\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)n! (n+1)n!}{(2n+2)(2n+1)2n!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{4n^2} \right| = \frac{1}{4}$   
 ← مطابق "مقدار" پس همگراست.

(۳۵)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  روش لایبل:  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$   $\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون مقایسه}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow$  دایرا

و اگر است  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$   $\rightarrow$  همگراست  $\rightarrow$   $S_n = \sum_{k=1}^n [\sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$   $\rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$   $\rightarrow$  همگراست

(۳۶)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} + 2^n}{n^2 + e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{n^2 + e^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + e^n}$   $I_1: \frac{n^{100}}{n^2 + e^n} < \frac{n^{100}}{e^n} \rightarrow$  همگرا  $\rightarrow I_1$  همگراست

$\frac{n^{100}}{e^n}$   $\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^{100}}{e^n} \right|} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{100}} = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow$  همگرا

نکته:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^c} = 1$  (ثابت: c)

$I_2: \frac{2^n}{n^2 + e^n} < \frac{2^n}{e^n} \rightarrow$  همگرا  $\rightarrow I_2$  همگراست

$\frac{2^n}{e^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{e^n}} = \frac{2}{e} < 1 \rightarrow$  همگراست

همگرا + همگرا = همگرا  $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} + 2^n}{n^2 + e^n}$  همگراست

(۳۰)  $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{n+4}{3n + \ln n}$   $3n + \ln n < 3n + n = 4n \rightarrow \frac{1}{3n + \ln n} > \frac{1}{4n} \xrightarrow{\times (n+4)} \frac{n+4}{3n + \ln n} > \frac{n+4}{4n}$   $\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{طرح آزمون}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{4n} = \frac{1}{4} \neq 0 \rightarrow$  دایرا

اثبات دایرا:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{4n} = \frac{1}{4} \neq 0 \rightarrow$  دایرا

تجربیه رشد:  $n^n > n! > \alpha^n > n^\alpha > \ln n$   $\alpha > 1$   $\alpha > 0$

(c) شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری های توانی زیر را تعیین کنید. (همگرایی یا نامرگاری در نقاط انتهایی بررسی شود)

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2+n-1} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n^2+n-1}} \xrightarrow[\frac{e^x}{e^x}]{\text{مقایسه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\sqrt[n]{n^2+n-1}} = e^x < 1$$

$$e^x < 1 \xrightarrow{\text{لگاریتم}} x < \ln 1 \rightarrow x < 0 \quad \text{if } x=0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1} \xrightarrow[\text{همگرایی}]{\text{مقایسه با } \frac{1}{n^2}} \text{سری همگرایی}$$

بازه همگرایی:  $(-\infty, 0]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+n-1)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n^2+n-1)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2+n-1)}{n} \xrightarrow{\text{hosp}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+n-1} = 0$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|}{2 \sqrt[n]{n+3}} = \frac{|x-1|}{2} < 1$$

$$|x-1| < 2 \rightarrow -2 < x-1 < 2 \rightarrow -1 < x < 3$$

$$\text{if } x=-1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)} \xrightarrow[\text{مقارب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} = 0 \quad \text{همگرایی شرطی}$$

$$\text{if } x=3 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} \xrightarrow[\frac{1}{n}]{\text{آزمون مقایسه}} \text{نامرگاری} \quad \text{بازه همگرایی: } [-1, 3) \quad R=2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n+3)} \xrightarrow{\text{hosp}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{1}{n+3}}{1}} = e^0 = 1$$

$$\textcircled{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^n}{n(\ln n)^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n(\ln n)^2}} = |x-1| < 1 \rightarrow 0 < x < 2$$

$$\text{if } x=0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{مقارب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = 0 \rightarrow \text{همگرایی}$$

$$\text{if } x=2 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = 0 + \frac{1}{\ln 2} \rightarrow \text{همگرایی}$$

$$\text{بازه همگرایی: } [0, 2] \quad R=1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\ln n)^2]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln[n(\ln n)^2]}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[n(\ln n)^2]}{n} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2 + 2 \ln n}{n(\ln n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n \ln n} \right) = 0$$

$$\textcircled{f} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x-3)^n}{2^n} \xrightarrow{\text{ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x-3)^n}{2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|}{2 \sqrt[n]{2}} = \frac{|x-3|}{2} < 1$$

$$\rightarrow |x-3| < 2 \rightarrow 1 < x < 5 \quad \text{if } x=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} (-1)^n \xrightarrow{\text{قانون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{ناگرا}$$

$$\text{if } x=5 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} \neq 0 \rightarrow \text{ناگرا} \quad \text{بازه همگرایی: } (1, 5) \quad R=2$$

$$\textcircled{g} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(\ln n)^3} \quad \text{مشابه مثال ۳ حل می شود}$$

$$\textcircled{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2+2}{3} \right)^n \xrightarrow{\text{ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left( \frac{x^2+2}{3} \right)^n \right|} = \frac{x^2+2}{3} < 1 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

$$\text{if } x = \pm 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1)^n \rightarrow \text{ناگرا} \quad \text{بازه همگرایی: } (-1, 1) \quad R=1$$

$$\textcircled{v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n(n+2)} \xrightarrow{\text{ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-5)^n}{3^n(n+2)} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-5|}{3 \sqrt[n]{n+2}} = \frac{|x-5|}{3} < 1$$

$$\rightarrow |x-5| < 3 \rightarrow -3 < x-5 < 3 \rightarrow 2 < x < 8$$

$$\text{if } x=2 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \xrightarrow{\text{قانون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 \rightarrow \text{همگرایی شرطی}$$

$$\text{if } x=8 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} \xrightarrow{\text{ریشه}} \frac{1}{n} \rightarrow \text{ناگرا} \quad \text{بازه همگرایی: } [2, 8) \quad R=3$$

$$\textcircled{A} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n e^n} (x-1)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln n (x-1)^n}{n e^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|}{e} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n}} = \frac{|x-1|}{e} < 1 \rightarrow |x-1| < e$$

$$\rightarrow 1-e < x < 1+e \quad \text{if: } x=1+e \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{انگشت}]{\text{طبق آزمون}} \text{دائراست}$$

$$\text{if: } x=1-e \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{طبق آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \rightarrow \text{مگر این شرط}$$

$$\text{بازه همگرایی: } [1-e, 1+e) \quad R=e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^{1/n} = 1 \quad \text{حل در قسمت ۲۶ بحث سری}$$

$$\textcircled{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{2n} + n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^{2n}}{3^{2n} + n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{3^{2n} + n}} = \frac{x^2}{9} < 1 \rightarrow x^2 < 9 \rightarrow -3 < x < 3$$

$$x = \pm 3 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{9^n + n} \quad \text{ریشه لایبل: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{9^n + n} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{دائراست}$$

$$\text{ریشه لایبل: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{9^n + n} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{دائراست} \quad \text{و اگر: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{9^n + n} = 1 > 0 \rightarrow \text{دائراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9^n}{9^n + n}}{\frac{9^n}{9^n}} = 1 > 0 \rightarrow \text{دائراست} \quad \text{بازه همگرایی: } (-3, 3) \quad R=3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{2n} + n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(3^{2n} + n)} = e^{\ln 9} = 9 \quad \text{نکته: } 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^{2n} + n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(9^n + n)}{n} \stackrel{\text{هوپ}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9^n \ln 9 + 1}{9^n + n}}{1} = \ln 9$$

$$\textcircled{10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n + e^{-n}}{n} x^n \quad \frac{e^n + e^{-n}}{n} = \frac{e^{2n} + 1}{n e^n}$$

$$\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{e^n + e^{-n}}{n} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n} + 1}{n e^n} x^n} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e^{2n}}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{e^n}} |x| = \frac{e^2}{e} |x| < 1$$

$$\rightarrow |x| < \frac{1}{e} \rightarrow \frac{-1}{e} < x < \frac{1}{e}$$

$$\text{if } x = \frac{-1}{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} + 1}{n e^{2n}} \xrightarrow[\text{مقابلہ}]{\text{آزمائیں سری}} \frac{e^{2n} + 1}{n e^{2n}} > \frac{e^{2n}}{n e^{2n}} = \frac{1}{n} \rightarrow \text{بے مگرارت}$$

$$\text{if } x = \frac{1}{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{2n} + 1)}{n e^{2n}} \xrightarrow[\text{مگرارتی شرط است}]{\text{آزمائیں سری متناوب}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} + 1}{n e^{2n}} = 0 \quad \text{بازہ مگرارتی: } \left(\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right] \quad R = \frac{1}{e}$$

$$(11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمائیں}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{(2x-1)^n}{n^2+1}} \right| = |2x-1| < 1 \rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \rightarrow 0 < x < 1$$

$$\text{if } x=0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow[\text{مقابلہ}]{\text{آزمائیں سری}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0 \rightarrow \text{مگرارت}$$

$$\text{if } x=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad (p=2) \text{ سری } P \rightarrow \text{مگرارت} \quad \text{بازہ مگرارتی: } [0, 1] \quad R = \frac{1}{2}$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} (x-2)^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمائیں}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2)} (x-2)^{n+1}}{\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} (x-2)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n)(2n+1)(x-2)(x-2)^n}{(2n-1)(2n+2)(x-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2n}{4n^2+2n-2} |x-2| = |x-2| < 1 \rightarrow 1 < x < 3$$

$$\text{if } x=1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} (-1)^n \xrightarrow[\text{مقابلہ}]{\text{آزمائیں سری}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \right| \neq 0 \rightarrow \text{دائرا}$$

$$\text{if } x=3 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \quad \lim a_n \neq 0 \rightarrow \text{دائرا} \quad \text{بازہ مگرارتی: } (1, 3) \quad R=1$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n} (x+1)^n$$

$$I_1 \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمائیں}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n}{n} (x+1)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x+1|}{\sqrt[n]{n}} = 3|x+1| < 1 \Rightarrow |x+1| < \frac{1}{3}$$

حسن پور



$$I_2 \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n 2^n}{n} (x+1)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x+1|}{\sqrt[n]{n}} = 2|x+1| < 1 \Rightarrow |x+1| < \frac{1}{2}$$

$$|x+1| < \frac{1}{3} \cap |x+1| < \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} |x+1| < \frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$$

$$\text{if } x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \text{دایره} + \text{دایره} = \text{دایره}$$

$$\text{if } x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \text{دایره} + \text{دایره} = \text{دایره}$$

$$\rightarrow \text{بازه همگرایی: } \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad R = \frac{1}{3}$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (x-1)^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1} (x-1)^{n+1}}{\frac{\ln n}{n} (x-1)^n} \right| = |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\text{if } x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n \xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \rightarrow \text{همگرایی}$$

$$\text{if } x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{اشتراک}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln x)^2 \Big|_1^b = \infty \rightarrow \text{دایره}$$

$$\text{بازه همگرایی: } [0, 2) \quad R=1$$

$$(15) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}} \right| = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\text{if } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0 \rightarrow \text{همگرایی}$$

$$\text{if } x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[\frac{1}{n^2}]{\text{آزمون ریشه}} \text{همگرایی} \quad \text{بازه همگرایی: } [-1, 1] \quad R=1$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x| = e|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e} \quad \text{if } x = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \neq 0$$

همگرایی

if  $x = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \neq 0 \rightarrow$  دگر

بازه همگرایی:  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$   $R = \frac{1}{e}$

⑪  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n} \right| = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

if  $x = +1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n}\right)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \stackrel{x = \frac{i}{n}}{=} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \infty \rightarrow$  دگر

if  $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) (-1)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{همانند بالا}}{=} \infty \rightarrow$  دگر

بازه همگرایی:  $(-1, 1)$   $R = 1$

⑫  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{n^4} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{n^4} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x-3|}{\sqrt[n]{n^4}} = 2|x-3| < 1$

$\Rightarrow |x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

if  $x = \frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  (P=4) سری P  $\rightarrow$  همگرا

if  $x = \frac{7}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0 \rightarrow$  همگرا

بازه همگرایی:  $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$   $R = \frac{1}{2}$

⑬  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n e^{n^2} (x+e)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x+e| e^n = |x+e| \lim_{n \rightarrow \infty} e^n < 1$

این سری توانی تنها برای  $x = -e$  همگراست.

$$(۲۰) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln n}{e^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1) (x-1)^{n+1}}{e^{n+1}}}{\frac{\ln n (x-1)^n}{e^n}} \right| = \frac{1}{e} |x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < e \\ \Rightarrow 1-e < x < 1+e$$

$$\text{if } x=1-e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n \ln n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty \neq 0 \rightarrow \text{واگرا}$$

$$\text{if } x=1+e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \ln n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty \neq 0 \rightarrow \text{واگرا}$$

$$\text{بازه همگرایی: } (1-e, 1+e) \quad R=e$$

$$(۲۱) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{a^n + b^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} \begin{cases} \text{if } a > b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow -a < x < a \\ \text{if } a < b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b \Rightarrow |x| < b \Rightarrow -b < x < b \\ \text{if } a = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a = b \Rightarrow |x| < a \end{cases}$$

$$\text{if } x = \pm a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^n}{a^n + b^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{واگرا} \quad \text{بازه همگرایی: } (-a, a) \quad R=a$$

$$\text{if } x = \pm b \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm b)^n}{a^n + b^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{a^n + b^n} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{واگرا} \quad \text{بازه همگرایی: } (-b, b) \quad R=b$$

کاربرد های انتگرال گیری :

③ طول کمان خم  $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  را در بازه  $[2, 4]$  بیابید.

$$y = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1) \rightarrow y' = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}\right)^2} dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{(e^{2x} - 1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}} dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx \quad \begin{cases} e^{2x} = u \\ 2e^{2x} dx = du \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \rightarrow e^4 = u \\ x=4 \rightarrow e^8 = u \end{cases} \rightarrow \int_{e^4}^{e^8} \frac{du}{2(u-1)} + \frac{1}{2} \int_{e^4}^{e^8} \frac{du}{u(u-1)} \rightarrow I$$

$$= \left( \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln u + \frac{1}{2} \ln|u-1| \right) \Big|_{e^4}^{e^8} = \ln \frac{u-1}{\sqrt{u}} \Big|_{e^4}^{e^8} = \ln \frac{e^8-1}{e^4} - \ln \frac{e^4-1}{e^2} = \ln \frac{e^4+1}{e^2}$$

$$\text{و } I: \int \frac{du}{u(u-1)} \xrightarrow{\text{تجزیه}} -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u-1} = -\ln|u| + \ln|u-1| + C$$

$$e^8 - 1 = (e^4)^2 - 1^2 = (e^4 - 1)(e^4 + 1)$$

نتیجه:

$$y' = e^x$$

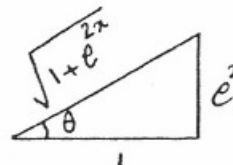
④ طول قوس منحنی تابع  $y = e^x$  را از نقطه  $A(0, 1)$  تا نقطه  $B(1, e)$  بیابید.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (e^x)^2} dx \quad \begin{cases} e^x = \tan \theta \\ e^x dx = \sec^2 \theta d\theta \rightarrow dx = \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta} = \int \frac{\sec^3 \theta d\theta}{\tan \theta} \xrightarrow{\text{فرد و تقسیم}} \int \frac{\sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta}{\tan^2 \theta} = \int \frac{\sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec^2 \theta - 1}$$

$$\begin{cases} \sec \theta = t \\ \sec \theta \tan \theta d\theta = dt \end{cases} \Rightarrow L = \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int dt + \int \frac{dt}{t^2 - 1} = t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}$$

$$= \sec \theta + \frac{1}{2} \ln \frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta + 1} = \sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1}$$



$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{وتر}}{\text{جانب مجاور}} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left( \sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{1 + e^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

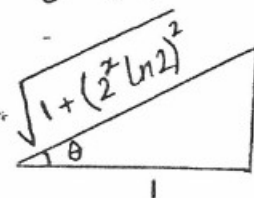
$$y' = 2^x \ln 2$$

⑦ ب) طول قوس منحنی تابع  $y = 2^x$  را از نقطه  $A(0,1)$  تا نقطه  $B(1,2)$  محاسبه کنید.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2} dx \quad 2^x \ln 2 = \tan \theta \rightarrow 2^x (\ln 2)^2 dx = \sec^2 \theta d\theta \rightarrow dx = \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta \ln 2}$$

$$L = \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{\sec^3 \theta d\theta}{\tan \theta} \times \frac{\tan \theta}{\tan \theta} \frac{\sec^3 \theta = \sec \theta \sec^2 \theta}{\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1} \frac{1}{\ln 2} \int \frac{\sec \theta \tan \theta (\sec^2 \theta)}{\sec^2 \theta - 1} d\theta$$

$$\begin{cases} \sec \theta = t \\ \sec \theta \tan \theta d\theta = dt \end{cases} \rightarrow L = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{\ln 2} \int dt + \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{\ln 2} t + \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{t-1}{t+1}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left( \sec \theta + \ln \frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta + 1} \right) \cdot \sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2} \quad 2^x \ln 2 \rightarrow \sec \theta = \sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2}$$


$$\Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2} dx = \frac{1}{\ln 2} \left[ \sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2} + \ln \frac{\sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2} - 1}{\sqrt{1 + (2^x \ln 2)^2} + 1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left[ \sqrt{1 + (2 \ln 2)^2} + \ln \frac{\sqrt{1 + (2 \ln 2)^2} - 1}{\sqrt{1 + (2 \ln 2)^2} + 1} - \sqrt{1 + (\ln 2)^2} - \ln \frac{\sqrt{1 + (\ln 2)^2} - 1}{\sqrt{1 + (\ln 2)^2} + 1} \right]$$

⑧ طول قوس منحنی  $y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt$  از  $x=0$  تا  $x=\pi/4$  را بیابید.

$$y = \int_0^{f(x)} h(t) dt \Rightarrow y' = f'(x) h(f(x)) \Rightarrow y' = \sqrt{\cos 2x}$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 2x} dx \xrightarrow{1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x} \int_0^{\pi/4} \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} |\cos x| dx \xrightarrow{\begin{matrix} 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x > 0 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2} \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$